

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2025
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2025
Proceedings of the Fifty-Fourth Spring Conference
of the Union of Bulgarian Mathematicians
Varna, March 31 – April 4, 2025

**CONIC SECTIONS IN GEOMETRIC LOCI PROBLEMS IN
MATHEMATICS PROFILED TRAINING**

Penka Rangelova¹, Marta Teofilova², Daniela Georgieva³

^{1,2}Faculty of Mathematics and Informatics, University of Plovdiv Paisii Hilendarski, Bulgaria,

³High School of Science and Mathematics “Acad. Boyan Petkanchin”, Haskovo, Bulgaria
emails: ¹rangelova_penka@abv.bg, ²marta@uni-plovdiv.bg, ³danielatsvetkova17@gmail.com

In this work, problems of finding geometric loci of points in the plane involving conic sections are considered. The problems presented are solved by means of analytical geometry and are suitable for knowledge deepening and skill improvement of high school students in the mathematics profiled training in exercise lessons on the topic of conic sections or in extracurricular forms of learning, as well as for university students studying analytical geometry.

Keywords: geometric locus, conic section, ellipse, hyperbola, parabola, circle

**КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ В ЗАДАЧИ ЗА ГЕОМЕТРИЧНИ
МЕСТА НА ТОЧКИ В ПРОФИЛИРАНАТА ПОДГОТОВКА
ПО МАТЕМАТИКА**

Пенка Рангелова¹, Марта Теофилова², Даниела Георгиева³

^{1,2}Факултет по математика и информатика, Пловдивски университет „Паисий
Хилендарски“, ³ПМГ „Акад. Боян Петканчин“, Хасково
emails: ¹rangelova_penka@abv.bg, ²marta@uni-plovdiv.bg, ³danielatsvetkova17@gmail.com

В настоящата работа са разгледани задачи за намиране на геометрични места на точки в равнината, в които участват конични сечения. За решаване на задачите са използвани средствата на аналитичната геометрия. Предложените задачи са подходящи за задълбочаване на знанията и усъвършенстване на уменията на учениците от профилираната подготовка по математика в уроците за упражнение върху темата за конични сечения или в извънкласни форми на работа, както и за студенти, изучаващи аналитична геометрия.

<https://doi.org/10.55630/mem.2025.54.180-191>

2020 Mathematics Subject Classification: 97G70, 97G40.

Ключови думи: геометрично място на точки, конично сечение, елипса, хипербола, парабола, окръжност

В прогимназиалния и първия гимназиален етап учениците се запознават с някои основни геометрични места на точки (ГМТ) в равнината. Те научават, че симетралата на дадена отсечка е ГМТ, които са равноотдалечени от двата края на отсечката; ъглополовящата на ъгъл е ГМТ от вътрешността на ъгъла, намиращи се на равни разстояния от раменете му; окръжността е ГМТ от равнината, които са на равни разстояния от дадена точка от същата равнина и др. В модула по аналитична геометрия в профилираната подготовка по математика в 11. клас учениците изучават аналитичното задаване на четири криви от втора степен като ГМТ – окръжност, елипса, хипербола и парабола. Тези криви носят общото наименование конични сечения, защото се получават при пресичането на ротационна конична повърхнина с равнина при различни ъгли между секущата равнина и оста на повърхнината. Понятието ГМТ е основно в аналитичната геометрия. Прави линии, криви линии и повърхнини могат да се дефинират като ГМТ и от това определение да се изведе аналитичното им задаване с уравнение. Следвайки този принцип, елипсата, хиперболата и параболата се дефинират като ГМТ в равнината, удовлетворяващи определени свойства, свързани с разстояния до две фиксирани точки или до фиксирана точка и права. От съответното дефиниционно условие на всяка от кривите, при подходящо избрана координатна система, се извежда нейното (канонично) уравнение. В уроците за упражнения и в задачите за самостоятелна работа към темите за криви от втора степен са поставени някои несложни задачи за намиране на ГМТ [12], които формират у учениците начални умения за решаване на задачи от този тип. Казаното дотук ни дава основание да разгледаме допълнителни задачи за намиране на ГМТ, свързани с конични сечения. Целта на настоящата работа е да представим система от задачи, които могат да бъдат използвани за задълбочаване на познанията на учениците за криви от втора степен и усъвършенстване на уменията им за прилагане на апарата на аналитичната геометрия. Задачите за намиране на ГМТ, поради нестандартния си характер, особено в случая, когато търсената фигура не е предварително известна от условието, са подходящи за прилагане на изследователския подход, чрез който учениците, приемайки активната роля на откриватели, могат сами да формулират хипотези и да ги проверяват с насоките и помощта на учителя. Включването на задачи с изследователски характер в обучителния процес провокира интереса на учениците и ги насърчава да развиват способностите си да творят и разсъждават, вместо да запаметяват наизуст. Задачите за ГМТ са свързани пряко с идеята за движение, тъй като в тях, наред с постоянни, участват и подвижни елементи, което разчупва рамките на „статичната“ геометрия и стимулира аналитичното мислене и въображението. И не на последно място, методът на ГМТ намира приложение при решаването на задачи за построение (примери за използване на ГМТ и конични сечения в построителни задачи с GeoGebra могат да бъдат намерени в [1]).

В [7, 11, 14] е дадено следното определение за ГМТ: *геометрично място на точки в равнината или пространството се нарича фигура, състояща се от всички точки, съответно в равнината или пространството, притежаващи дадено свойство, и не съдържаща други точки.*

При решаването на задачи за намиране на ГМТ може да се използва подходът с доказване на следните две твърдения (необходими и достатъчни условия) [7, 11]: 1) *Правя теорема. Нека точката M е произволна точка, притежаваща дадено свойство. Тогава M принадлежи на фигурата f* ; 2) *Обратна теорема. Нека точката M е произволна точка от фигурата f . Тогава M притежава даденото свойство.*

Важен първоначален етап при решаването на задачи за намиране на ГМТ е изборът на подходяща координатна система, относно която разглежданите криви и точки имат възможно най-удобни за работа уравнения, съответно координати. При такъв избор и уравнението на кривата, която е търсеното ГМТ, се получава във възможно най-кратък (опростен) запис. На учениците могат да бъдат дадени предварително няколко насочващи указания, формулирани като изводи от начина на извеждане на уравненията на елипсата, хиперболата и параболата, а именно: 1) Ако в условието на задачата са дадени две фиксирани точки, то едната координатна ос може да се получи от правата през тези точки, а другата – от симетралата на отсечката с краища двете точки; 2) Ако са дадени фиксирана точка и неминаваща през нея права, то правата през точката, която е перпендикулярна на дадената права, може да послужи за едната координатна ос. Другата ос може да се получи от дадената права или от права, успоредна на дадената, която е равноотдалечена от дадените точка и права.

Уравнението на кривата, която е търсеното ГМТ, трябва да бъде намерено във вид, в който участват само постоянните величини от условието на задачата. След получаването на уравнението, на учениците може да се предложи да визуализират изследваните обекти с динамичен геометричен софтуер като GeoGebra или Desmos, проследявайки как се изменя търсеното ГМТ при различни стойности на дадените величини, които играят ролята на параметри.

В работата ще използваме следните известни формули за конични сечения [2, 3, 12]:

1. *Елипса се нарича равнинна крива от втора степен, която е ГМТ, за които сборът от разстоянията до две дадени точки от равнината е постоянна величина, по-голяма от разстоянието между двете точки.* Ако относно декартова координатна система тези точки са $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, то за произволна точка $M(x; y)$ от елипсата е в сила условието $MF_1 + MF_2 = 2a$, където $a = \text{const} > c$. Точките F_1 и F_2 са фокусите на елипсата. В избраната координатна система уравнението на елипсата е

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \quad a > b > 0, \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

2. *Окръжност с център точката $C(x_0; y_0)$ и радиус $R > 0$ се задава с уравнението*

$$(2) \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Ако в уравнението (1) положим $a = b$, се получава уравнение на окръжност с център координатното начало и радиус a . Следователно окръжността е частен случай на елипса, за която двата фокуса съвпадат с центъра.

3. *Хипербола се нарича равнинна крива от втора степен, която е ГМТ, за които абсолютната стойност на разликата на разстоянията до две дадени точки от равнината е постоянна величина, по-малка от разстоянието между двете точки.* Ако относно декартова координатна система двете точки са $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, то

за произволна точка $M(x; y)$ от хиперболата е изпълнено $|MF_1 - MF_2| = 2a$, $a = \text{const} < c$. Точките F_1 и F_2 са фокусите на хиперболата. Уравнението на хиперболата е

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \quad a, b > 0, \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

4. Парабола се нарича равнинна крива от втора степен, която е ГМТ, намиращи се на равни разстояния от дадена точка (фокус) и дадена права, която не минава през точката (директриса). Ако изберем координатната система така, че фокусът F и директрисата g да се определят съответно от: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ и $g: x = -\frac{p}{2}$, то уравнението на параболата е

$$(4) \quad y^2 = 2px.$$

Правата $l: Ax + By + C = 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$, се допира до елипсата (1), хиперболата (3) или параболата (4), точно когато е изпълнено, съответно [3, 10]:

$$(5) \quad a^2A^2 + b^2B^2 = C^2 \text{ или } a^2A^2 - b^2B^2 = C^2, \text{ или } pB^2 = 2AC.$$

Задача 1. Намерете ГМТ в равнината, за които отношението от разстоянията до две дадени точки от същата равнина е постоянна величина k . [7, 10, 13]

Решение. Задачата може да се реши само чрез методите на елементарната геометрия (виж [7]), но ние ще разгледаме решение чрез методите на аналитичната геометрия. Прилагането на аналитичния подход ни дава възможност да достигнем до търсеното ГМТ по естествен начин, изхождайки от дадено свойство в условието на задачата. Избираме координатната система Oxy така, че O е средата на отсечката AB , Ox се определя от $\overrightarrow{AB}$, $Oy \perp AB$. Тогава $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $AB = 2a = \text{const} \neq 0$. Нека $M(x; y)$ е произволна точка от търсеното ГМТ. Тогава от условието на задачата имаме

$$(6) \quad \frac{AM}{BM} = k.$$

Пресмятаме $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $|\overrightarrow{BM}| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$. След заместване на дължините на векторите в (6) получаваме $(k^2 - 1)(x^2 + a^2 + y^2) = 2(k^2 + 1)ax$. При $k \neq 1$ последното равенство може да се приведе в нормално уравнение на окръжност след разделяне на двете му страни на $k^2 - 1$ и отделяне на точен квадрат за x . Така получаваме

$$(7) \quad \left(x - \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}a\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2a^2}{(k^2 - 1)^2}.$$

Ще намерим центъра и радиуса на окръжността (7). Нека точките P и Q лежат на Ox и делят съответно вътрешно и външно отсечката AB в отношение $k:1$. Следователно относно избраната координатна система $P\left(\frac{k-1}{k+1}a; 0\right)$ и $Q\left(\frac{k+1}{k-1}a; 0\right)$.

Тогава центърът на окръжността е средата на PQ е, а радиусът ѝ е равен на $\frac{PQ}{2}$.

Обратно, ако точката $M(x_0; y_0)$ е произволна точка от окръжността (7), то пресмятаме $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{4k^2ax_0}{k^2 - 1}$ и $\overrightarrow{BM}^2 = \frac{4ax_0}{k^2 - 1}$. Тогава $\left(\frac{AM}{BM}\right)^2 = k^2$, откъдето следва, че M удовлетворява условието на задачата. Така установихме, че търсеното ГМТ е

окръжност, определена от уравнението (7). Тази окръжност е известна като *окръжност на Аполоний* спрямо точките A и B и даденото отношение $k \neq 1$. Ако $k = 1$, то ГМТ е симетралата на отсечката AB .

Задачата може да бъде поставена и със следната формулировка: Дадена е отсечката AB и точка C , вътрешна за нея (C не е средата на AB). Намерете геометричното място на точките M , от които отсечките AC и BC се виждат под равни ъгли.

Задача 2. В равнината са дадени две различни точки A и B . а) Намерете ГМТ M в равнината, за които сборът на квадратите от разстоянията до A и B е постоянна величина b^2 . [10] б) Намерете ГМТ M в равнината, за които е изпълнено условието $k|AM|^2 + l|BM|^2 = b$, където $k, l, b \in \mathbb{R}$, $k + l \neq 0$. [15]

Решение. а) При означенията и координатната система от зад. 1 имаме $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = b^2$, откъдето достигахме до зависимостта

$$(8) \quad x^2 + y^2 = \frac{b^2 - 2a^2}{2}.$$

Обратно, ако $M(x_0; y_0)$ е произволна точка от множеството, определено с уравнението (8), то лесно се проверява, че $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = b^2$. Следователно търсеното ГМТ се задава с уравнението (8). Ако $b > a\sqrt{2}$, търсеното ГМТ е окръжност с център средата на AB , ако $b = a\sqrt{2}$, ГМТ е само една точка (средата на AB) и ако $b < a\sqrt{2}$, то търсеното ГМТ е празното множество.

б) Тази подточка се явява обобщение на а) и зад. 1. При същия избор на координатна система като в подточка а), от условието се достига до уравнението

$$(9) \quad \left(x - \frac{(l-k)a}{k+l}\right)^2 + y^2 = R,$$

където $R = \frac{b(k+l) - 4kla^2}{(k+l)^2}$. Отново се изследват три случая за знака на величината

R . Ако $R > 0$, то търсеното множество от точки M е окръжност с радиус $\sqrt{R}$ и център точката $C\left(\frac{(l-k)}{k+l}a; 0\right)$, която дели отсечката AB в отношение $AC : BC = l : k$. Ако $R = 0$, търсеното множество съдържа само точката C и ако $R < 0$, то е празното множество. С учениците може да се направи и коментар, че ако $k+l=0$, то ГМТ е права, перпендикулярна на AB . За облекчаване на доказателството в обратната посока, по аналогия с подточка а), центърът на координатната система може да се избере да бъде в точката C . Тогава $A(-a; 0)$ и $B\left(\frac{ka}{l}; 0\right)$. Относно тази

координатна система уравнението на търсеното ГМТ е $x^2 + y^2 = \frac{bl - k(k+l)a^2}{l(k+l)}$. На

учениците може да се предложи да съставят задача, която е обобщение на подточка б), и да се коментира с тях едно такова обобщение за произволен краен брой точки. Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ са дадени точки ($n \geq 2$) от една равнина, $k_1, k_2, \dots, k_n$ и b са дадени реални числа, такива че $k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$. Да се докаже, че множеството от точките M в същата равнина, за които е в сила условието

$$(10) \quad k_1|A_1M|^2 + k_2|A_2M|^2 + \dots + k_n|A_nM|^2 = b,$$

е окръжност, точка или празното множество [15]. Доказателството може да се проведе по следния начин. Нека относно декартова координатна система точките $A_i(x_i; y_i)$, където $i = 1, 2, \dots, n$. Тогава от (10) следва, че множеството на точките M се определя от уравнението

$$(11) \quad A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

където $A = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $B = -2(k_1x_1 + \dots + k_nx_n)$, $C = -2(k_1y_1 + \dots + k_ny_n)$, $D = k_1(x_1^2 + y_1^2) + \dots + k_n(x_n^2 + y_n^2) - b$. По аналогия с 6), уравнението (11) може да задава окръжност, да се удовлетворява само от една точка или да не се удовлетворява от никои точки с координати реални числа.

Задача 3. В равнината са дадени окръжност и точка C вътрешна за окръжността, различна от центъра. Намерете ГМТ на пресечните точки на допирателните, построени в краищата на всевъзможните хорди през C . [15]

Решение. В някои задачи за ГМТ използването на векторния апарат е по-удачен избор в сравнение с използването на координати и уравнения от гледна точка на облекчаване на разсъжденията и опростяване на изчисленията (виж [8]). Чрез задачи като тази учениците могат да комбинират знанията си за линейни действия с вектори от 8. клас с новите знания за скалярно произведение и перпендикулярност на вектори.

Нека дадената окръжност има за център т. O и радиус r . Нека AB е произволна хорда на окръжността, минаваща през C , като $AC : BC = k : 1$, което е еквивалентно на

$$(12) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{k + 1}.$$

Нека допирателните към окръжността в точките A и B се пресичат в т. M . Тогава, тъй като $AM \perp OA$, $BM \perp OB$ и $OA = OB = r$, то чрез правилото за пресмятане на скалярно произведение на два вектора намираме

$$(13) \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = r^2.$$

Така от (12) получаваме

$$(14) \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM} = r^2.$$

Нека разглежданията ни са в декартова координатна система с начало центъра на окръжността. Ако т. $C(a; b)$ и $M(x; y)$, то условието (14) задава правата с общо уравнение

$$(15) \quad ax + by - r^2 = 0,$$

която е перпендикулярна на OC . Обратно, нека т. M е от правата (15), т.е. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OM} = r^2$, а MA и MB са допирателните към окръжността през M . Ще покажем, че т. C лежи на AB . Поради (13) имаме $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OM} = 0$. Оттук следва, че C лежи на $AB \perp OM$. Следователно правата (15) е търсеното ГМТ. Правата (15) се нарича *поляра* на точката C относно дадената окръжност, а C се нарича *полнос* на тази права. Полярите и релацията полярност на точка и права относно окръжност са дефинирани от Аполоний Пергски (262 – 190 пр. н. е.). От уравнението (15) се вижда, че полярата на точка от окръжността съвпада с допирателната в тази точка. Полярата на външна за окръжността точка е правата, съединяваща допирните точки на двете допирателни през нея, и отново се

задава с уравнението (15), ако външната точка има координати $(a; b)$. Това твърдение може да бъде оставено за самостоятелно доказване от учениците. По този начин, след като M лежи на полярата на C , то и C лежи на полярата на M (правата през A и B). Такива точки се наричат *полярно спрегнати*. Поляра на точка може да се дефинира относно произволно конично сечение по аналогичен начин.

Задача 4. Дадени са окръжностите $c_1 : x^2 + y^2 = b^2$ и $c_2 : x^2 + y^2 = a^2$, $b < a$. Произволен лъч с начало общия им център пресича окръжностите съответно в т. B и A . През т. B и A са построени прави, съответно успоредни на координатните оси Ox и Oy . Намерете геометричното място на пресечните точки M на тези прави. [6]

Решение. Нека разгледаме правите l , които съдържат лъчите през O . За тях можем да използваме декартово уравнение (в случаите, когато лъчът съвпада с положителната или с отрицателната посока на Oy , т. M съвпада с B). Тогава $l : y = kx$ и от системите с уравненията на окръжностите и правите l намираме координатите на пресечните точки, съответно $B\left(\frac{b}{\sqrt{k^2+1}}; \frac{bk}{\sqrt{k^2+1}}\right)$ и $A\left(\frac{a}{\sqrt{k^2+1}}; \frac{ak}{\sqrt{k^2+1}}\right)$.

Построяваме правите l_1 през B , успоредни на Ox , $l_1 : y = \frac{bk}{\sqrt{k^2+1}}$, и l_2 през A , успоредни на Oy , $l_2 : x = \frac{a}{\sqrt{k^2+1}}$. Пресечните им точки са $M\left(\frac{a}{\sqrt{k^2+1}}; \frac{bk}{\sqrt{k^2+1}}\right)$.

Тъй като в координатите на M участват постоянните величини a и b , на учениците може да се предложи да проверят дали тези точки лежат на елипса или хипербола с полуоси a и b . Наличието на сбор на квадрати в знаменателите ни насочва към проверка за елипса. Установява се, че $b^2\left(\frac{a}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 + a^2\left(\frac{bk}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2 = a^2b^2$.

Следователно, т. M лежи на елипсата с уравнение (1). Обратно, нека $M(x_0; y_0)$ е произволна точка от елипсата (1). Намираме координатите на пресечните точки B на правата през M , успоредна на Ox , с окръжността c_1 , и на пресечните точки A на правата през M , успоредна на Oy , с окръжността c_2 . Разглеждаме двойките точки A и B , които лежат в един и същи квадрант на Oxy , и установяваме, че правата AB минава през т. O .

Задача 5. Намерете геометричното място на петите на перпендикулярите, построени от центъра на елипса, към хордите, свързващи краищата на взаимно перпендикулярни диаметри. (Хорда на конично сечение е отсечка, свързваща две точки върху коничното сечение. Диаметър е хорда, минаваща през центъра на кривата.) [5]

Решение. Нека е дадена елипса с уравнение (1) с център O . Нека $l_1 : y = k_1x$ и $l_2 : y = k_2x$ са две взаимно перпендикулярни диаметъра. Тогава $k_1k_2 = -1$. Нека l_1 пресича елипсата в т. A и B , а l_2 пресича елипсата в т. C и D . Да разгледаме хордата AC , където $A\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k_1^2+b^2}}; \frac{k_1ab}{\sqrt{a^2k_1^2+b^2}}\right)$ и $C\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2k_2^2+b^2}}; \frac{k_2ab}{\sqrt{a^2k_2^2+b^2}}\right)$.

За хордата BD разсъжденията са аналогични. Намираме $\overrightarrow{AC} \parallel \vec{v}(m; n)$, където $m = \sqrt{a^2k_1^2+b^2} - \sqrt{a^2k_2^2+b^2}$, $n = k_2\sqrt{a^2k_1^2+b^2} - k_1\sqrt{a^2k_2^2+b^2}$. Тогава $AC : nx - my = ab(k_2 - k_1)$. Построяваме правата p през O , перпендикулярна на AC ,

$p: mx + ny = 0$, и намираме пресечната точка $M(x_0; y_0)$ на p и AC . Като вземем предвид перпендикулярността на l_1 и l_2 , опростяваме израза $m^2 + n^2 = (a^2 + b^2)(k_2 - k_1)^2$.

Намираме: $x_0 = \frac{abn}{(a^2 + b^2)(k_2 - k_1)}$, $y_0 = -\frac{abm}{(a^2 + b^2)(k_2 - k_1)}$. Горните изчисления ни дават идея да проверим хипотезата дали т. M лежи на окръжност. Затова пресмятаме израза $x_0^2 + y_0^2$. Така установяваме, че точката M лежи на окръжността

$$(16) \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

За перпендикулярните диаметри използвахме декартови уравнения. Осите Ox и Oy са една такава двойка диаметри, но Oy не може да се зададе с декартово уравнение. Затова изследваме допълнително случая за Ox и Oy . Установяваме, че петите на перпендикулярите през O към съответните хорди също лежат на окръжността (16).

Обратно, нека т. $M(x_0; y_0)$ е произволна от окръжността (16). Точката M лежи и на правата AC . Пресмятаме разстоянието от O до AC и установяваме, че е равно на радиуса на окръжността (16). Следователно $OM \perp AC$.

Задача 6. Намерете геометричното място на центровете на всевъзможните окръжности, които отсичат от две дадени взаимно перпендикулярни прави отсечки с дължини съответно $2a$ и $2b$. [5]

Решение. Избираме координатната система, така че двете взаимно перпендикулярни прави да съвпадат с двете координатни оси. Нека пресечните точки на окръжностите с Ox са $A(x_0; 0)$ и $B(x_0 + 2a; 0)$, а с Oy са $C(0; y_0)$ и $D(0; y_0 + 2b)$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Тогава търсените точки M , които са центрове на окръжности, съвпадат с пресечните точки на симетралите на хордите AB и CD и следователно имат координати $M(x_0 + a; y_0 + b)$. Освен това, поради $AM = CM$ получаваме $x_0(x_0 + 2a) = y_0(y_0 + 2b)$. Тези произведения участват в разликата на квадратите на координатите на точките M с противоположни знаци, което ни подсказва, че е удачно да пресметнем израза $(x_0 + a)^2 - (y_0 + b)^2$. Така установяваме, че координатите на точките M удовлетворяват уравнението

$$(17) \quad x^2 - y^2 = a^2 - b^2.$$

Обратно, нека $M(m; n)$ е произволна точка, удовлетворяваща уравнението (17). Ще покажем, че M е център на окръжност през точките A, B, C и D . Необходимо и достатъчно условие за това е $\overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{BM}^2 = \overrightarrow{CM}^2 = \overrightarrow{DM}^2$. От тук получаваме еквивалентната система от условия: $x_0 = m - a$, $y_0 = n - b$, $x_0^2 - 2mx_0 = y_0^2 - 2ny_0$. След заместване на x_0 и y_0 в третото уравнение се убеждаваме, че то е изпълнено поради (17).

Чрез следващата задача на учениците показваме, че търсеното ГМТ може да не е само една крива, а обединението на точките върху две (или повече) криви.

Задача 7. В равнината са дадени две точки $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $a = \text{const} > 0$. Разглеждат се всевъзможните двойки пресичащи се прави през A и B , такива че произведението на дължините на отсечките, които те отсичат от ординатната ос, е дадена положителна величина b^2 . Намерете геометричното място на пресечните точки на двойките прави. [9]

Решение. Правите през A и B пресичат Oy . Следователно за тях можем да използваме декартови уравнения. Нека те са съответно $l_1: y = k_1(x + a)$, $l_2: y =$

$k_2(x - a)$, $k_1 \neq k_2$.

Пресечните им точки $M(x_0; y_0)$ се определят като решенията на системата от уравненията на двете прави, откъдето $x_0 = \frac{(k_1 + k_2)a}{k_2 - k_1}$, $y_0 = \frac{2k_1k_2a}{k_2 - k_1}$. Нека $N = l_1 \cap Oy$ и $P = l_2 \cap Oy$. Тогава $N(0; k_1a)$, $P(0; -k_2a)$. От условието на задачата имаме $ON \cdot OP = b^2$, следователно $|k_1k_2| = \frac{b^2}{a^2}$. Предлагаме на учениците да намерят квадратите на x_0 и y_0 и да разгледат два случая за знака на k_1k_2 . Ако $k_1k_2 > 0$, то $k_1k_2 = \frac{b^2}{a^2}$. В този случай предлагаме на учениците да съобразят, че изразът $b^2x_0^2 - a^2y_0^2$ ще бъде равен на постоянна величина. Така те установяват, че $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. Следователно търсеното ГМТ е хипербола. Когато $k_1k_2 < 0$, то $k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$. Тук учениците пресмятат $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ и установяват, че търсеното ГМТ е елипса. В частност, ако $l_1 \perp l_2$, търсеното геометрично място е окръжност с радиус a .

Обратно, нека пресечните точки $M(x_0; y_0)$ на двойките прави l_1 и l_2 лежат на хиперболата с уравнение (3) или на елипсата с уравнение (1). След заместване на координатите на M в (3) и в (1) се установява, че $|k_1k_2| = \frac{b^2}{a^2}$, откъдето $ON \cdot OP = b^2$.

Задача 8. Дадени са права l и окръжност k с център C и радиус R , които се допират в точката A . Намерете множеството на центровете на окръжностите, които не минават през A и се допират до l и k . [10]

Решение. Нека началото на координатната система съвпада с т. A , а оста Ox се определя от правата AC , като е еднопосочна с $\overrightarrow{AC}$. Тогава $C(R; 0)$ и $l : x = 0$. Нека $M(x_0; y_0)$ е произволна точка от търсеното ГМТ, т.е. е център на окръжност k_1 с радиус r , допираща се до l и k . Тогава разстоянието $d(M, l) = |x_0| = x_0 = r$ ($x_0 > 0$ поради даденото в условието на задачата). Освен това $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x_0 - R)^2 + y_0^2} = R + r$. От последните две равенства получаваме $x_0 + R = \sqrt{(x_0 - R)^2 + y_0^2}$, откъдето достигаме до

$$(18) \quad y_0^2 = 4Rx_0.$$

Обратно, нека k_1 е произволна окръжност с център $M(x_0; y_0)$ и радиус r , като координатите на M удовлетворяват (18). Нека k_1 се допира до правата l . От $d(M, l) = x_0$ следва $x_0 = r$. От (18) имаме $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x_0 - R)^2 + y_0^2} = x_0 + R = r + R$, което показва, че k_1 се допира външно до k . Следователно търсеното ГМТ е параболата $y^2 = 4Rx$.

Задача 9. Намерете геометричното място на средите на хордите през фокуса на дадена параболата. [4]

Упътване. Търсеното ГМТ е параболата $y^2 = p(x - \frac{p}{2})$, чийто връх е фокусът на дадената параболата, а нейните фокус и директриса са съответно $(\frac{3p}{4}; 0)$ и $x = \frac{p}{4}$.

Задача 10. Намерете геометричното място на петите на перпендикулярите, построени от фокуса на дадена параболата към нейните допирателни. [4]

Упътване. Търсеното ГМТ е ординатната ос.

Задача 11. Прав ъгъл в равнината се върти, така че раменете му винаги се допират до дадена а) елипса; б) хипербола; в) парабола. Намерете уравнението на траекторията, която описва върхът на правия ъгъл при това въртене. [10]

Решение. а) Нека елипсата е определена с уравнението (1), а т. $M(x_0; y_0)$ е върхът на правия ъгъл. Тогава M е пресечната точка на две взаимно перпендикулярни прави l_1 и l_2 , съдържащи раменете на ъгъла:

$$(19) \quad l_1 : A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \quad l_2 : B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$

Съгласно първото равенство от (5), правите l_1 и l_2 са допирателни към елипсата, точно когато:

$$(20) \quad a^2 A^2 + b^2 B^2 = (Ax_0 + By_0)^2, \quad a^2 B^2 + b^2 A^2 = (Bx_0 - Ay_0)^2.$$

След събиране на двете равенства в (20), поради $A^2 + B^2 \neq 0$, достигахме до следната зависимост за координатите на M : $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$. Обратно, нека $M(x_0; y_0)$ е произволна точка, удовлетворяваща последното равенство. Нека l_1 е права през M , която се допира до елипсата, т.е. е изпълнено първото от равенствата (20). Тогава, ако l_2 е права през M , перпендикулярна на l_1 , то лесно се проверява, че е изпълнено и второто равенство от (20). Това показва, че l_2 също е допирателна към елипсата. Следователно търсената траектория на върховете на правите ъгли е окръжността $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

б) С аналогични разсъждения се достига до извода, че търсеното ГМТ се определя от уравнението $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$. Следователно, ако $a > b$, то е окръжност с център $O(0, 0)$ и радиус $R = \sqrt{a^2 - b^2}$; ако $a = b$, е точката $O(0, 0)$, а в случай, че $a < b$, е празното множество.

в) Използвайки конструкцията от а) и б) и третото равенство в (5), получаваме необходими и достатъчни условия за перпендикулярните прави l_1 и l_2 през M така, че да се допират до произволна парабола, зададена с уравнението (4)

$$(21) \quad pB^2 = -2A(Ax_0 + By_0), \quad pA^2 = 2B(Ay_0 - Bx_0).$$

Чрез събиране на равенствата (21) достигахме до зависимостта $x_0 = -\frac{p}{2}$. В обратната посока се доказва аналогично на подточка а).

Задача 12. Дадена е: а) елипса; б) хипербола. Намерете геометричното място на пресечните точки на перпендикулярите през фокус на кривата към допирателните в произволна нейна точка и правите, свързващи центъра на кривата с точките на допиране.

Решение. а) Нека е дадена елипсата (1), $P(x_0; y_0)$, $x_0, y_0 \neq 0$, е произволна нейна точка и да разгледаме фокуса $F_2(c; 0)$. Съгласно [3], допирателната t към кривата в P има уравнение $t : b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = a^2 b^2$. Следователно правите l през F_2 , перпендикулярни на t , се определят от $l : a^2 y_0 x - b^2 x_0 y = a^2 c y_0$. Правите g през центъра O и P имат уравнения $g : y_0 x - x_0 y = 0$. Тогава за пресечните точки M на l и g получаваме $M\left(\frac{a^2}{c}; \frac{a^2 y_0}{c x_0}\right)$, откъдето се вижда, че тези точки лежат на постоянната права $d_2 : x = \frac{a^2}{c}$. Обратно, нека M е произволна точка от правата d_2 . Лесно се проверява, че ако M лежи на една от правите l или g , то M ще лежи и на другата права. Следователно търсеното ГМТ е правата d_2 . Отбелязваме, че ако разгледаме фокуса $F_1(-c; 0)$, установяваме, че търсеното геометрично място е

правата $d_1 : x = -\frac{a^2}{c}$. Правите d_1 и d_2 се наричат *директриси* на елипсата (1), съответни на фокусите F_1 и F_2 . **б)** Същият резултат се получава за произволна хипербола, зададена с (3). Така установихме, че елипсата и хиперболата имат две директриси, симетрично разположени относно центъра на кривата, като всяка от тях съответства на един от фокусите. Отбелязваме, че за да се получи директрисата на параболата (4), условието на задачата следва да бъде: *Намерете геометричното място на пресечните точки на перпендикулярите през фокуса на парабола към допирателните в произволна нейна точка и правите през точката на допиране, които са успоредни на оста на параболата.*

Накрая, след като въведохме понятието директриса на елипса и хипербола, отбелязваме, че елипсата, хиперболата и параболата могат да бъдат зададени с общо определение, като ГМТ на точки в равнината, за които отношението от разстоянията до дадена точка (фокус) и дадена права (директриса), неминаваща през точката, е постоянна положителна величина e , наречена (числен) ексцентрицитет. Ако $0 < e < 1$, то кривата е елипса, ако $e = 1$, то кривата е парабола, а ако $e > 1$, кривата е хипербола. Трите криви могат да се зададат с уравнението $y^2 = 2px + (e^2 - 1)x^2$. Окръжността (за която $e = 0$) не може се включи в горното определение, тъй като нейната „директриса“ е безкрайната права, която не може да бъде аналитично зададена с уравнение в декартова координатна система.

В заключение отбелязваме, че задачите за изследване на геометрични места на точки чрез координатно-векторния апарат допринасят за усвояването на методите на аналитичната геометрия и са подходящи за изучаване не само в темите за конични сечения, но и в останалите теми от модула по аналитична геометрия.

Литература

- [1] V. BIZOVA-LALEVA. Construction of geometric shapes using loci and dynamic software. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology* I(7), 14 (2013), 84-89.
- [2] Д. ГЪЛЪБОВА, М. СИДЕРОВА. Математика – 11. клас. Профилирана подготовка. Веди, 2020. [D. GALABOVA, M. SIDEROVA. Matematika – 11. klas. Profilirana podgotovka. Vedi, 2020. (in Bulgarian)]
- [3] Д. ГЪЛЪБОВА, М. СИДЕРОВА. Математика – 12. клас. Профилирана подготовка. Веди, 2021. [D. GALABOVA, M. SIDEROVA. Matematika – 12. klas. Profilirana podgotovka. Vedi, 2021. (in Bulgarian)]
- [4] В. ДИМОВА, А. ВИТАНОВ, Г. КАРАДЖОВ и ДР. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част I. С., Техника, 1965. [V. DIMOVA, A. VITANOV, G. KARADZHOV ET AL. Metodicheskoto rukovodstvo za reshavanje na zadachi po vissha matematika, chast I. S., Tehnika, 1965. (in Bulgarian)]
- [5] П. С. МОДЕНОВ, А. С. ПАРХОМЕНКО. Сборник задач по аналитической геометрии. М., Наука, 1976. [P. S. MODENOV, A. S. PARKHOMENKO. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii. M., Nauka, 1976. (in Russian)]
- [6] Г. ПАСКАЛЕВ. Методическо ръководство за решаване на задачи по висша математика, част I. С., 1979. [G. PASKALEV. Metodicheskoto rukovodstvo za reshavanje na zadachi po vissha matematika, chast I. S., 1979. (in Bulgarian)]

- [7] В. В. ПРАСОЛОВ. Задачи по планиметрии (часть I). М., Наука, 1986. [V. V. PRASOLOV. Zadachi po planimetrii (chasty I). M., Nauka, 1986. (in Russian)]
- [8] З. А. СКОПЕЦ. Геометрические миниатюры. М., Просвещение, 1990. [Z. A. SKOPETS. Geometricheskiye miniatyury. M., Prosveshcheniye, 1990. (in Russian)]
- [9] Ю. М. СМЕРНОВА. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М., МЦНМО, 2016. [Yu. M. SMIRNOVA. Sbornik zadach po analiticheskoy geometrii i lineynoy algebre. M., MTSNMO, 2016. (in Russian)]
- [10] Г. СТАНИЛОВ, А. БОРИСОВ. Нови срещи с коничните сечения. С., Народна просвета, 1988. [G. STANILOV, A. BORISOV. Novi sreshti s konichnite secheniya. S., Narodna prosveta, 1988. (in Bulgarian)]
- [11] А. А. СТРАЖЕВСКИЙ. Задачи на геометрические места точек в курсе геометрии средней школы. М., УЧПЕДГИЗ, 1954. [A. A. STRAZHEVSKIY. Zadachi na geometricheskiye mesta tochek v kurse geometrii sredney shkoly. M., UCHPEDGIZ, 1954. (in Russian)]
- [12] И. ТОНОВ, И. ШАРКОВА, М. ХРИСТОВА, Д. КАПРАЛОВА, В. ЗЛАТИЛОВ. Математика – 11. клас. Профилирана подготовка – Геометрия. Регалия 6, 2020. [I. TONOV, I. SHARKOVA, M. HRISTOVA, D. KAPRALOVA, V. ZLATILOV. Matematika – 11. klas. Profilirana podgotovka – Geometriya. Regaliya 6, 2020. (in Bulgarian)]
- [13] Н. Ф. ЧЕТВЕРУХИН. Методы геометрических построений. М., УЧПЕДГИЗ, 1952. [N. F. CHETVERUKHIN. Metody geometricheskikh postroyeniy. M., UCHPEDGIZ, 1952. (in Russian)]
- [14] В. Г. ЧИЧИГИН. Методика на обучението по геометрия – Планиметрия. С., Народна просвета, 1964. [V. G. CHICHIGIN. Metodika na obuchenieto po geometriya – Planimetriya. S., Narodna prosveta, 1964. (in Bulgarian)]
- [15] И. Ф. ШАРЫГИН. Задачи по геометрии – Планиметрия. М., Наука, 1982. [I. F. SHARYGIN. Zadachi po geometrii – Planimetriya. M., Nauka, 1982. (in Russian)]