

Таблицы

Марин Христов
13 октомври 2025 г.

Комбинаторните задачи с таблици са често срещани във всички състезания (в последните години: [МОМ 2025/6](#), [МОМ 2024/5](#), [МОМ 2022/6](#), [БОМ 2022/4](#), [Жаутиков 2025/2](#), [Жаутиков 2025/4](#), [Жаутиков 2024/5](#) на международни състезания и множество на национални). Тези задачи често използват една или повече идеи покрай оцветявания, броене по два начина, инварианти/полуинварианти, екстремални елементи, локални аргументи, конструкции и теория на графите. Всички тези идеи се срещат в задачите по-долу, които са разделени на лесни, средни и трудни (единствено с организационна цел). Това не бива да ви обезкуражава! Задача от по-трудна категория може да се окаже по-лесна, така че силно препоръчваме да разгледате всички задачи. За въпроси по условията или решенията, моля пишете по [имейл](#).

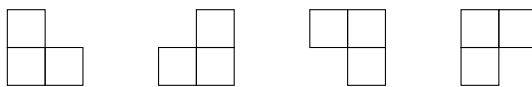
Във всички задачи дъска е покрита/разбита на дадени фигури, ако фигурите покриват всички клетки в дъската, никои две фигури нямат обща клетка и никоя фигура не излиза от дъската.

1 Лесни

Задача 1.1. В клетките на дъска 100×100 са поставени 100 шахматни царици, така че никои две не се атакуват. Това означава, че няма две царици в една и съща колона, ред или диагонал. Да се докаже, че всяка от четирите 50×50 ъглови дъски съдържа поне една царица.

Задача 1.2. Дъска $m \times n$ е покрита от правоъгълници $1 \times k$ и $k \times 1$. Да се докаже, че k дели поне едно от числата m и n .

Задача 1.3. Да се докаже, че ако от таблица $2^n \times 2^n$ премахнем което и да е 1×1 квадратче, то остатъкът от таблицата може да бъде покрит с L -тримина:



Задача 1.4. Нека n е естествено число. Всяко квадратче 1×1 в правоъгълна дъска с 2 реда и n колони е оцветено в бяло или черно. Оказало се, че няма черно квадратче, такова че вляво от него в същия ред има бяло квадратче и над него има бяло квадратче. Да се намери броя на възможните различните оцветявания, които изпълняват това условие.

Задача 1.5. Дъска 6×6 е разбита на 18 домина. Да се докаже, че винаги можем да разрежем дъската на два правоъгълника без да разрязваме домина.

Задача 1.6. Ани поставя 2025 квадратни дъски $n \times n$, всяка от които покрива точно n^2 клетки от безкрайна шахматна дъска. Всички дъски са с еднакъв размер $n \times n$ и някои от тях могат да се припокриват. Да се докаже, че съществуват поне n^2 единични клетки, всяка от които е покрита от нечетен брой дъски на Ани.

Задача 1.7. Таблица 5×100 е разделена на 500 единични квадратни клетки, където n от тях са оцветени в черно, а останалите са оцветени в бяло. Две клетки се наричат *съседни*, ако имат обща страна. Всяка от клетките има най-много две съседни черни клетки с единичен квадрат. Намерете възможно най-голямата стойност на n .

Задача 1.8. Всяка единична страна в правоъгълна дъска $m \times n$ е ориентирана със стрелка, така че:

- периметърът на правоъгълника е съставен от последователни стрелки, ориентирани по посока на часовниковата стрелка.
- всеки вътрешен връх има две излизащи и две влизащи стрелки в него.

Да се докаже, че има поне едно квадратче 1×1 , такова че стрелките му са ориентирани по часовниковата стрелка.

Задача 1.9. Дадена е таблица 100×100 , клетките на която са запълнени с естествени числа, ненадвишаващи 100. След всеки ред (под всеки стълб) била записана сумата на съдържащите се в реда (стълба) числа, след което числата в таблицата били изтрети. Само по записаните суми Иван успял напълно и еднозначно да възстанови всички числа в таблицата. Колко най-много измежду числата в таблицата може да са били седмици?

2 Средни

Задача 2.1. Разглеждаме таблици $2 \times n$, в които са разположени t на брой хоризонтални домина. Домината не формират квадрати 2×2 , както и фигури от вида



Да се намери броят на всички такива таблици за дадени n и t .

Задача 2.2. Ани поставя по един топ в някои от клетките на таблица 2025×2025 . Топ *атакува* друг топ, ако двата топа са на един ред или колона и между тях няма други топове. Да се намери най-големия брой топове, които може да е поставила Ани на дъската, ако никой топ не атакува 4 други.

Задача 2.3. Ани се намира в точката $(0, 0)$ и иска да стигне до $(2025, 2025)$. Ако в даден момент тя се намира в (x, y) , то за един ход може да стигне до една от точките

$$(x + 1, y), (x, y + 1), (x - 1, y + 1) \text{ или } (x + 1, y - 1).$$

Ани не може да повтаря посетени точки и не може да излиза извън границите $0 \leq x, y \leq 2025$. По колко начина може Ани да стигне до $(2025, 2025)$?

Задача 2.4. Дъска 8×8 е разбита на 32 домина. Охлювът Турбо обхожда всички клетки като започва от произволна клетка и се мести в съседни по страна клетки без да повтаря вече посетени. Ще наричаме ход на Турбо *специален*, ако е от една клетка в дадено домино от разбиването към втората клетка от същото домино. Да се намери минималният брой специални ходове, които Турбо е направил.

Задача 2.5. В долното ляво поле на дъска 7×9 е поставен пул. На всеки ход пулът се премества в досега непосетена клетка или две полета надясно, или две полета нагоре, или три полета наляво, или три полета надолу, или едно поле нагоре надясно. Колко най-много полета може да посети?

Задача 2.6. В таблица 999×999 някои от клетките са оцветени в бяло, а останалите са оцветени в червено. Нека N е броя наредени тройки от клетки (C_1, C_2, C_3) , такива че C_1 и C_2 са в един и същи ред, C_2 и C_3 са в една и съща колона, C_1 и C_3 са бели, а C_2 е червена. Да се намери най-голямата възможна стойност на N .

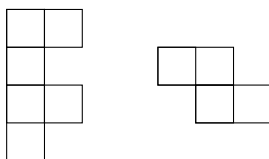
Задача 2.7. Нека n е естествено число. Ще наричаме две единични квадратчета в таблица $4n \times 4n$ *приятели*, ако се намират в един и същи ред или колона като не броят клетка за приятел със себе си. Ани оцветила m клетки в червено, така че всяка клетка в таблицата да има поне две приятели червени клетки. Да се намери най-малката възможна стойност на m .

Задача 2.8. Дадена е дъска 11×11 , такава че между всеки две единични клетки с обща страна има врата. Ани иска да се разходи сред клетките в дъската. Тя може да започне от която и да е клетка, но трябва накрая да се върне в нея и не може да използва никоя врата повече от веднъж (дори да е в обратната посока). Да се намери най-големия брой врати, които Ани може да отвори при такъв маршрут.

Задача 2.9. Дадена е празна таблица с 2^{100} реда и 100 стълба. Ани и Боби се редуват да запълват празни полета от първия ред на таблицата. За един ход Ани може да сложи $+$ в дадена клетка, ако тя е била празна, а Боби може да сложи 0 в празна клетка. Когато даден ред се запълни, двамата продължават на следващия ред като Ани прави ход първа на всеки ред.

Играта приключва когато всички клетки са запълнени. Тогава се формират 2^{100} реда от последователни символи. Ани иска да направи възможно най-много различни такива последователности, а Боби иска да минимизира този брой. Колко различни реда ще направи Ани, ако и двамата играят оптимално?

Задача 2.10. Да се намерят всички естествени числа n , такива че таблица $n \times n$ може да се покрие от фигурите по-долу като позволяваме завъртания и отражения?



3 Трудни

Задача 3.1. Стоян и Николай имат две еднакви таблици 100×100 . Всеки номерирал полетата на своята таблица с числата от 1 до 10000 по някакъв начин. Възможно ли е да се случи така, че всеки две числа a и b , които са в съседни полета в таблицата на Николай, да бъдат разположени в таблицата на Стоян така, че от едното може да се стигне до другото с един ход на шахматен кон?

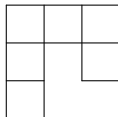
Задача 3.2. Ани поставя пул в един от $(n+1)^2$ -те върхове на дъска $n \times n$. Ход ще наричаме преместване на този пул от текущото му място в друг връх, който е на разстояние най-много $\sqrt{2}$. Ани мести пула, така че всеки връх бива посетен точно веднъж. Колко най-много диагонални хода (преместване на пула на разстояние $\sqrt{2}$) може да е направила?

Задача 3.3. Нека n е естествено число. Дадени са n^2 точки, образуващи квадратна решетка с n реда и n колони от точки. Начупена линия се състои от отсечки $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{k-1}A_k$ и всяка от n^2 -те точки лежи върху поне една от отсечките. Да се намери най-малката възможна стойност на k спрямо n .

Задача 3.4. Дадена е таблица $m \times n$, съставена от mn единични квадратчета, всяко от които е оцветено в бяло или черно. Ще наричаме две квадратчета съседни, ако имат обща страна. Пътека е последователност от две по две съседни клетки. Две пътеки не се пресичат, ако нямат общи клетки.

Нека N е броя начини да оцветим всички квадратчета, така че съществува пътека само от черни клетки, която започва от клетка в най-лявата колона и завършва в клетка в най-дясната колона. Нека M е броя начини да оцветим всички квадратчета, така че съществуват две непресичащи се пътеки само от черни квадратчета, започващи от най-лявата колона и завършващи в най-дясната колона. Да се докаже, че $N^2 \geq M \cdot 2^{mn}$.

Задача 3.5. Нека *кука* означава фигурата от 6 единични квадратчета показана по-долу, както и всяка фигура, която може да се получи от нея чрез завъртания и огледални отражения.



Да се намерят всички правоъгълни таблици $m \times n$, които могат да бъдат изцяло покрити от куки.

Задача 3.6. Построяваме тетромينو като допираме две домина по по-дългите им страни, така че средите на по-дългите им страни за върхове за другото домино. Това води до два вида тетромина: *S*-тетромина (двете вляво) и *Z*-тетромина (двете вдясно).



Да допуснем, че фигура $\mathcal{F}$, съставена от единични клетки (не задължително правоъгълна дъска) може да се разбие на *S*-тетраминота. Да се докаже, че ако $\mathcal{F}$ може да се разбие на *S*-тетраминота и *Z*-тетраминота, то при такова разбиване е невъзможно да има нечетен брой *Z*-тетраминота.

Задача 3.7. Нека n е естествено число. Дъска $2^n \times 2^n$ е разбита на правоъгълници, така че всяко квадратче от главния диагонал е отделен правоъгълник. Да се намери най-малката възможна сума на периметрите на всички правоъгълници при такова разбиване.

Задача 3.8. Да се намерят всички естествени числа n , за които всяка клетка на таблица с размери $n \times n$ може да бъде запълнена с една от буквите A , B и C по такъв начин, че:

- във всеки ред и всяка колона, една трета от буквите са A , една трета са B и една трета са C ; и
- във всеки диагонал, ако броят елементи в диагонала е кратен на три, то една трета от буквите са A , една трета са B и една трета са C .

Задача 3.9. В някои от клетките на квадратна таблица са поставени коли, всяка от които е насочена в една от четирите посоки ляво, дясно, горе, долу. Две коли никога не могат да са в една и съща клетка. Дадено е, че полето пред всяка кола е празно и никои две коли не са насочени директно една срещу друга. За един ход кола може да се премести една клетка в посоката, накъдето е насочена, ако полето е празно. Ако кола е точно на границата на таблицата и няма клетка пред нея, ходът се състои от напускането на колата от таблицата и премахването на колата от клетката. Да се докаже, че съществува крайна поредица от ходове, такава че всяка кола напуска таблицата.