

Аддитивна комбинаторика

Борислав Кирилов

В избраните задачи се интересуваме какво можем да кажем, когато събираме елементите на няколко дадени множества. Понякога се налага да прилагаме комбинаторни, а друг път – алгебрични похвати. Първите четири групи предлагат задачи, обединени около определена идея. В последната група някои задачи надграждат част от представените идеи, а други изискват по-творчески подходи. Задачите са с разнообразна сложност, като при разбора им ще бъдат представени решения на част от тях.

Навсякъде за множество A означаваме с $|A|$ броя на елементите му.

Без теория

Задача 1. Дадени са две множества, съставени от естествени числа, по-малки от n . Да се докаже, че ако общият брой числа в двете множества е не по-малък от n , то можем да изберем по едно число от двете множества със сбор n .

Задача 2. Нека A и B са две крайни множества от естествени числа. Чрез $A + B$ означаваме множеството $\{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Да се докаже, че $|A+B| \geq |A|+|B|-1$.

Задача 3. Дадени са 70 различни естествени числа, не по-големи от 200. Да се докаже, че някои две от тях имат разлика четири, пет или девет.

Задача 4. Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_7$. Да се докаже, че можем да изберем няколко от тях (поне едно) и да поставим пред някои от тях знак плюс, а пред някои минус, така, че крайният резултат да се дели на 100.

Задача 5. Сто и едно числа измежду естествените числа от 1 до 10^6 са оцветени в синьо. Да се докаже, че можем да оцветим в червено други сто числа, не по-големи от 10^6 , така, че всичките сборове на синьо и червено число (общо $100 \cdot 101$ сбора) да са различни.

Задача 6. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са две по две различни естествени числа и нека M е множество от $n-1$ естествени числа, различни от $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Скакалец скача по реалната ос, започвайки от точката 0, като прави n скока надясно с дължини $a_1, a_2, \dots, a_n$ в някакъв ред. Да се докаже, че последователността на скоковете може да се избере така, че скакалецът никога да не попада в точка от M .

Една класическа идея

Задача 7 (Класика). Дадени са n естествени числа. Да се докаже, че сборът на няколко от тях се дели на n .

Подсказка: ако дадените числа са $x_1, x_2, \dots, x_n$, разгледайте сборовете $x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\dots+x_n$.

Задача 8. Дадени са $n - 1$ естествени числа от 1 до n , не всички от които са равни. Да се докаже, че сборът на няколко от тях се дели на n .

Задача 9. На дъската са записани сто естествени числа, по-малки от 100, със сбор 200. Да се докаже, че сборът на няколко от тях е равен на 100.

Задача 10. Дадена е купчинка от картички, върху всяка от които е написано някое от числата $1, 2, \dots, n$. Известно е, че сборът на всички записани числа е равен на $k \cdot n!$ за някое естествено число k . Да се докаже, че е възможно да разделим картичките на k купчинки така, че сборът на числата върху картичките във всяка купчинка да е равен на $n!$.

Теорема на Коши-Девънпорт и Ердьос-Гинзбург-Зив

Досега разглеждахме основно задачи, в които работихме с естествени числа. Когато работим с множеството от остатъците по модул просто число, Задача 2 има следния аналог:

Теорема (Коши-Девънпорт). Нека p е просто число, а A и B са множества от остатъци при деление на p . Чрез $A + B$ означаваме множеството от остатъци $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Тогава $|A + B| \geq \min(p, |A| + |B| - 1)$.

Доказателство. Случаят, в който $|A| + |B| \geq p + 1$, е по-лесен и следва от аргумент, сходен с този в задача 1. По-нататък ще считаме, че $|A| + |B| \leq p$ и ще проведем индукция по $|A|$. Основата при $|A| = 0, 1$ следва непосредствено. Нека сега считаме, че $|A| \geq 2$ и $|B| > 0$. Нека $x \neq y$ са два различни елемента на A . Тогава съществува остатък $z \in B$, за който $z + (y - x) \notin B$. Наистина, ако допуснем противното и $b \in B$ е произволен елемент, то бихме получили последователно

$$b + (y - x) \in B, b + 2(y - x) \in B, \dots,$$

откъдето множеството B би съдържало всички остатъци при деление на p . Да разгледаме множеството $A' = A + (z - x)$. За него е в сила $|A'| = |A|$, $|A' + B| = |A + B|$, $z + y - x \in A'$, а значи A' не е подмножество на B . Да забележим, че $(A' \cap B) + (A' \cup B) \subseteq A' + B$. Остава да приложим индукционната хипотеза за множествата $A' \cap B$ и $A' \cup B$. $\square$

Задача 11. Да се докаже, че за всяко естествено число k и просто число p съществуват цели числа x и y , за които $x^2 + y^2 \equiv k \pmod{p}$.

Задача 12. Нека $p > 100$ е просто число. Да се докаже, че съществуват пет естествени числа, некратни на p , сборът на четвъртите степени на които се дели на p .

Задача 13. В редица са записани 26 ненулеви десетични цифри. Да се докаже, че тази редица може да бъде разбита на няколко части така, че сборът на числата, образувани от цифрите в отделните части, да се дели на 13.

Задача 14. Нека p е просто число, $r \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ и $a_1, a_2, \dots, a_r \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Да разгледаме остатъците на числата от вида $\sum_{i \in S} a_i$, където S пробягва всички подмножества на $\{1, 2, \dots, r\}$ (включително празното подмножество, в който случай съответстващият сбор е 0). Да се докаже, че се получават поне $r + 1$ различни остатъка.

Задача 15 (Теорема на Ердьос-Гинзбург-Зив). Нека n е естествено число. Да се докаже, че измежду всеки $2n - 1$ естествени числа можем да изберем n със сбор, кратен на n .

Подсказка: първо разгледайте случая, в който n е просто число, използвайки предходната задача.

Задача 16. Нека p е просто число. Върху всяко ребро на пълен граф с $1000p$ върха е записано естествено число. Да се докаже, че графът съдържа цикъл, сборът от числата върху ребрата на който се дели на p .

Теоремите на Коши-Девънпорт и Ердьос-Гинзбург-Зив имат и чисто алгебрични доказателства. За тях, както и за други приложения на подобни техники, препращаме читателя към книгата „Problems from the book“ на Титу Андрееску и Габриел Доспинеску.

Полиноми

Следващите задачи могат да бъдат решени чрез по-алгебрични подходи, а именно – въвеждане на подходящи полиноми. Основната идея в тази техника е, че при умножение на няколко полинома степените на мономите в произведението са равни на сборовете от степените на мономите в началните полиноми.

Задача 17. Дадени са просто число p и два набора от естествени числа $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$. Известно е, че сред числата $a_i + b_j$ ($1 \leq i, j \leq p$) точно p числа дават остатък 0 при деление на p , точно p дават остатък 1, ..., точно p дават остатък $p - 1$. Да се докаже, че в един от двата набора всеки остатък при деление на p се среща точно по веднъж.

Задача 18. Числата $1, 2, \dots, 2n$ са разбити на две множества по n числа. За всяко множество са пресметнати всевъзможните n^2 сбора $a + b$, където a и b са елементи на множеството, и тези сборове са взети по модул $2n$. Да се докаже, че наборът от остатъците от едното множество съвпада с този от другия.

Задача 19. Дадени са просто число p и естествено число $n \geq p$. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ е набор от естествени числа, а f_k е броят k -елементни подмножества на този набор със сбор, кратен на p . Да се докаже, че $\sum_{k=0}^n (-1)^k f_k$ се дели на p (считаме, че $f_0 = 1$).

Задача 20. Във всяка клетка на таблица 101×101 е записано естествено число. Да се докаже, че броят начини да изберем по една клетка от всеки ред на таблицата така, че сборът на числата в избраните клетки да се дели на 101, се дели на 101.

Допълнителни задачи

Задача 21. Нека n е естествено число. Дадени са $2^n + 1$ различни крайни множества от естествени числа. Множествата са оцветени в синьо и червено (множествата, а не техните елементи) така, че има поне едно оцветено множество във всеки цвят. Определяме симетричната разлика на две множества като множеството от елементи, които принадлежат на точно едно от двете множества. Да се докаже, че съществуват поне 2^n различни множества, които могат да бъдат получени като симетричната разлика на синьо и червено множество.

Задача 22. Нека X и Y са две крайни подмножества на интервала $[0, 1)$ такива, че $0 \in X \cap Y$ и $x + y \neq 1$ за никои $x \in X$ и $y \in Y$. Да се докаже, че множеството $\{x + y - \lfloor x + y \rfloor \mid x \in X, y \in Y\}$ съдържа поне $|X| + |Y| - 1$ елемента.

Задача 23. Нека m и n са естествени числа, за които $n \geq m \geq 2$, и нека S е множество от n естествени числа. Да се докаже, че S съдържа поне 2^{n-m+1} различни подмножества със сбор на елементите, кратен на m . (Празното подмножество изпълнява това условие).

Задача 24 (Ердьош). Нека A е множество от n ненулеви цели числа. Да се докаже, че съществува подмножество B на A с повече от $\frac{n}{3}$ елемента такова, че сборът на никои два елемента на B (възможно равни) не принадлежи на B .

Задача 25. Нека X е множество от 10000 цели числа, никое от които не се дели на 47. Да се докаже, че съществува 2007-елементно подмножество Y на X такова, че $a - b + c - d + e$ не се дели на 47 за никои $a, b, c, d, e \in Y$.

Задача 26. Нека p е просто число и A и B са непразни множества от остатъци при деление на p . Да се докаже, че съществува ненулев остатък x , за който

$$|A + xB| \geq \min \left(\frac{|A||B|}{2}, \frac{p}{6} \right),$$

където $xB = \{xb \mid b \in B\}$.

Задача 27. Съществуват ли 100 различни естествени числа, не по-големи от 25000, чиито сборове по двойки са два по два различни?

Задача 28. За дадено просто число p множество S от остатъци при деление на p се нарича *свободна от суми мултипликативна подгрупа* на $\mathbb{F}_p$, ако:

- съществува ненулев остатък α при деление на p такъв, че $S = \{1, \alpha^1, \alpha^2, \dots\}$ (разглеждаме множеството по модул p);
- не съществуват $a, b, c \in S$ (не задължително различни), за които $a + b \equiv c \pmod{p}$.

Да се докаже, че за всяко естествено число N съществуват просто число p и свободна от суми мултипликативна подгрупа S на $\mathbb{F}_p$, за които $|S| \geq N$.

Задача 29 (Теорема на Шур). Всяко естествено число е оцветено в един от k цвята. Да се докаже, че съществуват три едноцветни числа a, b и c , за които $a + b = c$.

Задача 30. Нека X е крайно множество от реални числа, d е реално число и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2025}$ са 2025 ненулеви реални числа. Определяме

$$A = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{2025}) : x_1, x_2, \dots, x_{2025} \in X \text{ и } \sum_{i=1}^{2025} \lambda_i x_i = d \right\},$$

$$B = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{2024}) : x_1, x_2, \dots, x_{2024} \in X \text{ и } \sum_{i=1}^{2024} (-1)^i x_i = 0 \right\},$$

$$C = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{2026}) : x_1, x_2, \dots, x_{2026} \in X \text{ и } \sum_{i=1}^{2026} (-1)^i x_i = 0 \right\}.$$

Да се докаже, че $|A|^2 \leq |B| \cdot |C|$.