

Аддитивна комбинаторика

Разбор на задачите

Борислав Кирилов

8 ноември 2025

Задача 1. Дадени са две множества, съставени от естествени числа, по-малки от n . Да се докаже, че ако общият брой числа в двете множества е не по-малък от n , то можем да изберем по едно число от двете множества със сбор n .

Задача 1. Дадени са две множества, съставени от естествени числа, по-малки от n . Да се докаже, че ако общият брой числа в двете множества е не по-малък от n , то можем да изберем по едно число от двете множества със сбор n .

Решение. Нека двете множества са

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

$$B = \{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}.$$

Да разгледаме множеството

$$C = \{n - y_1, n - y_2, \dots, n - y_\ell\}.$$

Множествата A и C се състоят от естествени числа, по-малки от n и съдържат общо $k + \ell \geq n$ елемента.

Задача 1. Дадени са две множества, съставени от естествени числа, по-малки от n . Да се докаже, че ако общият брой числа в двете множества е не по-малък от n , то можем да изберем по едно число от двете множества със сбор n .

Решение. Нека двете множества са

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

$$B = \{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}.$$

Да разгледаме множеството

$$C = \{n - y_1, n - y_2, \dots, n - y_\ell\}.$$

Множествата A и C се състоят от естествени числа, по-малки от n и съдържат общо $k + \ell \geq n$ елемента.

$\implies$ Съществува естествено число, което принадлежи и на двете множества.

Задача 1. Дадени са две множества, съставени от естествени числа, по-малки от n . Да се докаже, че ако общият брой числа в двете множества е не по-малък от n , то можем да изберем по едно число от двете множества със сбор n .

Решение. Нека двете множества са

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

$$B = \{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}.$$

Да разгледаме множеството

$$C = \{n - y_1, n - y_2, \dots, n - y_\ell\}.$$

Множествата A и C се състоят от естествени числа, по-малки от n и съдържат общо $k + \ell \geq n$ елемента.

$\implies$ Съществува естествено число, което принадлежи и на двете множества.

$\implies$ Съществуват индекси $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq \ell$, за които $x_i = n - y_j$.

Задача 1. Дадени са две множества, съставени от естествени числа, по-малки от n . Да се докаже, че ако общият брой числа в двете множества е не по-малък от n , то можем да изберем по едно число от двете множества със сбор n .

Решение. Нека двете множества са

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$$

$$B = \{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}.$$

Да разгледаме множеството

$$C = \{n - y_1, n - y_2, \dots, n - y_\ell\}.$$

Множествата A и C се състоят от естествени числа, по-малки от n и съдържат общо $k + \ell \geq n$ елемента.

$\implies$ Съществува естествено число, което принадлежи и на двете множества.

$\implies$ Съществуват индекси $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq \ell$, за които $x_i = n - y_j$.

$\implies x_i + y_j = n$ и $x_i \in A, y_j \in B$, откъдето следва исканото.

Задача 2. Нека A и B са две крайни множества от естествени числа. Чрез $A + B$ означаваме множеството $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Да се докаже, че $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.

Задача 2. Нека A и B са две крайни множества от естествени числа. Чрез $A + B$ означаваме множеството $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Да се докаже, че $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.

Решение. Нека

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m$$

са елементите на A , а

$$b_1 < b_2 < \dots < b_n$$

са елементите на B . Тогава числата

$$a_1 + b_1 < a_1 + b_2 < \dots < a_1 + b_n < a_2 + b_n < \dots < a_m + b_n$$

са различни елементи на $A + B$ и са $m + n - 1 = |A| + |B| - 1$ на брой.

Задача 2. Нека A и B са две крайни множества от естествени числа. Чрез $A + B$ означаваме множеството $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Да се докаже, че $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.

Решение. Нека

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m$$

са елементите на A , а

$$b_1 < b_2 < \dots < b_n$$

са елементите на B . Тогава числата

$$a_1 + b_1 < a_1 + b_2 < \dots < a_1 + b_n < a_2 + b_n < \dots < a_m + b_n$$

са различни елементи на $A + B$ и са $m + n - 1 = |A| + |B| - 1$ на брой.

Въпрос

За кои A и B се достига равенство?

Задача 3. Дадени са 70 различни естествени числа, не по-големи от 200. Да се докаже, че някои две от тях имат разлика четири, пет или девет.

Задача 3. Дадени са 70 различни естествени числа, не по-големи от 200. Да се докаже, че някои две от тях имат разлика четири, пет или девет.

Решение. Нека

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_{70}\}$$

е множеството от числата. Въвеждаме

$$S + 4 = \{s + 4 \mid s \in S\} = \{x_1 + 4, x_2 + 4, \dots, x_{70} + 4\}$$

и

$$S + 9 = \{s + 9 \mid s \in S\} = \{x_1 + 9, x_2 + 9, \dots, x_{70} + 9\}.$$

Тези три множества съдържат общо $3 \cdot 70 = 210$ елемента, всички от които са естествени числа, по-малки от 210.

Задача 3. Дадени са 70 различни естествени числа, не по-големи от 200. Да се докаже, че някои две от тях имат разлика четири, пет или девет.

Решение. Нека

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_{70}\}$$

е множеството от числата. Въвеждаме

$$S + 4 = \{s + 4 \mid s \in S\} = \{x_1 + 4, x_2 + 4, \dots, x_{70} + 4\}$$

и

$$S + 9 = \{s + 9 \mid s \in S\} = \{x_1 + 9, x_2 + 9, \dots, x_{70} + 9\}.$$

Тези три множества съдържат общо $3 \cdot 70 = 210$ елемента, всички от които са естествени числа, по-малки от 210.

$\implies$ Съществуват индекси $1 \leq i, j \leq 70$ и различни числа $c, d \in \{0, 4, 9\}$, за които $x_i + c = x_j + d$.

Задача 3. Дадени са 70 различни естествени числа, не по-големи от 200. Да се докаже, че някои две от тях имат разлика четири, пет или девет.

Решение. Нека

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_{70}\}$$

е множеството от числата. Въвеждаме

$$S + 4 = \{s + 4 \mid s \in S\} = \{x_1 + 4, x_2 + 4, \dots, x_{70} + 4\}$$

и

$$S + 9 = \{s + 9 \mid s \in S\} = \{x_1 + 9, x_2 + 9, \dots, x_{70} + 9\}.$$

Тези три множества съдържат общо $3 \cdot 70 = 210$ елемента, всички от които са естествени числа, по-малки от 210.

$\implies$ Съществуват индекси $1 \leq i, j \leq 70$ и различни числа $c, d \in \{0, 4, 9\}$, за които $x_i + c = x_j + d$.

$\implies |x_i - x_j| = |c - d|$ и остава да забележим, че $|c - d| \in \{4, 5, 9\}$.

Множество S съдържа два елемента с разлика d тогава и само тогава, когато множествата S и $S + d$ имат непразно сечение:

$$d \in S - S \iff S \cap (S + d) \neq \emptyset.$$

Задача 5. Сто и едно числа измежду естествените числа от 1 до 10^6 са оцветени в синьо. Да се докаже, че можем да оцветим в червено други сто числа, не по-големи от 10^6 , така, че всичките сборове на червено и синьо число (общо $100 \cdot 101$ сбора) да са различни.

Задача 5. Сто и едно числа измежду естествените числа от 1 до 10^6 са оцветени в синьо. Да се докаже, че можем да оцветим в червено други сто числа, не по-големи от 10^6 , така, че всичките сборове на червено и синьо число (общо $100 \cdot 101$ сбора) да са различни.

Решение.

- Кога две числа x и y не могат да бъдат едновременно червени?
→ Ако съществуват сини z и t , за които $x + z = y + t$, тоест $x - y = t - z$.

Задача 5. Сто и едно числа измежду естествените числа от 1 до 10^6 са оцветени в синьо. Да се докаже, че можем да оцветим в червено други сто числа, не по-големи от 10^6 , така, че всичките сборове на червено и синьо число (общо $100 \cdot 101$ сбора) да са различни.

Решение.

- Кога две числа x и y не могат да бъдат едновременно червени?
→ Ако съществуват сини z и t , за които $x + z = y + t$, тоест $x - y = t - z$.
- Нека сините числа са $a_1, a_2, \dots, a_{101}$ и да означим

$$A = \{a_i - a_j \mid 1 \leq i, j \leq 101\}.$$

Тогава всяко число x „забранява“ числата от $x + A$.

Задача 5. Сто и едно числа измежду естествените числа от 1 до 10^6 са оцветени в синьо. Да се докаже, че можем да оцветим в червено други сто числа, не по-големи от 10^6 , така, че всичките сборове на червено и синьо число (общо $100 \cdot 101$ сбора) да са различни.

Решение.

- Кога две числа x и y не могат да бъдат едновременно червени?
→ Ако съществуват сини z и t , за които $x + z = y + t$, тоест $x - y = t - z$.
- Нека сините числа са $a_1, a_2, \dots, a_{101}$ и да означим

$$A = \{a_i - a_j \mid 1 \leq i, j \leq 101\}.$$

Тогава всяко число x „забранява“ числата от $x + A$.

- Ако избираме червените числа едно по едно и сме избрали k числа, то сме забранили общо $10101k + 101$ числа. При $k = 99$ това е повече от 10^6 . Какво да направим?

Решение. Нека сините числа са $a_1, a_2, \dots, a_{101}$ и да означим

$$A = \{a_i - a_j \mid 1 \leq i, j \leq 101\}.$$

Множеството A съдържа не повече от $101 \cdot 100 + 1 = 10101$ елемента, от които не повече от 5050 са положителни. Ще избираме червените числа едно по едно. Две числа b и c не трябва да бъдат едновременно червени тогава и само тогава, когато $b - c \in A$.

Избираме първото червено число да е най-малкото естествено число, което не е синьо. Ако вече сме избрали $k \leq 99$ червени числа, то числата, които не можем да оцветим в червено, са не повече от $101 + 5051 + (k - 1)10101 = 10101k - 4949 < 10^6$. Следователно съществува поне едно число, по-малко от 10^6 , което може да бъде оцветено в червено.

Задача 6. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са две по две различни естествени числа и нека M е множество от $n - 1$ естествени числа, различни от $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Скакалец скача по реалната ос, започвайки от точката 0, като прави n скока надясно с дължини $a_1, a_2, \dots, a_n$ в някакъв ред. Да се докаже, че последователността на скоковете може да се избере така, че скакалецът никога да не попада в точка от M .

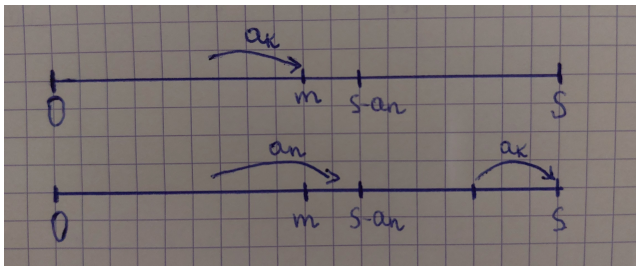
Задача 6. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са две по две различни естествени числа и нека M е множество от $n - 1$ естествени числа, различни от $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Скакалец скача по реалната ос, започвайки от точката 0, като прави n скока надясно с дължини $a_1, a_2, \dots, a_n$ в някакъв ред. Да се докаже, че последователността на скоковете може да се избере така, че скакалецът никога да не попада в точка от M .

Решение. Индукция по n . Случаите $n = 1, 2$ следват непосредствено.

Нека сега $n \geq 3$ и да разгледаме числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Нека m е най-голямото число в M . Ще разгледаме няколко случая.

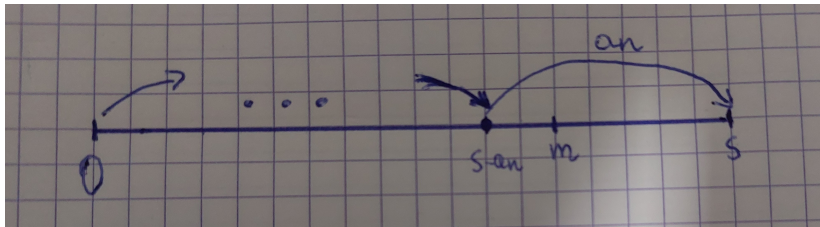
Първи случай. $m \leq s - a_n$.

Прилагаме индукционната хипотеза за числата $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ и множеството $M \setminus \{m\}$. Получаваме поредица от скокове, които водят от 0 до $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$. Ако при тази поредица скакалецът не посещава точката m , то добавяме скокът a_n като последен, за да получим решение от 0 до s . Ако скакалецът посещава точката m след като е направил скок с дължина a_k , то заменяме този скок с a_n и добавяме към поредицата от $n - 1$ скока последен скок с дължина a_k . Тази последователност от скокове води от 0 до s и не посещава нито едно число от M , защото $m = \max M$.



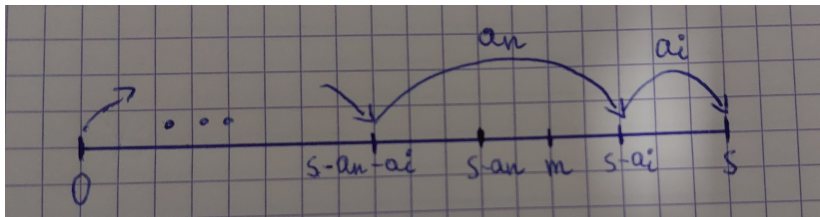
Втори случай. $m > s - a_n$ и $s - a_n \notin M$.

Измежду числата $1, 2, \dots, s - a_n$ има не повече от $n - 2$ елемента на M . Индукционната хипотеза ни предоставя път от 0 до $s - a_n$, който използва скокове с дължини $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Допълваме го със скок с дължина a_n .



Трети случай. $m > s - a_n$ и $s - a_n \in M$.

Тъй като $|M| = n - 1$, съществува $1 \leq i \leq n - 1$, за което нито едно от числата $s - a_i$ и $s - a_n - a_i$ не принадлежи на M . Прилагаме индукционната хипотеза за $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \setminus \{a_i, a_n\}$ и подмножеството на M , състоящо се от числата, не по-големи от $s - a_n - a_i$ (то съдържа не повече от $n - 3$ елемента). Накрая допълваме получения път със скокове с дължини a_n и a_i .



Задача 7. Дадени са n естествени числа. Да се докаже, че сборът на няколко от тях се дели на n .

Задача 7. Дадени са n естествени числа. Да се докаже, че сборът на няколко от тях се дели на n .

Решение. Да разгледаме сборовете

$$x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

- Ако някой от тях се дели на n , условието е изпълнено.
- В противен случай, съществуват индекси $1 \leq k < \ell \leq n$, за които сборовете $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_\ell$ дават равни остатъци при деление на n .
 $\implies x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_\ell$ се дели на n .

Задача 10. Дадена е купчинка от картички, върху всяка от които е написано някое от числата $1, 2, \dots, n$. Известно е, че сборът на всички записани числа е равен на $k \cdot n!$ за някое естествено число k . Да се докаже, че е възможно да разделим картичките на k купчинки така, че сборът на числата върху картичките във всяка купчинка да е равен на $n!$.

Задача 10. Дадена е купчинка от картички, върху всяка от които е написано някое от числата $1, 2, \dots, n$. Известно е, че сборът на всички записани числа е равен на $k \cdot n!$ за някое естествено число k . Да се докаже, че е възможно да разделим картичките на k купчинки така, че сборът на числата върху картичките във всяка купчинка да е равен на $n!$.

Решение. Ще проведем индукция по n . Твърдението е очевидно при $n = 1$. Да разгледаме сега някое $n > 1$ и купчинка от картички като в условието. Да оцветим картичките с числа, по-малки от n , в жълто, а тези с n – във виолетово. Ако има поне n жълти картички, от задача 7 следва, че сборът на числата върху няколко от тях се дели на n и следователно се записва като $r \cdot n$, където $1 \leq r < n$. Да заместим тези картички с една оранжева картичка с надпис r . Ако оставащите жълти картички са поне n , можем да приложим същото разсъждение. Продължаваме така, докато не получим множество от оранжеви, виолетови и жълти картички, като жълтите са по-малко от n .

Тъй като общият сбор на числата, записани върху всички картички в началото, се дели на n , сборът на числата върху оставащите жълти картички се дели на n . Следователно можем да заменим оставащите жълти картички с една оранжева картичка като по-горе. Да заменим и виолетовите картички с оранжеви, върху които е записано числото едно. Така получихме множество от оранжеви картички, върху всяка от които е записано естествено число, не по-голямо от $n - 1$, като сборът на всички числа е $k \cdot (n - 1)!$. Остава да приложим индукционната хипотеза за $n - 1$ и да върнем оранжевите картички към началните.

Теорема (Коши-Девънпорт)

Нека p е просто число, а A и B са множества от остатъци при деление на p . Чрез $A + B$ означаваме множеството от остатъци $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Тогава $|A + B| \geq \min(p, |A| + |B| - 1)$.

Доказателство. Случаят, в който $|A| + |B| \geq p + 1$, е по-лесен и следва от аргумент, сходен с този в задача 1. По-нататък ще считаме, че $|A| + |B| \leq p$ и ще проведем индукция по $|A|$. Основата при $|A| = 0, 1$ следва непосредствено. Нека сега считаме, че $|A| \geq 2$ и $|B| > 0$.

Нека $x \neq y$ са два различни елемента на A . Тогава съществува остатък $z \in B$, за който $z + (y - x) \notin B$. Наистина, ако допуснем противното и $b \in B$ е произволен елемент, то бихме получили последователно

$$b + (y - x) \in B, b + 2(y - x) \in B, \dots,$$

откъдето множеството B би съдържало всички остатъци при деление на p .

Да разгледаме множеството $A' = A + (z - x)$. За него е в сила

$$|A'| = |A|, \quad |A' + B| = |A + B|, \quad z + y - x \in A'.$$

Следователно A' не е подмножество на B . Да забележим, че

$$(A' \cap B) + (A' \cup B) \subseteq A' + B.$$

Остава да приложим индукционната хипотеза за множествата $A' \cap B$ и $A' \cup B$.

Да разгледаме множеството $A' = A + (z - x)$. За него е в сила

$$|A'| = |A|, \quad |A' + B| = |A + B|, \quad z + y - x \in A'.$$

Следователно A' не е подмножество на B . Да забележим, че

$$(A' \cap B) + (A' \cup B) \subseteq A' + B.$$

Остава да приложим индукционната хипотеза за множествата $A' \cap B$ и $A' \cup B$.

Въпрос

Кога се достига равенство?

Да разгледаме множеството $A' = A + (z - x)$. За него е в сила

$$|A'| = |A|, \quad |A' + B| = |A + B|, \quad z + y - x \in A'.$$

Следователно A' не е подмножество на B . Да забележим, че

$$(A' \cap B) + (A' \cup B) \subseteq A' + B.$$

Остава да приложим индукционната хипотеза за множествата $A' \cap B$ и $A' \cup B$.

Въпрос

Кога се достига равенство?

Въпрос

Какво твърдение е вярно, ако заменим простото число p с произволно естествено число n ?

Задача 13. В редица са записани 26 ненулеви десетични цифри. Да се докаже, че тази редица може да бъде разбита на няколко части така, че сборът на числата, образувани от цифрите в отделните части, да се дели на 13.

Задача 13. В редица са записани 26 ненулеви десетични цифри. Да се докаже, че тази редица може да бъде разбита на няколко части така, че сборът на числата, образувани от цифрите в отделните части, да се дели на 13.

Решение. Нека редицата от цифри е

$$d_1 d_2 \mid d_3 d_4 \mid \cdots \mid d_{25} d_{26}.$$

За всяка двойка можем да получим два различни остатъка:

$$10d_{2i-1} + d_{2i} \not\equiv d_{2i-1} + d_{2i} \pmod{13}.$$

Значи можем да получим всички остатъци от множеството

$$\{d_1 + d_2, 10d_1 + d_2\} + \{d_3 + d_4, 10d_3 + d_4\} + \cdots + \{d_{25} + d_{26}, 10d_{25} + d_{26}\}.$$

От теоремата на Коши-Девънпорт следва, че това са поне $\min(13, 13 \cdot 2 - 12) = 13$ остатъка. Следователно можем да направим разделянето така, че сборът да се дели на 13.

Задача 16. Нека p е просто число. Върху всяко ребро на пълен граф с $1000p$ върха е записано естествено число. Да се докаже, че графът съдържа цикъл, сборът от числата върху ребрата на който се дели на p .

Задача 16. Нека p е просто число. Върху всяко ребро на пълен граф с $1000p$ върха е записано естествено число. Да се докаже, че графът съдържа цикъл, сборът от числата върху ребрата на който се дели на p .

Решение. За два върха u и v на графа ще означаваме чрез $f(u, v)$ числото, записано върху реброто uv на графа. Да разгледаме $p - 1$ непресичащи се триъгълника в графа $T_1, T_2, \dots, T_{p-1}$. Ако сборът от числата върху трите ребра на някой от тези триъгълници се дели на p , то задачата е решена. В противен случай, за всяко $i = 1, 2, \dots, p - 1$ да означим чрез v_{i1}, v_{i2}, v_{i3} върховете на триъгълника T_i така, че

$$f(v_{i1}, v_{i2}) + f(v_{i2}, v_{i3}) \not\equiv f(v_{i1}, v_{i3}) \pmod{p}.$$

Разглеждаме цикъла

$$v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, \dots, v_{(p-1)1}, v_{(p-1)2}, v_{(p-1)3}, v_{11}.$$

Той може да бъде скъсен, ако за някое i заменим ребрата $v_{i1}v_{i2}$ и $v_{i2}v_{i3}$ с реброто $v_{i1}v_{i3}$. При това сборът на всички числа върху ребрата на цикъла се променя с $f(v_{i1}, v_{i3}) - f(v_{i1}, v_{i2}) - f(v_{i2}, v_{i3})$.

Чрез скъсявания можем да променим сбора на числата върху големия цикъл с всеки елемент на множеството

$$\begin{aligned} &\{0, f(v_{11}, v_{13}) - f(v_{11}, v_{12}) - f(v_{12}, v_{13})\} + \\ &\{0, f(v_{21}, v_{23}) - f(v_{21}, v_{22}) - f(v_{22}, v_{23})\} + \dots \\ &\{0, f(v_{(p-1)1}, v_{(p-1)3}) - f(v_{(p-1)1}, v_{(p-1)2}) - f(v_{(p-1)2}, v_{(p-1)3})\}. \end{aligned}$$

От теоремата на Коши-Девънпорт следва, че това множество съдържа всички остатъци при деление на p . Следователно цикълът може да бъде скъсен така, че сборът по ребрата му да се дели на p .

Решенията на следващите няколко задачи се основават на въвеждането на подходящи полиноми. Да направим няколко предварителни наблюдения.

Нека $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ е полином с цели коефициенти и n е естествено число. За всяко $0 \leq r \leq n-1$ нека $b_r(P)$ е сборът от коефициентите на P пред мономите, чиято степен дава остатък r при деление на n . С други думи,

$$\text{ако } P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k, \text{ то } b_r(P) = \sum_{\substack{k=0 \\ n|k-r}}^d a_k.$$

В задачите ще бъде потребно да пресмятаме коефициентите b_r .
Полезно наблюдение е, че остатъкът при делението на полинома P на полинома $x^n - 1$ е полиномът $\sum_{r=0}^{n-1} b_r(P)x^r$. Наистина достатъчно е да забележим, че за всяко $m = kn + r$ е изпълнено

$$\begin{aligned}x^m &= x^{kn+r} = x^{kn}x^r = (x^{kn} - 1)x^r + x^r = \\&= (x^n - 1)(x^{(k-1)n} + x^{(k-2)n} + \dots + 1)x^r + x^r.\end{aligned}$$

Задача 18. Числата $1, 2, \dots, 2n$ са разбити на две множества по n числа. За всяко множество са пресметнати всевъзможните n^2 сбора $a + b$, където a и b са елементи на множеството, и тези сборове са взети по модул $2n$. Да се докаже, че наборът от остатъците от едното множество (с кратностите) съвпада с този от другия.

Задача 18. Числата $1, 2, \dots, 2n$ са разбити на две множества по n числа. За всяко множество са пресметнати всевъзможните n^2 сбора $a + b$, където a и b са елементи на множеството, и тези сборове са взети по модул $2n$. Да се докаже, че наборът от остатъците от едното множество (с кратностите) съвпада с този от другия.

Решение. Нека едното множество е $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, а другото е $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Въвеждаме полиномите

$$P(x) = \sum_{i=1}^n x^{a_i} \text{ и } Q(x) = \sum_{i=1}^n x^{b_i}.$$

Да забележим, че

$$P^2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^{a_i+a_j} \text{ и } Q^2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^{b_i+b_j}.$$

Задача 18. Числата $1, 2, \dots, 2n$ са разбити на две множества по n числа. За всяко множество са пресметнати всевъзможните n^2 сбора $a + b$, където a и b са елементи на множеството, и тези сборове са взети по модул $2n$. Да се докаже, че наборът от остатъците от едното множество (с кратностите) съвпада с този от другия.

Решение. Нека едното множество е $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, а другото е $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Въвеждаме полиномите

$$P(x) = \sum_{i=1}^n x^{a_i} \text{ и } Q(x) = \sum_{i=1}^n x^{b_i}.$$

Да забележим, че

$$P^2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^{a_i+a_j} \text{ и } Q^2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^{b_i+b_j}.$$

Така исканото е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$x^{2n} - 1 \mid P^2(x) - Q^2(x).$$

Имаме

$$\begin{aligned}P^2(x) - Q^2(x) &= (P(x) + Q(x))(P(x) - Q(x)) \\&= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n-1})(P(x) - Q(x)).\end{aligned}$$

Тъй като $P(1) = Q(1) = n$, то $x - 1 \mid P(x) - Q(x)$. Следователно

$$x^{2n} - 1 = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{2n-1})(x - 1) \mid P^2(x) - Q^2(x).$$

Задача 19. Дадени са просто число p и естествено число $n \geq p$. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ е набор от естествени числа, а f_k е броят k -елементни подмножества на този набор със сбор, кратен на p . Да се докаже, че $\sum_{k=0}^n (-1)^k f_k$ се дели на p (считаме, че $f_0 = 1$).

Задача 19. Дадени са просто число p и естествено число $n \geq p$. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ е набор от естествени числа, а f_k е броят k -елементни подмножества на този набор със сбор, кратен на p . Да се докаже, че $\sum_{k=0}^n (-1)^k f_k$ се дели на p (считаме, че $f_0 = 1$).

Решение. Да разгледаме полинома

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (1 - x^{a_i}).$$

Достатъчно е да докажем, че сборът на коефициентите на P пред мономите от степен, кратна на p , се дели на p . Забелязваме, че това е изпълнено тогава и само тогава, когато свободният член на остатъка при делението на полинома P на полинома $x^p - 1$ се дели на p .

Тъй като $x - 1 \mid 1 - x^{a_i}$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$, то имаме (разглеждаме всичко по модул p , тоест във $\mathbb{F}_p[X]$):

$$x^p - 1 = (x - 1)^p \mid (x - 1)^n \mid \prod_{i=1}^n (1 - x^{a_i}) = P(x).$$

Първото равенство е изпълнено, защото по модул p

$$(x - 1)^p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} x^k = x^p - 1.$$

Тогава можем да запишем

$$P(x) = (x^p - 1)S(x) + pT(x).$$

Остава да забележим, че свободният член на остатъка при делението на полинома $pT(x)$ на полинома $x^p - 1$ се дели на p .

Задача 24. Нека A е множество от n ненулеви цели числа. Да се докаже, че съществува подмножество B на A с повече от $\frac{n}{3}$ елемента такова, че сборът на някои два елемента на B (възможно равни) не принадлежи на B .

Задача 24. Нека A е множество от n ненулеви цели числа. Да се докаже, че съществува подмножество B на A с повече от $\frac{n}{3}$ елемента такова, че сборът на някои два елемента на B (възможно равни) не принадлежи на B .

Идея. Ако вместо с цели числа работихме с множеството от остатъците при деление на просто число $p = 3k + 2$, задачата е по-лесна:

$$S = \{k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1\}$$

съдържа $k + 1 > p/3$ елемента.

Можем да се опитаме да сведем нашата задача до такава за остатъци. Ако намерим много „добри“ множества по модул просто число, след усредняване можем да се надяваме, че „много“ числа от A ще попаднат в такова множество.

Решение. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са елементите на A и $p = 3k + 2$ е просто число, по-голямо от $\max |a_i|$. За всяко $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ числата $a_i, 2a_i, \dots, pa_i$ образуват пълна система остатъци при деление на p (тъй като $a_i \neq 0$ и $|a_i| < p$).

Следователно за всяко $1 \leq i \leq n$ съществуват $k + 1$ числа измежду $a_i, 2a_i, \dots, pa_i$, сравними с $k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1$ по модул p . За всяко $1 \leq j \leq p$ нека B_j е множеството от тези a_i , за които остатъкът на ja_i при деление на p принадлежи на $\{k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1\}$. Имаме

$$\sum_{j=1}^p |B_j| = n(k + 1),$$

откъдето съществува j , за което

$$|B_j| \geq \frac{k + 1}{3k + 2} n > \frac{n}{3}.$$

Остава да проверим, че сборът на някои два елемента на B_j не принадлежи на B_j . Ако допуснем, че три елемента $x, y, z \in B_j$ удовлетворяват $x + y = z$, то остатъците на числата jx, jy, jz при деление на p принадлежат на $\{k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1\}$ и един от тях е равен на сбора на другите два. Но това очевидно е невъзможно, откъдето B_j изпълнява исканото условие.

Задача 25. Нека X е множество от 10000 цели числа, никое от които не се дели на 47. Да се докаже, че съществува 2007-елементно подмножество Y на X такава, че $a - b + c - d + e$ не се дели на 47 за никои $a, b, c, d, e \in Y$.

Идея. Ще вземаме множества от остатъци при деление на 47.

Идея. Ще взимаме множества от остатъци при деление на 47.

Въпрос

Кое голямо множество от остатъци S е такова, че

$$S - S + S - S + S \subseteq \{1, 2, \dots, 46\}?$$

Идея. Ще взимаме множества от остатъци при деление на 47.

Въпрос

Кое голямо множество от остатъци S е такова, че

$$S - S + S - S + S \subseteq \{1, 2, \dots, 46\}?$$

От Коши-Девънпорт

$$46 \geq |S - S + S - S + S| \geq \min(47, 5|S| - 4),$$

така че трябва $|S| \leq 10$. От друга страна,

$$\frac{10 \cdot 10000}{47} > 2007 > \frac{9 \cdot 10000}{47}.$$

Идея. Ще вземаме множества от остатъци при деление на 47.

Въпрос

Кое голямо множество от остатъци S е такова, че

$$S - S + S - S + S \subseteq \{1, 2, \dots, 46\}?$$

От Коши-Девънпорт

$$46 \geq |S - S + S - S + S| \geq \min(47, 5|S| - 4),$$

така че трябва $|S| \leq 10$. От друга страна,

$$\frac{10 \cdot 10000}{47} > 2007 > \frac{9 \cdot 10000}{47}.$$

$S = \{19, 20, \dots, 28\}$ или по-общо $S = \{19d, 20d, \dots, 28d\}$, $d \neq 0$.

Решение. За всяко $i \in \{0, 1, \dots, 46\}$ нека X_i е множеството от елементите на X , които дават остатък i при деление на 47. Ще докажем, че за някое $d \in \{1, 2, \dots, 46\}$ множеството

$$Y_d = X_{19d} \cup X_{20d} \cup \dots \cup X_{28d}$$

съдържа поне 2007 елемента (всички индекси са по модул 47).

Множествата $X_i, i = 1, 2, \dots, 46$ са две по две непресичащи се и обединението им е X . От друга страна, когато d пробягва $1, 2, \dots, 46$, всеки остатък $r \in \{1, 2, \dots, 46\}$ принадлежи точно 10 пъти на множеството $\{19d, 20d, \dots, 28d\}$. Получаваме, че

$$\sum_{d=1}^{46} |Y_d| = 10 \cdot 10000.$$

Следователно за някое d е изпълнено

$$|Y_d| \geq 100000/46 > 2007.$$

Остава да забележим, че ако

$$S = \{19, 20, \dots, 28\},$$

то

$$S - S + S - S + S = \{1, 2, \dots, 46\},$$

и следователно е достатъчно да изберем произволно $Y \subseteq Y_d$ с 2007 елемента.