

Аддитивна комбинаторика. Решения

Борислав Кирилов

Задача 1. Дадени са две множества, съставени от естествени числа, по-малки от n . Да се докаже, че ако общият брой числа в двете множества е не по-малък от n , то можем да изберем по едно число от двете множества със сбор n .

Решение. Нека двете множества са $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ и $B = \{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}$, където $k + \ell \geq n$. Да разгледаме множеството $C = \{n - y_1, n - y_2, \dots, n - y_\ell\}$. Тогава множествата A и C се състоят от естествени числа, по-малки от n . Тъй като те съдържат общо $k + \ell \geq n$ елемента, то съществува естествено число, което принадлежи и на двете множества. Това означава, че съществуват индекси $1 \leq i \leq k$ и $1 \leq j \leq \ell$, за които $x_i = n - y_j$. Следователно $x_i + y_j = n$ и $x_i \in A, y_j \in B$, откъдето следва исканото.

Задача 2. Нека A и B са две крайни множества от естествени числа. Чрез $A + B$ означаваме множеството $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Да се докаже, че $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$.

Решение. Нека $|A| = m, |B| = n$, а $a_1 < a_2 < \dots < a_m, b_1 < b_2 < \dots < b_n$ са елементите на A и B съответно, подредени в нарастващ ред. Тогава числата

$$a_1 + b_1 < a_1 + b_2 < \dots < a_1 + b_n < a_2 + b_n < \dots < a_m + b_n$$

са различни елементи на $A + B$ и са $m + n - 1 = |A| + |B| - 1$ на брой.

Задача 3. Дадени са 70 различни естествени числа, не по-големи от 200. Да се докаже, че някои две от тях имат разлика четири, пет или девет.

Решение. Нека $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{70}\}$ е множеството от числата и да въведем множествата $S + 4 = \{s + 4 \mid s \in S\} = \{x_1 + 4, x_2 + 4, \dots, x_{70} + 4\}$ и $S + 9 = \{s + 9 \mid s \in S\} = \{x_1 + 9, x_2 + 9, \dots, x_{70} + 9\}$. Тези три множества съдържат общо $3 \cdot 70 = 210$ елемента, всички от които са естествени числа, по-малки от 210. Тогава две от множествата се пресичат, откъдето съществуват индекси $1 \leq i, j \leq 70$ и различни числа $c, d \in \{0, 4, 9\}$, за които $x_i + c = x_j + d$. Това е равносилно на $|x_i - x_j| = |c - d|$ и остава да забележим, че $|c - d| \in \{4, 5, 9\}$.

Задача 4. Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_7$. Да се докаже, че можем да изберем няколко от тях (поне едно) и да поставим пред някои от тях знак плюс, а пред някои минус, така, че крайният резултат да се дели на 100.

Решение. Броят на подмножествата на $\{1, 2, \dots, 7\}$ е $2^7 = 128 > 100$. От принципа на Дирихле следва, че за някои две различни подмножества $I \neq J$ числата $\sum_{i \in I} a_i$ и $\sum_{j \in J} a_j$ дават едни и същи остатъци при деление на 100. Тогава разликата $\sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} a_j$ изпълнява исканото (забележете, че е възможно някои от събираемите да се съкратят).

Задача 5. Сто и едно числа измежду естествените числа от 1 до 10^6 са оцветени в синьо. Да се докаже, че можем да оцветим в червено други сто числа, не по-големи от 10^6 , така, че всичките сборове на червено и синьо число (общо $100 \cdot 101$ сбора) да са различни.

Решение. Нека сините числа са $a_1, a_2, \dots, a_{101}$. Да означим

$$A = \{a_i - a_j \mid 1 \leq i, j \leq 101\}$$

множеството от разликите на сините числа и да забележим, че A съдържа не повече от $101 \cdot 100 + 1 = 10101$ елемента, от които не повече от 5050 са положителни. Ще избираме червените числа едно по едно. Две числа b и c не трябва да бъдат едновременно червени тогава и само тогава, когато $b - c \in A$. И така, избираме първото червено число да е най-малкото естествено число, което не е синьо. То е не по-голямо от 102. Да предположим, че сме избрали $k \leq 99$ червени числа. Тогава числата, които не можем да оцветим в червено, са не повече от $101 + 5051 + (k - 1)10101 = 10101k - 4949 < 10^6$ (имама 101 сини числа, не повече от 5051 за първото (най-малко) червено число и по не повече от 10101 за всяко от останалите червени числа). Следователно съществува поне едно число, по-малко от 10^6 , което може да бъде оцветено в червено. Продължаваме последователно така, докато не оцветим сто числа в червено.

Задача 6. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са две по две различни естествени числа и нека M е множество от $n - 1$ естествени числа, различни от $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Скакалец скача по реалната ос, започвайки от точката 0, като прави n скока надясно с дължини $a_1, a_2, \dots, a_n$ в някакъв ред. Да се докаже, че последователността на скоковете може да се избере така, че скакалецът никога да не попада в точка от M .

Решение. Ще проведем индукция по n . Случаите $n = 1, 2$ следват непосредствено. Нека сега $n \geq 3$ и да разгледаме числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Нека m е най-голямото число в M . Ще разгледаме няколко случая:

- Ако $m \leq s - a_n$, да приложим индукционната хипотеза за числата $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ и множеството $M \setminus \{m\}$. Получаваме поредица от скокове, които водят от 0 до $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$. Ако при тази поредица скакалецът не посещава точката m , то добавяме скокът a_n като последен, за да получим решение от 0 до s . Ако скакалецът посещава точката m след като е направил скок с дължина a_k , то заменяме този скок с a_n и добавяме към поредицата от $n - 1$ скока последен скок с дължина a_k . Тази последователност от скокове води от 0 до s и не посещава нито едно число от M , защото $m = \max M$.
- Ако $m > s - a_n$ и $s - a_n \notin M$, то измежду числата $1, 2, \dots, s - a_n$ има не повече от $n - 2$ елемента на M . Индукционната хипотеза ни предоставя път от 0 до $s - a_n$, който използва скокове с дължини $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Допълваме го със скок с дължина a_n .
- Ако $m > s - a_n$ и $s - a_n \in M$, то тъй като $|M| = n - 1$, съществува $1 \leq i \leq n - 1$, за което нито едно от числата $s - a_i$ и $s - a_n - a_i$ не принадлежи на M . Прилагаме индукционната хипотеза за $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \setminus \{a_i, a_n\}$ и подмножеството на M , състоящо се от числата, не по-големи от $s - a_n - a_i$ (то съдържа не повече от $n - 3$ елемента). Накрая допълваме получения път със скокове с дължини a_n и a_i .

Задача 7 (Класика). Дадени са n естествени числа. Да се докаже, че сборът на няколко от тях се дели на n .

Решение. Да разгледаме сборовете $x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n$, които са n на брой. Ако някой от тях се дели на n , условието е изпълнено. В противен случай, от принципа на Дирихле следва, че съществуват индекси $1 \leq k < \ell \leq n$, за които сборовете $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_\ell$ дават равни остатъци при деление на n . Тогава тяхната разлика $x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_\ell$ се дели на n и е сбор на няколко от числата, с което задачата е решена.

Задача 8. Дадени са $n - 1$ естествени числа от 1 до n , не всички от които са равни. Да се докаже, че сборът на няколко от тях се дели на n .

Решение. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ са дадените числа и да предположим, че x_1 и x_2 са две различни числа. Да разгледаме сборовете $x_1, x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$, които са n на брой. Ако някой от тях се дели на n , исканото е изпълнено. В противен случай, от принципа на Дирихле следва, че две от тези числа са с равни остатъци при деление на n . Тогава тяхната разлика е сбор на няколко от числата и се дели на n .

Задача 9. На дъската са записани сто естествени числа, по-малки от 100, със сбор 200. Да се докаже, че сборът на няколко от тях е равен на 100.

Решение. Ако всички записани числа са равни, то те са равни на 2 и можем да изберем 50 от тях така, че да имат сбор 100. В противен случай, нека числата на дъската са $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ и да предположим, че $x_1 < x_2$. Да разбием естествените числа от 1 до 200 на двойки $(1, 101), (2, 102), (3, 103), \dots, (100, 200)$. Тогава от принципа на Дирихле следва, че две от числата

$$x_1 < x_2 < x_1 + x_2 < x_1 + x_2 + x_3 < \dots < x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$$

са в една и съща двойка. Тъй като тези числа са различни, то разликата им е равна на 100. Остава да забележим, че тази разлика се представя като сбор на няколко от числата, записани на дъската.

Задача 10. Дадена е купчинка от картички, върху всяка от които е написано някое от числата $1, 2, \dots, n$. Известно е, че сборът на всички записани числа е равен на $k \cdot n!$ за някое естествено число k . Да се докаже, че е възможно да разделим картичките на k купчинки така, че сборът на числата върху картичките във всяка купчинка да е равен на $n!$.

Решение. Ще проведем индукция по n . Твърдението е очевидно при $n = 1$. Да разгледаме сега някое $n > 1$ и купчинка от картички като в условието. Да оцветим картичките с числа, по-малки от n , в жълто, а тези с n – във виолетово. Ако има поне n жълти картички, от задача 7 следва, че сборът на числата върху няколко от тях се дели на n и следователно се записва като $r \cdot n$, където $1 \leq r < n$. Да заместим тези картички с една оранжева картичка с надпис r . Ако оставащите жълти картички са поне n , можем да приложим същото разсъждение. Продължаваме така, докато не получим множество от оранжеви, виолетови и жълти картички, като жълтите са по-малко от n . Тъй като общият сбор на числата, записани върху всички картички в

началото, се дели на n , сборът на числата върху оставащите жълти картички се дели на n . Следователно можем да заменим оставащите жълти картички с една оранжева картичка като по-горе. Да заменим и виолетовите картички с оранжеви, върху които е записано числото едно. Така получихме множество от оранжеви картички, върху всяка от които е записано естествено число, не по-голямо от $n - 1$, като сборът на всички числа е $k \cdot (n - 1)!$. Остава да приложим индукционната хипотеза за $n - 1$ и да върнем оранжевите картички към началните.

Досега разглеждахме основно задачи, в които работихме с естествени числа. Когато работим с множеството от остатъците по модул просто число, Задача 2 има следния аналог:

Теорема (Коши-Девънпорт). Нека p е просто число, а A и B са множества от остатъци при деление на p . Чрез $A + B$ означаваме множеството от остатъци $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Тогава $|A + B| \geq \min(p, |A| + |B| - 1)$.

Доказателство. Случаят, в който $|A| + |B| \geq p + 1$, е по-лесен и следва от аргумент, сходен с този в задача 1. По-нататък ще считаме, че $|A| + |B| \leq p$ и ще проведем индукция по $|A|$. Основата при $|A| = 0, 1$ следва непосредствено. Нека сега считаме, че $|A| \geq 2$ и $|B| > 0$. Нека $x \neq y$ са два различни елемента на A . Тогава съществува остатък $z \in B$, за който $z + (y - x) \notin B$. Наистина, ако допуснем противното и $b \in B$ е произволен елемент, то бихме получили последователно

$$b + (y - x) \in B, b + 2(y - x) \in B, \dots,$$

откъдето множеството B би съдържало всички остатъци при деление на p . Да разгледаме множеството $A' = A + (z - x)$. За него е в сила $|A'| = |A|$, $|A' + B| = |A + B|$, $z + y - x \in A'$, а значи A' не е подмножество на B . Да забележим, че $(A' \cap B) + (A' \cup B) \subseteq A' + B$. Остава да приложим индукционната хипотеза за множествата $A' \cap B$ и $A' \cup B$. $\square$

Задача 11. Да се докаже, че за всяко естествено число k и просто число p съществуват цели числа x и y , за които $x^2 + y^2 \equiv k \pmod{p}$.

Решение. Случаят $p = 2$ се разглежда непосредствено. Нека сега $p > 2$ е нечетно просто число. Тогава остатъците, които дават квадратите на целите числа при деление на p , са точно $\frac{p+1}{2}$ ($\frac{p-1}{2}$ квадратични остатъка и един нулев остатък). От теоремата на Коши-Девънпорт следва, че броят остатъци, които се представят като сбор на два квадрата, е поне p , тоест всички остатъци се представят като сбор на два квадрата.

Задача 12. Нека $p > 100$ е просто число. Да се докаже, че съществуват пет естествени числа, некрлатни на p , сборът на четвъртите степени на които се дели на p .

Решение. Множеството $S = \{x^4 \pmod{p} \mid x \in \mathbb{N}, p \nmid x\}$ съдържа $\frac{p-1}{4}$ елемента, ако $4 \mid p - 1$, и $\frac{p-1}{2}$ иначе. Прилагаме теоремата на Коши-Девънпорт последователно четири пъти, за да получим, че броят остатъци, които можем да получим като сбор на пет елемента на S , е поне $\min(p, 5 \cdot \frac{p-1}{4} - 4) = p$ (използвахме $p > 100$). Оттук следва, че съществуват пет елемента на S със сбор, кратен на p .

Задача 13. В редица са записани 26 ненулеви десетични цифри. Да се докаже, че тази редица може да бъде разбита на няколко части така, че сборът на числата, образувани от цифрите в отделните части, да се дели на 13.

Решение. Нека редицата от цифри е $d_1d_2 \dots d_{26}$. Да я разбием на 13 двойки съседни цифри $d_1d_2 \mid d_3d_4 \mid \dots \mid d_{25}d_{26}$. Да забележим, че ако разбием дадена двойка $d_{2i-1}d_{2i}$ на две единични цифри, получаваме различен сбор, отколкото, ако я запазим като двойка (тоест $10d_{2i-1} + d_{2i} \not\equiv d_{2i-1} + d_{2i} \pmod{13}$). Сега идеята е да разгледаме всички възможности, при които разбиваме цифрите на тези 13 двойки, а после някои от двойките и на единични цифри. От теоремата на Коши-Девънпорт следва, че броят остатъци, които можем да получим по този начин, е поне $\min(13, 13 \cdot 2 - 12) = 13$. Следователно можем да направим разделянето така, че сборът да се дели на 13.

Задача 14. Нека p е просто число, $r \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ и $a_1, a_2, \dots, a_r \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Да разгледаме остатъците на числата от вида $\sum_{i \in S} a_i$, където S пробягва всички подмножества на $\{1, 2, \dots, r\}$ (включително празното подмножество, в който случай съответстващият сбор е 0). Да се докаже, че се получават поне $r+1$ различни остатъка.

Решение. Ще проведем индукция по r . Случаят $r=1$ следва непосредствено. Нека сега $r > 1$ и да разгледаме числа $a_1, a_2, \dots, a_r \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Да допуснем, че тези числа нарушават твърдението на задачата. От индукционната хипотеза следва, че всевъзможните сборове $\sum_{i \in T} a_i$, където $T \subseteq \{1, 2, \dots, r-1\}$, дават поне r различни остатъка. Тъй като по допускане сборовете $\sum_{i \in S} a_i$, $S \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$ дават по-малко от $r+1$ остатъка, то тези остатъци са точно r . Да ги означим $b_1, b_2, \dots, b_r$. Тъй като всеки един от тези остатъци се представя като сума на няколко (възможно нула) числа измежду $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$, то остатъците $b_1 + a_r, b_2 + a_r, \dots, b_r + a_r$ също трябва да присъстват. Така заключаваме, че $\{b_1, b_2, \dots, b_r\} = \{b_1 + a_r, b_2 + a_r, \dots, b_r + a_r\}$. Събирайки елементите на тези множества, получаваме $p \mid ra_r$, което е противоречие. Това завършва индукционната стъпка, а значи и доказателството.

Задача 15 (Теорема на Ердьош-Гинзбург-Зив). Нека n е естествено число. Да се докаже, че измежду всеки $2n-1$ естествени числа можем да изберем n със сбор, кратен на n .

Решение. Първо ще разгледаме случая, в който $n=p$ е просто число. Можем да предположим, че дадените числа са не по-големи от p , и нека подредим тези числа $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2p-1}$. Ако за някое $1 \leq j \leq p$ е изпълнено $a_{j+p-1} = a_j$, то всичките числа $a_j, a_{j+1}, \dots, a_{j+p-1}$ са равни и следователно сборът им се дели на p . Да разгледаме сега случая, в който всички числа $a_{j+p-1} - a_j$, $j = 2, 3, \dots, p$ са в интервала $[1, p-1]$. От предходната задача следва, че сборовете на тези числа дават поне p остатъка при деление на p , тоест те дават всички остатъци при деление на p . В частност съществуват няколко (възможно нула) индекса $2 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq p$, за които числото $a_{j_1+p-1} + a_{j_2+p-1} + \dots + a_{j_k+p-1} - a_{j_1} - a_{j_2} - \dots - a_{j_k} + a_1 + a_2 + \dots + a_p$ се дели на p . Лесно е да се забележи, че този израз представлява сбор на p числа измежду дадените, с което доказателството в случая $n=p$ е завършено.

В общия случай можем да считаме, че $n > 1$. Тъй като всяко естествено число, по-голямо от едно, се представя като произведение на краен брой прости числа, е достатъчно да проверим, че ако две естествени числа n_1 и n_2 изпълняват условието на

задачата, то и $n_1 n_2$ също го изпълнява. Наистина да разгледаме $2n_1 n_2 - 1$ естествени числа. Да изберем n_1 измежду тях със сбор $n_1 m_1$, където m_1 е естествено. Измежду останалите $2n_1 n_2 - 1 - n_1$ числа отново избираме n_1 числа със сбор $n_1 m_2$. Прилагаме тази стъпка $2n_2 - 1$ пъти за да получим $2n_2 - 1$ непресичащи се групи от по n_1 числа със сборове $n_1 m_1, n_1 m_2, \dots, n_1 m_{2n_2-1}$. Измежду числата $m_1, m_2, \dots, m_{2n_2-1}$ можем да изберем n_2 със сбор, кратен на n_2 . Съответните групи съдържат общо $n_1 n_2$ числа със сбор, кратен на $n_1 n_2$.

Задача 16. Нека p е просто число. Върху всяко ребро на пълен граф с $1000p$ върха е записано естествено число. Да се докаже, че графът съдържа цикъл, сборът от числата върху ребрата на който се дели на p .

Решение. За два върха u и v на графа ще означаваме чрез $f(u, v)$ числото, записано върху реброто uv на графа. Да разгледаме $p - 1$ непресичащи се триъгълника в графа $T_1, T_2, \dots, T_{p-1}$. Ако сборът от числата върху трите ребра на някой от тези триъгълници се дели на p , то задачата е решена. В противен случай, за всяко $i = 1, 2, \dots, p - 1$ да означим чрез v_{i1}, v_{i2}, v_{i3} върховете на триъгълника T_i така, че $f(v_{i1}, v_{i2}) + f(v_{i2}, v_{i3}) \not\equiv f(v_{i1}, v_{i3}) \pmod{p}$. Разглеждаме цикъла $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{23}, \dots, v_{(p-1)1}, v_{(p-1)2}, v_{(p-1)3}, v_{11}$. Той може да бъде скъсен, ако за някое i заменим ребрата $v_{i1}v_{i2}$ и $v_{i2}v_{i3}$ с реброто $v_{i1}v_{i3}$. При това сборът на всички числа върху ребрата на цикъла се променя с $f(v_{i1}, v_{i3}) - f(v_{i1}, v_{i2}) - f(v_{i2}, v_{i3})$. Разглеждайки всевъзможните скъсявания (които може да са на повече от едно място), виждаме, че можем да променим сбора на числата върху големия цикъл с всеки елемент на множеството

$$\{0, f(v_{11}, v_{13}) - f(v_{11}, v_{12}) - f(v_{12}, v_{13})\} + \{0, f(v_{21}, v_{23}) - f(v_{21}, v_{22}) - f(v_{22}, v_{23})\} + \dots \\ + \{0, f(v_{(p-1)1}, v_{(p-1)3}) - f(v_{(p-1)1}, v_{(p-1)2}) - f(v_{(p-1)2}, v_{(p-1)3})\}.$$

Теоремите на Коши-Девънпорт и Ердьош-Гинзбург-Зив имат и чисто алгебрични доказателства. За тях, както и за други приложения на подобни техники, препращаме читателя към книгата „Problems from the book“ на Титу Андрееску и Габриел Доспинеску.

Решенията на следващите няколко задачи се основават на въвеждането на подходящи полиноми. Да направим няколко предварителни наблюдения. Нека $P(x) \in \mathbb{Z}[X]$ е полином с цели коефициенти и n е естествено число. За всяко $0 \leq r \leq n - 1$ нека $b_r(P)$ е сборът от коефициентите на P пред мономите, чиято степен дава остатък r при деление на n . С други думи,

$$\text{ако } P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k, \text{ то } b_r(P) = \sum_{\substack{k=0 \\ n|k-r}}^d a_k.$$

В задачите ще бъде потребно да пресмятаме коефициентите b_r . Полезно наблюдение е, че остатъкът при делението на полинома P на полинома $x^n - 1$ е полиномът $\sum_{r=0}^{n-1} b_r(P) x^r$. Наистина достатъчно е да забележим, че за всяко $m = kn + r$ е изпълнено

$$x^m = x^{kn+r} = x^{kn} x^r = (x^{kn} - 1)x^r + x^r = (x^n - 1)(x^{(k-1)n} + x^{(k-2)n} + \dots + 1)x^r + x^r.$$

Задача 17. Дадени са просто число p и два набора от естествени числа $A = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$. Известно е, че сред числата $a_i + b_j$ ($1 \leq i, j \leq p$) точно p числа дават остатък 0 при деление на p , точно p дават остатък 1, ..., точно p дават остатък $p - 1$. Да се докаже, че в един от двата набора всеки остатък при деление на p се среща точно по веднъж.

Решение. Определяме полиномите $P(x) = \sum_{i=1}^p x^{a_i}$ и $Q(x) = \sum_{i=1}^p x^{b_i}$. Да разгледаме произведението на двата полинома PQ : за него е изпълнено $(PQ)(x) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p x^{a_i+b_j}$. От условието следва, че

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} \mid (PQ)(x).$$

Но $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$ е неразложим над $\mathbb{Q}[X]^1$, откъдето или P , или Q се дели на $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$. Оттук следва исканото.

Задача 18. Числата $1, 2, \dots, 2n$ са разбити на две множества по n числа. За всяко множество са пресметнати всевъзможните n^2 сбора $a + b$, където a и b са елементи на множеството, и тези сборове са взети по модул $2n$. Да се докаже, че наборът от остатъците от едното множество (с кратностите) съвпада с този от другия.

Решение. Нека едното множество е $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, а другото е $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Въвеждаме полиномите $P(x) = \sum_{i=1}^n x^{a_i}$ и $Q(x) = \sum_{i=1}^n x^{b_i}$. Да забележим, че $P^2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^{a_i+a_j}$ и $Q^2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x^{b_i+b_j}$. Така исканото е изпълнено тогава и само тогава, когато $x^{2n} - 1 \mid P^2(x) - Q^2(x)$. Имаме

$$P^2(x) - Q^2(x) = (P(x) + Q(x))(P(x) - Q(x)) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{2n-1})(P(x) - Q(x)).$$

Тъй като $P(1) = Q(1) = n$, получаваме $x - 1 \mid P(x) - Q(x)$. Следователно

$$x^{2n} - 1 = (1 + x + x^2 + \dots + x^{2n-1})(x - 1) \mid P^2(x) - Q^2(x),$$

откъдето следва исканото.

Задача 19. Дадени са просто число p и естествено число $n \geq p$. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ е набор от естествени числа, а f_k е броят k -елементни подмножества на този набор със сбор, кратен на p . Да се докаже, че $\sum_{k=0}^n (-1)^k f_k$ се дели на p (считаме, че $f_0 = 1$).

Решение. Да разгледаме полинома $P(x) = \prod_{i=1}^n (1 - x^{a_i})$. Достатъчно е да докажем, че сборът на коефициентите на P пред мономите от степен, кратна на p , се дели на p . Забелязваме, че това е изпълнено тогава и само тогава, когато свободният член на остатъка при делението на полинома P на полинома $x^p - 1$ се дели на p . Тъй като $x - 1 \mid 1 - x^{a_i}$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$, то имаме (разглеждаме всичко по модул p , тоест във $\mathbb{F}_p[X]$):

$$x^p - 1 = (x - 1)^p \mid (x - 1)^n \mid \prod_{i=1}^n (1 - x^{a_i}) = P(x)$$

(първото равенство е изпълнено, защото $(x - 1)^p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} x^k = x^p - 1$ във $\mathbb{F}_p[X]$.) Това означава, че съществуват полиноми $S(x)$ и $T(x)$ с цели коефициенти, за които $P(x) = (x^p - 1)S(x) + pT(x)$. Остава да забележим, че свободният член на остатъка при делението на полинома $pT(x)$ на полинома $x^p - 1$ се дели на p .

¹Това е така, тъй като $1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1} = \frac{x^p - 1}{x - 1}$ и полиномът $\frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i+1} x^i$ е неразложим (от критерия на Айзенщайн).

Задача 20. Във всяка клетка на таблица 101×101 е записано естествено число. Да се докаже, че броят начини да изберем по една клетка от всеки ред на таблицата така, че сборът на числата в избраните клетки да се дели на 101, се дели на 101.

Решение. Полагаме $p = 101$ и ще използваме, че p е просто число. За всеки $i, j = 1, 2, \dots, p$ нека a_{ij} е числото, записано в ред i и стълб j на таблицата. За всяко $i = 1, 2, \dots, p$ въвеждаме полинома $P_i(x) = \sum_{j=1}^p x^{a_{ij}}$. Както по-горе, достатъчно е да докажем, че свободният член на остатъка при делението на полинома $P_1(x)P_2(x)\dots P_p(x)$ на полинома $x^p - 1$ се дели на p . Да забележим, че $x - 1 \mid P_i(x) - p$ за всяко $i = 1, 2, \dots, p$. Тогава получаваме, че (по модул p):

$$x^p - 1 = (x - 1)^p \mid \prod_{i=1}^p (P_i(x) - p) = \prod_{i=1}^p P_i(x).$$

Както в задача 19, исканото следва.

Задача 21. Нека n е естествено число. Дадени са $2^n + 1$ различни крайни множества от естествени числа. Множествата са оцветени в синьо и червено (множествата, а не техните елементи) така, че има поне едно оцветено множество във всеки цвят. Определяме симетричната разлика на две множества като множеството от елементи, които принадлежат на точно едно от двете множества. Да се докаже, че съществуват поне 2^n различни множества, които могат да бъдат получени като симетричната разлика на синьо и червено множество.

Упътване. Имитирайте комбинаторното доказателство на теоремата на Коши-Девънпорт или проведете индукция по n . Възможно е и доказателство, което имитира алгебричното доказателство на теоремата на Коши-Девънпорт (чрез комбинаторната теорема за нулите на Алон, виж книгата на Титу Андрееску и Габриел Доспинеску).

Задача 22. Нека X и Y са две крайни подмножества на интервала $[0, 1)$ такива, че $0 \in X \cap Y$ и $x + y \neq 1$ за някои $x \in X$ и $y \in Y$. Да се докаже, че множеството $\{x + y - \lfloor x + y \rfloor \mid x \in X, y \in Y\}$ съдържа поне $|X| + |Y| - 1$ елемента.

Упътване. Имитирайте комбинаторното доказателство на теоремата на Коши-Девънпорт.

Задача 23. Нека m и n са естествени числа, за които $n \geq m \geq 2$, и нека S е множество от n естествени числа. Да се докаже, че S съдържа поне 2^{n-m+1} различни подмножества със сбор на елементите, кратен на m . (Празното подмножество изпълнява това условие).

Първо решение. Нека $s_1, s_2, \dots, s_n$ са елементите на S . За всяко $k = 1, 2, \dots, n$ нека A_k е множеството на всевъзможните сборове на $s_1, s_2, \dots, s_k$. Нека a_k е броят различни остатъци при деление на m на числата в A_k , а b_k е най-малката кратност на тези остатъци, които се срещат в A_k . Ще докажем, че $b_k \geq 2^{k+1-a_k}$ за всяко $k = 1, 2, \dots, n$, откъдето ще следва $b_n \geq 2^{n+1-m}$. Доказателството е по индукция, като основата $k = 0$ следва непосредствено. Да допуснем сега, че твърдението е вярно за някое k . Ако $a_{k+1} > a_k$, то индукционната стъпка следва от

$$b_{k+1} \geq b_k \geq 2^{k+1-a_k} \geq 2^{k+2-a_{k+1}}.$$

В противен случай, $a_{k+1} = a_k$ и тогава остатъците на $A_k + s_{k+1}$ са същите като тези на A_k . Оттук следва, че $b_{k+1} \geq 2b_k$, което завършва индукционната стъпка.

Второ решение. Ще докажем твърдението с индукция за всяко $m \geq 1$. Основата при $m = 1$ следва непосредствено.

Нека сега $m = pk$, където p е просто и $k \geq 1$. Непразно подмножество $T \subseteq S$ ще наричаме *добро*, ако сборът от елементите му се дели на k , но не на m . Добро подмножество ще наричаме *свършено*, ако то не съдържа други добри подмножества. От задача 7 следва леко, че всички свършени подмножества съдържат не повече от k елемента (забележете, че такива подмножества може да не съществуват!).

Да разгледаме сега представяне

$$S = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r \cup T,$$

където всички T_i са свършени, всички подмножества $T_1, T_2, \dots, T_r, T$ са две по две непресичащи се и или $r = p - 1$, или $r < p - 1$, но е максимално възможно. И в двата случая е изпълнено $|T| \geq n - (p - 1)k = n - m + k$, откъдето според индукционната хипотеза поне $2^{|T|-k+1} \geq 2^{n-m+1}$ подмножества на T имат сбор, кратен на k ; ще наричаме тези подмножества *красиви*.

Ако $r < p - 1$, то всяко красиво подмножество има сбор, кратен на m , защото r е максимално. Следователно в този случай исканото следва. Ако $r = p - 1$, да докажем следната:

Лема. За всяко $0 \leq i \leq p - 1$, съществува подмножество на $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{p-1}$ със сбор на елементите с остатък ik при деление на m .

Доказателство. Ще използваме само обединенията на множествата T_i . Въвеждаме множествата $A_i = \{0, a_i\}$, където за всяко i полагаме $a_i = \frac{1}{k} \sum_{j \in T_i} j$. От теоремата на Коши-Девънпорт следва, че (модул p):

$$|A_1 + A_2 + \dots + A_{p-1}| \geq \min(p, |A_1| + \dots + |A_{p-1}| - (p - 1) + 1) = p.$$

Следователно за всяко $0 \leq i \leq p - 1$ можем да изберем $J_i \subseteq \{1, 2, \dots, p - 1\}$, за което $\sum_{j \in J_i} a_j \equiv i \pmod{p}$. Тогава $\sum_{j \in J_i} \sum_{b \in T_j} b$ дава остатък ik при деление на m . $\square$

Сега остава да забележим, че благодарение на лемата всяко красиво множество може да бъде допълнено до множество със сбор на елементите, кратен на m , като добавим няколко елемента на $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{p-1}$. Исканото следва.

Задача 24 (Ердьош). Нека A е множество от n ненулеви цели числа. Да се докаже, че съществува подмножество B на A с повече от $\frac{n}{3}$ елемента такова, че сборът на никои два елемента на B (възможно равни) не принадлежи на B .

Решение. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са елементите на A и $p = 3k + 2$ е просто число, по-голямо от $\max |a_i|$. За всяко $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ числата $a_i, 2a_i, \dots, pa_i$ образуват пълна система остатъци при деление на p (тъй като $a_i \neq 0$ и $|a_i| < p$). Следва, че за всяко $1 \leq i \leq n$ съществуват $k + 1$ числа измежду $a_i, 2a_i, \dots, pa_i$, сравними с $k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1$ по модул p . За всяко $1 \leq j \leq p$ нека B_j е множеството от тези a_i , за които остатъкът на ja_i при деление на p принадлежи на $\{k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1\}$. Имаме $\sum_{j=1}^p |B_j| = n(k + 1)$, откъдето съществува j , за което $|B_j| \geq \frac{k+1}{3k+2}n > \frac{n}{3}$. Остава да проверим, че сборът на никои два елемента на B_j не принадлежи на B_j . Ако допуснем, че три елемента $x, y, z \in B_j$ удовлетворяват $x + y = z$, то остатъците на числата jx, jy, jz при деление на p принадлежат на $\{k + 1, k + 2, \dots, 2k + 1\}$ и един от тях е равен на сбора на другите два. Но това очевидно е невъзможно, откъдето B_j изпълнява исканото условие.

Задача 25. Нека X е множество от 10000 цели числа, никое от които не се дели на 47. Да се докаже, че съществува 2007-елементно подмножество Y на X такава, че $a - b + c - d + e$ не се дели на 47 за някои $a, b, c, d, e \in Y$.

Решение. За всяко $i \in \{0, 1, \dots, 46\}$ нека X_i е множеството от елементите на X , които дават остатък i при деление на 47. Ще докажем, че за някое $d \in \{1, 2, \dots, 46\}$ множеството

$$Y_d = X_{19d} \cup X_{20d} \cup \dots \cup X_{28d}$$

съдържа поне 2007 елемента (всички индекси са по модул 47). Наистина множествата $X_i, i = 1, 2, \dots, 46$ са две по две непресичащи се и обединението им е X . От друга страна, когато d пробягва $1, 2, \dots, 46$, всеки остатък $r \in \{1, 2, \dots, 46\}$ принадлежи точно 10 пъти на множеството $\{19d, 20d, \dots, 28d\}$. Получаваме, че $\sum_{d=1}^{46} |Y_d| = 10 \cdot 10000$, и следователно за някое d е изпълнено $|Y_d| \geq 100000/46 > 2007$. Остава да забележим, че ако $S = \{19, 20, \dots, 28\}$, то $S - S + S - S + S = \{1, 2, \dots, 46\}$, и следователно е достатъчно да изберем произволно $Y \subseteq Y_d$ с 2007 елемента.

Задача 26. Нека p е просто число и A и B са непразни множества от остатъци при деление на p . Да се докаже, че съществува ненулев остатък x , за който

$$|A + xB| \geq \min \left(\frac{|A||B|}{2}, \frac{p}{6} \right),$$

където $xB = \{xb \mid b \in B\}$.

Упътване. За всяко $x \in 1, 2, \dots, p-1$ имаме, че

$$|A + xB| = \left| \bigcup_{a \in A} (a + xB) \right| \geq \sum_{a \in A} |a + xB| - \frac{1}{2} \sum_{\substack{a_1, a_2 \in A \\ a_1 \neq a_2}} |(a_1 + xB) \cap (a_2 + xB)|.$$

Съберете това неравенство по всички x и чрез двойно броене получите, че

$$\frac{1}{p-1} \sum_x |A + xB| \geq |A||B| - \frac{|A|^2|B|^2}{2(p-1)}.$$

Това е достатъчно, ако $|A||B| < p$. В случая $|A||B| \geq p$ разгледайте подмножества $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$, за които $p/3 \leq |A'||B'| < p$.

Задача 27. Съществуват ли 100 различни естествени числа, не по-големи от 25000, чиито сборове по двойки са два по два различни?

Решение. Ще дадем пример за такива 100 числа. За естествено число n нека r_n е остатъкът на n^2 при деление на 101. Да разгледаме числата $202n + r_n$ за $n = 1, 2, \dots, 100$. Да допуснем, че съществуват две различни двойки числа с еднакви сборове:

$$202(a + b) + r_a + r_b = 202(c + d) + r_c + r_d$$

за някои $1 \leq a, b, c, d \leq 100, \{a, b\} \neq \{c, d\}$. Имаме $202(a + b - c - d) = r_c + r_d - r_a - r_b$. Тъй като $0 \leq r_a, r_b, r_c, r_d \leq 100$, то $|r_c + r_d - r_a - r_b| \leq 200$. Но $202(a + b) - 202(c + d)$ се дели на 202, откъдето $a + b = c + d$ и $r_a + r_b = r_c + r_d$. Сега от $a^2 + b^2 \equiv c^2 + d^2 \pmod{101}$ и $(a + b)^2 \equiv (c + d)^2 \pmod{101}$ следва, че $2ab \equiv 2cd \pmod{101}$ и $ab \equiv cd \pmod{101}$. Следователно квадратните тричлени $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - (c + d)x + cd = (x - c)(x - d)$ имат едни и същи корени във $\mathbb{F}_{101}$, откъдето $\{a, b\} = \{c, d\}$, което е противоречие. Остава да забележим, че всички разгледани числа са не по-големи от 20300.

Задача 28. За дадено просто число p множество S от остатъци при деление на p се нарича *свободна от суми мултипликативна подгрупа* на $\mathbb{F}_p$, ако:

- съществува ненулев остатък α при деление на p такъв, че $S = \{1, \alpha^1, \alpha^2, \dots\}$ (разглеждаме множеството по модул p);
- не съществуват $a, b, c \in S$ (не задължително различни), за които $a + b \equiv c \pmod{p}$.

Да се докаже, че за всяко естествено число N съществуват просто число p и свободна от суми мултипликативна подгрупа S на $\mathbb{F}_p$, за които $|S| \geq N$.

Решение. Нека $d > N$ е естествено число, а $p \equiv 1 \pmod{d}$ е просто число. Да разгледаме множеството от остатъци x при деление на p , за които $x^d \equiv 1 \pmod{p}$. Това множество съдържа точно d елемента и е мултипликативна подгрупа на $\mathbb{F}_p$ (тоест изпълнява първата точка от условието). Да допуснем, че съществуват естествени числа i, j, k , за които $\alpha^i + \alpha^j \equiv \alpha^k \pmod{p}$. Тогава $1 + \alpha^{j-i} \equiv \alpha^{k-i} \pmod{p}$. Следователно $x = \alpha^{j-i}$ е такова, че $x^d - 1 \equiv (x + 1)^d - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Ще използваме следната лема:

Лема. Нека P и Q са полиноми с цели коефициенти. Ако за безбройно много прости числа p съществува естествено число x , за което $P(x) \equiv Q(x) \equiv 0 \pmod{p}$, то съществува комплексно число ζ , за което $P(\zeta) = Q(\zeta) = 0$.

Доказателство. Да допуснем, че полиномите P и Q са взаимно прости (разглеждаме ги като полиноми с рационални коефициенти). Тогава от лемата на Безу следва, че съществуват полиноми R и S с цели коефициенти и ненулево цяло число D , за които $RP - SQ = D$. Да изберем просто число p и естествено число x като в условието – полагайки x в последното равенство получаваме, че $p \mid D$. Но тъй като предполагаме, че съществуват безбройно много такива прости числа p , получаваме противоречие. Следователно полиномите P и Q не са взаимно прости като полиноми с рационални коефициенти и тогава те имат общ комплексен корен. $\square$

Да се върнем сега към задачата. От теоремата на Дирихле знаем, че за фиксирано естествено число d съществуват безбройно много прости числа $p \equiv 1 \pmod{d}$. Да допуснем, че за никое такова просто p множеството, което разглеждаме, не е свободно от суми. От лемата следва, че полиномите $x^d - 1$ и $(x + 1)^d - 1$ имат общ комплексен корен ζ . Тогава $|\zeta| = |\zeta + 1| = 1$, откъдето $\zeta \in \{e^{2\pi i/3}, e^{4\pi i/3}\}$, а значи $3 \mid d$. Така за всяко d , което не се дели на 3, съществува просто p , за което разгледаното множество от остатъци е свободна от суми мултипликативна подгрупа на $\mathbb{F}_p$.

Задача 29 (Теорема на Шур). Всяко естествено число е оцветено в един от k цвята. Да се докаже, че съществуват три едноцветни числа a, b и c , за които $a + b = c$.

Решение. Това е резултат от теорията на Рамзи. Нека $n = R(3, 3, \dots, 3)$, където в скобите участват k тройки, тоест n е такова естествено число, че ако ребрата на пълния граф с n върха бъдат оцветени в k цвята, то съществува едноцветен триъгълник. Да означим върховете на пълния граф с n върха чрез числата $1, 2, \dots, n$. Да оцветим ребрата му в k цвята по следния начин: оцветяваме реброто между върховете x и y в цвета на числото $|x - y|$. От избора на n следва, че съществуват три върха $u < v < w$, за които триъгълникът uvw е едноцветен. Тогава числата $a = v - u, b = w - v$ и $c = w - u$ са едноцветни и удовлетворяват $a + b = c$. С това теоремата е доказана.

Задача 30. Нека X е крайно множество от реални числа, d е реално число и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2025}$ са 2025 ненулеви реални числа. Определяме

$$A = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{2025}) : x_1, x_2, \dots, x_{2025} \in X \text{ и } \sum_{i=1}^{2025} \lambda_i x_i = d \right\},$$

$$B = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{2024}) : x_1, x_2, \dots, x_{2024} \in X \text{ и } \sum_{i=1}^{2024} (-1)^i x_i = 0 \right\},$$

$$C = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{2026}) : x_1, x_2, \dots, x_{2026} \in X \text{ и } \sum_{i=1}^{2026} (-1)^i x_i = 0 \right\}.$$

Да се докаже, че $|A|^2 \leq |B| \cdot |C|$.

Решение. Ако $x \in \mathbb{R}$, да забележим, че

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{itx} dt = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \neq 0, \\ 1, & \text{ако } x = 0. \end{cases}$$

Наистина това лесно се вижда при $x = 0$, а при $x \neq 0$ за всяко $T \neq 0$ имаме

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{itx} dt \right| = \left| \frac{1}{iT x} (e^{iT x} - 1) \right| \leq \frac{2}{|T x|}.$$

Да въведем $\Phi(t) = \sum_{x \in X} e^{itx}$, която е определена върху реалните числа. Тогава е изпълнено

$$\begin{aligned} |A| &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{x \in X^{2025}} e^{-itd} e^{it \sum_{j=1}^{2025} \lambda_j x_j} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-itd} \prod_{j=1}^{2025} \sum_{x \in X} e^{it \lambda_j x} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-itd} \prod_{j=1}^{2025} \Phi(\lambda_j t) dt. \end{aligned}$$

По същия начин

$$\begin{aligned} |B| &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(t)^{1012} \Phi(-t)^{1012} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\Phi(t)|^{2024} dt \\ |C| &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(t)^{1013} \Phi(-t)^{1013} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\Phi(t)|^{2026} dt. \end{aligned}$$

От неравенството на Коши-Шварц получаваме, че

$$|B| \cdot |C| \geq \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |\Phi(t)|^{2025} dt \right)^2.$$

Чрез САГ и неравенството на триъгълника заключаваме, че

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T |\Phi(t)|^{2025} dt \right)^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2025} \sum_{j=1}^{2025} \frac{1}{T} \int_0^T |\Phi(\lambda_j t)|^{2025} dt \right)^2 \geq \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \prod_{j=1}^{2025} |\Phi(\lambda_j t)| dt \right)^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \left| e^{-itd} \prod_{j=1}^{2025} \Phi(\lambda_j t) \right| dt \right)^2 \geq \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \left| \int_0^T e^{-itd} \prod_{j=1}^{2025} \Phi(\lambda_j t) dt \right| \right)^2 &= |A|^2. \end{aligned}$$

Последните две неравенства заедно дават

$$|A|^2 \leq |B| \cdot |C|.$$