

Двойни Отношения

Петко Лазаров

12 ноември 2025 г.

Методът на двойните и хармоничните отношение е един сравнително нов в геометрията, но изключително полезен и силен такъв, като много голяма част от задачите имат решение, ползвайки го поне по някакъв начин. Двойните отношение са инструмент, който помага в специфични случаи, което помага по-лесно да разберем дали има шанс да работи в дадената задача. Полезен е за разполовяване на отсечки, разполовяване на ъгли, доказване на прав ъгъл, доказване на успоредни прави, както и стандартните колинеарности и концикличности. В дадените записки първо ще се запознаем с определенията и някои основни свойства (разписани като леми), след което ще преминем към задачи, като те не са подредени по трудност, а на случаен принцип. По време на разбора ще се мине подробно през теорията, и ще се представят решения на част от задачите.

1 Дефиниции

- За колинеарните точки A, B, X, Y двойно отношение ще дефинираме

$$(AB; XY) = \frac{XA}{XB} \div \frac{YA}{YB}.$$

В различните сборници и учебници се записва по различни начини, затова е добре като пишете решения с двойни отношения предварително да дефинирате какво имате предвид като напишете двойното отношение.

- За четири прави, които се пресичат в една точка, двойното им отношение е

$$(a, b; x, y) = \pm \frac{\sin \angle(x, a)}{\sin \angle(x, b)} \div \frac{\sin \angle(y, a)}{\sin \angle(y, b)}.$$

- За всеки четири колинеарни точки A, B, X, Y и точка P , която не лежи на една права с тях е вярно, че

$$(PA, PB; PX, PY) = (AB; XY)$$

- За коника γ и пет точки A, B, X, Y, P които лежат на нея е изпълнено, че

$$(A, B; X, Y)_\gamma = (PA, PB; PX, PY)$$

2 Хармонично Отношение

Ако четири точки A, B, X, Y лежат на една права и $(AB; XY) = -1$, то те са в **хармонично отношение**. Ако лежат на окръжност, четириъгълникът е хармоничен.

Лема 2.1 (Хармонично Отношение). Докажете, че $(AB; XY) = (AB; YX) \iff (AB; XY) = -1$

Лема 2.2 (Среда). Дадени са три колинеарни точки A, B и M . А точка P_∞ е безкрайната точка на правата AB . Тогава

$$(AB; MP_\infty) = -1 \iff M \text{ се среда на } AB.$$

Лема 2.3 (Хармоничен Четириъгълник). Нека γ е коника и за точка P са построени $X, Y \in \gamma$ такива че PX и PY са допирателни към γ . Ако права през P пресича γ в точки A и B , то

(1) $(AB; P, AB \cap XY) = -1$;

(2) $AXBY$ е хармоничен.

Лема 2.4 (Чева-Менелай). В триъгълник ABC , чевианите AD, BE и CF се пресичат в една точка. Ако $EF \cap BC = X$, докажете че $(XD; BC) = -1$.

Лема 2.5. Дадени са в този ред колинеарните точки X, A, Y, B и нека C не лежи на правата с тях. Тогава от кои да е две от следните твърдения следва третото.

(1) $(AB; XY) = -1$.

(2) $\angle XCY = 90^\circ$.

(3) CY е ъглополовяща на $\angle ACB$.

Лема 2.6 (Призма). Дадени са две прави ℓ_1 и ℓ_2 които се пресичат в точка D . Ако A_1, B_1, C_1 лежат върху ℓ_1 и A_2, B_2 и C_2 лежат върху правата ℓ_2 то A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 се пресичат в една точка тогава и само тогава когато $(A_1B_1; C_1D) = (A_2B_2; C_2D)$.

Лема 2.7. Нека A, X, B, Y лежат на права в този ред. Ако M е средата на AB , докажете че следните три твърдения са еквивалентни:

- $(AB; XY) = -1$.

- $MA^2 = MX \cdot MY$ и $AX > XB$.

- $YA \cdot YB = YX \cdot YM$.

3 Задачи

Задача 1 (Симедиана)

Нека ABC е триъгълник и допирателните към описаната му окръжност в B и C се пресичат в точка N . Ако M е средата на BC , то докажете, че $\angle CAN = \angle MAB$. Правата AN се нарича симедиана и се ползва в не малко задачи.

Задача 2 (Теорема за Пеперудата)

Дадена е окръжност с три хорди AB , CD и PQ , които се пресичат в средата на PQ – точка M . Ако $AD \cap PQ = X$ и $BC \cap PQ = Y$, докажете че M е среда на XY .

Задача 3 (Теорема на Бланше, 1994 Канада, 2024 ЗМС 11.2)

Даден е остроъгълен триъгълник ABC с височина AD и произволна точка H върху AD . Ако $BH \cap AC = E$ и $CH \cap AB = F$, да се докаже че $\angle EDH = \angle FDH$.

Задача 4 (Теорема на Пап)

Дадени са три точки A_1 , B_1 и C_1 лежащи на правата ℓ_1 и три точки A_2 , B_2 , C_2 лежащи на правата ℓ_2 . Ако $X = A_1B_2 \cap A_2B_1$, $Y = A_1C_2 \cap A_2C_1$ и $Z = B_1C_2 \cap B_2C_1$, то докажете че X , Y , Z лежат на една права.

Задача 5

Даден е триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I . Ако вписаната окръжност се допира до BC , CA и AB съответно в точки D , E и F и M е средата на BC , то докажете, че EF , ID и AM се пресичат в една точка

Задача 6 (2011 САЩ Младша)

Точките A , B , C , D , E лежат на окръжността ω и точка P е външна за окръжността точка. Ако е дадено, че (1) PB и PD са допирателни към ω , (2) P , A , C лежат на една окръжност и (3) $DE \parallel AC$. Докажете, че BE разполовява AC .

Задача 7 (2024 НОМ2 9.2)

Даден е неравнобедрен остроъгълен триъгълник ABC . Точките K и L от правата BC са такива, че AL и AK са съответно вътрешната и външната ъглополовяща на $\angle BAC$. Правата през L , перпендикулярна на AL , пресича правите AB и AC съответно в точките E и F . Точка S е среда на дъгата $\widehat{BC}$ от описаната около $\triangle ABC$ окръжност, несъдържаща точката A . Да се докаже, че окръжностите, описани около $\triangle BLE$ и $\triangle CLF$, и правата SK се пресичат в една точка.

Задача 8 (2018 Хонг - Конг контролно)

Нека ABC е триъгълник и D е вътрешна за него точка. Ако P и Q са различни точки върху AD . Нека $K = BP \cap AC$, $L = CP \cap AB$, $E = BQ \cap AC$ и $F = CQ \cap AB$. Ако $KL \parallel EF$, докажете че D е средата на BC .

Задача 9 (2018 МОР)

A , D , C и B лежат на полуокръжността с диаметър AB , такива че $DA = DC$. Нека E е петата на височината от D към BC , а правата AE пресича полуокръжността за втори път в точка F . Докажете, че правата BF разполовява отсечката ED .

Задача 10 (2012 ELMO SL G3)

Нека ABC е триъгълник с център на вписаната в него окръжност I . Ако петата от I към BC е D , и петата на перпендикуляра от I към AD е P , то докажете, че $\angle BPD = \angle DPC$.

Задача 11 (2005 ЮАР 4)

Вписаната в ABC окръжност – ω допира BC , CA и AB в точки D , E и F съответно. Нека Q е втората пресечна точка на AD и ω . Докажете, че EQ разполовява AF тогава и само тогава когато $AC = BC$.

Задача 12 (2014 MOM 4)

Нека точки P и Q са върху страната BC на остроъгълния триъгълник ABC , такива че $\angle PAB = \angle BCA$ и $\angle CAQ = \angle ABC$. Точките M и N са симетричните на A спрямо точките P и Q съответно. Докажете, че BM и CN се пресичат върху описаната около ABC окръжност.

Задача 13 (2020 Косово)

Нека ABC е триъгълник и D е среда на дъгата $\widehat{BAC}$. Ако X е петата на височината от C към AD и F е петата на ъглополовящата на $\angle BAC$, то докажете че BX разполовява отсечката AF .

Задача 14 (2003 MOM 4)

Нека $ABCD$ е вписан четириъгълник. Ако P , Q и R са петите на височините от D към BC , CA и AB съответно. Докажете, че $PQ = QR$ тогава и само тогава, когато ъглополовящите на ABC и ADC се пресичат върху отсечката AC .

Задача 15 (2018 Шаригин Задочен 20)

Нека ABC е триъгълник и вписаната в него окръжност допира BC , CA и AB в точки X , Y и Z . Нека N е допирната точка на BC и външновписаната срещу A окръжност. Нека AN пресича вписаната окръжност в точка T така че T е най-близко до N . Ако $K = YZ \cap XT$. Докажете, че $AK \parallel BC$.

Задача 16 (2019 Боеве Созопол)

Симетралата на страната AB на остроъгълния $\triangle ABC$ пресича страната BC и продължението на страната AC съответно в точки P и Q , а точките M и N са среди съответно на страната AB и отсечката PQ . Ако правите AB и CN се пресичат в точка D , да се докаже, че $\triangle ABC$ и $\triangle BCM$ имат общ ортоцентър.

Задача 17 (2019 ELMO SL G1)

Нека ABC е остроъгълен триъгълник с ортоцентър H и описана окръжност Γ . Нека E и F са петите на височините от B и C към CA и AB съответно, а AH пресича Γ за втори път в точка P . Нека PE пресича Γ за втори път в Q . Докажете, че BQ разполовява EF .

Задача 18 (AoPS)

Даден е остроъгълния триъгълник ABC и точка D , такава че $ABDC$ е успоредник. H е ортоцентъра на $\triangle ABC$. $CH \cap BD = X$ и $BH \cap CD = Y$. Окръжността с диаметър AH пресича описаната около ABC окръжност за втори път в точка Q . Докажете, че описаната около XQY окръжност минава през симетричната на D спрямо BC .

Задача 19 (2013 Шаригин Задочен 7)

Нека AD е ъглополовящата в триъгълник ABC . Нека I_B и I_C са центровете на външно вписаните окръжности срещу върховете B и C в $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ съответно. Ако $I_B I_C \cap AC = Q$, то докажете че $\angle DAQ = 90^\circ$.

Задача 20 (2018 Балканиада 1)

Нека четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k като $AB > CD$ и AB не е успоредна на CD . M е пресечна точка на диагоналите му, а петата на височината от M към AB е E . Ако EM е ъглополовяща на $\angle CED$, докажете че AB е диаметър в k .

Задача 21 (2013 АРМО)

Нека $ABCD$ е четириъгълник, вписан в окръжността ω , и нека P е върху правата AC , такава че PB и PD са допирателни към ω . Допирателната към ω от C пресича PD в точка Q и AD в точка R . Ако E е втората пресечна точка на AQ и ω , докажете че B, E, R лежат на една права.

Задача 22

Нека за $\triangle ABC$ I и I_A са центровете на вписаната и външновписаната срещу A окръжности. Ако G е медицентъра на $\triangle BIC$, а $E = BI \cap AC$ и $F = CI \cap AB$, да се докаже, че $\angle BGC + \angle EI_A F = 180^\circ$

Задача 23 (2025 Иранска Олимпиада по Геометрия Advanced 3)

Нека M е средата на страната BC от триъгълника ABC . X е произволна точка върху отсечката AM . Точката A' лежи на описаната около ABC окръжност така че $AA' \parallel BC$. Описаната около AXA' окръжност пресича AB и AC за втори път в точките F и E съответно. Докажете, че $P = BC \cap A'X$ лежи върху описаната около MEF окръжност.

Задача 24 (Тайван 2014)

Нека център на вписаната в ABC окръжност е I , а самата окръжност се допира до CA и AB в точки E и F съответно. Ако G и H са съответно симетричните на E и F спрямо I , а M е средата на BC и $Q = GH \cap BC$, то да се докаже, че $\angle MIQ = 90^\circ$.

Задача 25 (2022 MOM ШЛ G6)

В остроъгълен триъгълник ABC точка H е петата на височината от върха A . Точка P е такава, че ъглополовящата k на ъгъл PBC и ъглополовящата ℓ на ъгъл PCB се пресичат върху отсечката AH . Правата k пресича AC в точка E , а правата ℓ пресича AB в точка F . Правите EF и AH се пресичат в точка Q . Да се докаже, че когато точката P се мени, правите PQ минават през постоянна точка.

Задача 26 (2023 EGMO 6)

Даден е триъгълник ABC с описана окръжност Ω . Нека S_b и S_c са среди на малките дъги $\widehat{AC}$ и $\widehat{AB}$ съответно. Нека N_a е средата на голямата дъга $\widehat{BAC}$. I е център на вписаната в ABC окръжност. Нека ω_b е окръжността допираща се до AB и вътрешно допираща се до Ω в точка S_b . Аналогично дефинираме ω_c . Докажете, че правата IN_a и правата през пресечните точки на ω_b с ω_c се пресичат върху Ω .

Задача 27 (2019 САЩ TSTST)

Нека ABC е триъгълник с център на вписаната окръжност I . Точките K и L лежат върху страната BC , такива че вписаните $\triangle ABK$ и $\triangle ABL$ се допират в точка P , а вписаните окръжности в $\triangle ACK$ и $\triangle ACL$ се допират в точка Q . Докажете, че $IP = IQ$.