

Алгебра – колекция от типове задачи

Веселин Маркович
vesselin.markovich@gmail.com

Задачите по алгебра изискват достатъчно задълбочени познания по теорията и правилното използване на добре заучени неравенства, теореми или подходи. Материалът, който се изучава в училищната математика, е много застъпен в задачите, като често се ползват формули на Виет, изследване на графика на функция, разглеждане на случаи спрямо различни стойности на параметрите в уравнение, подходящи полагания, сравняване на коефициенти и схема на Хорнер. В по-сложните задачи често се появяват и множество комбинаторни подходи, а при по-теоретичните (за 12-ти клас) – често трябва да изследваме граници и производни.

В настоящата лекция ще покрием няколко техники за решаване на стандартни алгебрични задачи, ще да докоснем любознателността на читателя до ниво, сходно с нивото на лесните и средните задачи от престижни национални и международни олимпиади, ще дадем няколко наистина трудни предизвикателства, както и теорията зад два много ценни подхода - интерполационната формула на Лагранж и крайните разлики. Надяваме се всички – както начинаещите, така и напредналите читатели – да упражнят знанията си по алгебра и да научат нови техники.

Задачи за замявка

Задача 1. Да се намерят всички решения в реални числа на системата

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ \sqrt{y} + z = 3 - \sqrt{2} \\ \sqrt{z} + x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Задача 2. Права през точката $A(1, 1)$ пресича правата $y = -19$ в точка B и параболата $y = x^2$ в точка $C \neq A$. Да се докаже, че $|BC| > 10\sqrt{5}$.

Задача 3. Нека $f(x) = x^2 + bx + 1$, където b е реален параметър. Да се намери броят на целочислените решения на неравенството $f(f(x) + x) < 0$.

Задача 4. Нека $a > 2$ е реален параметър. Разглеждаме реална функция f такава, че за всяко $x < 0$ е изпълнено

$$f\left(\frac{x^2 + ax - 2a}{8}\right) \geq 4f\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 19f\left(\frac{1}{x}\right) + 25.$$

Да се докаже, че съществуват различни реални числа m и n , за които $f(m) = f(n)$.

Малко по-трудни

Задача 5. Нека $n \geq 2$. Да се намерят всички n -орки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ от комплексни числа, за които числата $a_1 - 2a_2, a_2 - 2a_3, \dots, a_{n-1} - 2a_n, a_n - 2a_1$ образуват пермутация на числата $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Задача 6. Нека n е четно естествено число и P е моничен полином от степен $2n$ (със старши коефициент 1). Известно е, че за всяко цяло число k , удовлетворяващо $1 \leq |k| \leq n$, е изпълнено $P(1/k) = k^2$. Намерете и останалите реални стойности x , за които е изпълнено $P(1/x) = x^2$.

Задача 7. Съществуват ли естествено число n и реални числа $a_0, a_1, \dots, a_n$, всяко равно на 1 или (-1) , за които реалният полином $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ се дели на реалния полином $x^{2023} - 2x^{2022} + c$, ако: а) $c = 1$ б) $c = -1$?

Задача 8. Дадено е реално число a , различно от 0 и 1. Сашо и Дени играят следната игра: първи на ход е Сашо и след това се редуват, като на всеки свой ход съответният играч заменя в уравнението

$$\star x^4 + \star x^3 + \star x^2 + \star x + \star = 0$$

някоя звездичка с цяла степен на a . Играта приключва, когато са заменени и петте звездички. Сашо печели, ако полученото уравнение няма реален корен, а в противен случай печели Дени. Да се определи кой от двамата играчи има печеливша стратегия.

Трудни

Задача 9. Да се намерят всички реални числа k , за които неравенството

$$(1+t)^k(1-t)^{1-k} \leq 1$$

е изпълнено за всички реални $t \in (-1, 1)$.

Задача 10. Нека m, n и a са естествени числа. Иван има m картончета, на всяко от които е записано числото n , и безкраен брой картончета с всеки от знаците събиране, изваждане, умножение, деление, отваряща и затваряща скоба (по един знак на картонче). Петър съставил с тях аритметичен израз, чиято стойност е естествено число, по-малко от $\frac{n}{2^m}$. Да се докаже, че ако навсякъде заменим n с a , то новополученият израз ще има същата стойност, както преди, или няма да бъде дефиниран поради деление на нула.

Задача 11. На дъската е записан полиномът $x^3 - 2$. Разрешено е да се прилагат следните две операции:

- 1) да заменим полинома P от дъската с полином, чийто коефициенти са същите като на P , но в обратен ред;
- 2) да заменим полинома $P(x)$ с $P(x+1)$.

Възможно ли е след някакъв краен брой операции от този тип да заменим първоначално написания полином на дъската с полинома $x^3 - 3x^2 + 3x - 3$?

Въведение във функционалните уравнения

Функционалните уравнения са едни от най-често даваните задачи по алгебра на международни олимпиади. Тези задачи се познават лесно по условието, което в почти всички случаи има вида "да се намерят всички функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, така че за всички реални числа x и y е изпълнено *<някакво условие за f с параметри x и y >*". Тук трябва също добре да обръщаме внимание на множествата – да правим разлика между естествени числа $\mathbb{N}$, цели числа $\mathbb{Z}$, рационални числа $\mathbb{Q}$ и реални числа $\mathbb{R}$.

Пример. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за които $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за всеки две естествени x и y .

Как да процедираме при тази задача: нека разгледаме f – функция, изпълняваща условието. За $f(1)$ нищо не знаем, така че нека го означим с произволно естествено число c , тоест $f(1) = c$. Но тогава от условието, което f изпълнява, използваме двойката естествени числа $(x, y) = (1, 1)$ и получаваме $f(2) = f(1) + f(1) = c + c = 2c$. Тъй като можем да продължим аналогично с двойките $(2, 1), (3, 1), \dots$, посредством индукция доказваме, че $f(n) = cn$ за всяко естествено n . Сега получихме, че функциите, които изпълняват условието, могат да са само от конкретен тип (също наричаме клас) – функциите от вида $f(n) = cn$ за фиксирано естествено число c . Да проверим обаче дали всяка функция от този клас удовлетворява условието – ами да, оказва се, че за всяка една от тях знаем, че $f(x+y) = c(x+y)$, а $f(x) + f(y) = cx + cy$, тоест двата израза ще са винаги равни. Следователно търсените функции са всички f от вида $f(n) = cn$, тоест функциите

$$f(n) = n, \quad f(n) = 2n, \quad f(n) = 3n, \dots$$

Особеното във функционалните уравнения е, че съществуват много повече функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, отколкото човек предполага. Функциите, с които сме свикнали да работим от стандартните типове задачи, често се описват по някой от следните начини:

1) $f(x) = 2x + 5$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ (с формула);

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{ако } x < 0; \\ \pi, & \text{ако } x = 0; \\ \sin(x^2 + 1), & \text{ако } x > 0. \end{cases} \quad (\text{описателно с разделяне на случаи});$$

3) $f(1) = 1$ и $f(n) = nf(n-1)$ за всяко естествено $n \geq 2$ (рекурентно).

В действителност съществуват функции, които не могат да се запишат по такъв начин, които не спазват свойството непрекъснатост, чиято графика е невъзможна за чертане, за които може стойностите да нямат ясна логическа връзка помежду си и др. Затова е важно да си припомним дефиницията на функция – $f: A \rightarrow B$ наричаме функция от множеството A към множеството B , ако за всеки елемент a на A f съпоставя точно един елемент b на B , което отбелязваме с $f(a) = b$.

Пример. Ако $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ е функция, то $f(1)$ е някакво реално число, $f(2)$ също, $f(3)$ също, и т.н., но друга информация за f няма как да знаем, освен ако не са дадени конкретни нейни свойства.

Тази концепция, че една функция може да е всякакво възможно съпоставяне от A в B без никаква обяснима логическа връзка, е може би една от най-трудните при сблъскването с функционални уравнения за първи път, но с решаването на задачи ще се изясни. За да решаваме функционални уравнения, най-важното е да правим много замени в даденото условие с подходящи стойности, така че да извличаме информация за функциите, които търсим.

Задача 12. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които равенството е изпълнено за всички реални стойности x и y :

$$f(x^2 + y) = f(x + 2y) + f(x^4).$$

Задача 13. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, за които равенството е изпълнено за всички цели стойности a и b :

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

Задача 14. Намерете функциите $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за които е изпълнено следното равенство при всички двойки естествени числа (x, y) :

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Задача 15. Намерете всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които равенството е изпълнено за всички реални стойности x и y :

$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

Тези задачи бяха лесни примери, с които читателят да разбере принципа зад решаването на функционалните уравнения. При по-сложните задачи има полезна теория, с която трябва да се запознае човек – търсенето на неподвижни точки, доказване на инекция, сюрекция и биекция, непрекъснатост на функции, адитивни функции, но винаги всяко решение се свежда до подходящото използване на даденото ни условие и проверяването на всичките отговори.

Теоретична част

Някои задачи, за жалост, нямаме шанс да решим, ако нямаме необходимите теоретични познания. Това означава, че когато напредваме по математика и решаваме все по-сложни и по-сложни задачи, е добре да четем и авторските решения и да сверяваме дали знаем всички теореми или техники, които са ползвани. Обратното също е вярно – когато научаваме нова теорема или нов подход, е много важно да отделим време да помислим в какви задачи бихме могли да ги прилагаме, и също така в какви задачи няма шанс да ни помогне. За напредването в състезателната математика е важно да балансираме решаването на задачи и обогатяването с нова теория и нови техники.

В алгебричния анализ основата на теорията идва от дефиницията на граница (лимес / limit на английски). От нея можем да дефинираме производната на функция f' , чрез която изследваме растенето и намаляването на функцията f . Тъй като тези дефиниции са широко

разпространени и се учат в 11-ти клас по учебната програма, ще посъветваме читателя да се запознае внимателно с тях, а ние ще минем направо към задачи с тяхното приложение.

Задача 16. Нека n е естествено число. Да се намери броят на реалните корени на уравнението

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} = 0.$$

Задача 17. Съществува ли полином P с реални коефициенти от степен 2025 такъв, че неговите корени и един от корените на неговата производна P' са реални числа, които (в някакъв ред) образуват геометрична прогресия с частно $q \in (1, 2)$.

Задача 18. Да се докаже, че съществуват краен брой естествени числа n , за които уравнението

$$\underbrace{\sin(\sin(\dots(\sin x)\dots))}_{n \text{ пъти}} = \underbrace{\cos(\cos(\dots(\cos x)\dots))}_{n \text{ пъти}}$$

има реален корен.

Интерполационен полином на Лагранж

Започваме с твърдение, което се прилага много често, когато се сблъскваме със задачи за полиноми.

Основна теорема на алгебрата. Всеки полином от степен $n \geq 1$ с комплексни коефициенти има точно n комплексни корена, считани с кратностите.

Макар и за тази теорема да ни е необходимо да знаем какво са комплексни числа, директното следствие относно реалните корени много често е достатъчно силно твърдение само по себе си:

Следствие 1. Всеки неконстантен полином P от степен n има не повече от n реални корена, броени с кратностите.

Следствие 2. Нека полиномите P и Q са с реални коефициенти и са от степен най-много n . Ако съществуват различни числа $x_0, x_1, \dots, x_n$ такива, че $P(x_i) = Q(x_i)$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n$, то P съвпада с Q , т.е. $P(x) = Q(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

От следствие 2 ни става ясен следният факт - ако изберем $n + 1$ точки $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ с различни x -ове, то няма как да има два различни полинома P и Q от степен най-много n , за които $P(x_i) = Q(x_i) = y_i$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n$. Но тук идва интересният въпрос - дали които и $n + 1$ точки в равнината с различни x -ове да си изберем, съществува въобще единственият полином от степен най-много n , чиято графика да ги съдържа? Отговорът е да, интуицията можем да придобием от случаят $n = 1$ - през всеки две точки от равнината с различни x -ове можем да прекараме полином от първа степен (невертикална права).

Интерполационна формула на Лагранж. Нека $x_0, x_1, \dots, x_n$ са две по две различни, а $y_0, y_1, \dots, y_n$ са произволни числа. Тогава полиномът

$$P(t) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{j \neq i} (t - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

е от степен най-много n и изпълнява равенството $P(x_i) = y_i$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n$. P се нарича интерполационен полином на Лагранж във възлите $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$.

Нека видим следния пример за $n = 2$ и точките $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$:

$$P(t) = y_0 \frac{(t - x_1)(t - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(t - x_0)(t - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(t - x_0)(t - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Лесно е да видим, че когато заместим t с x_i , то само една конкретна дроб (тази с коефициент y_i) има стойност 1, а другите се нулират, затова конструкцията е работещ полином от 2-ра степен.

В общия случай съществуването на този полином е най-важният извод от цялото доказателство, защото формулата сама по себе си е изключително трудна за разкриване на скобите и привеждане в нормален вид. По тази причина основният тип задачи, в които ще ползваме формулата конкретно, са обърнати наопаки – ще ни дадат някаква сума от произведения, а ние трябва да се сетим за кой полином точно е интерполацията.

Задача 19. Нека P е моничен полином (старши коефициент 1) с реални коефициенти от степен $n \geq 1$. Нека $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ са реални числа. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^n \frac{|P(x_k)|}{\prod_{j \neq k} |x_k - x_j|} \geq 1$$

Задача 20. Нека P е полином от девета степен с реални коефициенти. Ученик пресметнал стойностите $P(0), P(1), P(2), \dots, P(11)$ и получил (в същия ред) $1, 2, 2^2, \dots, 2^9, 2^{10}$ и $2^{11} - 12$, като е възможно да е допуснал грешки. Нека $A \subseteq \{0, 1, \dots, 11\}$ е множеството от тези i , за които $P(i)$ е пресметнато грешно. Да се определи минималната големина на A , както и всички множества A , които я реализират.

Крайни разлики

Крайните разлики са много силен подход при решаване на задачи за редици или функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (помислете защо двете са едно и също нещо), но също служат и за други множества от функции – например $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Въведение: Някога забелязвали ли сте следното – нека вземем редицата от 3-те степени на естествените числа, тоест 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, Ако под тази редица между всеки две съседни числа напишем разликата им, получаваме 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, Не е твърде особено, но ако пробваме пак същото, новите разлики са 12, 18, 24, 30, 36, 42, ..., интересно, а техните разлики пък са винаги 6, тоест стигаме до константна редица след 3 стъпки. Това въобще не е случайно и далеч не е само за числото 3 и третите степени, така че е интересно да разберем защо се случва.

Ще започнем отдалеч – нека $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ е функция от естествените числа в реалните, ще дефинираме крайната разлика на f като нова функция $\Delta[f] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, изпълняваща

$$\Delta[f](x) = f(x + 1) - f(x).$$

Можем да разширим дефиницията – крайната разлика на f със стъпка h (когато h не е уточнено, считаме $h = 1$) ще наричаме функцията $\Delta_h[f](x) = f(x+h) - f(x)$, а пък k -тата крайна разлика ще наричаме:

- крайната разлика на f , ако $k = 1$;
- крайната разлика на $(k-1)$ -вата крайна разлика на f , ако $k > 1$.

$$\text{Тоест } \Delta_h^k[f](x) = \Delta_h[\Delta_h^{k-1}[f]] = \underbrace{\Delta_h[\Delta_h[\dots[\Delta_h[f]]\dots]]}_{k \text{ пъти}}(x)$$

Обръщаме внимание между сходната дефиниция на крайна разлика и производна на функция, може да послужи като добър аналог за запознатите с производни.

Важно свойство 1. Нека $P(x)$ е полином от n -та степен, тогава $\Delta[P](x)$ е полином от степен $n-1$, ако $n > 0$, или $\Delta[P](x) = 0$, ако P е константен полином.

Доказателството оставяме за упражнение на читателя и ще го обсъдим по време на лекцията.

Следствие. k -тата крайна разлика на полином от n -та степен $P(x)$ е нов полином от степен, равна на $n-k$, когато $k \leq n$.

Сега вече има логика в уводните ни разсъждения, нали? Ако редицата от n -тите степени я разгледаме като функцията $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, дефинирана с $f(x) = x^n$, то тя е полином, следователно n -тата ѝ крайна разлика е полином от нулева степен, тоест константна редица.

Важно свойство 2. $\Delta_h^k[f](x) = \sum_{i=0}^k (-1)^{(k-i)} \binom{k}{i} f(x+ih)$

Доказателството е с индукция по k и следването на дефиницията.

Подходът с крайните разлики може да бъде изключително добре прикрит в някои задачи, често се ползва и в комбинаториката и броенето, в теорията на числата за целочислени редици и техните ТЧ свойства. Имайте предвид, че предложените задачи за упражнение можем да ги отнесем също и към темата комбинаторика.

Задача 21. Да се докаже, че за всяко естествено число n е изпълнено

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (n-i)^n \binom{n+1}{i} = 1.$$

Задача 22. Нека P и Q са два полинома с реални коефициенти. В началото скакалецът Ангел се намира в точката $A_0(0,0)$. Всяка секунда той прави скок, като с A_n означаваме положението му след n секунди. Известно е, че за всяко $n \geq 1$ е в сила

$$A_n - A_{n-1} = (\pm P(n), \pm Q(n)) \text{ или } (\pm Q(n), \pm P(n)),$$

т.е. имаме 8 опции за скок. Възможно ли е Ангел да подбере скоковете си така, че да се връща безбройно много пъти в началната си позиция $(0,0)$?

Задача 23. Едно цяло число ще наричаме студентско, ако може да се представи като a^{33} , където $a \in \mathbb{Z}$ е цяло число. Нека за всяко естествено число n с $f(n)$ означаваме най-малкия възможен брой студентски числа, които имат сума n . Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $f(n) < 12^{12^{12}}$.