

Нестандартни задачи по геометрия

Божидар Димитров
bozhidardanchev@gmail.com

Олимпийската геометрия в последните години се променя все повече и повече – традиционните геометрични задачи постепенно се заменят с по-нестандартни конфигурации, в които дори е трудно да се направи точен чертеж, най-често поради наличието на специфично условие, което не е изпълнено в общия случай. Появяват се и най-различни комбинаторни идеи – алгоритмично мислене, теория на графите и др.

Навсякъде при пресичане на две фигури включваме и възможността пресечните точки да са само по контурите, освен ако специфично не е казано друго. При въпроси по условията пишете на горепосочения имейл.

Задачи за замявка

Задача 1. Нека n е естествено число. В равнината са дадени $4n$ точки, като никои три от тях не лежат на една права. Да се докаже, че можем да ги разделим на n на брой непресичащи се четворки така, че никои два от четириъгълниците, образувани от точките в една и съща четворка, не се пресичат.

Задача 2. Нека n е естествено число. В равнината са дадени $2n$ точки, като никои три от тях не лежат на една. От тях n са оцветени в синьо, а останалите – в червено. Да се докаже, че е възможно да построим n отсечки с разноцветни краища такива, че никои две от тях не се пресичат.

Задача 3. Всеки три последователни върха на неизпъкнал многоъгълник P образуват правоъгълен триъгълник. Винаги ли е вярно, че някой от ъглите на P има големина 90° или 270° ?

Задача 4. В равнината са дадени 28 правоъгълника, всеки от които има страни, успоредни на координатните оси. Известно е, че всеки правоъгълник пресича поне 21 от останалите. Да се докаже, че съществува правоъгълник, който пресича всички останали 27.

Задача 5. В равнината е даден изпъкнал петоъгълник, върховете на който са точки с целочислени координати. Да се докаже, че във вътрешността на петоъгълника има точка с целочислени координати.

Нестандартни

Задача 6. В равнината са дадени няколко окръжности. Марикирани са всички точки, които лежат на поне две от тези окръжности. Възможно ли е всяка маркирана точка да лежи на

точно n от окръжностите и на всяка окръжност да лежат точно n маркирани точки, ако:

а) $n = 4$;

б) $n = 5$?

Задача 7. В равнината са отбелязани краен брой точки, като не всичките лежат на една права. Около всеки от триъгълниците с върхове измежду тези точки е описана окръжност. Възможно ли е центровете на всички тези окръжности да са също измежду маркираните точки?

Задача 8. Изпъкналият шестоъгълник $ABCDEF$ е вписан в окръжност, описан около окръжност и за него е в сила

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} + \frac{1}{EF} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{DE} + \frac{1}{FA}.$$

Да се докаже, той има ос на симетрия.

Задача 9. Дадени са равностранен триъгълник ABC и точка P в равнината му такава, че $AP < BP < CP$. Ако дължините на AP , BP и CP определят еднозначно дължината на страната на $\triangle ABC$, да се докаже, че P лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 10. Дадена е окръжност ω с радиус 1. Множество T от триъгълници наричаме кошмарно, ако са в сила следните условия:

(i) всеки триъгълник от T е вписан в ω ;

(ii) никои два триъгълника от T нямат обща вътрешна точка.

Да се намерят всички реални числа t такива, че за всяко естествено число n съществува кошмарно множество с n триъгълника, всеки от които има периметър, който е по-голям от t .

Задача 11. В равнината са дадени окръжност ω с център началото O на координатната система и радиус 1, както и точката $A(1, 1)$. Да се намерят всички точки B , за които съществуват (не непременно различни) точки $P_1, P_2, \dots, P_{2018}$ такива, че средите на отсечките $AP_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{2017}P_{2018}$ и $P_{2018}B$ лежат на ω .

Задача 12. Нека $ABCDE$ е изпъкнал петоъгълник, за който $CD = DE$ и $\angle EDC \neq 2\angle ADB$. Точка P е вътрешна за петоъгълника и е такава, че $AP = AE$ и $BP = BC$. Да се докаже, че точката P лежи на отсечката CE тогава и само тогава, когато

$$S_{BCD} + S_{ADE} = S_{ABD} + S_{ABP}.$$

Задача 13. Нека P и P' са два изпъкнали четириъгълника в равнината. Точка O от сечението им изпълнява следното свойство: за всяка права ℓ през O дължината на отсечката $\ell \cap P$ е по-голяма от дължината на отсечката $\ell \cap P'$. Възможно ли е отношението между лицата на P' и P да е по-голямо от 1.9?

Няколко игри

Задача 14. Първоначално в равнината са маркирани четири точки, които са върхове на изпъкнал четириъгълник без успоредни страни. Ангел и Борис играят игра, редувайки се; Ангел започва пръв. На всеки ход играчът, който е на ход, чертае една или две прави (по свой избор), като всяка от правите минава през поне две маркирани точки, след което автоматично се маркират всички пресечни точки на всички двойки начертани прави. Печели този, след чийто ход има три маркирани точки, които лежат на една права, която не е от вече начертаните.

Да се определи кой от двамата играчи има печеливша стратегия.

Задача 15. В равнината са прекарани три прави, които образуват неравнобедрен остроъгълен триъгълник ABC . Ники, който разполага с линия и пергел, и Алекс, който има гума, играят игра, в която целта на Ники е да построи височините на $\triangle ABC$, а на Алекс – да му попречи; започва Ники, като двамата се редуват. За един ход на Ники му е разрешено най-напред да избере две отбелязани точки (ако има такива) и да построи правата през тях или окръжност с център едната точка, която минава през другата. След това той може да отбележи колкото си иска точки в равнината – точки, явяващи се пресечни на два обекта (права/окръжност), произволни точки на някой обект, произволни точки в равнината. След това Алекс може да избере до три от отбелязаните точки и да ги изтрие. Ники не може да използва при построението си изтритите точки, но може да ги отбележи отново.

Възможно ли е Алекс да попречи на Ники да изпълни целта си?

Задача 16. Във вътрешността на изпъкнал 100-ъгълник е избрана точка X , която не лежи на никой от неговите диагонали. Отначало нито един от стоте върха не е маркиран. Иван и Павел се редуват да маркират все още немаркирани върхове; започва Иван, като на първия си ход той маркира два върха, след това всеки от двамата играчи маркира по един. Губи този, след чийто ход точката X става вътрешна за многоъгълника с върхове маркираните досега точки.

Да се определи кой от двамата играчи има печеливша стратегия.

Една класическа теорема

Преди да изложим твърдението на теоремата на Хели, въвеждаме следната дефиниция.

Дефиниция. Нека C е непразно множество от точки равнината. Наричаме C **изпъкнало**, ако за всеки две точки A и B от C е изпълнено, че всяка точка от отсечката с краища A и B също принадлежи на C .

Теорема (Хели). Нека $\mathcal{F}$ е крайна фамилия от изпъкнали множества в равнината такива, че всеки три от тях имат непразно сечение. Тогава

$$\bigcap_{C \in \mathcal{F}} C$$

също е непразно.

Задача 17 (Теорема на Юнг). Нека M е крайно множество от точки в равнината такава, че всеки две точки от M са на разстояние най-много 1. Да се докаже, че M се съдържа в кръг с радиус $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Упътване. За да се съдържат всички точки от M в кръг с център O и радиус r , трябва кръговете с центрове точките от M и радиус r да имат непразно сечение.

Задача 18. В равнината са дадени точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, които лежат в кръг с радиус 1, и точки $B_1, B_2, \dots, B_n$ такива, че $B_i B_j < A_i A_j$ за всички $1 \leq i < j \leq n$. Винаги ли е вярно, че точките $B_1, B_2, \dots, B_n$ също лежат в кръг с радиус 1?

Задача 19. Даден е (не непременно изпъкнал) многоъгълник P . Отсечка с краища върху периметъра на P ще наричаме *стабилна*, ако разделя периметъра на две части с дължини d_1 и d_2 такива, че $d_2 \leq d_1 \leq 2d_2$. Известно е, че всяка стабилна отсечка за P лежи изцяло във вътрешността на P (освен краищата, които са на периметъра). Да се докаже, че съществува точка O , вътрешна за P , такава, че за всяка точка A от периметъра на P отсечката OA лежи изцяло във вътрешността на P (освен точката A , която е на периметъра).

Комбинаторна геометрия

В част от изложените досега задачи също присъстват комбинаторни идеи – разглеждане на екстремален елемент, подбор на стратегия в игрите и др. В следващите примери обаче тези аргументи ще са с все по-централна роля в идеите и решенията, а геометричните – по-скоро съпътстващи.

Задача 20. В равнината са отбелязани 2025 точки. *Диск* ще наричаме кръг, чийто диаметър е отсечка с краища две измежду отбелязаните точки. Да се докаже, че съществуват 4 диска, чието обединение покрива всичките 2025 точки.

Задача 21. Нека $k \geq 2$ е естествено число. Да се намери най-малкото естествено число n със следното свойство: измежду кои да е n точки в равнината винаги могат да се изберат такива k , че разстоянията между всеки две от тях са или всичките по-големи от 1, или всичките по-малки или равни от 2.

Задача 22. Дадена е затворена начупена линия $A_1 A_2 \dots A_n$ (т.е. A_1 и A_n са свързани с отсечка) и окръжност ω , която се допира до всяка от правите $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$. Ще казваме, че отсечка $A_i A_{i+1}$ ($A_{n+1} \equiv A_1$) от начупената линия е *добра*, ако ω се допира до нея, иначе ще я наричаме *лоша* (т.е. ако допира продължението ѝ). Да се докаже, че броят на *лошите* отсечки е четен.

Задача 23. Нека S е крайно множество от поне две точки в равнината, като никои три от тях не лежат на една права. *Мелница* наричаме следния процес: избираме начална права ℓ , минаваща през точно една точка P от S . След това завъртаме правата ℓ по посока на часовниковата стрелка около *центъра* P , докато правата не мине за пръв път през друга точка Q от S . Избираме тази точка за нов център и сега въртим правата около Q , докато не срещне точка от S . Процесът продължава безкрайно.

Да се докаже, че съществуват точка P от S и права ℓ през P такива, че мелницата с начална права ℓ има за център всяка точка от S безбройно много пъти.

Задача 24. За два триъгълника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ ще казваме, че *разстоянието* между тях е равно на дължината на най-късата от деветте отсечки A_iB_j , където $1 \leq i \leq 3$ и $1 \leq j \leq 3$. Възможно ли е в равнината да бъдат разположени пет триъгълника така, че разстоянието между всеки два от тях да бъде равно на сбора от радиусите на описаните около тях окръжности?

Задача 25. Права в равнината се нарича *слънчева*, ако правата не е успоредна на оста x , на оста y и на правата $x + y = 0$.

Дадено е цяло число $n \geq 3$. Да се намерят всички естествени числа k , за които съществуват n различни прави в равнината, изпълняващи следните две условия:

- За всички естествени числа a и b , за които $a + b \leq n + 1$, точката (a, b) лежи на поне една от дадените прави;
- Точно k от дадените прави **не** са слънчеви.