

Графи

Биляна Димитрова, Илияс Номан

Въведение в теорията на графите

Теорията на графите е един от най-динамично развиващите се клонове на дискретната математика с фундаментално значение за решаването на олимпийски задачи по комбинаторика.

Визуално представяме върховете като точки в равнината, а ребрата — като линии (прави или криви), свързващи тези точки. Основната сила на това представяне се крие във възможността да се игнорират несъществените детайли на дадена задача и тя да се сведе до чиста геометрична или алгебрична структура. Например, градовете в една транспортна мрежа се моделират като върхове, а пътищата между тях — като ребра.

Основни характеристики и терминология

Централно понятие в анализа на локалната структура на графа е **степеня на върха** v , означена с $d(v)$, която представлява броят на ребрата, инцидентни с него. Един от първите важни резултати, с които всеки ученик трябва да се запознае, е т.нар. *Лема за ржкостисканията*. Тя гласи, че сумата от степените на всички върхове е равна на удвоения брой на ребрата:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \quad (1)$$

От това следва фундаменталното свойство, че във всеки граф броят на върховете от нечетна степен е четно число.

Разглеждането на **пътища** и **цикли** позволява изследването на глобалната свързаност. Един граф се нарича **свързан**, ако между всеки два негови върха съществува път. В контекста на олимпийските задачи често се търсят специфични конфигурации като Ойлерови цикли (преминаващи през всяко ребро точно веднъж) или Хамилтонови цикли (преминаващи през всеки връх точно веднъж).

1 Свързаност

Задача 1 (PUMaC 2019). На дъска е начертан краен граф G . Разрешена е следната операция: избира се произволен цикъл C в G , чертае се нов връх v , който се свързва с всички върхове на C , и накрая се изтриват всички ребра на цикъла C . Да се докаже, че тази операция може да бъде приложена само краен брой пъти.

Задача 2 (Фолклор). В една далечна страна има n на брой острова. Между всеки два острова има директна транспортна връзка, която се обслужва или само от самолетна компания (сини линии), или само от корабна компания (червени линии). Докажете, че винаги е вярно поне едно от двете твърдения:

- Можем да стигнем от всеки остров до всеки друг, използвайки единствено самолетни полети.
- Можем да стигнем от всеки остров до всеки друг, използвайки единствено кораби.

2 Екстремални елементи

Задача 3 (НОМ 2023). Даден е граф G с $n \geq 6$ върха, в който всеки връх е от степен поне 3. Нека $C_1, C_2, \dots, C_k$ са всички цикли в графа G . Да се определят всички възможни стойности на най-големия общ делител на числата

$$|C_1|, |C_2|, \dots, |C_k|,$$

където с $|C|$ означаваме броя на върховете в цикъла C .

Задача 4 (Croatian TST). На парти присъстват n души, между които някои са приятели. Сред всеки четири от тях съществуват или трима, които са взаимно приятели помежду си, или трима, които не са приятели помежду си. Да се докаже, че хората могат да бъдат разделени на две групи A и B така, че множеството A е клика (тоест всеки двама души в A са приятели), а множеството B е независимо множество (никои двама души в B не са приятели). Приятелството е взаимно отношение.

3 Локални промени

Задача 5 (Всерусийска 2021). В една страна с n града експресен влак се движи двупосочно между всяка двойка градове. За всеки влак цената на билета в двете посоки е една и съща, но за различни маршрути тези цени са различни. Докажете, че пътник може да избере начален град, да го напусне и да продължи, последователно използвайки $n - 1$ влака, така че всяка следваща цена на билета да е по-малка от предишната. (Пътникът може да влиза в един и същ град няколко пъти.)

Задача 6. Да се докаже, че съществува редица от 10003 цифри, в която всяка възможна последователност от четири цифри (от 0000 до 9999) се среща точно веднъж.

4 Теорема на Хол

Дефиниция 7 (Двуделен граф). Граф се нарича *двуделен*, ако множеството на върховете му може да бъде разделено на две непразни множества така, че всяко ребро на графа свързва връх от първото множество с връх от второто множество.

Задача 8 (Лема). Да се докаже, че един граф е двуделен тогава и само тогава, когато всички цикли в него са от четна дължина.

Дефиниция 9 (Сдвояване). Сдвояване в граф се нарича множество от ребра, в което никои две ребра нямат общ връх.

Теорема 10 (Теорема на Хол). Нека G е двуделен граф, в който можем да разделим върховете на множества A и B , такива че няма ребро между никои два върха в A и никои два върха в B . За всяко подмножество $S \subseteq A$ означаваме с $N(S)$ множеството от всички върхове в B , които са свързани с поне един връх от S .

Тогава съществува сдвояване, което съпоставя всеки връх от A с различен връх от B тогава и само тогава, когато за всяко подмножество $S \subseteq A$ е изпълнено

$$|N(S)| \geq |S|.$$

Задача 11 (Canada 2006-3). В правоъгълна таблица от неотрицателни реални числа с m реда и n стълба, всеки ред и всеки стълб съдържат поне един положителен елемент. Освен това, ако даден ред и даден стълб се пресичат в положителен елемент, то сумата на елементите в този ред е равна на сумата на елементите в този стълб. Да се докаже, че $m = n$.

Задача 12 (IMO Shortlist 2012). Редовете и колоните на квадратна дъска с размери $3n \times 3n$ са номерирани с $1, 2, \dots, 3n$. Всяко квадратче (x, y) е оцветено в червено, зелено или синьо, в зависимост от това дали остатъкът на $x + y$ при деление на 3 е съответно 0, 1 или 2. Върху всяко квадратче е поставена по една фигурка с един от трите цвята, като от всеки цвят има точно по $3n^2$ фигурки.

Дадено е, че фигурките могат да се преместят така, че всяка фигурка да е на разстояние най-много d от първоначалната си позиция и при това преместване всяка червена фигурка заменя зелена, всяка зелена заменя синя, а всяка синя заменя червена.

Докажете, че е възможно фигурките да се преместят така, че всяка да е на разстояние най-много $d + 2$ от оригинала си и всяко квадратче да съдържа фигурка със същия цвят като самия него.

5 Теорема на Ойлер

Дефиниция 13. Ойлеров път в ненасочен граф е път, преминаващ през всяко ребро на графа точно по веднъж.

Теорема 14. Теорема на Ойлер. В ненасочен граф съществува Ойлеров път тогава и само тогава, когато всеки връх е от четна степен.

Задача 15. Нека G е свързан граф, който има точно $2k$ върха с нечетна степен ($k > 0$). Докажете, че ребрата на G могат да бъдат разбити на точно k пътя така, че всеки два пътя да нямат общо ребро.

Задача 16. Имаме $4n$ камъчета с тегла $1, 2, 3, \dots, 4n$. Всяко камъче е оцветено в един от n цвята, като от всеки цвят има точно по четири камъчета. Да се покаже, че камъчетата могат да се подредят в две купчини, така че едновременно са изпълнени следните условия:

- Общото тегло в двете купчини е едно и също.
- Всяка купчина съдържа по две камъчета от всеки цвят.

6 Допълнителни задачи

Задача 17. Нека n е положително цяло число. Да се докаже, че ребрата на пълен граф с n върха могат да се разбият на $n - 1$ пътя с дължини $1, 2, \dots, n - 1$.

Задача 18 (Bulgarian TST 2004). В таблица с размер $n \times n$ във всяка единична клетка е записано реално число, като някои два реда на таблицата не са напълно еднакви. Да се докаже, че може да се премахне една колона от таблицата така, че в получената таблица отново да няма два реда, които са напълно еднакви.

Задача 19 (IMO Shortlist 2019). В една социална мрежа има 2019 потребители, като някои двойки от тях са приятели. Всеки път, когато потребител A е приятел с потребител B , то и B е приятел с A . Събития от следния вид могат да се случват многократно, едно след друго:

- Трима потребители A, B и C , такива че A е приятел едновременно с B и C , но B и C не са приятели, променят статусите си на приятелство така, че B и C вече са приятели, но A вече не е приятел нито с B , нито с C . Всички останали статуси на приятелство остават непроменени.

Първоначално 1010 потребители имат по 1009 приятели всеки, а 1009 потребители имат по 1010 приятели всеки. Да се докаже, че съществува последователност от такива събития, след която всеки потребител е приятел с най-много един друг потребител.

Задача 20. На някое поле на шахматна дъска 10×10 е поставен топ. На всеки ход той се премества на съседно по страна поле. Топът е посетил всяко поле точно по един път. Да се докаже, че за всеки главен диагонал (диагоналите, свързващи противоположните ъгли на дъската) е вярно следното твърдение: в пътя на топа има два последователни хода, при които топът първо напуска диагонала, а след това отново се връща на него.

Задача 21 (ВАМО 2005). Даден е свързан граф с n върха. Катя иска да избере няколко от ребрата на графа по такъв начин, че всеки връх да бъде край на нечетен брой от избраните ребра.

а) Докажете, че Катя никога не може да изпълни желанието си, ако n е нечетно число.

б) Докажете, че Катя винаги може да изпълни желанието си, ако n е четно число.

Задача 22 (Контролни за МОМ 2021). Нека M е множеството от всички 2021-цифрени числа без 0 в десетичния запис. Две числа от M ще наричаме *съседни*, ако едното се получава от другото чрез увеличаване на една от цифрите му с 1. Всеки две съседни числа са записани на отделно картонче – едното от едната страна, другото от другата. Картончетата се подреждат в колонии едно върху друго, като едно картонче може да се постави върху друго, само ако числата върху долепените им части са еднакви. Колко най-малко колонии са необходими, за да можем да подредим всички картончета?

Задача 23. В една държава има n града, свързани помежду си с пътища така, че от всеки град може да се стигне до всеки друг. Във всеки град има определено количество златни монети (някои градове може да имат дългове, т.е. „отрицателен“ брой монети). Разрешено е да прехвърляте произволен брой монети k между два града, само ако те са директно свързани с път. Докажете, че е възможно да направите баланса на всеки град равен на нула тогава и само тогава, когато общата сума от монетите във всички градове първоначално е била нула.

Задача 24. Дадено цяло число $n > 1$. Има n^2 станции по склон на планина, всички на различни височини. Всяка от двете компании за кабинкови лифтове, A и B , управлява по k лифта; всеки лифт осигурява трансфер от една от станциите до по-висока (без междинни спирки). Всички k лифта на A имат k различни начални точки и k различни крайни точки, като лифт, който започва по-високо, също завършва по-високо. Същите условия важат и за B .

Казваме, че две станции са свързани от дадена компания, ако може да се започне от по-ниската станция и да се стигне до по-високата, като се използват един или повече лифтове на тази компания (не се позволяват други движения между станциите).

Да се определи най-малкото положително цяло число k , за което може да се гарантира, че има две станции, които са свързани и от двете компании.

Задача 25. Група математици присъстват на конференция. Казваме, че даден математик е k -доволен, ако той се намира в стая с поне k души, които той уважава, или ако е уважаван от поне k други души в стаята. Известно е, че когато всички участници се намират в една и съща стая, всеки от тях е поне $(3k + 1)$ -доволен. Да се докаже, че участниците могат да бъдат разпределени в две стаи така, че всеки да е поне k -доволен в своята стая и нито една от стаите да не е празна. Уважението не е задължително взаимно и никой не уважава сам себе си.

Задача 26 (Олимпиада на 239, 2019). В една лаборатория има n устройства, като всяка двойка от тях може да бъде съединена с кабел. Ако съществуват 4 устройства A, B, C и D такива, че са свързани двойките AB, BC, CD , но не са свързани CA, AD, DB , възниква пожар. Мъдрец е измислил схема на свързване на уредите, при която няма пожар. Когато отишъл в лабораторията обаче, той видял, че уредите са свързани по друг начин, при който отново не е настъпил пожар. Да се докаже, че той може да превърне затечената схема в своята собствена, като последователно добавя или премахва кабели един по един така, че в нито един момент да не възниква пожар.

Задача 27 (IMO Shortlist 2016). В един град има $n \geq 3$ острова. Първоначално фериботна компания предлага някои маршрути между някои двойки острови така, че е невъзможно островите да бъдат разделени на две групи, за които няма нито един фериботен маршрут между остров от едната група

и остров от другата група. Всяка година фериботната компания закрива един фериботен маршрут между два острова X и Y . В същото време, за да поддържа обслужването си, компанията открива нови маршрути според следното правило: за всеки остров, който е свързан с фериботен маршрут точно с един от островите X и Y , се добавя нов маршрут между този остров и другия от X и Y .

Дадено е, че във всеки момент, ако разделим всички острови на две непразни групи по какъвто и да е начин, е известно, че след няколко години фериботната компания ще закрие някакъв маршрут, който свързва два острова от различните групи. Докажете, че след няколко години ще съществува остров, който е свързан с фериботни маршрути с всички останали острови.

Задача 28. В една държава има N града, като някои двойки от тях са свързани с двупосочни авиолинии (всеки два града са свързани с най-много една линия). Всяка линия принадлежи на една от k компании. Известно е, че е възможно да се стигне от всеки град до всеки друг, но това става невъзможно, ако се премахнат всички линии на която и да е от компаниите. Кой е максималният възможен брой авиолинии в държавата?