

Първа балканска олимпиада по математика
Атина, Гърция, 6–10 май 1984 г.

Задача 1. Нека $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $n \geq 2$, са такива положителни числа, че $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Да се докаже, че

$$\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n} + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n} + \dots + \frac{\alpha_n}{1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

(Гърция)

Задача 2. Нека $A_1A_2A_3A_4$ е четириъгълник, около който може да се опише окръжност. Означаваме с H_1 , H_2 , H_3 и H_4 ортоцентровете съответно на триъгълниците $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$. Да се докаже, че четириъгълниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ са еднакви.

(Румъния)

Задача 3. Да се докаже, че за всяко цяло положително число m съществува цяло число $n > m$ такова, че десетичният запис на 5^n се получава от десетичния запис на 5^m с добавяне на няколко цифри отляво.

(България)

Задача 4. Да се намерят всички реални решения на системата

$$\begin{cases} ax + by = (x - y)^2 \\ by + cz = (y - z)^2 \\ cz + ax = (z - x)^2 \end{cases},$$

където a, b, c са положителни числа.

(Румъния)

Втора балканска олимпиада по математика

София, България, 4–9 май 1985 г.

Задача 1. Нека O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, а D е средата на AB . Нека E е центърът на тежестта на $\triangle ACD$. Да се докаже, че правата CD е перпендикулярна на OE тогава и само тогава, когато $AB = AC$.

(България)

Задача 2. Нека a, b, c, d са такива реални числа от интервала $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, че

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 1,$$

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d \geq \frac{10}{3}.$$

Да се докаже, че $a, b, c, d \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

(Румъния)

Задача 3. Нека E е числова ос (т.е. ориентирана права с единична отсечка върху нея) и нека S е множеството от точките върху E , които имат координати $19x + 85y$, където x и y са цели положителни числа. Точките от S са оцветени в червено, а останалите точки от E , които имат цели координати, са оцветени в зелено. Съществува ли точка A върху E (не непременно с цяла координата) такава, че всеки две точки B и C от E с цели координати, които са симетрични относно A , да са оцветени различно?

(Гърция)

Задача 4. В международна среща участват 1985 души. Измежду всеки трима от тях има двама, които говорят един и същ език. Да се докаже, че ако всеки участник може да говори на не повече от 5 езика, то има поне 200 души, които знаят един и същ език.

(Румъния)

Трета балканска олимпиада по математика
Букурещ, Румъния, 5–10 май 1986 г.

Задача 1. Права, минаваща през центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, пресича описаната окръжност в точките F и G и вписаната окръжност в точките D и E , като D е между I и F . Да се докаже, че $DF \cdot EG \geq r^2$, където r е радиусът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Кога се достига равенство?

(Гърция)

Задача 2. Нека $ABCD$ е тетраедър и E, F, G, H, K, L са шест точки съответно върху ръбовете AB, BC, CA, DA, DB, DC . Да се докаже, че ако $AE \cdot BE = BF \cdot CF = CG \cdot AG = DH \cdot AH = DK \cdot BK = DL \cdot CL$, то точките E, F, G, H, K, L лежат на една сфера.

(България)

Задача 3. Редицата $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ е определена чрез равенствата $a_1 = a$, $a_2 = b$ и $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + c}{a_{n-1}}$ при $n \geq 2$, където a, b, c са реални числа, $ab \neq 0$, $c > 0$. Да се докаже, че всички членове на редицата са цели числа тогава и само тогава, когато a, b и $\frac{a^2 + b^2 + c}{ab}$ са цели числа.

(България)

Задача 4. Триъгълникът ABC има свойството, че в равнината му съществува точка P такава, че триъгълниците PAB, PBC и PCA имат равни периметри и равни лица. Да се докаже, че:

- а) ако P е вътрешна точка за $\triangle ABC$, то той е равностраничен;
- б) ако P не е вътрешна точка за $\triangle ABC$, то той е правоъгълен.

(Румъния)

Четвърта балканска олимпиада по математика
Атина, Гърция, 3–8 май 1987 г.

Задача 1. Нека a е реално число и f е функция, дефинирана в множеството на реалните числа и приемаща реални стойности, за която:

- 1) $f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$ за всеки две реални числа x и y ;
- 2) $f(0) = \frac{1}{2}$.

Да се докаже, че f е константа.

(Югославия)

Задача 2. Нека $x \geq 1$ и $y \geq 1$ са такива реални числа, че числата $a = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ и $b = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$ са цели и с разлика по-голяма от 1. Да се докаже, че $b = a + 2$ и $x = y = \frac{5}{4}$.

(Румъния)

Задача 3. Ако в $\triangle ABC$ е изпълнено равенството

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^{23} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{48} = \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{23} \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^{48},$$

където α и β са ъглите при върховете A и B , да се пресметне отношението $AC : BC$.

(Кипър)

Задача 4. Две окръжности k_1 и k_2 съответно с центрове O_1 и O_2 и радиуси 1 и $\sqrt{2}$ се пресичат в точки A и B , като $O_1O_2 = 2$. Нека AC е хорда в k_2 , чиято среда лежи върху k_1 . Да се намери дължината на AC .

(България)

Пета балканска олимпиада по математика

Никозия, Кипър, 1–7 май 1988 г.

Задача 1. Нека CH , CL и CM са съответно височината, ъглополовящата и медианата през върха C в $\triangle ABC$ (точките H , L и M са върху правата AB). Отношенията на лицата на $\triangle HMC$ и $\triangle LMC$ към лицето на $\triangle ABC$ са съответно $\frac{1}{4}$ и $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Да се намерят мерките на ъглите на $\triangle ABC$.

(България)

Задача 2. Да се намерят всички полиноми на две променливи $P(x, y)$, за които равенството $P(a, b) \cdot P(c, d) = P(ac + bd, ad + bc)$ е изпълнено за произволни реални числа a, b, c, d .

(Югославия)

Задача 3. Да се докаже, че всеки тетраедър $A_1A_2A_3A_4$ може да бъде разположен между две успоредни равнини, разстоянието между които е d и числото d удовлетворява неравенството $d \leq \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$, където

$$p = A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + A_1A_4^2 + A_2A_3^2 + A_2A_4^2 + A_3A_4^2.$$

(Гърция)

Задача 4. Да се намерят всички двойки (a_n, a_{n+1}) от последователни членове на редицата $a_n = 2^n + 49$, $n = 1, 2, \dots$, за които $a_n = pq$, $a_{n+1} = rs$, където p, q, r, s са такива прости числа, че $p < q$, $r < s$ и $q - p = s - r$.

(Румъния)

Шеста балканска олимпиада по математика

Сплит, Югославия, 29 април – 6 май 1989 г.

Задача 1. Нека $d_1, d_2, \dots, d_k$ са всички делители на естественото число n , като $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Да се намерят всички числа n , за които $k \geq 4$ и $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$.

(България)

Задача 2. Нека $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 a_1 + a_0$ е десетичният запис на просто число, като $n > 1$ и $a_n > 1$. Да се докаже, че полиномът $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ е неразложим (т.е. не може да се представи като произведение на два полинома с положителни степени и цели коефициенти).

(Югославия)

Задача 3. Нека ABC е триъгълник с медицентър G и ℓ е права, пресичаща страните AB и AC съответно в точки B_1 и C_1 така, че A и G лежат в една и съща полуравнина относно ℓ . Да се докаже, че

$$S_{BB_1GC_1} + S_{CC_1GB_1} \geq \frac{4}{9} S_{ABC}.$$

Кога се достига равенство?

(Гърция)

Задача 4. Разглеждаме множествата F , чиито елементи са подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ и които имат следните две свойства:

- а) ако $A \in F$, то $|A| = 3$;
- б) ако $A, B \in F$ и $A \neq B$, то $|A \cap B| \leq 1$.

Нека $f(n)$ е максималната стойност на $|F|$ за всички такива множества F . Да се докаже, че

$$\frac{n^2 - 4n}{6} \leq f(n) \leq \frac{n^2 - n}{6}$$

при $n \geq 3$. ($|S|$ означава броя на елементите на крайното множество S .)

(Румъния)

Седма балканска олимпиада по математика
София, България, 6–11 май 1990г.

Задача 1. Нека $a_1 = 1, a_2 = 3$ и $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$ за всяко $n = 1, 2, 3, \dots$. Да се намерят всички числа n , за които a_n се дели на 11.
 (Гърция)

Задача 2. Разглеждаме полинома, дефиниран чрез равенството

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n} = (1.x + 2x^2 + \dots + nx^n)^2.$$

Да се докаже, че

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} = \frac{n(n+1)(5n^2 + 5n + 2)}{24}.$$

(България)

Задача 3. Нека $A_1B_1C_1$ е педалният триъгълник на остроъгълен и неравностранен $\triangle ABC$ и нека A_2, B_2, C_2 са допирните точки на вписаната в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност със страните му. Да се докаже, че Ойлеровите прави на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ съвпадат.

Забележка. Педалният триъгълник на даден триъгълник има за върхове петите на височините му. Ойлеровата права на даден триъгълник е правата, определена от ортоцентъра и центъра на описаната окръжност.

(Югославия)

Задача 4. Да се намери минималният брой елементи на крайно множество A , за което съществува функция $f : N \rightarrow A$, ($N = \{1, 2, 3, \dots\}$) със следното свойство: $f(i) \neq f(j)$ винаги, когато $|i - j|$ е просто число.

(Румъния)

Осма балканска олимпиада по математика
Констанца, Румъния, 13–18 май 1991 г.

Задача 1. Нека M е точка върху дъгата $\widehat{AB}$ от описаната около остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност, която не съдържа върха C . Перпендикулярът от M към радиуса OA (O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност) пресича страните AB и AC съответно в точките K и L , а перпендикулярът от M към радиуса OB пресича страните AB и BC съответно в точките N и P . Да се изрази $\sphericalangle MLP$ с помощта на ъглите на $\triangle ABC$, ако е дадено, че $KL = MN$.

(Гърция)

Задача 2. Да се докаже, че съществуват безбройно много нееднакви триъгълници T , за които:

- а) дължините a, b, c на страните на T са взаимно прости цели числа, т.е. най-големият общ делител на a, b, c е равен на 1;
- б) лицето на T е цяло число;
- в) дължините на височините на T не са цели числа.

(Югославия)

Задача 3. Правилен шестоъгълник с лице H е вписан в изпъкнал многоъгълник с лице P . Да се докаже, че $P \leq \frac{3H}{2}$. Кога се достига равенство?

(България)

Задача 4. Да се докаже, че не съществува взаимно еднозначно съответствие $f : \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$, за което $f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n)$ за произволни естествени числа m и n .

Забележка. Съответствието $f : A \rightarrow B$ се нарича взаимно еднозначно ако: а) от равенството $f(m) = f(n)$ следва, че $m = n$; б) за всяко $n \in B$ съществува $m \in A$ такава, че $f(m) = n$.

(Румъния)

Девета балканска олимпиада по математика
Атина, Гърция, 4–9 май 1992 г.

Задача 1. Нека m и n са цели положителни числа и

$$A(m, n) = m^{3^{4n}+6} - m^{3^{4n}+4} - m^5 + m^3.$$

Да се намерят всички n , за които $A(m, n)$ се дели на 1992 за всяко m .

(България)

Задача 2. Да се докаже, че за всяко естествено число n е изпълнено неравенството $(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n(n!)^2$.

(Кипър)

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ и точки D , E и F съответно върху страните BC , CA и AB , различни от върховете на триъгълника. Да се докаже, че ако около четириъгълника $AFDE$ може да се опише окръжност, то

$$\frac{4S_{DEF}}{S_{ABC}} \leq \frac{EF^2}{AD^2}.$$

(Гърция)

Задача 4. За всяко естествено число $n \geq 3$ да се намери най-малкото естествено число $f(n)$ със следното свойство: за всеки избор на множество $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ с $f(n)$ елемента съществуват $x, y, z \in A$, които са две по две взаимно прости.

(Румъния)

Десета балканска олимпиада по математика
Никозия, Кипър, 3–8 май 1993 г.

Задача 1. Нека a, b, c, d, e и f са реални числа, за които

$$a + b + c + d + e + f = 10,$$

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 + (d - 1)^2 + (e - 1)^2 + (f - 1)^2 = 6.$$

Да се намери най-голямата стойност, която може да приеме числото f .

(Кипър)

Задача 2. Едно естествено число с десетично представяне

$$a_N 10^N + \dots + a_1 10 + a_0, \quad a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

се нарича *монотонно*, ако $a_N \leq a_{N-1} \leq \dots \leq a_1 \leq a_0$. Да се намери броят на всички монотонни числа с не повече от 1993 цифри.

(България)

Задача 3. Окръжностите C_1 и C_2 с центрове съответно O_1 и O_2 се допират външно в точка T . Нека C е окръжност с център O такава, че C_1 и C_2 се допират вътрешно до C съответно в точки A и B . Общата допирателна на C_1 и C_2 в точката T пресича C в точки K и L . Ако D е средата на отсечката KL , да се докаже, че $\sphericalangle O_1 O O_2 = \sphericalangle A D B$.

(Гърция)

Задача 4. Нека p е просто число и $m \geq 2$ е естествено число. Да се докаже, че уравнението

$$\frac{x^p + y^p}{2} = \left(\frac{x + y}{2} \right)^m$$

има решение $(x, y) \neq (1, 1)$ в естествени числа само при $m = p$.

(Румъния)

Единадесета балканска олимпиада по математика

Нови Сад, Югославия, 9-14 май 1994 г.

Задача 1. Дадени са остър ъгъл XAY и точката P във вътрешността му. Да се построи (с линейка и пергел) права през P , която пресича раменете AX и AY на ъгъла съответно в точки B и C така, че лицето на $\triangle ABC$ да е равно на лицето на квадрат със страна AP .

(Кипър)

Задача 2. Да се докаже, че полиномът $x^4 - 1994x^3 + (1993 + m)x^2 - 11x + m$, където m е цяло число, има най-много един целочислен корен.

(Гърция)

Задача 3. Нека $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е пермутация на числата $1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$). Да се намери възможно най-голямата стойност на израза

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|.$$

(Румъния)

Задача 4. Да се намери най-малкото число $n \geq 5$, за което съществува компания от n души, така че всеки двама, които се познават нямат общ познат, а всеки двама, които не се познават имат точно двама общи познати (ако $A \neq B$ и A познава B , то и B познава A).

(България)

Дванадесета балканска олимпиада по математика
Пловдив, България, 9-13 май 1995 г.

Задача 1. Да се намери стойността на израза

$$(\dots(((2 * 3) * 4) * 5) * \dots) * 1995,$$

където $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$ за произволни положителни числа x и y .

(Македония)

Задача 2. Дадени са две окръжности $c_1(O_1, r_1)$ и $c_2(O_2, r_2)$, които се пресичат в точки A и B , като $r_2 > r_1$ и $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$. Правата O_1O_2 пресича c_1 в точки C и D , а c_2 - в точки E и F (E е между C и D , а D е между E и F). Правата BE пресича окръжността c_1 в точка K и правата AC в точка M , а правата BD пресича окръжността c_2 в точка L и правата AF в точка N . Да се докаже, че $\frac{r_1}{r_2} = \frac{KE}{KM} \cdot \frac{LN}{LD}$.

(Гърция)

Задача 3. Нека a и b са естествени числа такива, че $a > b$ и $a + b$ е четно число. Да се докаже, че корените на уравнението

$$x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2 + 1)^2 = 0$$

са естествени числа, никое от които не е точен квадрат.

(Албания)

Задача 4. Нека n е естествено число и S е множеството от всички точки (x, y) , където x и y са естествени числа и $x \leq n$, $y \leq n$. Нека T е множеството от всички квадрати с върхове от S . С a_k ($k \geq 0$) означаваме броя на двойките точки от S , които са върхове на точно k квадрата от T . Да се докаже, че $a_0 = a_2 + 2a_3$.

(Югославия)

Тринадесета балканска олимпиада по математика

Бакау, Румъния, 28 април - 3 май 1996 г.

Задача 1. Нека G и O са съответно центърът на тежестта и центърът на описаната окръжност на $\triangle ABC$, а R и r - съответно радиусите на описаната и вписаната окръжност. Да се докаже, че $OG \leq \sqrt{R(R-2r)}$.

(Гърция)

Задача 2. Нека $p > 5$ е просто число и $X = \{p - n^2 : n \in N, n^2 < p\}$. Да се докаже, че множеството X съдържа два различни елемента x и y , за които $x \neq 1$ и x дели y .

(Албания)

Задача 3. Нека $ABCDE$ е изпъкнал петоъгълник. С M , N , P , Q и R са означени средите съответно на страните AB , BC , CD , DE и EA . Ако AP , BQ , CR и DM се пресичат в една точка, да се докаже, че тази точка лежи и на отсечката EN .

(Югославия)

Задача 4. Да се докаже, че съществува подмножество A на множеството $\{1, 2, 3, \dots, 2^{1996} - 1\}$ със следните свойства:

- а) $1 \in A$ и $2^{1996} - 1 \in A$;
- б) всеки елемент на $A \setminus \{1\}$ е сума на два (не непременно различни) елемента на A ;
- в) броят на елементите на A е най-много 2012.

(Румъния)

Четиринадесета балканска олимпиада по математика

Калампака, Гърция, 29 април - 4 май 1997 г.

Задача 1. Нека O е вътрешна точка за изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с лице S така, че $OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2S$. Да се докаже, че $ABCD$ е квадрат с център O .

(Югославия)

Задача 2. Нека S е множество с $n \geq 2$ елемента и $A_1, A_2, \dots, A_m$ ($m \geq 2$) са подмножества на S със следното свойство: за всеки два различни елемента x и y на S съществува подмножество A_i , което съдържа точно единия от тях. Да се докаже, че $2^m \geq n$.

(Югославия)

Задача 3. Нека C_1 и C_2 са две окръжности, които се допират външно в точка D , а Γ е окръжност, която се допира вътрешно до C_1 и C_2 съответно в точки B и C . Означаваме с A едната от двете пресечни точки на Γ с общата допирателна на C_1 и C_2 през D . Ако K и L са пресечните точки на AB и AC съответно с C_1 и C_2 , а M и N са пресечните точки на BC съответно с C_1 и C_2 , да се докаже, че правите AD , KM и LN се пресичат в една точка.

(Гърция)

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : R \rightarrow R$ такива, че

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

за произволни $x, y \in R$.

(България)

Петнадесета балканска олимпиада по математика

Никозия, Кипър, 2-9 май 1998 г.

Задача 1. Да се намери броят на различните членове на крайната редица с общ член $\left\lceil \frac{k^2}{1998} \right\rceil$, където $k = 1, 2, \dots, 1997$ ($[x]$ означава цялата част на x).

(Гърция)

Задача 2. Нека $n \geq 2$ е цяло число и $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$ са реални числа. Да се докаже неравенството

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} - \dots - \dots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

(Румъния)

Задача 3. Нека S е множеството от вътрешните точки на даден триъгълник без една и тези по контура му. Да се докаже, че S може да се представи като обединение на затворени отсечки, никои две от които нямат обща точка.

(Югославия)

Задача 4. Да се докаже, че уравнението $m^2 = n^5 - 4$ няма решение в цели числа.

(България)

Шестнадесета балканска олимпиада по математика
Охрид, Македония, 5-10 май 1999 г.

Задача 1. В остроъгълен $\triangle ABC$ точката D е средата на дъгата $\widehat{BC}$ от описаната около триъгълника окръжност, несъдържаща точка A . Симетричните точки на D относно правата BC и центъра на описаната окръжност са означени съответно с E и F . Нека K е средата на отсечката EA . Да се докаже, че:

а) точката K лежи на окръжността, минаваща през средите на страните на триъгълника;

б) правата, минаваща през K и средата на BC , е перпендикулярна на AF .

(Турция)

Задача 2. Нека p е просто число такова, че 3 дели $p - 2$. Разглеждаме множеството $S = \{y^2 - x^3 - 1 : 0 \leq x, y \leq p - 1\}$. Да се докаже, че най-много $p - 1$ елемента на S се делят на p .

(България)

Задача 3. В остроъгълен $\triangle ABC$ точките M , N и P са петите на перпендикулярите от медицентъра G на триъгълника към страните му. Да се докаже, че $\frac{4}{27} < \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{4}$.

(Албания)

Задача 4. Нека $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ е растяща редица от неотрицателни цели числа такава, че за всяко $k \geq 0$ броят на членовете на редицата, които са по-малки или равни на k е краен. Означаваме този брой с y_k . Да се докаже, че за всеки две положителни цели числа m и n е в сила неравенството

$$\sum_{i=0}^n x_i + \sum_{j=0}^m y_j \geq (n+1)(m+1).$$

(Румъния)

Седемнадесета балканска олимпиада по математика
Кишинеу, Молдова, 3-9 май 2000 г.

Задача 1. (Вж. Задача 4 от 14. БОМ) Да се намерят всички функции $f : R \rightarrow R$ такива, че

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

за произволни $x, y \in R$.

(Албания)

Задача 2. В неравнобедрен остроъгълен $\triangle ABC$ точка E е вътрешна за медианата AD ($D \in BC$), а F е ортогоналната проекция на E върху правата BC . Нека M е вътрешна точка за отсечката EF , а N и P са ортогоналните проекции на M съответно върху правите AC и AB . Да се докаже, че ъглополовящите на $\angle PMN$ и $\angle PEN$ нямат обща точка.

(Македония)

Задача 3. Да се намери максималният брой правоъгълници с размери $1 \times 10\sqrt{2}$, които могат да се изрежат от правоъгълник с размери 50×90 с разрези, успоредни на страните на изходния правоъгълник.

(Югославия)

Задача 4. Едно естествено число r наричаме *степен* ако $r = t^s$, където $t \geq 2$ и $s \geq 2$ са цели числа. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува множество A с n елемента така, че за произволни елементи $r_1, r_2, \dots, r_k \in A$, $1 \leq k \leq n$, числото $\frac{r_1 + r_2 + \dots + r_k}{n}$ е степен.

(Румъния)

Осемнадесета балканска олимпиада по математика
Белград, Югославия, 3-9 май 2001 г.

Задача 1. Да се докаже, че ако a, b и n са естествени числа по-големи от 1, за които $2^n - 1 = ab$, то числото $ab - a + b - 1$ може да се представи във вида $k \cdot 2^m$, където k е нечетно, а m е четно естествено число.

(Кипър)

Задача 2. Да се докаже, че ако всички ъгли на изпъкнал петоъгълник са равни, а дължините на страните му са рационални числа, то той е правилен.

(Молдова)

Задача 3. Да се докаже, че ако a, b и c са положителни реални числа, за които $a + b + c \geq abc$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

(Румъния)

Задача 4. Куб с размери $3 \times 3 \times 3$ е разделен на 27 еднакви кубични клетки. Една от тези клетки е празна, а останалите са запълнени с единични кубчета, номерирани по произволен начин с числата $1, 2, \dots, 26$. *Позволен* ход е преместване на единичен куб в съседна празна клетка. Съществува ли крайна поредица от позволени ходове, след която за всяко $k = 1, 2, \dots, 13$ единичните кубчета с номера k и $27 - k$ са с разменени места? (Две клетки се наричат съседни, ако имат обща стена.)

(България)

Деветнадесета балканска олимпиада по математика

Анталия, Турция, 25 април - 1 май 2002 г.

Задача 1. В равнината са дадени точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 4$, никои три от които не са колинеарни. Някои двойки от различни точки измежду $A_1, A_2, \dots, A_n$ са свързани с отсечки така, че всяка точка е свързана с поне три други. Докажете, че съществува $k > 1$ и различни точки $X_1, X_2, \dots, X_{2k}$ от $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ такива, че за всяко $1 \leq i \leq 2k - 1$ точката X_i е свързана с X_{i+1} и X_{2k} е свързана с X_1 .

(Югославия)

Задача 2. Редицата $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ е дефинирана чрез равенствата

$$a_1 = 20, \quad a_2 = 30, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 1.$$

Да се намерят всички естествени числа n , за които числото $1 + 5a_n a_{n+1}$ е точен квадрат.

(България)

Задача 3. Две окръжности с различни радиуси се пресичат в точки A и B . Общите им допирателни MN и ST са такива, че точките M и S са от едната окръжност, а точките N и T са от другата. Докажете, че ортоцентровете на триъгълниците AMN , AST , BMN и BST са върхове на правоъгълник.

(Румъния)

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : N \rightarrow N$ такива, че

$$2n + 2001 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2002$$

за всяко $n \in N$ (N е множеството на естествените числа).

(Румъния)

Двадесета балканска олимпиада по математика
Тирана, Албания, 2-7 май 2003 г.

Задача 1. Съществува ли множество от 4004 естествени числа такова, че сумата на кои да са 2003 негови елемента не се дели на 2003?

(Македония)

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$ с $AB \neq AC$. Допирателната през точка A към описаната около триъгълника окръжност пресича правата BC в точка D . Точките E и F съответно върху симетралите на страните AB и AC са такива, че BE и CF са перпендикулярни на BC . Да се докаже, че точките D , E и F лежат на една права.

(Румъния)

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : Q \rightarrow R$ такива, че:

- (i) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$ за всички $x, y \in Q$;
- (ii) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$ за всяко $x \in Q$;
- (iii) $f(1) > -1$.

(Q е множеството на рационалните числа, а R е множеството на реалните числа.)

(Гърция)

Задача 4. Нека m и n са взаимно прости нечетни естествени числа. Правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = m$ и $AD = n$ е разделен на mn единични квадратчета. С $A_1, A_2, \dots, A_k$ са означени последователните пресечни точки на диагонала AC със страните на единичните квадратчета ($A_1 = A$, $A_k = C$). Да се докаже, че

$$\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} A_i A_{i+1} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{mn}.$$

(България)

Двадесет и първа балканска олимпиада по математика
Плевен, България, 5-10 май 2004 г.

Задача 1. Редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ от реални числа изпълнява условието

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

за произволни $m \geq n \geq 0$. Ако $a_1 = 3$, да се намери a_{2004} .

(Кипър)

Задача 2. Да се реши в прости числа уравнението

$$x^y - y^x = xy^2 - 19.$$

(Албания)

Задача 3. Нека O е вътрешна точка за остроъгълен $\triangle ABC$. Окръжностите с центрове в средите на страните на триъгълника и минаващи през O се пресичат за втори път в точки K, L и M , различни от O . Да се докаже, че O е центърът на вписаната в $\triangle KLM$ окръжност тогава и само тогава, когато O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

(Румъния)

Задача 4. Равнината е разделена на части чрез краен брой прави, никои три от които не минават през една точка. Две части се наричат *съседни*, ако сечението на границите им е отсечка, лъч или права (точките не са отсечки). Във всяка от частите трябва да се напише цяло число така, че:

(i) произведението на числата във всеки две съседни части е по-малко от сбора им;

(ii) сборът на числата във всяка от двете полуравнини, определени от коя да е от дадените прави, е нула.

Да се докаже, че това е възможно тогава и само тогава, когато поне две от дадените прави не са успоредни.

(Сърбия и Черна гора)

Двадесет и втора балканска олимпиада по математика
Яш, Румъния, 4-10 май 2005 г.

Задача 1. Вписаната в остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните AB и AC съответно в точки D и E . Нека X и Y са пресечните точки на правата DE съответно с ъглополовящите на $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ABC$, а Z е средата на страната BC . Да се докаже, че $\triangle XYZ$ е равностранен тогава и само тогава, когато $\sphericalangle BAC = 60^\circ$.

(Гърция)

Задача 2. Да се намерят всички прости числа p , за които $p^2 - p + 1$ е точен куб на цяло число.

(Албания)

Задача 3. Нека a , b и c са положителни реални числа. Да се докаже неравенството

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Кога се достига равенство?

(Сърбия и Черна гора)

Задача 4. Нека S е подмножество на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 2$, такова, че S не съдържа нито два елемента, единият от които дели другия, нито два елемента, които са взаимно прости числа. Колко е максималният възможен брой елементи на такова множество?

(Молдова)

Двадесет и трета балканска олимпиада по математика
Агрос, Кипър, 27 април - 3 май 2006 г.

Задача 1. Нека a, b и c са положителни реални числа. Да се докаже, че

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

(Гърция)

Задача 2. В окръжност k е вписан $\triangle ABC$. Права пресича страните му AB и AC и продължението на BC съответно в точки D, F и E , като C е между B и E . Хордите AA', BB' и CC' на k са успоредни на DE . Да се докаже, че правите $A'E, B'F$ и $C'D$ минават през една точка.

(Гърция)

Задача 3. Да се намерят всички тройки положителни рационални числа (m, n, p) , за които числата $m + \frac{1}{np}$, $n + \frac{1}{mp}$ и $p + \frac{1}{mn}$ са цели.

(Румъния)

Задача 4. Дадено е естествено число m . Да се намерят всички естествени числа a , за които редицата, дефинирана чрез равенствата $a_0 = a$ и

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{ако } a_n \text{ е четно число,} \\ a_n + m, & \text{ако } a_n \text{ е нечетно число} \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

е периодична.

(България)

Р Е Ш Е Н И Я

Първа балканска олимпиада по математика

1. Като използваме, че за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ е изпълнено

$$\frac{\alpha_i}{1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_n} = \frac{\alpha_i}{2 - \alpha_i} = \frac{2}{2 - \alpha_i} - 1,$$

получаваме, че неравенството е еквивалентно на

$$\frac{1}{2 - \alpha_1} + \dots + \frac{1}{2 - \alpha_n} \geq \frac{n^2}{2n - 1}.$$

След полагане $x_i = 2 - \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, получаваме

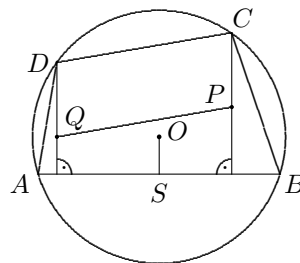
$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{n^2}{2n - 1},$$

където $x_i > 0$ и $x_1 + \dots + x_n = 2n - \alpha_1 - \dots - \alpha_n = 2n - 1$. Следователно неравенството е еквивалентно на $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$, което

е точно неравенството между средното аритметично и средното хармонично на n положителни числа.

2. Лема. Ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и P и Q са ортоцентровете на $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, то $PCDQ$ е успоредник.

Доказателство на лемата. От $CP \perp AB$ и $DQ \perp AB$ получаваме $CP \parallel DQ$. Ако O е центърът на окръжността, а S е средата на AB , то е изпълнено $2OS = CP$ (това свойство се доказва като се използва, че пресечната точка на CS и OP е медицентърът на $\triangle ABC$). Аналогично $2OS = DQ$, откъдето $CP = DQ$ и следователно $PCDQ$ е успоредник. $\diamond$



От лемата следва, че отсечките A_1A_2 и H_2H_1 ; A_2A_3 и H_3H_2 ; A_3A_4 и H_4H_3 ; A_4A_1 и H_1H_4 са успоредни и равни, т.е. четириъгълниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ са еднакви.

3. Първо ще покажем, че ако числото 5^m има k цифри, то $k \leq m$. Наистина, ако допуснем обратното, т.е. $k - 1 \geq m$, то понеже всяко число с k цифри е по-голямо или равно на 10^{k-1} получаваме

$$10^{k-1} \geq 10^m > 5^m \geq 10^{k-1},$$

което е противоречие.

Ако намерим n , за което $5^n - 5^m$ се дели на 10^k , то последните k цифри на 5^n съвпадат с числото 5^m , т.е. 5^n се получава от 5^m чрез добавяне на няколко цифри отляво. Тъй като числата 2 и 5 са взаимно прости, то числото $5^{\varphi(2^k)} - 1$ се дели на 2^k , където $\varphi(x)$ е функцията на Ойлер. Тогава числото

$$5^{m+\varphi(2^k)} - 5^m = 5^m(5^{\varphi(2^k)} - 1)$$

се дели на 5^k и на 2^k , т.е. се дели на 10^k . Следователно $n = m + \varphi(2^k)$ е число с исканото свойство.

4. След събиране на трите уравнения получаваме

$$ax + by + cz = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz.$$

Заместваме $ax + by = x^2 + y^2 - 2xy$ и получаваме $cz = z^2 + xy - yz - xz = (z - x)(z - y)$. Аналогично намираме $by = (y - x)(y - z)$ и $ax = (x - z)(x - y)$. Ако $x \geq y \geq z$, то

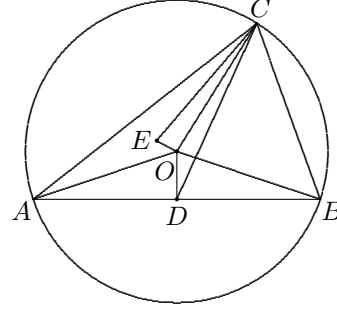
$$\begin{aligned} ax &= (x - z)(x - y) \geq 0 \\ by &= (y - x)(y - z) \leq 0 \\ cz &= (z - x)(z - y) \geq 0. \end{aligned}$$

Тъй като a, b, c са положителни числа, то $x \geq 0, y \leq 0$ и $z \geq 0$. Сега от $y \geq z$ следва, че $y = z = 0$ и от $ax = x^2$ получаваме $x = 0$ или $x = a$. В този случай получихме решенията $(0, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$. Аналогично получаваме още две решения: $(0, b, 0)$ и $(0, 0, c)$.

Втора балканска олимпиада по математика

1. Използваме стандартните означения за елементите на триъгълник. Ще покажем, че скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{CD}$ е нула тогава и само тогава, когато $AB = AC$. Тъй като E е медицентърът на $\triangle ACD$, а D е средата на AB , имаме

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{3} \text{ и } \overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}.$$



Освен това $OD = |R \cos \gamma|$, $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = |90^\circ - \beta|$, $\sphericalangle OAB = |90^\circ - \gamma|$ и $\sphericalangle OCB = |90^\circ - \alpha|$. Пресмятаме:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CA} &= Rb \sin \beta & \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} &= Rb \sin(\beta - \gamma) & \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CA} &= -Rb \sin \beta \\ \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CB} &= -Ra \sin \alpha & \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CA} &= Rb \cos \gamma \sin \alpha & \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CB} &= Ra \cos \gamma \sin \beta. \end{aligned}$$

Като използваме, че $b \sin \alpha = a \sin \beta$ получаваме

$$\begin{aligned} 6 \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \\ &= Ra(\sin(\beta - \gamma) + 2 \cos \gamma \sin \beta - \sin \alpha) = \\ &= Ra(\sin(\beta - \gamma) + 2 \cos \gamma \sin \beta - \sin(\alpha + \beta)) = \\ &= 2Ra(\cos \gamma \sin \beta - \cos \beta \sin \gamma) = 2Ra \sin(\beta - \gamma). \end{aligned}$$

Следователно скаларното произведение $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CD}$ е равно на нула тогава и само тогава, когато $\sin(\beta - \gamma) = 0$, т. е. когато $\beta = \gamma$, откъдето $AC = AB$.

2. Като използваме, че $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ получаваме

$$\frac{10}{3} \leq \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d = 4 - 2(\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2 d),$$

т. е. $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2 d \leq \frac{1}{3}$. За да докажем, че $a, b, c, d \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

трябва да покажем, че $\sin a, \sin b, \sin c, \sin d \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Ако положим $x = \sin a$, $y = \sin b$, $z = \sin c$ и $t = \sin d$, трябва да докажем, че ако $x + y + z + t = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq \frac{1}{3}$, то $x, y, z, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. От $1 - t = x + y + z$, $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ и $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{3} - t^2$ следва, че

$$(1 - t)^2 = (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \leq 3\left(\frac{1}{3} - t^2\right),$$

т. е. $2t^2 - t \leq 0$. Оттук $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Аналогично се доказва, че $x, y, z \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3. Ще докажем, че точката $A = \frac{19.85 + 19 + 85}{2} = \frac{1719}{2}$ изпълнява условието. За целта трябва да покажем, че всеки две симетрични спрямо A точки са разноцветни. Нека p и q са симетрични спрямо A . Това означава, че $p + q = 2A = 1719$.

1. Нека p и q са червени точки. Тогава съществуват естествени числа x_1, y_1, x_2 и y_2 , за които $p = 19x_1 + 85y_1$ и $q = 19x_2 + 85y_2$. Оттук

$$19.85 + 19 + 85 = 19(x_1 + x_2) + 85(y_1 + y_2),$$

което записваме във вида $19.85 = 19(x_1 + x_2 - 1) + 85(y_1 + y_2 - 1)$. Тъй като 19 и 85 са взаимно прости числа следва, че $x_1 + x_2 - 1$ се дели на 85, а $y_1 + y_2 - 1$ се дели на 19. Понеже $x_1 + x_2 - 1 \geq 1$ и $y_1 + y_2 - 1 \geq 1$, то $x_1 + x_2 - 1 \geq 85$ и $y_1 + y_2 - 1 \geq 19$, откъдето $19.85 = 19(x_1 + x_2 - 1) + 85(y_1 + y_2 - 1) \geq 2 \cdot 19.85$, което е противоречие.

2. Да допуснем, че p и q са зелени числа. Тъй като 19 и 85 са взаимно прости числа, то съществуват x_1, y_1, x_2 и y_2 , за които $19x_1 + 85y_1 = p$ и $19x_2 + 85y_2 = q$. При това можем да считаме, че сме избрали решения, за които x_1 и x_2 са възможно най-малките цели положителни числа. Тъй като p и q са зелени, то $y_1 \leq 0$ и $y_2 \leq 0$. Ако $x_1 > 85$ от

$$19(x_1 - 85) + 85(y_1 + 19) = 19x_1 + 85y_1 = p$$

получаваме противоречие с минималността на x_1 . Следователно $x_1 \leq 85$ и аналогично $x_2 \leq 85$. Както в случай 1. намираме, че $x_1 + x_2 - 1$ се дели на 85 и $x_1 + x_2 \geq 86$. Понеже $x_1 + x_2 < 2 \cdot 85$, то $x_1 + x_2 = 86$. Тогава $19.85 + 19 + 85 = 19(x_1 + x_2) + 85(y_1 + y_2) = 19 \cdot 86 + 85(y_1 + y_2)$, откъдето $y_1 + y_2 = 1$, което е противоречие с $y_1 \leq 0$ и $y_2 \leq 0$.

Остава единствената възможност p и q да са разноцветни точки.

4. Ще докажем, че има участник, който се разбира с поне 992 от останалите. Ако има участник, който се разбира с всички останали, то той се

разбира с $1984 > 992$ участника. Да допуснем, че има двама A и B , които не се разбират. От условието следва, че всеки от останалите 1983 човека се разбира или с A или с B . От принципа на Дирихле следва, че единият от тях (например A) се разбира с поне 992 участника. Тъй като той говори на не повече от 5 езика и $\frac{992}{5} > 198$, то поне 199 говорят един и същ език. Тези 199 участника заедно с A образуват търсената група.

Трета балканска олимпиада по математика

1. Ще докажем, че степента на центъра I на вписаната окръжност спрямо описаната окръжност е равна на $2Rr$. Ако L е средата на дъгата $\widehat{AB}$, то от $\sphericalangle LIA = \sphericalangle LAI = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ следва $LI = LA$. От синусовата теорема за $\triangle ACL$ следва, че $LI = LA = 2R \sin \frac{\gamma}{2}$ и като използваме, че $CI = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}$, получаваме $CI \cdot LI = 2Rr$. Оттук в частност следва, че $FI \cdot GI = 2Rr$. Пресмятаме

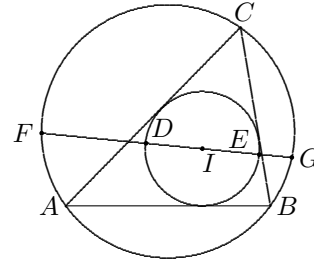
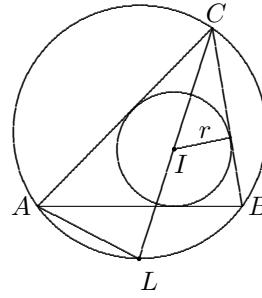
$$\begin{aligned} FD \cdot EG &= (FI - r)(GI - r) \\ &= FI \cdot GI - r(FI + GI) + r^2 \\ &= 2Rr - rFG + r^2. \end{aligned}$$

Неравенството $FD \cdot EG \geq r^2$ е еквивалентно на $2R \geq FG$, което е изпълнено, тъй като FG е хорда в описаната окръжност. Равенство се достига тогава и само тогава, когато FG е диаметър.

2. Нека $p = AE \cdot BE = BF \cdot CF = CG \cdot AG = DH \cdot AH = DK \cdot BK = DL \cdot CL$ и да означим с O центъра на описаната около тетраедъра сфера. Сечението на равнината през точките O, A и B с описаната сфера е окръжност. В тази окръжност степента на точка E е равна на $R^2 - OE^2 = AE \cdot BE = p$, откъдето $OE = \sqrt{R^2 - p}$. Аналогично

$$OF = OG = OH = OK = OL = \sqrt{R^2 - p},$$

т.е. шестте точки лежат на сфера с център точката O и радиус $\sqrt{R^2 - p}$.



3. Връзката от условието може да се запише във вида $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = c$, откъдето $c = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2$ за $n \geq 2$. Следователно

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_n} = \text{const} = t,$$

откъдето $a_{n+1} = ta_n - a_{n-1}$. От друга страна

$$t = \frac{a_1 + a_3}{a_2} = \frac{a_1 + \frac{a_2^2 + c}{a_1}}{a_2} = \frac{a^2 + b^2 + c}{ab}.$$

Ако a , b и t са цели числа, то по индукция лесно следва, че $a_{n+1} = ta_n - a_{n-1}$ е също цяло число.

Сега да допуснем, че a_n е цяло число за всяко $n = 1, 2, \dots$. Тогава $a = a_1$ и $b = a_2$ са цели числа и $t = \frac{a_1 + a_3}{a_2}$ е рационално число. Да допуснем, че t не е цяло число. Тогава $t = \frac{p}{q}$, където p и $q > 1$ са взаимно прости числа. От $pa_2 = q(a_1 + a_3)$, следва, че q дели a_2 . От $pa_n = q(a_{n-1} + a_{n+1})$ по индукция следва, че q дели a_n за всяко $n \geq 2$. Отново от $pa_n = q(a_{n-1} + a_{n+1})$ следва, че при $n \geq l + 1$ имаме, че q^l дели a_n . Сега от $c = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ следва, че q^{2l} дели c за всяко естествено l , което е невъзможно. Следователно $q = 1$, т.е. t е цяло число.

4. Да означим лицето на $\triangle ABC$ със S . а) Тъй като P е вътрешна точка, то от условието следва, че $S_{PAB} = \frac{S}{3}$. Следователно височината през P в $\triangle PAB$ е $\frac{1}{3}$ от височината през C в $\triangle ABC$. Това означава, че P лежи на права през медицентъра G на $\triangle ABC$, която е успоредна на AB . Аналогично P лежи на права през G , който е успоредна на BC и следователно P съвпада с G . Сега от условието имаме

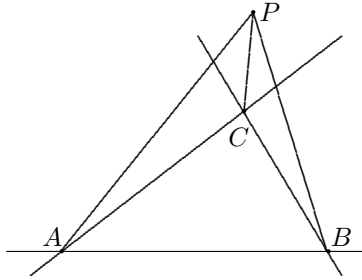
$$a + \frac{2}{3}(m_b + m_c) = b + \frac{2}{3}(m_a + m_c) = c + \frac{2}{3}(m_a + m_b).$$

Без ограничение нека $a \geq b \geq c$. Тъй като $4m_a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2$, $4m_b^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3b^2$ и $4m_c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3c^2$, то $m_a \leq m_b \leq m_c$. Оттук

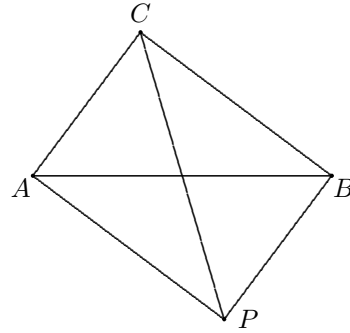
$$a + \frac{2}{3}(m_b + m_c) \geq b + \frac{2}{3}(m_a + m_c) \geq c + \frac{2}{3}(m_a + m_b),$$

като равенства са възможни само когато $a = b = c$. Следователно $\triangle ABC$ е равностранен.

б) Да допуснем, че точката P лежи в някой от трите външни за триъгълника ъгли при върховете A , B и C (черт. 1). Тогава $\triangle PBC$ се съдържа в $\triangle PAB$, което означава, че лицата им не може да са равни. Без ограничение можем да изберем P , както е показано на черт. 2. Ако $S_{PAC} = S_{PBC} = S_{PAB} = t$, то $S = S_{PAC} + S_{PBC} - S_{PAB} = t$.



черт. 1



черт. 2

и следователно $S = S_{PAC} = S_{PBC}$. Оттук намираме, че височината през P в $\triangle ACP$ е равна на височината през B в $\triangle ABC$, т.е. BP е успоредна на AC . Аналогично PA е успоредна на BC , т.е. $PBCA$ е успоредник. Сега от равенството на периметрите на $\triangle PAB$ и $\triangle PCB$ получаваме $PA + AB + BP = PC + CB + BP$, откъдето $PC = AB$, т.е. $PBCA$ е правоъгълник. Следователно $\angle ACB = 90^\circ$.

Четвърта балканска олимпиада по математика

1. Полагането $x = y = 0$ дава $f(a) = \frac{1}{2}$. Тогава при $x = 0$ и произволно y получаваме $f(y) = \frac{1}{2}f(a - y) + \frac{1}{2}f(y)$, откъдето $f(y) = f(a - y)$. Сега равенството от условието може да се запише във вида $f(x + y) = 2f(x)f(y)$ за произволни x, y . Като използваме това равенство, последователно намираме, че

$$f(x + y) = 2f(x)f(y) = 2f(a - x)f(y) = f(a - x + y).$$

При $y = -x$ сега следва, че $\frac{1}{2} = f(0) = f(a - 2x) = f(2x)$. Оттук за всяко реално z имаме $f(z) = f\left(2\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

2. Тъй като $\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} = \frac{2}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t-1}} \leq \sqrt{2}$ при $t \geq 1$, то

$$\begin{aligned} b - a &= \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} - (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}) \\ &= (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}) \leq 2\sqrt{2} < 3. \end{aligned}$$

Следователно $1 < b - a < 3$, откъдето следва, че $b - a = 2$. Получаваме системата:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = a \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = a + 2 \end{cases}$$

След полагане $u = \sqrt{x-1} \geq 0$ и $v = \sqrt{y-1} \geq 0$ системата става

$$\begin{cases} u + v = a \\ \sqrt{u^2 + 2} + \sqrt{v^2 + 2} = a + 2 \end{cases},$$

като $u, v \in [0, a]$. Заместваме $u = a - v$ във второто уравнение и го записваме във вида $\sqrt{a^2 + v^2 - 2av + 2} = a + 2 - \sqrt{v^2 + 2}$. След повдигане на квадрат и преобразуване, получаваме $(a + 2)\sqrt{v^2 + 2} = 2(a + 1) + av$. След ново повдигане на квадрат стигаме до уравнението

$$f(v) = 2(a + 1)v^2 - 2a(a + 1)v + 2 - a^2 = 0.$$

Да допуснем, че $a \geq 2$. Тогава $f(0) = f(a) = 2 - a^2 < 0$. Това означава, че корените на $f(v) = 0$ са извън интервала $[0, a]$, което е противоречие. Следователно $a = 1$ и от $4v^2 - 4v + 1 = 0$ следва, че $v = \frac{1}{2}$, откъдето $u = \frac{1}{2}$.

Сега от $\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}$ и $\sqrt{y-1} = \frac{1}{2}$ получаваме $x = y = \frac{5}{4}$.

3. Ще докажем, че $\alpha = \beta$, т.е. $AC : BC = 1$. Да допуснем, че $\alpha < \beta$. Тогава $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Тъй като $\sin x$ и $\cos x$ са съответно растяща и намаляваща функция в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$, то $0 < \sin \frac{\alpha}{2} < \sin \frac{\beta}{2}$ и $0 < \cos \frac{\beta}{2} < \cos \frac{\alpha}{2}$. Следователно

$$0 < \left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^{23} < \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{23} \quad \text{и} \quad 0 < \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{48} < \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^{48}.$$

След почленно умножаване на горните неравенства получаваме

$$\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)^{23} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{48} < \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{23} \left(\cos \frac{\alpha}{2}\right)^{48},$$

Когато $\angle BAC \leq \angle ABC$ разсъждаваме аналогично и получаваме, че $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$ и $\angle BAC = 30^\circ$.

2. Лема 1. Ако $f(x, y)$ е полином на две променливи и $f(x, x) = 0$ за всяко реално число x , то $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$, където $g(x, y)$ е полином на две променливи.

Доказателство на Лема 1. Да запишем $f(x, y)$ по степените на x , т.е.

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \dots + a_{n-1}(y)x + a_n(y),$$

където $a_i(y)$, $i = 0, 1, \dots, n$, са полиноми на y . Търсим $g(x, y)$ във вида $g(x, y) = b_0(y)x^{n-1} + b_1(y)x^{n-2} + \dots + b_{n-2}(y)x + b_{n-1}(y)$, където $b_i(y)$, за $i = 0, 1, \dots, n-1$, са полиноми на y .

Равенството $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$ е еквивалентно на $b_0(y) = a_0(y)$, $b_1(y) = yb_0(y) + a_1(y)$, $\dots$, $b_{n-1}(y) = yb_{n-2}(y) + a_{n-1}(y)$, $-yb_{n-1}(y) = a_n(y)$. Първите n равенства еднозначно определят $b_i(y)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, и остава да докажем, че и последното равенство е в сила. Умножаваме първото с y^n , второто с y^{n-1} и т.н., n -тото с y и сумираме, в резултат на което получаваме

$$yb_{n-1}(y) = a_0(y)y^n + a_1(y)y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(y)y = f(y, y) - a_n(y) = -a_n(y),$$

с което доказателството на лемата е завършено.

Аналогично се доказва, че ако $f(x, y)$ е полином на две променливи и $f(x, -x) = 0$ за всяко реално число x , то $f(x, y) = (x + y)g(x, y)$, където $g(x, y)$ е полином на две променливи.

Лема 2. Ако $f(x)$ е полином на една променлива и $f(x)f(y) = f(xy)$ за всички реални числа x и y , то $f(x) = 0$ или $f(x) = x^m$ за някое цяло неотрицателно число m .

Доказателство на Лема 2. От условието следва, че $f(x)f(0) = f(0)$ за всяко реално число x . Нека полиномът $f(x)$ не е тъждествено равен на 0. При $f(0) \neq 0$ получаваме $f(x) = 1$ за всяко x . При $f(0) = 0$ имаме $f(x) = x^m g(x)$, където m е естествено число и $g(x)$ е полином, за който $g(0) \neq 0$. Тогава от условието лесно следва, че $g(x)g(y) = g(xy)$ за всички реални числа x и y и както по-горе заключаваме, че $g(x) = 1$. Следователно $f(x) = x^m$, $m \geq 0$, с което Лема 2 е доказана.

Да разгледаме полинома $Q(x) = P(x, 0)$. От условието следва, че имаме $P(x, 0)P(y, 0) = P(xy, 0)$, т.е. $Q(x)Q(y) = Q(xy)$ за всички реални числа x и y . Съгласно Лема 2 имаме две възможности:

1) Нека $Q(x) = 0$ за всяко x . Тогава $0 = Q(t)P(x, y) = P(t, 0)P(x, y) = P(tx, ty)$ за произволни t, x и y , откъдето при $t = 1$ получаваме $P(x, y) = 0$ за всички реални числа x и y .

2) Нека $Q(x) = x^m$ за някое цяло неотрицателно число m . Имаме

$$\begin{aligned} P(x, y)P(1, 1) &= P(x + y, x + y) = P(x + y, 0)P(1, 1) = Q(x + y)P(1, 1) \\ &= (x + y)^m P(1, 1) \end{aligned}$$

и аналогично $P(x, y)P(1, -1) = (x - y)^m P(1, -1)$. Да разгледаме поотделно четирите възможности за анулиране на $P(1, 1)$ и $P(1, -1)$.

2.1) Ако $P(1, 1) \neq 0$ и $P(1, -1) \neq 0$, получаваме $P(x, y) = (x + y)^m = (x - y)^m$, което е възможно само при $m = 0$. Следователно $P(x, y) = 1$ за всички реални числа x и y .

2.2) Ако $P(1, 1) \neq 0$ и $P(1, -1) = 0$, получаваме $P(x, y) = (x + y)^m$ за всички реални числа x и y .

2.3) Ако $P(1, 1) = 0$ и $P(1, -1) \neq 0$, получаваме $P(x, y) = (x - y)^m$ за всички реални числа x и y .

2.4) Ако $P(1, 1) = 0$ и $P(1, -1) = 0$, получаваме $0 = P(1, 1)P(x, y) = P(x + y, x + y)$, т.е. $P(x, x) = 0$ за всяко x . Аналогично $P(x, -x) = 0$ за всяко x . Съгласно Лема 1 имаме

$$P(x, y) = (x - y)^k (x + y)^n R(x, y),$$

където $R(x, y)$ е полином на две променливи, за който е изпълнено $R(1, 1) \neq 0$ и $R(1, -1) \neq 0$. Но от условието следва (Докажете!), че $R(a, b) \cdot R(c, d) = R(ac + bd, ad + bc)$ за произволни реални числа a, b, c, d . Оттук и от горните разсъждения следва, че $R(x, y) = 1$, т.е. $P(x, y) = (x - y)^k (x + y)^n$ за всички реални числа x и y .

3. Ще използваме, че квадратът на разстоянието между средите на два срещуположни ръба на тетраедър е 4 пъти по-малък от сумата от квадратите на ръбовете, които не съдържат тези среди, намалена със сумата от квадратите на двата ръба, които съдържат средите. Едно кратко доказателство на този факт следва като се използва няколко пъти формулата за медианата.

Нека a, b и c са трите разстоянията между средите на ръбовете на дадения тетраедър. Тогава не е трудно да се види, че $4(a^2 + b^2 + c^2) = p$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\min\{a, b, c\} = a$ и a е разстоянието между средите на A_1A_2 и A_3A_4 . Тогава $p \geq 12a^2$, т.е. $a \leq \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$.

Нека α е равнината през ръба A_1A_2 , която е успоредна на A_3A_4 и β е равнината през ръба A_3A_4 , която е успоредна на A_1A_2 . Тогава $\alpha \parallel \beta$ и тетраедърът е разположен между двете равнини. Освен това разстоянието между α и β не надминава $a \leq \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$.

4. Да означим $q - p = s - r = x > 0$. Тогава $a_n = p(p + x)$ и $a_{n+1} = r(r + x)$ и от $a_{n+1} > a_n$ следва, че $r > p$. От друга страна, $a_{n+1} - 2a_n = -49$, т.е. $a_{n+1} < 2a_n \iff r(r + x) < 2p(p + x)$. Следователно $2p(p + x) > r(r + x) > r(p + x)$, откъдето $2p > r$.

Тъй като $a_n = 2^n + 49$ се дели на 3, точно когато n е нечетно число, от $\min\{p, q, r, s\} = p$ следва, че $p = 3$. Оттук и от $2p > r$ следва, че $r = 5$. Тогава от $a_{n+1} = 2a_n - 49$ намираме $x = 56$ и окончателно $a_7 = 3.59 = 2^7 + 49$ и $a_8 = 5.61 = 2^8 + 49$. Следователно единствено решение е двойката (a_7, a_8) .

Шеста балканска олимпиада по математика

1. Ако n е нечетно число, то делителите d_1, d_2, d_3 и d_4 са също нечетни, откъдето следва, че $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ е четно число, противоречие. Следователно числото n е четно, $d_1 = 1, d_2 = 2$ и $n = 5 + d_3^2 + d_4^2$. Тогава точно едно от числата d_3 и d_4 е четно и ще разгледаме поотделно двата случая.

1) Нека d_3 е четно, $d_3 = 2a, a > 1$. Тогава a е делител на n , който е по-голям от d_1 и по-малък от d_3 , т.е. $a = d_2 = 2$ и $d_3 = 4$. Следователно $n = 21 + d_4^2$, което обаче е невъзможно защото n се дели на 4.

2) Нека d_4 е четно, $d_4 = 2a, a > 1$. Ако $a = 2$, получаваме $d_4 = 4$ и от $2 = d_2 < d_3 < d_4 = 4$ следва, че $d_3 = 3$. Тогава $n = 30$, което не се дели на 4 и значи не е решение. Следователно a е делител на n , който е по-голям от $d_2 = 2$ и по-малък от d_4 , т.е. $a = d_3$ и $n = 5(1 + d_3^2)$. Тъй като $d_3 | n$, то $d_3 | 5$, т.е. $d_3 = 5$. Тогава $n = 130$, което е единствено решение на задачата.

2. **Лема 1.** Ако x_0 е (комплексен) корен на полином с реални коефициенти $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, то $|x_0| < 1 + m$, където

$$m = \max \left\{ \left| \frac{a_k}{a_n} \right| : 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

Доказателство на Лема 1. При $|x_0| \geq 1 + m$ имаме последователно

$$\begin{aligned}
0 = |f(x_0)| &\geq |a_n x_0^n| \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x_0} + \frac{a_{n-2}}{a_n x_0^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n x_0^n} \right| \\
&\geq |a_n x_0^n| \left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n x_0} \right| - \left| \frac{a_{n-2}}{a_n x_0^2} \right| - \cdots - \left| \frac{a_0}{a_n x_0^n} \right| \right) \\
&\geq |a_n x_0^n| \left(1 - \left| \frac{m}{x_0} \right| - \left| \frac{m}{x_0^2} \right| - \cdots - \left| \frac{m}{x_0^n} \right| \right) \\
&\geq |a_n x_0^n| \left[1 - m \left(\frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{(m+1)^n} \right) \right] \\
&> |a_n x_0^n| \left[1 - m \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} \right) \right] = 0,
\end{aligned}$$

което е противоречие. Следователно $|x_0| < 1 + m$.

Да допуснем, че $P(x) = f(x)g(x)$, където $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми с положителни степени и цели коефициенти. Нека $f(x)$ има корени $x_1, \dots, x_k$. Тогава $x_1, \dots, x_k$ са корени на $P(x)$ и съгласно Лема 1 модулите им са по-малки от $1 + \frac{9}{2} < 9$. Следователно, ако a е старшият коефициент на $f(x)$, то

$$|f(10)| = |a| \left| \prod_{i=1}^k (10 - x_i) \right| \geq |a| \prod_{i=1}^k (10 - |x_i|) > 1$$

и аналогично $|g(10)| > 1$. Тогава числото $P(10) = f(10)g(10)$ не е просто, което противоречи на условието.

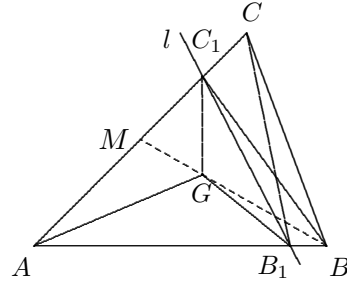
3. Да означим за краткост $S_{ABC} = S$, $S_{AB_1C_1} = S_0$, $S_{AB_1G} = S_1$ и $S_{AC_1G} = S_2$. От условието следва, че $S_0 \geq S_1 + S_2$. Имаме

$$S_{BB_1GC_1} = S_{ABC_1} - S_1 - S_2,$$

$$S_{CC_1GB_1} = S_{ACB_1} - S_1 - S_2.$$

От $S_{ABG} : S_{AMG} = 2 : 1 = S_{BGC_1} : S_{MGC_1}$ лесно следва, че $S_{ABC_1} = 3S_2$. Аналогично се вижда, че $S_{ACB_1} = 3S_1$. Тогава

$$S_{BB_1GC_1} + S_{CC_1GB_1} = S_{ABC_1} - S_1 - S_2 + S_{ACB_1} - S_1 - S_2 = S_1 + S_2.$$



Остава да докажем, че $S_1 + S_2 \geq \frac{4S}{9}$. Имаме $S_1 = \frac{S_{AB_1C}}{3} = \frac{AB_1 \cdot S}{3AB}$ и аналогично $S_2 = \frac{AC_1 \cdot S}{3AC}$. Тогава

$$S_1 + S_2 = \frac{S}{3} \left(\frac{AB_1}{AB} + \frac{AC_1}{AC} \right) \geq \frac{2S}{3} \sqrt{\frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}} = \frac{2S}{3} \sqrt{\frac{S_0}{S}} \geq \frac{2}{3} \sqrt{S(S_1 + S_2)},$$

откъдето получаваме исканото неравенство. Равенство се достига тогава и само тогава, когато правата ℓ минава през G и е успоредна на BC .

4. Нека $\mathcal{F}$ е произволна фамилия от триелементни подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ с исканите свойства. Всяко $A \in \mathcal{F}$ има 3 двуелементни подмножества, като при това поради б) за $A, B \in \mathcal{F}$ не е възможно да съдържат едно и също двуелементно подмножество. Това означава, че множествата от $\mathcal{F}$ заедно съдържат точно $3|\mathcal{F}|$ различни двуелементни подмножества на $\{1, 2, \dots, n\}$. Следователно $3|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{2}$, откъдето $f(n) \leq \frac{n^2 - n}{6}$.

Нека $\mathcal{F}_n = \{\{x, y, z\} : x, y, z \in \{1, 2, \dots, n\}, x + y + z \equiv 0 \pmod{n}\}$. Ще докажем, че $\mathcal{F}_n$ има исканите свойства и

$$|\mathcal{F}_n| \geq \left\lceil \frac{n^2 - 3n + 6}{6} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n^2 - 4n}{6} \right\rceil.$$

Очевидно условието а) е изпълнено. Ако допуснем, че $A, B \in \mathcal{F}_n$, като $A \neq B$ и $|A \cap B| = 2$, без ограничение на общността можем да считаме, че $A = \{x, y, z_1\}$, $B = \{x, y, z_2\}$, където $z_1 \neq z_2$. Но от дефиницията на $\mathcal{F}_n$ следва, че n дели $(x + y + z_1) - (x + y + z_2) = z_1 - z_2$, което е възможно само при $z_1 = z_2$, противоречие.

Да означим $\mathcal{G}_1 = \{\{x\} : x \in \{1, 2, \dots, n\}, 3x \equiv 0 \pmod{n}\}$, $a = |\mathcal{G}_1|$, $\mathcal{G}_2 = \{\{x, y\} : x, y \in \{1, 2, \dots, n\}, 2x + y \equiv 0 \pmod{n}\}$ и $b = |\mathcal{G}_2|$. Да отбележим, че сумата $a + 3b + 6|\mathcal{F}_n|$ е равна на броя на тройките (x, y, z) , $x, y, z \in \{1, 2, \dots, n\}$, които удовлетворяват сравнението $x + y + z \equiv 0 \pmod{n}$. От друга страна, броят на тези тройки е n^2 , защото всеки избор на x и y еднозначно определя z .

Лесно се вижда, че $a = 1$, ако n не се дели на 3 и че $a = 3$, ако n се дели на 3. Имаме и равенството $b = n$, защото всеки избор на $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ еднозначно определя y . Следователно

$$|\mathcal{F}_n| = \frac{n^2 - a - 3b}{6} \geq \frac{n^2 - 3n + 6}{6},$$

с което доказателството е завършено.

Седма балканска олимпиада по математика

1. От рекурентната връзка следва, че ако два последователни члена на редицата се делят на 11, то всички следващи членове също се делят на 11. С директна проверка се установява, че a_{10} и a_{11} се делят на 11, а измежду $a_1, a_2, \dots, a_9$ на 11 се делят само a_4 и a_8 . Следователно a_n се дели на 11 точно когато $n = 4$, $n = 8$ или $n \geq 10$.

Забележка. Друго решение се получава като използваме равенството $a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$. Тогава по индукция лесно доказваме, че $a_n = 1! + 2! + \dots + n!$.

2. Ще използваме известните тъждества $S_1 = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$,
 $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и $S_3 = \sum_{k=1}^n k^3 = S_1^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Да означим с $f(x)$ дадения полином. Тогава $f(1) = \sum_{i=0}^{2n} a_i = S_1^2$. От друга страна, от принципа за сравняване на коефициентите следва, че за фиксирано $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ имаме последователно

$$a_k = \sum_{i=0}^k i(k-i) = k \sum_{i=0}^k i - \sum_{i=0}^k i^2 = \frac{k^2(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \frac{k^3 - k}{6}.$$

Следователно

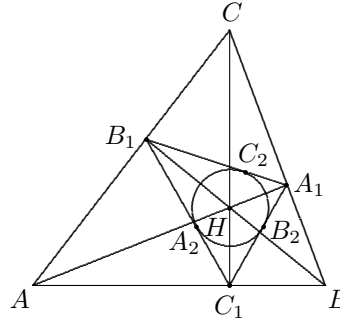
$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^3 - k}{6} = \frac{S_1^2 - S_1}{6},$$

и за търсената сума получаваме

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} &= f(1) - \sum_{k=0}^n a_k = S_1^2 - \frac{S_1^2 - S_1}{6} = \frac{5S_1^2 + S_1}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(5n^2 + 5n + 2)}{24}. \end{aligned}$$

3. Ще използваме факта, че височините на $\triangle ABC$ са ъглополовящи на педалния $\triangle A_1B_1C_1$. Следователно ортоцентърът H на $\triangle ABC$ съвпада с центъра на вписаната в $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност k , която е и описаната около $\triangle A_2B_2C_2$ окръжност. Следователно Ойлеровите прави ℓ и ℓ_2 съответно на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ имат обща точка H .

От равнобедрения $\triangle B_2C_2A_1$ следва, че $AA_1 \perp B_2C_2$, което означава, че $BC \parallel B_2C_2$. Аналогично се вижда, че $AB \parallel A_2B_2$ и $CA \parallel C_2A_2$. Следователно $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ са подобни, откъдето следва, че съществува хомотетия h , която изпраща $\triangle ABC$ в $\triangle A_2B_2C_2$. Тогава $h(\ell) = \ell_2$, откъдето $\ell \parallel \ell_2$. Но по-горе видяхме, че ℓ и ℓ_2 имат обща точка H . Това означава, че правите ℓ и ℓ_2 съвпадат.



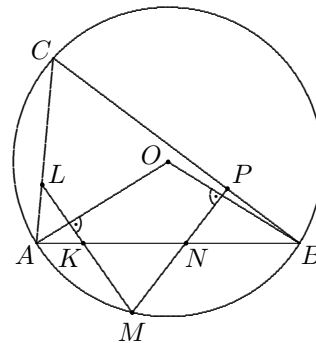
4. Нека функцията $f : N \rightarrow A$ има исканото свойство. Да разгледаме числата 1, 3, 6 и 8. Разликите между всеки две от тях са прости числа и следователно A има поне 4 елемента.

Нека $A = \{0, 1, 2, 3\}$ и за всяко естествено n нека $f(n)$ е остатъкът на n при деление на 4. Тогава от $f(i) = f(j)$ следва, че $|i - j|$ се дели на 4, т.е. $|i - j|$ е съставно число. Следователно търсеният минимален брой елементи на A е 4.

Осма балканска олимпиада по математика

1. Ще използваме стандартните означения за ъглите на $\triangle ABC$. Тъй като $\sphericalangle AOB = 2\gamma$ и $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = 90^\circ - \gamma$, имаме $\sphericalangle AKL = \sphericalangle BNP = \gamma$.

Оттук $\sphericalangle MKN = \sphericalangle MNP = \gamma$, т.е. $\triangle MNK$ е равнобедрен и от условието получаваме, че $MK = MN = KL$. От $\triangle ALK \sim \triangle PBN$ (ъглите им са α , β и γ) имаме $\frac{AK}{KL} = \frac{PN}{NB}$, а от $\triangle AKM \sim \triangle MNB$ ($\sphericalangle AKM = \sphericalangle MNB = 180^\circ - \gamma$ и $\sphericalangle AMK = \sphericalangle MBN = \frac{1}{2} \sphericalangle AOM$) получаваме $\frac{AK}{KM} = \frac{MN}{NB}$. От тези равенства следва, че $PN = MN$ и значи KN е средна отсечка в $\triangle MPL$. Тъй като $\triangle MKN$ е равнобедрен, то и $\triangle MLP$ е равнобедрен, откъдето $\sphericalangle MLP = \sphericalangle MPL = \gamma$.



2. Триъгълниците със страни $a = 4n^2 + 1$, $b = 4n^4 + 1$ и $c = 4n^2(n^2 + 1)$, където $n \geq 2$ е естествено число, имат исканото свойство. Те са получени от полагането $p - a = 4n^4$, $p - b = 4n^2$ и $p - c = 1$ в Хероновата формула $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Триъгълниците със страни $a = (n+1)^2(n^2+1)$, $b = n^2(n^2+n+2)$ и $c = 2n^2+2n^2+1$, където $n \geq 5$ е нечетно естествено число, също имат исканото свойство (Докажете!).

3. Нека правилният шестоъгълник е $A_1A_2 \dots A_6$ и страната му е a . Да построим шест равностранни триъгълника $A_iA_{i+1}B_i$, $i = 1, 2, \dots, 6$, където $A_7 \equiv A_1$, външно за шестоъгълника. Тогава за всяко $i = 1, 2, \dots, 6$ съществува права ℓ_i , която минава през A_i , но не минава през вътрешни точки нито на шестоъгълника, нито на описания многоъгълник. Да означим с M_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, пресечната точка на ℓ_i и ℓ_{i+1} . Тогава описаният многоъгълник се съдържа в звездата $M_1M_2 \dots M_6$.

Да отбележим, че точката M_i е вътрешна за $\triangle A_iA_{i+1}B_i$ и следователно $\alpha_i = \angle M_iA_iA_{i+1} \in [0, 60^\circ]$. Имаме

$$\begin{aligned} S_{A_iA_{i+1}M_i} &= \frac{a^2 \sin \alpha_i \sin(60^\circ - \alpha_{i+1})}{2 \sin(\alpha_i + 60^\circ - \alpha_{i+1})} = \frac{a^2}{2(\cot \alpha_i + \cot(60^\circ - \alpha_{i+1}))} \\ &\leq \frac{a^2}{8} (\operatorname{tg} \alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1})), \end{aligned}$$

като равенство се достига точно когато $\alpha_i = 60^\circ - \alpha_{i+1}$. (Тук използвахме неравенството $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$, $x > 0$, $y > 0$.) Следователно

$$\begin{aligned} P &\leq S_{M_1M_2 \dots M_6} = H + \sum_{i=1}^6 S_{M_iA_iA_{i+1}} \\ &\leq H + \frac{a^2}{8} \sum_{i=1}^6 (\operatorname{tg} \alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1})) = H + \frac{a^2}{8} \sum_{i=1}^6 (\operatorname{tg} \alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_i)). \end{aligned}$$

Тъй като

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)} \geq \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha) \text{ при } \alpha \in [0, 60^\circ],$$

то

$$P \leq H + \frac{a^2}{8} 6 \operatorname{tg} 60^\circ = H + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3H}{2},$$

с което исканото неравенство е доказано.

Забележка. С подобни разсъждения може да се докаже, че ако правилен $2n$ -ъгълник с лице H е вписан в изпъкнал многоъгълник с лице P , то $P \leq \left(1 + \frac{1}{4 \cos \pi/n}\right) H$.

4. Да допуснем, че съществува функция $f(x)$ с исканите свойства и да разгледаме функцията $g(x) = 3f(x) + 1$. Лесно се вижда, че g е взаимно еднозначно съответствие и $g(mn) = g(m)g(n)$ за произволни естествени числа m и n . Освен това имаме $g(1) = 1$.

Нека p , q и r са естествените числа, за които $g(p) = 4$, $g(q) = 10$ и $g(r) = 25$. Тъй като никое от числата 4, 10 и 25 не се представя като произведение на две числа от множеството $\{4, 7, 10, \dots\}$, то p , q и r са различни прости числа. Но $4 \cdot 25 = 10^2 \iff g(p)g(r) = g^2(q) \iff g(pr) = g(q^2) \iff pr = q^2$, което е невъзможно за различни прости числа.

Девета балканска олимпиада по математика

1. Нека n е решение на задачата. Да отбележим, че $1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$ и

$$A(m, n) = m^3(m^2 - 1)(m^{3^{4n}+1} - 1).$$

Лесно се вижда, че 24 дели $m^3(m^2 - 1)$ за всяко естествено m (Докажете!). Следователно $A(m, n)$ се дели на 1992 тогава и само тогава, когато 83 дели $A(m, n)$. Нека n е такова, че 83 дели $A(m, n)$ за всяко m . В частност, имаме $83 | A(2, n) = 2^{3^{4n}+1} - 1$. Тъй като показателят на 2 по модул 83 е 82 (Проверете!), заключаваме, че 82 дели $3^{4n} + 1 = 81^n + 1$. Лесно се вижда, че последното е изпълнено тогава и само тогава, когато n е нечетно число.

Ще докажем, че полученото необходимо условие е и достатъчно, т.е. 83 дели $A(m, n)$ за всяко естествено m и всяко нечетно естествено n . Случаите $m = 1$ и $83 | m$ са тривиални. Нека $m > 1$ и $(m, 83) = 1$. Тогава $m^{82} \equiv 1 \pmod{83}$, а от нечетността на n следва, че $3^{4n} + 1$ се дели на 82. Следователно $m^{3^{4n}+1} - 1 = m^{82k} - 1 \equiv 0 \pmod{83}$.

2. От неравенството между средно аритметично и средно геометрично имаме $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}$. От друга страна като използваме равенството $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, получаваме $\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}$, което е еквивалентно на исканото неравенство.

3. Имаме последователно

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} &= \frac{S_{ABD} + S_{ACD}}{S_{DEF}} = \frac{S_{ABD}}{S_{DEF}} + \frac{S_{ACD}}{S_{DEF}} \\
 &= \frac{AB \cdot AD \sin \angle FAD}{ED \cdot EF \sin \angle DEF} + \frac{AC \cdot AD \sin \angle EAD}{DF \cdot EF \sin \angle DFE} \\
 &= \frac{AB \cdot AD}{ED \cdot EF} + \frac{AC \cdot AD}{DF \cdot EF} = \frac{AD}{EF} \left(\frac{AB}{DE} + \frac{AC}{DF} \right) \geq \frac{2AD}{EF} \sqrt{\frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}}
 \end{aligned}$$

(използвахме, че $\angle FAD = \angle DEF$ и $\angle EAD = \angle DFE$, тъй като четириъгълникът $AFDE$ е вписан). От друга страна $\angle BAC + \angle EDF = 180^\circ$,

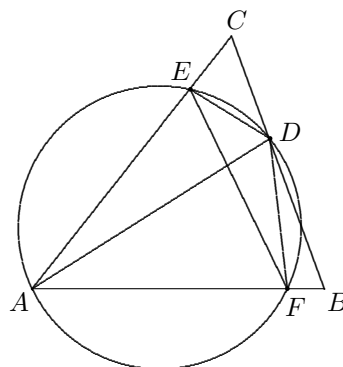
откъдето $\sin \angle BAC = \sin \angle EDF$ и

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{AB \cdot AC \sin \angle BAC}{DE \cdot DF \sin \angle EDF} = \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF}.$$

Следователно $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} \geq \frac{2AD}{EF} \sqrt{\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}},$

откъдето след повдигане на квадрат получаваме исканото неравенство.

Забележка. Равенство се достига тогава и само тогава, когато D е средата на BC .



4. Лема. Нека m е естествено число и $M = \{m, m+1, \dots, m+5\}$. Тогава всяко 5-елементно подмножество на M съдържа три числа, които са взаимно прости.

Доказателство на лемата. Лесно се вижда, че съществува нечетно a , за което $A = \{a, a+2, a+4\} \subset M$. Поне едно от числата $a+1$ и $a+3$ не се дели на 3. Да означим това число с b и да разгледаме $B = \{a, a+2, a+4, b\} \subset M$. Тогава всеки две числа от B са взаимно прости, а всяко 5-елементно подмножество на M има поне 3 общи елемента с B . С това лемата е доказана.

Да разгледаме множеството $X \subset \{1, 2, \dots, n\}$, което се състои от числата, делящи се на 2 или на 3. Тогава X няма исканото свойство, защото във всяко 3-елементно подмножество на X ще имаме две числа с общ делител 2 или 3. Следователно всяко множество с исканото свойство има поне $|X| + 1$ елемента, т.е. $f(n) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil + 1$.

Ще докажем по индукция, че за всеки избор на множество $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ с $g(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - \left\lceil \frac{n}{6} \right\rceil + 1$ елемента съществуват $x, y, z \in A$, които са две по две взаимно прости. Да отбележим, че $g(n+6) = g(n) + 4$.

Случаите $n = 3, 4, 5$ са тривиални, а $n = 6$ следва от лемата. За $n = 7$ прилагаме лемата при $1, 7 \notin A$, а в противен случай тройката $\{1, 7, x\}$, където $x \neq 1, 7$ е произволен елемент на A , върши работа. По подобен начин се разглежда и случая $n = 8$.

Нека $n \geq 9$ и $f(k) \leq g(k)$ за всяко $k \in \{3, 4, \dots, n-1\}$. Ако сечението $A \cap \{n-5, n-4, \dots, n\}$ съдържа поне 5 елемента, твърдението следва от лемата. Ако $|A \cap \{n-5, n-4, \dots, n\}| \leq 4$, то в A се съдържат поне $g(n) - 4 = g(n-6)$ елемента от $\{1, 2, \dots, n-6\}$ и измежду тях, съгласно индукционното предположение, съществуват $x, y, z \in A$, които са две по две взаимно прости.

Десета балканска олимпиада по математика

1. От условието следва, че $a+b+c+d+e+f = 10$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 = 20$. Тогава

$$10 - f = a + b + c + d + e \leq 5\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}{5}} = \sqrt{5(20 - f^2)},$$

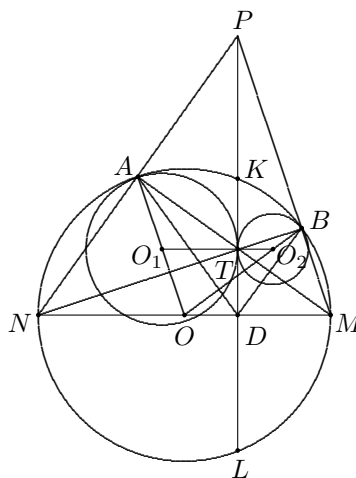
откъдето $2f(3f-10) \leq 0$. Следователно търсената максимална стойност на f е $f_{\max} = \frac{10}{3}$ и се достига при $a = b = c = d = e = \frac{4}{3}$.

2. Нека A е множеството от всички монотонни числа с не повече от 1993 цифри. Нека B е множеството от всички редици с дължина 1993 от вида

$$\underbrace{00\dots 0}_{11}\dots \underbrace{11\dots 1}_{22}\dots \underbrace{22\dots 2}_{\dots}\dots \underbrace{99\dots 9}_{\dots},$$

с поне един ненулев елемент (не е задължително всички цифри да се появяват). Тогава между множествата A и B съществува взаимно еднозначно съответствие, т.е. $|A| = |B|$. Редиците в B плюс редицата от 1993 нули могат да бъдат преброени по следния начин: те са равни на броя на начините, по които можем да сложим 9-те разграничителя между различните цифри, като два разграничителя могат да са съседни (тогава съответната цифра отсъства). Този брой е равен на $\binom{1993+10-1}{10-1}$, т.е. $|A| = |B| = \binom{2002}{9} - 1$.

3. Нека правите AT и BT пресичат окръжността C за втори път съответно в точки M и N . Тогава $\angle O_1TA = \angle O_1AT$ от равнобедрения $\triangle ATO_1$, $\angle OMA = \angle OAT$ от равнобедрения $\triangle AMO$, а точките A , O_1 и O лежат на една права. Следователно $\angle O_1TA = \angle OMA$, откъдето $O_1O_2 \parallel OM$. Аналогично $O_1O_2 \parallel ON$, т.е. точките O , M и N лежат на една права. На същата права лежи и точка D , защото $KL \perp O_1O_2$ и значи диаметърът MN е перпендикулярен на хордата KL , а D е среда на KL . Тъй като MN е диаметър, имаме $\angle NBM = \angle NAM = 90^\circ$ и следователно ABD е педалният триъгълник за $\angle MNP$, където P е пресечната точка на NA и MB . Тогава $\angle NDA = \angle MDB = \angle MPN$ и пресмятаме



$$\begin{aligned}
 \angle AOB &= 180^\circ - \angle AON - \angle BOM \\
 &= 180^\circ - (180^\circ - 2\angle ANM) - (180^\circ - 2\angle BMN) \\
 &= 2(\angle ANM + \angle BMN) - 180^\circ = 180^\circ - 2\angle MPN \\
 &= 180^\circ - \angle NDA - \angle MDB = \angle ADB.
 \end{aligned}$$

4. Ако $m = p$, даденото уравнение има безбройно много решения от вида (x, x) , където x е естествено число.

Нека (x, y) е решение. Ако $x = y$, то $x^p = x^m$, откъдето $m = p$. Оттук нататък ще считаме, че $x \neq y$. Да отбележим, че от $\left(\frac{x+y}{2}\right)^m = \frac{x^p + y^p}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p$ следва, че $m > p$.

Нека $(x, y) = d$, $x = du$ и $y = dv$, където $(u, v) = 1$. След заместване в уравнението получаваме, че

$$u^p + v^p = 2d^{m-p} \left(\frac{u+v}{2}\right)^m.$$

Ако u и v са от различна четност, то $(u+v)^m$ дели $u^p + v^p$, което е невъзможно, защото $(u+v)^m > (u+v)^p \geq u^p + v^p$. Следователно u и v са нечетни числа. Нека $u + v = 2^a t$, където a е естествено число, а t е нечетно естествено

число. Да отбележим, че $(t, u) = (t, v) = 1$. При $p = 2$ имаме $u^2 + v^2 \equiv 2 \pmod{4}$, а при нечетно p имаме

$$\begin{aligned} u^p + v^p &= (2^a t - v)^p + v^p \\ &= 2^a t \left[(2^a t)^{p-1} - \binom{p}{1} (2^a t)^{p-2} v + \dots - \binom{p}{p-2} 2^a t v^{p-2} + p v^{p-1} \right], \end{aligned}$$

където $p v^{p-1}$ е нечетно число, а всички събираеми в квадратните скоби освен него са четни. Следователно най-високата степен на 2, която дели $u^p + v^p$ е 2^a при нечетно p и 2 при $p = 2$. Но дясната страна се дели поне на $2^{1+(m-1)a}$. Тогава $1 + m(a-1) \leq a$, което е възможно само при $a = 1$. Получихме $u + v = 2t$, където t е нечетно число, като очевидно $t \geq 3$. Уравнението придобива вида $(2t - v)^p + v^p = 2d^{m-p}t^m$. При $p = 2$ имаме $t|2v^2$, което е невъзможно, защото $(t, v) = 1$. При нечетно p получаваме

$$2^p t^{p-1} - \binom{p}{1} (2^{p-1} t^{p-2} v + \dots - \binom{p}{p-2} 4t v^{p-2} + 2p v^{p-1}) = 2d^{m-p} t^{m-1},$$

откъдето следва, че $t|p$, т.е. $t = p$. Но сега всички членове с изключение на $2p v^{p-1}$ в уравнението се делят на p^2 , което е невъзможно.

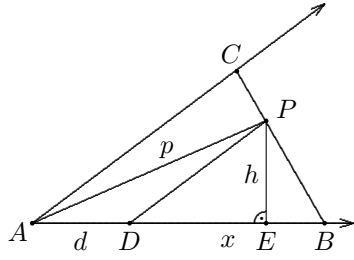
Следователно уравнението няма решения, за които $x \neq y$, с което твърдението е доказано.

Единадесета балканска олимпиада по математика

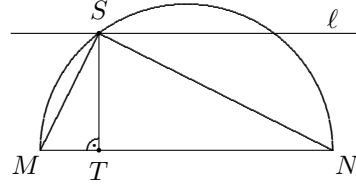
1. Анализ. Да предположим, че $\triangle ABC$ е исканият и нека точките D и E са разположени върху AB така, че $PD \parallel AC$ и $PE \perp AB$ (черт. 1). Да означим $AP = p$, $AD = d$, $PE = h$ и $BD = x$. Тогава от условието следва, че p , d и h са известни и трябва да се намери x . От $\triangle ABC \sim \triangle DBP$ следва, че

$$\frac{(d+x)^2}{x^2} = \frac{S_{ABC}}{S_{DBP}} = \frac{2p^2}{xh}.$$

Следователно x е корен на квадратното уравнение $x^2 - 2bx + d^2 = 0$, където сме положили $b = \frac{p^2 - dh}{h}$.



черт. 1



черт. 2

Построение. 1) Построяваме отсечката с дължина $b = \frac{p^2}{h} - d$. 2) Построяваме отсечка $MN = 2b$ и полуокръжност k с диаметър MN (черт. 2). 3) В полуравнината на k построяваме права $\ell \parallel MN$, отстояща на разстояние d от MN . 4) Построяваме перпендикуляр $ST \perp MN$, $T \in MN$. 5) Отсечките MT и NT имат дължини, равни на корените на квадратното уравнение $x^2 - 2bx + d^2 = 0$.

Доказателство. От правоъгълния $\triangle MNS$ имаме $MT \cdot NT = d^2$ и $MT + NT = 2b$.

Изследване. Задачата има две решения, ако $d < b \iff 2dh < p^2$ и точно едно решение, ако $d = b \iff 2dh = p^2$.

2. Да допуснем, че даденият полином има поне два цели корена. Тогава

$$x^4 - 1994x^3 + (1993 + m)x^2 - 11x + m = (x^2 - ax + b)(x^2 - cx + d),$$

където a и b са цели числа. След сравняване на коефициентите получаваме, че

$$a + c = 1994, \quad (1)$$

$$ac + b + d = 1993 + m, \quad (2)$$

$$ad + bc = 11, \quad (3)$$

$$bd = m. \quad (4)$$

От (1) следва, че c е цяло число, а тогава от (2) следва, че и d е цяло число.

Пак от (1) следва, че a и c са с еднаква четност, а от (3) виждаме, че те не могат да бъдат едновременно четни. Тогава a и c са нечетни и от (3) заключаваме, че b и d са с различна четност. От последното и (4) следва, че m е четно число. Но сега лявата страна на (2) е четна, а дясната е нечетна – противоречие.

3. Да означим

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) = |a_n - a_1| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|$$

и да разгледаме върху реалната ос точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ с координати съответно $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогава сумата $S(a_1, a_2, \dots, a_n)$ е равна на дължината на затворената начупена линия $A_1 A_2 \dots A_n A_1$. Ще оценим тази дължина като разгледаме "покриването" на интервалите от вида $[k, k+1]$, където $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Ако $k < \frac{n}{2}$, интервалът $[k, k+1]$ е покрит най-много $2k$ пъти, защото имаме на разположение най-много k леви краища на покриващи отсечки, а всяка точка е край на две отсечки. Аналогично при $k \geq \frac{n}{2}$, интервалът $[k, k+1]$ е покрит най-много $2(n-k)$ пъти. Следователно при четно $n = 2m$ имаме

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 2[1 + 2 + \dots + m + (m-1) + \dots + 2 + 1] = 2m^2,$$

а при нечетно $n = 2m+1$ получаваме

$$S(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 2[1 + 2 + \dots + m + m + \dots + 2 + 1] = 2m(m+1).$$

Можем да обединим двете оценки чрез $S(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 2m(n-m)$, където $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Тогава интересувашата ни сума не надминава $2m(n-m)-1$.

Не е трудно да се провери, че пермутацията, зададена с $a_{2k} = k$ и $a_{2k-1} = n-m+k$ за $k = 1, 2, \dots, m$, $a_n = m+1$, ако n е нечетно число, дава сума $2m(n-m)-1$. Следователно търсената най-голяма стойност е $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right)$.

4. Нека A е фиксиран член на компанията и $A_1, A_2, \dots, A_r$ са познатите на A . Тогава от условието следва, че никои двама от $A_1, A_2, \dots, A_r$ не се познават и, че за всеки двама A_i и A_j , $1 \leq i < j \leq r$, съществува точно един $A_{ij} \neq A$ член на компанията, който е познат и на двамата. Освен това никои двама от членовете A_{ij} не се познават помежду си, защото в противен случай ще имаме член на компанията, който има поне трима общи познати с A .

Множеството от членовете A_{ij} , $1 \leq i < j \leq r$, е всъщност множеството от тези, които не познават A . Следователно $n = 1 + r + \binom{r}{2}$, откъдето

$r = \frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}$. Полученият израз за r не зависи от избора на A и показва, че всички членове на компанията имат еднакъв брой познати.

Условието $n \geq 5$ дава $r \geq 3$. Нещо повече, тъй като познатите на A_{12} са A_1, A_2 и още $r-2$ члена на множеството $\{A_{ij} : 3 \leq i < j \leq r\}$, трябва да е изпълнено неравенството $r-2 \leq \binom{r-2}{2}$, откъдето $r \geq 5$ и следователно $n \geq 16$.

Разглеждаме компания от 16 души $A, A_1, A_2, \dots, A_5, A_{12}, A_{13}, \dots, A_{45}$, в която познанствата са между следните двойки:

- (1) $(A, A_i), 1 \leq i \leq 5;$
- (2) $(A_i, A_{ij}), (A_j, A_{ij}), 1 \leq i < j \leq 5;$
- (3) $(A_{ij}, A_{km}), 1 \leq i < j \leq 5, 1 \leq k < m \leq 5, \{i, j\} \cap \{k, m\} = \emptyset.$

Лесно се проверява, че тя има исканите свойства и следователно търсеният минимален брой е 16.

Дванадесета балканска олимпиада по математика

1. Нека $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ и $n^* = 2*3*\dots*n$. Директно се проверява, че $f(x*y) = f(x)f(y)$ и следователно

$$f(n^*) = f(2)f(3)\dots f(n) = (-1)^{n-1} \frac{2}{n(n+1)}.$$

Оттук

$$n^* = \frac{1-f(n^*)}{1+f(n^*)} = \frac{n(n+1)+2(-1)^n}{n(n+1)-2(-1)^n}.$$

В частност, $1995^* = \frac{1991009}{1991011}$.

2. Ще докажем твърдението на задачата без да използваме условието, че $\sphericalangle O_1AO_2 = 90^\circ$.

Нека $P = AO_1 \cap c_1$, $Q = AO_2 \cap c_2$, $\sphericalangle ACO_1 = \alpha$ и $\sphericalangle AFO_2 = \beta$. Тогава $\sphericalangle AFL = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \alpha$ и аналогично $\sphericalangle ACK = \beta$. От друга страна, $\sphericalangle APB = 2\alpha$ и $\sphericalangle AQB = 2\beta$. Сега от $\triangle MKC$ и $\triangle CKE$ получаваме съответно, че

$$KM = \frac{CK \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad KE = \frac{CK \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}.$$

Следователно

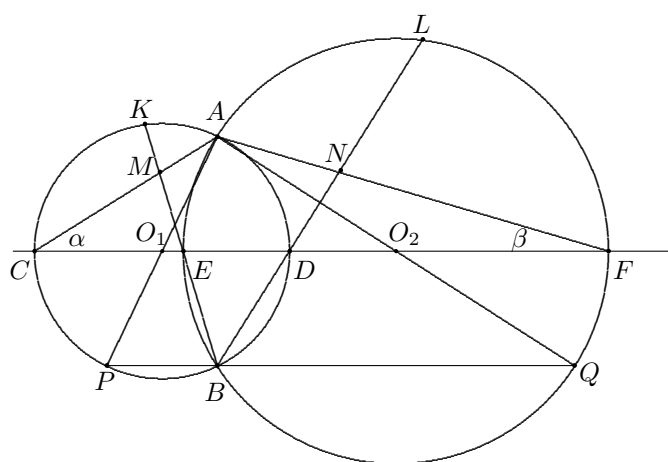
$$\frac{KE}{KM} = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin \beta \cos \beta}$$

и аналогично

$$\frac{LN}{LD} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

Оттук

$$\frac{KE}{KM} \cdot \frac{LN}{LD} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}.$$



Остава да отбележим, че $\angle ABP = \angle ABQ = 90^\circ$ и значи

$$\frac{AB}{2r_1} = \sin 2\alpha, \quad \frac{AB}{2r_2} = \sin 2\beta.$$

Следователно

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = \frac{KE}{KM} \cdot \frac{LN}{LD}.$$

3. Корените на уравнението са $x_1 = b^2 + 1$ и $x_2 = a^2 - b^2 - a$. Очевидно те са естествени числа и x_1 не е точен квадрат. Да допуснем, че съществуват естествени числа $a > b$, за които $a + b$ е четно число и x_2 е точен квадрат, например c^2 . Тогава $m = \frac{a+b}{2}$ и $n = \frac{a-b}{2}$ са естествени числа, като

$$(4m - 1)(4n - 1) = 4(4mn - m - n) + 1 = 4(a^2 - b^2 - a) + 1 = (2c)^2 + 1^2.$$

Следователно числото $(2c)^2 + 1$ има прост делител от вида $4k - 1$. Както е добре известно (например от малката теорема на Ферма), този делител трябва да дели $2c$ и 1 , което е притиворечие.

4. Броят на двойките точки от S е равен на $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \binom{n^2}{2}$. Броят на квадратите от T , страните на които са успоредни на координатните оси и имат дължина k , е равен на $(n - k)^2$. Всеки от тези квадрати съдържа $k - 1$ квадрата, чиито върхове лежат на неговите страни и чиито страни не са успоредни на координатните оси. Следователно броят на всички квадрати от T е равен на

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j)j^2 &= n \sum_{j=1}^{n-1} j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} j^3 \\ &= n \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}. \end{aligned}$$

От друга страна, като вземем предвид, че върховете на всеки квадрат поражда 6 двойки точки от S , получаваме, че броят на всички квадрати от T е равен на $\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{6}$. Следователно

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = \frac{n^2(n^2-1)}{2} = \binom{n^2}{2} = a_0 + a_1 + a_2 + a_3,$$

откъдето $a_0 = a_2 + 2a_3$.

Тринадесета балканска олимпиада по математика

1. Тъждеството на Лайбниц $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ свежда даденото неравенство до $a^2 + b^2 + c^2 \geq 18Rr$. Понеже $R = \frac{abc}{4S}$ и $r = \frac{2S}{a+b+c}$, имаме да докажем, че

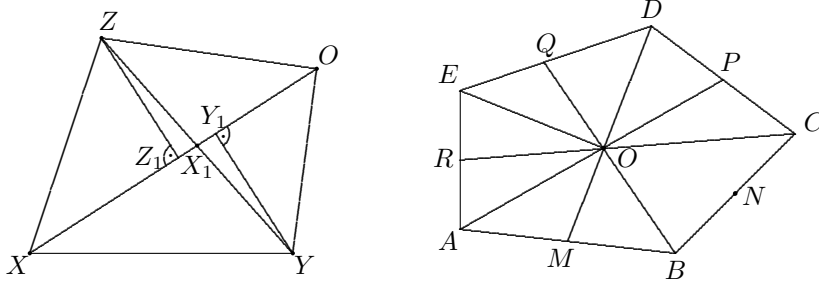
$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$$

Последното следва като умножим неравенствата $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ и $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

2. Нека $m = [\sqrt{p}]$, $x = p - m^2$ и $y = p - |m - x|^2$. Тогава $y = m^2 + x - (m - x)^2 = x(2m + 1 - x)$ и следователно x дели y . Освен това, от $x + m^2 = p < (m + 1)^2$

следва, че $x < 2m + 1$, т.е. $y > 0$. Също така, $m \neq x$ понеже $p \neq m^2$. Освен това $y \neq x$, защото иначе $x = 0$ или $x = 2m$, откъдето $p = m^2$ или $p = m(m + 2)$, т.е. $m = 1$ и $p = 3$. Всичко това показва, че $y \in X$, $x \in X$ и x дели y . Ако $x \neq 1$, задачата е решена. При $x = 1$ следва, че m е четно число и значи $2m = p - (m - 1)^2$ дели $m^2 = p - 1^2$. Оставам да отбележим, че $2m < m^2$, тъй като иначе $m = 2$ и $p = 1 + 2^2 = 5$.

3. Ще докажем, че точка O лежи на медианата XX_1 на $\triangle XYZ$ тогава и само тогава, когато $S_{XYO} = S_{XZO}$. Наистина $\frac{S_{XYO}}{S_{XZO}} = \frac{YY_1}{ZZ_1} = \frac{YX_1}{ZX_1}$. Следователно $S_{XYO} = S_{XZO}$ тогава и само тогава, когато X_1 е среда на YZ .



Тогава, ако O е общата точка на AP , BQ , CR и DM , последователно получаваме, че $S_{BEO} = S_{BDO} = S_{ADO} = S_{AOC} = S_{CEO}$. Следователно $S_{BEO} = S_{CEO}$, т.е. EO минава през средата N на отсечката BC .

4. Нека $f(n)$ е възможно най-малкият брой елементи на подмножество A на $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$, изпълняващо а) и б) Тогава:

1. $f(2^{n+1} - 1) \leq f(2^n - 1) + 2$. Наистина, $B = A \cup \{2^{n+1} - 2, 2^{n+1} - 1\}$ е подмножество на $\{1, 2, 3, \dots, 2^{n+1}\}$, което изпълнява а) и б) ($2^{n+1} - 2 = 2^n - 1 + 2^n - 1$ и $2^{n+1} - 1 = 1 + 2^{n+1} - 2$).

2. $f(2^{2n} - 1) \leq f(2^n - 1) + (n - 1)$. Наистина, $C = A \cup \{2(2^n - 1), 2^2(2^n - 1), \dots, 2^n(2^n - 1), 2^{2n} - 1\}$ е подмножество на $\{1, 2, 3, \dots, 2^{2n} - 1\}$, което изпълнява а) и б) ($2^{j+1}(2^n - 1) = 2^j(2^n - 1) + 2^j(2^n - 1)$ за $j = 0, 1, \dots, n - 1$ и $2^{2n} - 1 = 2^n(2^n - 1) + 2^n - 1$). Тогава

$$f(2^{1996} - 1) \leq f(2^{998} - 1) + 999, \quad f(2^{998} - 1) \leq f(2^{499} - 1) + 500,$$

$$f(2^{499} - 1) \leq f(2^{498} - 1) + 2, \quad f(2^{498} - 1) \leq f(2^{249} - 1) + 250,$$

$$f(2^{249} - 1) \leq f(2^{248} - 1) + 2, \quad f(2^{248} - 1) \leq f(2^{124} - 1) + 125,$$

$$f(2^{124} - 1) \leq f(2^{62} - 1) + 63, \quad f(2^{62} - 1) \leq f(2^{31} - 1) + 32,$$

$$\begin{aligned}
f(2^{31}-1) &\leq f(2^{30}-1)+2, \quad f(2^{30}-1) \leq f(2^{15}-1)+16, \quad f(2^{15}-1) \leq f(2^{14}-1)+2, \\
f(2^{14}-1) &\leq f(2^7-1)+8, \quad f(2^7-1) \leq f(2^6-1)+2, \quad f(2^6-1) \leq f(2^3-1)+4, \\
f(2^3-1) &\leq f(2^2-1)+2, \quad f(2^2-1) \leq f(2^1-1)+2, \quad f(2^1-1) \leq 1.
\end{aligned}$$

Като съберем почленно горните неравенства и извършим съкращения, получаваме, че $f(2^{1996}-1) \leq 2012$.

Четиринадесета балканска олимпиада по математика

1. Имаме, че

$$\begin{aligned}
2S_{ABCD} &= 2(S_{AOB} + 2S_{BOC} + 2S_{COD} + 2S_{DOA}) = \\
&= OA \cdot OB \sin \angle AOB + OB \cdot OC \sin \angle BOC + \\
&+ OC \cdot OD \sin \angle COD + OD \cdot OA \sin \angle DOA \\
&\leq (OA^2 + OB^2) + (OB^2 + OC^2) + (OC^2 + OD^2) + (OD^2 + OA^2).
\end{aligned}$$

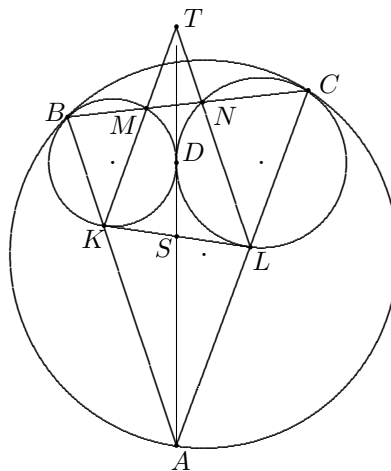
Тогава от даденото равенство следва, че $OA = OB = OC = OD$ и, че четирите синуса са равни на 1. Следователно $ABCD$ е квадрат с център O .

2. Нека $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $x_i \in A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{k(i)}}$. От условието следва, че ако $i \neq j$, то

$$\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{k(i)}}\} \neq \{A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_{k(j)}}\}.$$

Броят на всички подмножества на множеството $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ е равен на 2^m и този брой е не по-малък от броя n на елементите на S .

3. Нека i е инверсия с център A и радиус AD . Понеже $i(C_1) = C_1$, $i(C_2) = C_2$, $i(B) = K$, $i(C) = L$ и $i(\Gamma) = KL$, то KL е обща допирателна на C_1 и C_2 . От друга страна, $AK \cdot AB = AD^2 = AL \cdot AC$ и следователно $BCLK$ е вписан в окръжност четириъгълник. Ако $T = KM \cap LN$, следва, че $\angle LKT = \angle KBC = \angle ALK$, откъдето $KT \parallel AL$. Аналогично $LT \parallel AK$ и значи $AKTL$ е успоредник. В частност, AT разполовява KL . От друга страна, ако $S = AD \cap KL$, то $SK = SD = SL$ като допирателни. Значи и AD разполовява KL , т.е. $T \in AD$.



4. При $x = 0$ следва, че $f(f(y)) = y + (f(0))^2$. В частност, $f(f(y))$, а оттам и $f(y)$, приема всяка стойност. Тогава, ако $f(x_0) = 0$ след заместване в уравнението получаваме, че $f(f(y)) = y$, откъдето $f(0) = 0$. Сега при $y = 0$ от условието получаваме, че $f(xf(x)) = (f(x))^2$. Следователно

$$(f(x))^2 = f(xf(x)) = f(f(f(x)) \cdot f(x)) = [f(f(x))]^2 = x^2,$$

и значи $(f(x))^2 = x^2$. Ако $f(x) = x$ и $f(y) = -y$ за някои x и y , от условието следва, че $f(x^2 - y) = x^2 + y$. Оттук $\pm(x^2 - y) = x^2 + y$, т.е. $x = 0$ или $y = 0$. И така, $f(x) = x$ за всяко x или $f(x) = -x$ за всяко x , като очевидно и двете функции са решения.

Петнадесета балканска олимпиада по математика

15.1 Понеже разликата на два последователни члена на редицата $\left\{ \frac{k^2}{1998} \right\}_{k=1}^{999}$ е по-малка от 1, то всеки два съседни члена на редицата $\left\{ \left[\frac{k^2}{1998} \right] \right\}_{k=1}^{999}$ са равни или се различават с 1. Тъй като първият член на тази редица е 0, а последният – 499, то броят на различните ѝ членове е 500. От друга страна, разликата на два последователни члена на редицата $\left\{ \frac{k^2}{1998} \right\}_{k=1000}^{1997}$ е по-голяма от 1 и следователно членовете на редицата $\left\{ \left[\frac{k^2}{1998} \right] \right\}_{k=1}^{999}$ са различни. И така, отговорът е $500 + 998 = 1498$.

2. Нека $m \geq 2$ е естествено число. С индукция по $n \geq 1$ ще докажем по-общо неравенство от даденото, а именно

$$\sqrt[m]{a_1} - \sqrt[m]{a_2} - \dots - \sqrt[m]{a_{2n}} + \sqrt[m]{a_{2n+1}} < \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

При $n = 1$ имаме да докажем, че

$$\sqrt[m]{a_1} - \sqrt[m]{a_2} + \sqrt[m]{a_3} < \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3},$$

т.е. $(a - b + c)^m - a^m \leq c^m - b^m$, където $a = \sqrt[m]{a_1}$, $b = \sqrt[m]{a_2}$, $c = \sqrt[m]{a_3}$. Това следва от

$$(a - b + c)^m - a^m = (c - b)(a^{m-1} + a^{m-2}(c - b) + \dots + a(c - b)^{m-2} + (c - b)^{m-1})$$

$$< (c-b)(b^{m-1} + b^{m-2}c + \dots + bc^{m-2} + c^{m-1}) = c^m - b^m$$

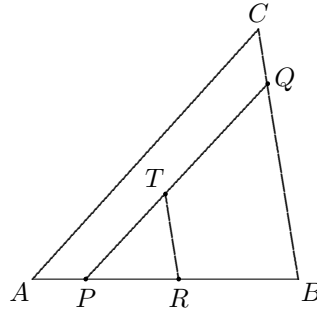
(използвахме, че $m > 1$, $0 < a < b$ и $0 < c-b < c$).

Да предположим, че неравенството е вярно за някое $n \geq 1$. Тогава

$$\begin{aligned} & \sqrt[m]{a_1} - \sqrt[m]{a_2} - \dots - \dots - \sqrt[m]{a_{2n}} + \sqrt[m]{a_{2n+1}} - \sqrt[m]{a_{2n+2}} + \sqrt[m]{a_{2n+3}} \\ & < \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n} + a_{2n+1}} - \sqrt[m]{a_{2n+2}} + \sqrt[m]{a_{2n+3}} \\ & < \sqrt[m]{a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3}} \end{aligned}$$

(първото неравенство следва от индукционното предположение, а второто от вече доказаната база на индукцията, т.е. неравенството за три числа). С това по-общото неравенство е доказано за $n+1$ и индукцията е завършена.

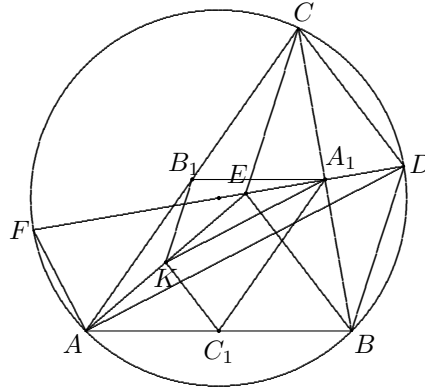
3. Нека $P \in AB$, $Q \in BC$ и $R \in AC$ са такива точки, че $T \in PQ$, $PQ \parallel AC$ и $TR \parallel BC$. Разглеждаме всички затворени отсечки XY , $X \in AP$, $X \neq P$, $Y \in CQ$, $Y \neq Q$. Тези отсечки покриват трапеца $APQC$ без отсечката PQ . Аналогично отсечките MN , $M \in QT$, $M \neq T$, $N \in BR$, $N \neq R$ покриват трапеца $TRBQ$ без отсечката TR . Най-накрая по същия начин покриваме $\triangle PRT$ без точка T чрез отсечки успоредни на PR .



4. От условието следва, че n е естествено число и $n \geq 2$, т.е. достатъчно е да търсим решение в естествени числа. Лесно се проверява, че възможните остатъци на квадрата на едно естествено число при деление на 11 са 0, 1, 3, 4, 5, 9, т.е. $m^2 \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$. Аналогично $n^5 \equiv 0, 1, 10 \pmod{11}$. Следователно $n^5 - 4$ при деление на 11 дава остатъци $-4, -3$ и 6, т.е. 7, 8 и 6. От горните сравнения следва, че $m^2 \not\equiv n^5 - 4 \pmod{11}$, което означава, че даденото уравнение няма решение в цели числа.

Шестнадесета балканска олимпиада по математика

16.1 а) Нека A_1 , B_1 и C_1 са средите съответно на страните BC , CA и AB . Тогава $KC_1 \parallel BE$, $KB_1 \parallel CE$ (като средни отсечки) и следователно $\angle C_1KB_1 = \angle BEC$. От друга страна $\angle BEC = \angle BDC$ понеже E е симетрична на D относно BC . Но $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle B_1A_1C_1$. Следователно $\angle C_1KB_1 + \angle B_1A_1C_1 = 180^\circ$, с което а) е доказано.



б) Достатъчно е да съобразим, че $KA_1 \parallel AD$ като средна отсечка в $\triangle AED$ и $AD \perp AF$, понеже DF е диаметър на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

2. Нека $a = y^2 - x^3 - 1 \in S$ и p дели a , т.е. $y^2 \equiv x^3 + 1 \pmod{p}$. Да забележим, че ако $0 \leq x_1, x_2 \leq p-1$ са цели числа, за които $x_1^3 \equiv x_2^3 \pmod{p}$, то $x_1 = x_2$. Наистина, тъй като $p-1 = 3k+1$ от малката теорема на Ферма следва, че $x_1^{3k+1} \equiv x_2^{3k+1} \pmod{p}$ и остава да използваме, че $x_1^{3k} \equiv x_2^{3k} \pmod{p}$. Следователно за всяко y съществува единствено $0 \leq x \leq p-1$, за което p дели $y^2 - x^3 - 1$. Понеже $1^2 - 0^3 - 1 = 0 = 3^2 - 2^3 - 1$ заключаваме, че най-много $p-1$ елемента на S се делят на p .

3. Ще използваме известната формула на Ойлер, а именно, че лицето на триъгълника, образуван от петите на перпендикулярите от произволна точка D към страните на $\triangle ABC$ е равно на $\frac{S_{ABC}}{4} \left| 1 - \frac{OD^2}{R^2} \right|$, където O и R са съответно центърът и радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Дясното неравенство сега е очевидно и то за произволен триъгълник, като равенство се достига, когато $G \equiv O$, т.е. $\triangle ABC$ е равностранен. Лявото неравенство може да бъде подобро. По-точно, ще се убедим, че $\frac{2}{9} < \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$ тогава и само тогава, когато $\triangle ABC$ е остроъгълен. Наистина, от формулата на Ойлер следва, че последното е еквивалентно на $R > 3OG$. Понеже $3OG = OH$, получаваме $R > OH$, където H е ортоцентърът на $\triangle ABC$. Това означава, че H е вътрешна точка за описаната около $\triangle ABC$ окръжност, т.е. той е остроъгълен.

4. Ще докажем твърдението с индукция по $m + n$. От условието следва, че при $m + n = 0$ имаме, че $x_0 \geq 1$ или $y_0 \geq 1$. Да допуснем, че твърдението е вярно за $m + n$. Ще го докажем за $m + n + 1$. Ако $x_0 \geq m + 1$, то

$$\sum_{i=0}^n x_i + \sum_{j=0}^m y_j \geq \sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{j=0}^m y_j + x_0 \geq n(m+1) + m + 1 = (n+1)(m+1).$$

Ако $x_0 \leq m$, от условието на задачата следва, че $y_m \geq n + 1$ и тогава

$$\sum_{i=0}^n x_i + \sum_{j=0}^m y_j \geq \sum_{i=0}^n x_i + \sum_{j=0}^{m-1} y_j + y_m \geq (n+1)m + n + 1 = (n+1)(m+1).$$

Седемнадесета балканска олимпиада по математика

1. Вж. решението на Задача 4 от Четиринадесета балканиада.

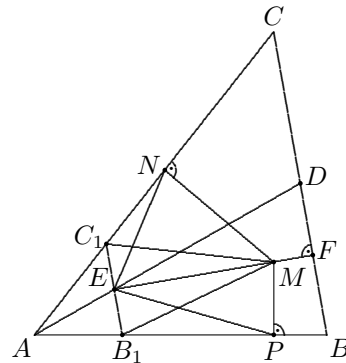
2. Първо ще докажем, че $\angle ENM = \angle EPM$.

Нека l е правата през E , успоредна на BC . С B_1 и C_1 означаваме пресечните точки на l съответно с AB и AC . Ясно, е че E е среда на B_1C_1 и $EM \perp B_1C_1$. Следователно $\triangle B_1C_1M$ е равнобедрен, т.е. $\angle MC_1B_1 = \angle MB_1C_1$. От друга страна, $\angle MC_1B_1 = \angle ENM$, защото точките E, M, N и C_1 лежат на окръжност с диаметър EM . Аналогично $\angle MB_1C_1 = \angle EPM$, откъдето $\angle ENM = \angle EPM$. По-нататък $\angle PMN$ и $\angle PEN$ ще отъждествяваме със съответните вътрешни ъгли на четириъгълника $EPMN$ (възможно неизпъкнал или дори изроден при $E \in PN$).

Без ограничение ще считаме, че ъглополовящата на $\angle PEN$ пресича правата MP в точка Q . Тогава

$$\angle EQP = 180^\circ - \angle PEQ - \angle MPE = \frac{\angle PMN}{2}$$

и следователно ъглополовящите на $\angle PEN$ и $\angle PMN$ са успоредни. Остава да покажем, че те не съвпадат. В противен случай ъглополовящата на



$\nless PEN$ ще минава през M . Тогава $\triangle EMN \cong \triangle EPN$, откъдето $MN = MP$. Сега $\triangle MNC_1 \cong MPB_1$, откъдето намираме $\nless MC_1N = \nless MB_1P$. Понеже и $\nless MC_1B_1 = \nless MB_1C_1$, следва, че $\nless AC_1B_1 = \nless AA_1C_1$. Това означава, че $\nless ACB = \nless ABC$, което противоречи на условието, че $\triangle ABC$ не е равнобедрен.

3. Да разположим правоъгълника $ABCD$ в координатна система така, че върховете му да са с координати $A(0, 0)$, $B(0, 50)$, $C(90, 50)$, $D(90, 0)$. Първо ще покажем как от $ABCD$ могат да се изрежат 315 правоъгълника с размери $1 \times 10\sqrt{2}$. Тъй като $90 > 60\sqrt{2}$ можем да разделим $ABCD$ на два правоъгълника с размери $50 \times 60\sqrt{2}$ и $(90 - 60\sqrt{2}) \times 50$. От първия правоъгълник изрязваме 50 правоъгълника с размери $1 \times 60\sqrt{2}$, след което от всеки такъв правоъгълник изрязваме шест правоъгълника с размери $1 \times 10\sqrt{2}$. Следователно от първия правоъгълник изрязваме $50 \cdot 6 = 300$ правоъгълника с размери $1 \times 10\sqrt{2}$. Понеже $90 - 60\sqrt{2} > 5$ и $50 > 30\sqrt{2}$, то от втория правоъгълник можем да изрежем правоъгълник с размери $5 \times 30\sqrt{2}$, от който лесно изрязваме $5 \cdot 3 = 15$ правоъгълника с размери $1 \times 10\sqrt{2}$. Следователно получаваме 315 правоъгълника с размери $1 \times 10\sqrt{2}$.

Ще докажем, че това е максималния брой. Да допуснем, че сме разрязали правоъгълника на t правоъгълника с размери $1 \times 10\sqrt{2}$. Да разгледаме сеченията на правите с уравнения

$$L_1 : x + y = 10\sqrt{2}, \quad L_2 : x + y = 20\sqrt{2} \dots, \quad L_9 : x + y = 90\sqrt{2}.$$

с правоъгълника $ABCD$. Да отбележим, че тъй като $100\sqrt{2} - 90 > 50$, то правата с уравнение $x + y = 100\sqrt{2}$ не пресича правоъгълник. Тъй като всяка от горните прави сключват ъгъл 45° с всяка от координатните оси, не е трудно да се забележи, че сумата от дължините на отсечките от тези прави, лежащи в произволен правоъгълник $1 \times 10\sqrt{2}$ със страни успоредни на координатните оси, е $\sqrt{2}$. Да означим с l_i дължината на отсечката от правата L_i , лежаща във вътрешността на правоъгълника $ABCD$. Прости пресмятания показват, че $l_1 = 20$, $l_2 = 40$, $l_3 = 60$, $l_4 = l_5 = l_6 = 50\sqrt{2}$, $l_7 = 140\sqrt{2} - 140$, $l_8 = 140\sqrt{2} - 160$, $l_9 = 140\sqrt{2} - 180$. След сумиране получаваме, че общата дължина на тези отсечки е $570\sqrt{2} - 360$. Тъй като общият брой правоъгълници $1 \times 10\sqrt{2}$ е t и всеки от тях съдържа в себе си отсечки с обща дължина $\sqrt{2}$ получаваме, че $t\sqrt{2} < 570\sqrt{2} - 360$. Директно се проверява, че $316 > \frac{570\sqrt{2} - 360}{\sqrt{2}} > 315$ и следователно

$$t \leq \left\lfloor \frac{570\sqrt{2} - 360}{\sqrt{2}} \right\rfloor = 315.$$

4. Първо ще докажем следната лема:

Лема. За всяко $m \in \mathbb{N}$ съществува такова d , че всички числа от множеството $\{d, 2d, \dots, md\}$ са степени.

Доказателство на лемата. Нека $p_1, p_2, \dots, p_k$ са всички прости делители на $m!$, а $q_1, q_2, \dots, q_m$ са първите m две по две взаимно прости числа. Ще търсим d от вида $d = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$ така, че dl да е точна q_l -та степен за $l = 1, 2, \dots, m$. Като представим l във вида $p_1^{a_1(l)} p_2^{a_2(l)} \dots p_k^{a_k(l)}$ виждаме, че трябва $x_i + a_i(l) \equiv 0 \pmod{q_l}$ за $i = 1, 2, \dots, k$. С други думи, за всяко x_i трябва $x_i + a_i(l) \equiv 0 \pmod{q_l}$ при $l = 1, 2, \dots, m$. Тъй като $q_1, q_2, \dots, q_m$ са две по две взаимно прости числа, то съгласно китайската теорема за остатъците тази система (относно x_i -тата) има решение. С това лемата е доказана.

За да решим задачата, достатъчно е да приложим лемата за числото $m! = n! \frac{n(n+1)}{2}$ и да изберем $r_j = jn!d$ за $j = 1, 2, \dots, n$. Средното аритметично на кои да е от тези числа има вида id , където $i < n!(1+2+\dots+n) = m$ и следователно е степен.

Осемнадесета балканска олимпиада по математика

1. За всяко естествено число c означаваме с $\deg_2(c)$ най-голямото неотрицателно цяло число d , за което 2^d дели c . Тъй като $A = ab - a + b - 1 = (a+1)(b-1) > 0$ и a е нечетно, то

$$\deg_2(A) = \deg_2((a+1)(b-1)a) = \deg((a+1)(2^n - a - 1)).$$

Понеже $a+1 \in (0, 2^n)$ е четно, лесно се съобразява, че $\deg(a+1) = \deg(2^n - (a+1)) > 0$. Следователно $\deg_2(A) = 2\deg(a+1)$ е четно число, с което задачата е решена.

2. Нека петогълникът $A_1A_2A_3A_4A_5$ изпълнява условията на задачата. Тогава неговите ъгли са равни на 108° . Ако $C = A_1A_5 \cap A_2A_3$ и $D = A_1A_5 \cap A_3A_4$, то

$$A_1C = A_2C = \frac{A_1A_2}{2 \sin 18^\circ}, \quad A_4D = A_5D = \frac{A_4A_5}{2 \sin 18^\circ}.$$

Тогава равенствата $CA_2 + A_2A_3 = CA_3 = DA_3 = DA_4 + A_4A_3$ показват, че $A_1A_2 - A_4A_5 = 2 \sin 18^\circ (A_3A_4 - A_2A_3)$. Тъй като $\sin 3.18^\circ = \cos 2.18^\circ$, то $0 = \cos 18^\circ (4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1)$ и следователно $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Понеже

това число е ирационално, а дължините на страните на $A_1A_2A_3A_4A_5$ са рационални заключаваме, че $A_2A_3 = A_3A_4$ и $A_1A_2 = A_4A_5$. Аналогично се доказва, че всичките страни на петогълника са равни и следователно той е правилен.

Забележка. Както е добре известно, твърдението на задачата е вярно и за произволен изпъкнал p -ъгълник, където $p \geq 3$ е просто число. С помощта на комплексни числа доказателството му се свежда до известния факт, че полиномът $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ не може да се представи като произведение на два неконстантни полинома с цели коефициенти.

3. Да допуснем, че $a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3}$. Тогава от неравенството между средно аритметично и средно геометрично следва, че

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3}.$$

Значи $abc > 3\sqrt{3}$ и тогава неравенството между средно аритметично и средно квадратично показва, че

$$\frac{(abc)^2}{3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3}.$$

Следователно $abc < 3\sqrt{3}$, което е противоречие.

4. Нека $Oxyz$ е декартова координатна система с начало връх на куба и оси по трите му направления. Да номерираме 27-те клетки по следния начин: на клетка с център (x, y, z) съпоставяме цялото число $x + 3y + 9z - \frac{11}{2}$ от интервала $[1, 27]$. Двойка кубчета ще наричаме “инверсна”, ако на кубчето с по-малък номер (от номерацията в условието) съответства клетка с по-голям номер (от въведената номерация). Понеже съседните клетки имат номера с различна четност, то при “позволен” ход се “прескачат” четен брой клетки (възможно 0). Тогава лесно се съобразява, че четността на броя на ненаредените “инверсни” двойки кубчета се запазва след всеки “позволен” ход. Сега да допуснем, че отговорът на задачата е положителен и за началната конфигурация този брой е бил a , а за крайната - b . Тогава числата a и b имат една и съща четност. От друга страна, числото $a + b$ е нечетно, тъй като то е равно на 13.25 - броят на ненаредените двойки от 26 елемента (понеже двойка кубчета са в “инверсия” накрая само ако не са били в “инверсия” отначало.) Полученото противоречие дава отрицателен отговор на въпроса от задачата.

Деветнадесета балканска олимпиада по математика

1. Да започнем от произволна точка A_{i_1} и да се движим по прекарани отсечки, така че не попадаме в точки, в които вече сме били. Тъй като отсечките са краен брой, ще достигнем до точка, от която няма да можем да продължим. Нека точките от така построената редица са $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_t}$. Тъй като от A_{i_t} излизат поне три отсечки (една от които е към $A_{i_{t-1}}$), A_{i_t} е свързана с поне две от предните точки в редицата. По този начин получаваме цикъл, две от несъседните точки на който са свързани. Без ограничение можем да считаме, че цикълът е $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$ и точките Y_1 и Y_i са свързани. Да разгледаме трите цикъла $Y_1, Y_2, \dots, Y_s$, $Y_1, Y_2, \dots, Y_i$ и $Y_1, Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_s$. Всяка една от отсечките $Y_1Y_2, Y_2Y_3, Y_3Y_4, \dots, Y_{s-1}Y_s, Y_sY_1$ и Y_1Y_i участва в точно два от трите цикъла, което означава, че ако p , q и r са дължините на тези цикли, то $p + q + r$ е четно число. Следователно поне едно от числата p , q и r е четно, с което задачата е решена.

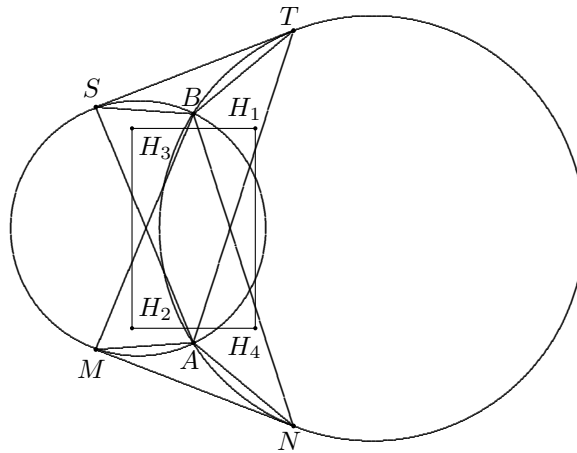
2. По индукция лесно се доказва, че за всяко n е изпълнено равенството $a_{n+1}^2 - 3a_{n+1}a_n + a_n^2 = -500$, т.е. $1 + 5a_na_{n+1} - (a_n + a_{n+1})^2 = 501$. Ако допуснем, че $1 + 5a_na_{n+1} = t^2$, то получаваме $t^2 - A^2 = 501$ за $A = a_n + a_{n+1}$. Тъй като редицата е строго растяща (Докажете!), то t и A са положителни числа. Следователно решенията са $t - A = 1$ и $t + A = 501$ или $t - A = 3$ и $t + A = 167$, откъдето намираме $t = 251$ или $t = 85$. Следователно трябва да проверим за кои n е вярно равенството $251^2 = 1 + 5a_na_{n+1}$ или $85^2 = 1 + 5a_na_{n+1}$. При $n = 1$ и $n = 2$ нито едно от равенствата не е вярно, докато $251^2 = 1 + 5a_3a_4$ и понеже редицата е строго растяща, то $n = 3$ е единствено решение на задачата.

3. Ще използваме следното твърдение: Във всеки остроъгълен триъгълник разстоянието от даден връх до ортоцентъра е равно на срещулежащата страна, умножена по котангеса на ъгъла при дадения връх.

Нека H_1 и H_2 са ортоцентровете съответно на триъгълниците MNA и MNB . Тогава A е ортоцентърът на $\triangle MNH_1$ и следователно $H_1A = MN \cotg \sphericalangle MH_1N$ и $BH_2 = MN \cotg \sphericalangle MBN$. Тъй като MN е допирателна и към двете окръжности, то $\sphericalangle NMA = \sphericalangle MBA$ и $\sphericalangle MNA = \sphericalangle NBA$. Това означава, че $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MBN = 180^\circ$. Но $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MH_1N = 180^\circ$, откъдето намираме $\sphericalangle MH_1N = \sphericalangle MBN$. Следователно

$$H_1A = MN \cotg \sphericalangle MH_1N = MN \cotg \sphericalangle MBN = BH_2,$$

което означава (тъй като $H_1A \parallel BH_2$), че H_1BH_2A е успоредник.



Следователно средата на H_1H_2 съвпада със средата на AB . Аналогично, ако H_3 и H_4 са ортоцентровете съответно на $\triangle AST$ и $\triangle BST$, то средата на H_3H_4 съвпада със средата на AB . Получихме, че отсечките H_1H_2 и H_3H_4 имат обща среда, откъдето следва, че $H_1H_3H_2H_4$ е успоредник. Остава да забележим, че отсечките H_1H_2 и H_4H_3 са симетрични относно правата през центровете на двете окръжности. Следователно $H_1H_3H_2H_4$ е успоредник с равни диагонали, т.е. $H_1H_3H_2H_4$ е правоъгълник.

4. Нека функцията f изпълнява условието на задачата. Първо ще докажем, че $f(n) > n$ за всяко n . Да допуснем противното и нека m е такова, че $f(m) \leq m$ и $k = f(m)$ е възможно най-малко. Очевидно $k < m$ и ако $l = f(k)$, то $k + l \geq 2m + 2001$ и $f(l) + l \leq 2k + 2002$. Следователно $2k + 2002 \geq f(l) + 2m + 2001 - k$, откъдето $f(l) \leq 3k - 2m + 1 < k$, което е противоречие. Това показва, че функцията $g(n) = f(n) - n$ е положителна. Ако $g(p)$ е нейната най-малка стойност и $q = g(p) + p$, от условието следва, че $2g(p) + g(q) \geq 2001$ и $2g(q) + g(g(q) + q) \leq 2002$, откъдето $4g(p) \geq 4002 - 2g(q) \geq 2000 + g(g(q) + q) \geq 2000 + q(p)$ и значи $g(p) \geq 667$. Сега от неравенството $2g(n) + g(g(n) + n) \leq 2002$ заключаваме, че $g(n) = 667$, т.е. $f(n) = n + 667$ за всяко n , като тази функция очевидно изпълнява условието на задачата.

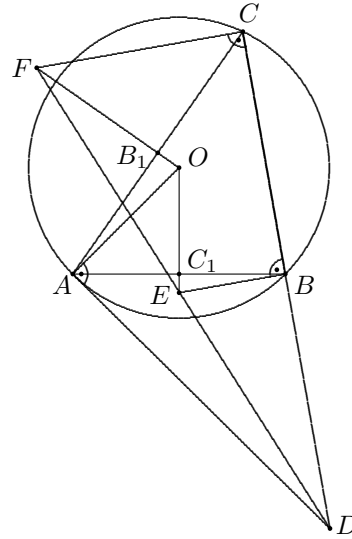
Двадесета балканска олимпиада по математика

1. Ще покажем, че множеството $A = \{2003k, 2003k + 1 : k = 1, 2, \dots, 2002\}$ има исканото свойство. Ако изберем t елемента с остатък 1 и $2003 - t$ елемента с остатък 0 при деление на 2003, то сумата на тези 2003 числа дава остатък t при деление на 2003 и понеже $1 \leq t \leq 2002$, то t не се дели на 2003.

2. Без ограничение можем да считаме, че $\angle ABC > \angle ACB$. Ако C_1 и B_1 са средите съответно на AB и AC , то $\angle FCB_1 = 90^\circ - \gamma$ и $\angle C_1BE = 90^\circ - \beta$ (ако $\beta \leq 90^\circ$) или $\angle C_1BE = \beta - 90^\circ$ (ако $\beta > 90^\circ$). Тогава $BE = \frac{c}{2 \sin \beta}$ и $CF = \frac{b}{2 \sin \gamma}$. Тъй като $\angle BAD = \gamma$, от синусовата теорема за $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ имаме $DB = \frac{c \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$ и $DC = \frac{b \sin(\gamma + \alpha)}{\sin(\beta - \gamma)}$. Следователно

$$\frac{BD}{BE} = \frac{2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{DC}{CF},$$

което означава, че $\triangle DBE \sim \triangle DCF$. Тогава $\angle BDE = \angle CDF$, т.е. D , E и F лежат на една права.



3. Записваме първото равенство във вида

$$f(x + y) + (x + y) = (f(x) + x)(f(y) + y)$$

и след субституцията $g(x) = f(x) + x$ получаваме класическото уравнение $g(x + y) = g(x)g(y)$. Както е добре известно, неговите решения са $g(x) = 0$ и $g(x) = a^x$, $a > 0$. Понеже $f(0) = 2(f(1) + 1) > 0$, то $g(x) \neq 0$ и тогава $1 = 2(a - 1 + 1)$, т.е. $a = \frac{1}{2}$. Следователно $f(x) = 2^{-x} - x$, като тази функция очевидно изпълнява условията на задачата.

4. Можем да считаме, че $m \geq n$. Ще казваме, че отсечката $A_p A_{p+1}$ е от първи вид, ако точките A_p и A_{p+1} са пресечни точки на AC с вертикални страни на единични квадратчета. Когато едната от точките A_p или A_{p+1} е пресечна точка на AC с хоризонтална страна на квадратче, ще казваме, че отсечката $A_p A_{p+1}$ е от втори вид.

Диагоналът AC пресича $m - 1$ пъти вертикални страни и $n - 1$ пъти хоризонтални страни. Тъй като $(m, n) = 1$ всички такива точки са различни и следователно те разделят AC на $m + n - 1$ отсечки. Понеже първото събираемо е със знак $+$ и $m + n - 1$ е нечетно число, получаваме, че положителните събираеми са с едно повече от отрицателните. Да забележим, че ако A_p е пресечна точка на AC с хоризонтална страна, то $A_{p-1}A_p$ и A_pA_{p+1} са от втори вид и имат противоположни знаци. Следователно отсечките от първи вид със знак $+$ са с една повече от отсечките от първи вид със знак $-$, което означава, че отсечките от първи вид дават принос в търсената сума точно дължината на една такава отсечка, т.е. $\frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m}$.

За фиксирано $k = 1, 2, \dots, n - 1$, нека $km = t_k n + r_k$, където $0 < r_k < n$. Тогава пресечната точка на AC с хоризонталната права k (без да броим AB) има координати (по отношение на координатна система с център A) $(t_k + \frac{r_k}{n}; k)$ и това е точка номер $s = k + t_k + 1$. Това означава, че когато $k + t_k$ е четно, то $A_{s-1}A_s$ има знак $-$ и A_sA_{s+1} има знак $+$. Аналогично, когато $k + t_k$ е нечетно, то $A_{s-1}A_s$ има знак $+$ и A_sA_{s+1} има знак $-$.

Да забележим, че r_k има същата четност както $k + t_k$. Наистина, ако k е четно число, то $t_k n + r_k$ е четно число, което означава, че t_k и r_k имат еднаква четност. Ако k е нечетно, то $t_k n + r_k$ е нечетно, т.е. t_k и r_k са с различна четност. И в двата случая r_k и $k + t_k$ имат една и съща четност.

От друга страна, тъй като $pm = qm \pmod{n}$ дава $p = q \pmod{n}$, то r_k “пробягва” всички остатъци по модул n . Следователно, когато r_k е четно число имаме $-A_{s-1}A_s + A_sA_{s+1} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m} \left(\frac{-r_k + (n - r_k)}{n} \right)$, а когато r_k е нечетно, получаваме $+A_{s-1}A_s - A_sA_{s+1} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m} \left(\frac{r_k - (n - r_k)}{n} \right)$.

И така, търсената сума е равна на

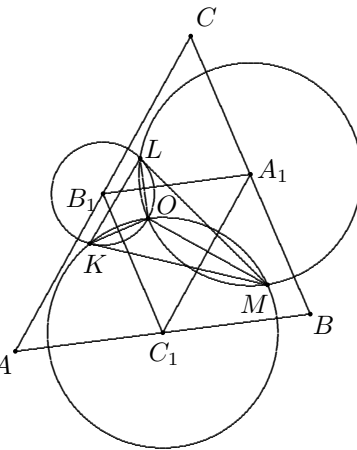
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} A_i A_{i+1} &= \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m} \left(1 + \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n - 4s}{n} + \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{4s - 2 - n}{n} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m} \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{mn}. \end{aligned}$$

Двадесет и първа балканска олимпиада по математика

1. При $m = n = 0$ следва, че $a_0 = 1$ и тогава за $n = 0$ получаваме $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$. Оттук по индукция $a_{2m} = (2m)^2 + 2m + 1$ и значи $a_m = \frac{a_{2m} + 2m + 3}{4} = m^2 + m + 1$ за всяко m (директно се проверява, че така намерената редица изпълнява даденото условие). В частност, $a_{2004} = 2004^2 + 2005$.

2. От малката теорема на Ферма следва, че y дели $x + 19$ и x дели $y - 19$. Очевидно $x \neq y$ и значи xy дели $x - y + 19$. Тогава $xy \leq y - x - 19$ или $xy \leq x - y + 19$. Първият случай води до $(x - 1)(y + 1) \leq -20$, което е невъзможно, а вторият - до $(x + 1)(y - 1) \leq 18$. При $x \geq 7$ следва, че $y = 2$ и понеже x дели 17, то $x = 17$. Директна проверка показва, че $(17, 2)$ не е решение на уравнението. Следователно $x = 2$, $x = 3$ или $x = 5$ и по подобен начин намираме, че единствените решения на задачата са $(2, 3)$ и $(2, 7)$.

3. Нека A_1 , B_1 и C_1 са средите на страните на $\triangle ABC$. Понеже общата хорда на две окръжности е перпендикулярна на отсечката, свързваща двата центъра, и се разполюва от нея, то средите K_1 , L_1 и M_1 на отсечките OK , OL и OM са ортогоналните проекции на O върху страните на $\triangle A_1B_1C_1$. Както е добре известно, оттук следва, че точката O е ортоцентър на остроъгълния $\triangle A_1B_1C_1$, т.е. център на описаната окръжност около $\triangle ABC$, точно когато тя е център на вписаната окръжност в $\triangle K_1L_1M_1$ (докажете!). От друга страна, хомотетията с център O и коефициент 2 изобразява $\triangle K_1L_1M_1$ в $\triangle KLM$ и следователно O е център на вписаната окръжност в $\triangle K_1L_1M_1$ само ако тази точка е център на вписаната окръжност в $\triangle KLM$. С това задачата е решена.



4. Ако всички прави са успоредни, от (ii) лесно следва, че всички числа са нула и тогава (i) не се изпълнява.

Нека не всички прави са успоредни. На всяка част можем да съпоставим знак $+$ или $-$ така, че знаците в съседни части да са противоположни (докажете това с индукция по броя на правите, като при добавяне на нова права смените знаците от едната ѝ страна, а от другата ги запазите). В дадена част написваме числото sa , където s е съпоставеният знак, а a е

броят на ъглите на частта. Остава да проверим, че условията са изпълнени:

(i) ако $a < 0 < b$ са написаните числа в две съседни части, то $ab \leq a < a + b$;

(ii) всеки от ъглите в полуравнина, определена от права l , е броен два пъти с противоположни знаци, ако върхът му лежи на l , и четири пъти със знаци $+$, $-$, $+$, $-$ в противен случай.

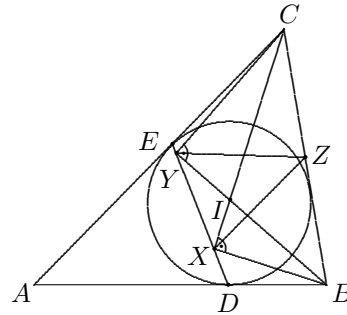
Двадесет и втора балканска олимпиада по математика

1. Нека I е центърът на вписаната в триъгълника окръжност. Понеже

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2} = \angle BDE,$$

то точките B , D , X и I лежат на една окръжност, т.е. $\angle BXC = \angle BDI = 90^\circ$. Аналогично $\angle BYC = 90^\circ$ и следователно $XZ = BZ = YZ$. Освен това,

$$\begin{aligned} \angle XZY &= 180^\circ - \angle BZX - \angle CZY = \\ &= 180^\circ - \angle ADE - \angle AED = \angle BAC \end{aligned}$$



и задачата следва директно.

2. Нека $p^2 - p + 1 = a^3$, т.е. $p(p-1) = (a-1)(a^2 + a + 1)$. Очевидно $1 < a < p$ и значи p е делител на $a^2 + a + 1$. Следователно $a^2 + a + 1 = bp$, $p-1 = b(a-1)$ и оттук $a^2 + a + 1 = b(b(a-1) + 1)$. Лесно се проверява, че $b > 2$ и тогава

$$a + 1 < \frac{a^2 + a + 1}{a} < b^2 < \frac{a^2 + a - 1}{a - 1} \leq a + 3,$$

откъдето $b^2 = a + 2$. Сега $a^2 + a + 1 = (a + 2)(a - 1) + b$, което показва, че $b = 3$, $a = 7$ и $p = 19$.

3. Записваме даденото неравенство във вида

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Последното следва от неравенството на Коши-Буняковски-Шварц и неравенството на триъгълника:

$$\begin{aligned}(b+c+a) \left(\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \right) &\geq (|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 \\ &\geq (2|a-b|)^2.\end{aligned}$$

Равенство в първото неравенство се достига, когато

$$\frac{(a-b)^2}{b^2} = \frac{(b-c)^2}{c^2} = \frac{(c-a)^2}{a^2},$$

т.е. при

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2\frac{b}{c} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}.$$

Следователно всеки две от числата $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$ или са равни или тяхната сума е 2. Значи или $a = b = c$, или две от тях са равни, а третото ги допълва до 2. В първия случай очевидно неравенството от условието се превръща в равенство и остава да разгледаме втория случай. Понеже равенство в горното неравенство на триъгълника се достига, когато $a \leq c \leq b$ или $b \leq c \leq a$ следва, че $\frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ и $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = 2$. Оттук $c = \sqrt{ab}$ и $x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$ е корен на уравнението $x^2 + \frac{1}{x} = 2$, т.е. $(x-1)(x^2+x-1) = 0$. Следователно $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $a = x_0^2 b$, $c = x_0 b$.

4. Да разгледаме множеството от всички четни числа, по-големи от $\left[\frac{n}{2}\right]$. Ясно е, че всеки две от тези числа имат общ делител 2 и никое от тях не дели друго, защото най-голямото е по-малко от удвоеното най-малко. Следователно съществува множество с исканите свойства и $\left[\frac{n+2}{4}\right]$ елемента.

Нека S има исканото свойство. Ако в S има число $a \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, можем да вземем най-малкото такова число и да го заменим с $2a$. Новото множество има исканите свойства и същия брой елементи. Следователно можем да считаме, че всички числа от S са по-големи от $\left[\frac{n}{2}\right]$. Тъй като не е възможно в S да има две съседни числа, заключаваме, че в S има най-много $\left[\frac{n+2}{4}\right]$

елемента, освен евентуално в случая, когато $n = 4k + 1$. Тогава е достатъчно да се отбележи, че $2k + 1$ и $4k + 1$ не могат да принадлежат едновременно на S .

Следователно търсеният максимален брой елементи на S е $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$.

Двадесет и трета балканска олимпиада по математика

1. След привеждане под общ знаменател и разкриване на скобите неравенството приема вида

$$a^3b^2c^2 + a^2b^3c^2 + a^2b^2c^3 + a^2b^3c + ab^2c^3 + a^3bc^2 - 2a^2bc^2 - 2ab^2c^2 - 2a^2b^2c - 2a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 + ab^2 + bc^2 + a^2c + ab + ac + bc \geq 0.$$

Да забележим, че точно една трета от събираемите, а именно тези със степени 4 и 5, имат коефициент -2 , а останалите – коефициент 1. Това ни подсказва да използваме равенството $u^2 - 2u + 1 = (u - 1)^2 \geq 0$. За целта степента на всяко събираемо с коефициент -2 трябва да е средно аритметично на степените на две други събираеми с коефициент 1, т.е. трябва да групираме степени 3-5-7 и 2-4-6. Така получаваме очевидното неравенство

$$bc^2(ab-1)^2 + ca^2(bc-1)^2 + ab^2(ca-1)^2 + bc(ab-1)^2 + ca(bc-1)^2 + ab(ca-1)^2 \geq 0.$$

2. Нека $A'E$ пресича k в точка P . Имаме

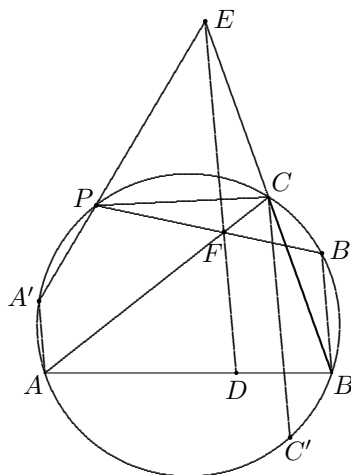
$$\sphericalangle EPC = \frac{1}{2} \widehat{A'PC} = \sphericalangle A'AC = \sphericalangle EFC,$$

т.е. четириъгълникът $EPFC$ е вписан. Тогава $\sphericalangle FPC = \sphericalangle FEC = \sphericalangle CBB' = \sphericalangle CPB'$, т.е. $P \in B'F$. Аналогично се доказва, че $P \in C'D$.

3. Произведението на трите цели числа е $mnp + 3 + \frac{3}{mnp} + \frac{1}{(mnp)^2}$. Ако положим $x =$

mnp , то числото $k = x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$ е цяло.

Следователно x е положителен рационален корен на уравнението с цели коефициенти $x^3 - kx^2 + 3x + 1 = 0$. Оттук следва, че $x = 1$ и тогава дадените условия се свеждат до това, че числата $2m$, $2n$ и $2p$ са цели и $mnp = 1$.



Нека $m \geq n \geq p$. Тогава $p \leq 1$ и щом $2p$ е цяло, то $p = 1$ или $p = \frac{1}{2}$. В първия случай следва, че $m = n = 1$. Във втория случай $mn = 2$ и понеже $m \geq n$, имаме $n = 1$, $m = 2$ или $n = \frac{1}{2}$, $m = 4$. Окончателно, имаме общо 10 решения, а именно $(1; 1; 1)$, $(2; 1; \frac{1}{2})$, $(4; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ и всичките им пермутации.

4. Първо да отбележим, че ако m е четно число и $a = 2^k l$, където l е нечетно число, то $a_{k+j} = l + jm$ за всяко $j \geq 0$ и следователно редицата не е периодична.

При нечетно m ще докажем, че отговорът на задачата е $a = 1, 2, \dots, m, m+1, m+3, \dots, 2m-2, 2m$.

Очевидно редицата е периодична тогава и само тогава, когато a се среща поне два (а значи и безбройно много) пъти в редицата.

Нека първо a е измежду горните числа. Тогава по индукция лесно следва, че (*) $a_n \leq 2m$ за всяко n , като $a_n \leq m$, ако a_n е нечетно. Следователно редицата е ограничена и значи има равни членове. Нека $k \geq 0$ е минималният индекс така, че $a_k = a_l$ за някое $l > k$. Трябва да покажем, че $k = 0$. Да допуснем противното. Ако $a_k \leq m$, то $a_k = \frac{a_{k-1}}{2}$ и $a_l = \frac{a_{l-1}}{2}$, откъдето $a_{k-1} = a_{l-1}$. Ако пък $a_k > m$, то от $a_{k-1} \leq 2m$ следва, че $a_k = a_{k-1} + m$ и $a_l = a_{l-1} + m$, и отново $a_{k-1} = a_{l-1}$. Това е противоречие с избора на k .

Нека сега a не е измежду числата $1, 2, \dots, m, m+1, m+3, \dots, 2m-2, 2m$ и нека a_j е възможно най-малко. Очевидно a_j е нечетно число, защото иначе $a_{j+1} = \frac{a_j}{2} < a_j$. Тогава $a_j \leq a_{j+2} = \frac{a_j + m}{2}$, откъдето $a_j \leq m$. Сега от (*) следва, че $a_n \neq a$ при $n \geq j$ и значи редицата не е периодична.

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

	Условия	Решения
1. Балканска олимпиада по математика	3	28
2. Балканска олимпиада по математика	4	30
3. Балканска олимпиада по математика	5	32
4. Балканска олимпиада по математика	6	34
5. Балканска олимпиада по математика	7	36
6. Балканска олимпиада по математика	8	39
7. Балканска олимпиада по математика	9	42
8. Балканска олимпиада по математика	10	43
9. Балканска олимпиада по математика	11	45
10. Балканска олимпиада по математика	12	47
11. Балканска олимпиада по математика	13	49
12. Балканска олимпиада по математика	14	52
13. Балканска олимпиада по математика	15	54
14. Балканска олимпиада по математика	16	56
15. Балканска олимпиада по математика	17	57
16. Балканска олимпиада по математика	18	59
17. Балканска олимпиада по математика	19	60
18. Балканска олимпиада по математика	20	62
19. Балканска олимпиада по математика	21	64
20. Балканска олимпиада по математика	22	66
21. Балканска олимпиада по математика	23	68
22. Балканска олимпиада по математика	24	69
23. Балканска олимпиада по математика	25	71