

Български математически състезания, 2003 г.

Зимни математически състезания

Варна, 8 февруари 2003 г.

Задача 9.1. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$). Нека k е окръжност с център C и радиус по-малък от височината CH , $H \in AB$ на $\triangle ABC$. През точките A и B са прекарани допирателни към k така, че точките на допиране P и Q , се намират в една полуравнина относно правата CH . Да се докаже, че точките P , Q и H лежат на една права.

Олег Мушкаргов

Задача 9.2. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението

$$\frac{2a}{(x+1)^2} + \frac{a+1}{x+1} - \frac{2(a+1)x - (a+3)}{2x^2 - x - 1} = 0$$

има два реални корена x_1 и x_2 такива, че $x_2^2 - ax_1 = a^2 - a - 1$.

Иван Ланджесев

Задача 9.3. Да се намери броят на естествените числа a , които са по-малки от 2003 и за които съществува естествено число n така, че 3^{2003} дели $n^3 + a$.

Емил Колев, Николай Николов

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $\sqrt{ax^2 + ax + 2} = ax + 2$ има единствен корен.

Александър Иванов, Емил Колев

Задача 10.2. Дадени са окръжностите k_1 и k_2 с центрове O_1 и O_2 и радиуси R_1 и R_2 , като $R_1 = 4$, $R_2 = 16$ и $O_1O_2 = 25$. Окръжност k се допира до k_1 в точка A и до k_2 в точка B , като k_1 е вътрешна за k , а k_2 е външна за k .

а) Да се докаже, че отсечката AB минава през постоянна точка, независеща от k .

б) Ако P и Q са пресечните точки съответно на k_1 и k_2 с O_1O_2 , като O_1 е между P и Q , а Q е между O_1 и O_2 , да се докаже, че точките P , A , Q и B лежат на една окръжност.

в) Да се намери минималната възможна стойност на AB , когато окръжността k се мени.

Стоян Атанасов, Емил Колев

Задача 10.3. Нека A е множеството от всички редици от 0 и 1 с дължина 4. Две такива редици ще наричаме *съседни*, ако съвпадат или ако се различават в точно един член. Нека M е подмножество на A със свойството: За всеки два елемента a и b на A съществува елемент на M , който е съседен на a , но не е съседен на b или е съседен на b , но не е съседен на a . Колко най-малко елемента може да има множеството M ?

Иван Ланджесев, Емил Колев

Задача 11.1. Нека $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2a_n}$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:
а) $n \leq a_n^2 < n + \sqrt[3]{n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{n}) = 0$.

Николай Николов

Задача 11.2. Нека M е вътрешна точка за $\triangle ABC$. Правите AM , BM и CM пресичат страните BC , CA и AB съответно в точки A_1 , B_1 и C_1 така, че $S_{CB_1M} = 2S_{AC_1M}$. Да се докаже, че A_1 е среда на BC тогава и само тогава, когато $S_{BA_1M} = 3S_{AC_1M}$.

Олег Мушкарров

Задача 11.3. Александър попълва с естествено число някой от коефициентите на уравнение от четвърта степен, след това Елица попълва също с естествено число друг от коефициентите и т.н., докато бъдат попълнени и петте коефициента. Александър печели, ако полученото уравнение има целочислен корен, а в противен случай печели Елица. Да се обоснове кой от двамата има печеливша стратегия.

Николай Николов

Задача 12.1. Нека $f(x) = 4x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 2003x - 2003^2$.

а) Да се докаже, че локалните екстремуми на $f'(x)$ са положителни числа.

б) Да се докаже, че уравнението $f(x) = 0$ има точно два реални корена и да се намерят тези корени.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 12.2. Върху страните AB , BC и CA на $\triangle ABC$ са взети съответно точки M , N и P . Правата през M и успоредна на BC , правата през N и успоредна на AC , както и правата през P и успоредна на AB , се пресичат в една точка T . Да се докаже, че:

а) ако $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$, то T съвпада с медицентъра на $\triangle ABC$;

б) $S_{MNP} \leq \frac{1}{3}S_{ABC}$.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 12.3. В компания от n човека съществуват трима познати, всеки от които се познава с повече от половината членове на компанията. Колко най-малко тройки познати има в тази компания?

Николай Хаджигиванов

Пролетен математически турнир

Казанлък, 29 март 2003 г.

Задача 8.1. Може ли във върховете на правилен осмоъгълник да се разположат числата 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (всяко точно по веднъж), така че сборът на числата, записани върху всеки три последователни върха на осмоъгълника, да е

а) по-голям от 13; б) по-голям от 11; в) по-голям от 12?

Иван Тонов

Задача 8.2. В триъгълника ABC точките A_1 , B_1 и C_1 са средите на страните BC , CA и AB съответно и M е медицентърът. Правата през A_1 , успоредна на BB_1 , пресича правата B_1C_1 в точка D . Да се докаже, че ако точките A_1 , B_1 , M , C_1 лежат на една окръжност, то $\angle ADA_1 = \angle CAB$.

Чавдар Лозанов

Задача 8.3. Да се намери най-малкото цяло положително число m , за което 2^{2000} дели $2003^m - 1$.

Иван Тонов

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които системата

$$\begin{cases} \frac{ax+y}{y+1} + \frac{ay+x}{x+1} = a \\ ax^2 + ay^2 = (a-2)xy - x \end{cases}$$

има единствено решение.

Петър Бойваленов

Задача 9.2. Даден е успоредник $ABCD$ с остър ъгъл при върха A . Точките E и F са петите на перпендикулярите от C съответно към правите AB и AD . Окръжност минава през точки D и F и допира диагонала AC в точка Q , а друга окръжност минава през B и E и допира QC в средата ѝ P . Ако $AQ = 1$, да се намери дължината на AC .

Ивайло Кортезов

Задача 9.3. Ламята Спаска има една глава. Родословието ѝ се състои от нея самата, родителите ѝ, техните родители и т.н. Ако една ламя има n глави, то майка ѝ е ламя с $3n$ глави, а баща ѝ е ламя с $3n + 1$ глави. Ще наричаме едно естествено число "змейско ако може да се представи по единствен начин като сбор от броя на главите на две различни лами от родословието. Да се докаже, че числото 2003 е змейско и да се определи колко са змейските числа, по-малки от 2003.

Ивайло Кортезов

Задача 10.1. Нека $f(x) = x^4 - ax^3 + (a+1)x^2 - 2x + 1$, където a е реален параметър.

а) Да се намери множеството от стойности на израза $\frac{x^2}{x-1}$ за всички допустими реални стойности на x .

б) Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които уравнението $f(x) = 0$ няма реални корени.

Александър Иванов

Задача 10.2. Три непресичащи се окръжности $k_i(O_i, r_i), i = 1, 2, 3, r_1 < r_2 < r_3$ се допират вътрешно да раменете на даден ъгъл. Едното рамо на ъгъла допира k_1 и k_3 съответно в точките A и B , а другото рамо на ъгъла допира k_2 в точка C . Пресечните точки на AC с k_1 и k_2 са означени съответно с K и L , а пресечните точки на BC с k_2 и k_3 са съответно M и N . Правите през C , минаващи през $P = AM \cap BK$, $Q = AM \cap BL$, $R = AN \cap BK$ и $S = AN \cap BL$ пресичат AB съответно в точките X, Y, Z и T . Докажете, че $XZ = YT$.

Емил Колев

Задача 10.3. Дадени са n еднакви топки, три от които са радиоактивни. Разполагаме с уред, който определя наличието на радиоактивност. При това с едно измерване на произволно множество от топки може да се определи дали в него има 0, 1 или повече от 1 радиоактивни топки. Ако с $L(n)$ означим минималния брой измервания, необходими за намирането на трите радиоактивни топки:

а) да се намери $L(6)$;

б) да се докаже, че $L(n) \leq \left\lceil \frac{n+5}{2} \right\rceil$.

($[x]$ означава най-голямото цяло число, ненадминаващо x .)

Емил Колев

Задача 11.1. Нека $a \geq 2$ е реално число, x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - ax + 1 = 0$ и $S_n = x_1^n + x_2^n, n = 1, 2, \dots$

а) Да се докаже, че редицата $\left\{ \frac{S_n}{S_{n+1}} \right\}$ е монотонно намаляваща.

б) За кои стойности на a неравенството

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_3} + \dots + \frac{S_n}{S_{n+1}} > n - 1$$

е изпълнено за всяко $n = 1, 2, \dots$

Олег Мушкаргов

Задача 11.2. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с радиус r , която се допира до страните AB , BC и CA съответно в точките C_1 , A_1 и B_1 . Ако правите BC и B_1C_1 се пресичат в точка N и $AA_1 = 2A_1N = 2r\sqrt{3}$, да се намери $\sphericalangle ANC$.

Сава Гроздев, Сетлозар Дойчев

Задача 11.3. Да се намерят всички естествени числа n , за които в равнината съществуват n точки, всяка от които лежи на точно $\frac{1}{3}$ от правите, определени от тези точки.

Александър Иванов, Емил Колев

Задача 12.1. Дадени са функциите $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x + \cos^2 x}$ и $g(x) = k \operatorname{tg} x + (1 - k) \sin x - x$, където k е реален параметър.

а) Да се докаже, че $g'(x) = \frac{(1 - \cos x)(k - f(x))}{f(x)}$.

б) Да се намери множеството от стойностите на $f(x)$, когато $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

в) Да се намерят стойностите на k , за които неравенството $g(x) \geq 0$ е изпълнено за всяко $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Сава Гроздев, Сетлозар Дойчев

Задача 12.2. Нека M е медицентърът на $\triangle ABC$. Да се докаже, че ако $\sphericalangle AMB = 2\sphericalangle ACB$, то:

а) $AB^4 = AC^4 + BC^4 - AC^2 \cdot BC^2$; б) $\sphericalangle ACB \geq 60^\circ$.

Николай Николов

Задача 12.3. Нека $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Да се намерят всички $a > 0$, за които съществува функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ със следните две свойства:

а) $f(x) = ax + 1 - a$ за всяко $x \in [2, 3)$;

б) $f(f(x)) = 3 - 2x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Олег Мушкаргов, Николай Николов

52. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 19–20 април 2003 г.

Задача 1. Правоъгълен трапец с лице 10 и височина 4 е разделен с права, успоредна на основите му, на два трапеца, в които могат да се впишат окръжности. Да се намерят радиусите на тези окръжности.

Олег Мушкаргов

Задача 2. Дадено е естествено число n . Яна пише n различни естествени числа, а след това Иво изтрива няколко от тях (възможно нула, но не всички) и пред всяко от останалите числа поставя $+$ или $-$. Иво печели, ако полученият резултат се дели на 2003, а в противен случай печели Яна. Да се обоснове кой от двамата има печеливша стратегия.

Ивайло Кортезов

Задача 3. Да се намерят всички реални числа a такива, че $4[an] = n + [a[an]]$ за всяко естествено число n ($[x]$ означава най-голямото цяло число, ненадминаващо x).

Николай Николов

Задача 4. Точка D върху страната AC на $\triangle ABC$ е такава, че $BD = CD$. През точка E от страната BC е прекарана права, успоредна на BD , която пресича правата AB в точка F . Ако $G = AE \cap BD$, да се докаже, че $\sphericalangle BCG = \sphericalangle BCF$.

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 5. Да се намери броят на реалните решения на системата

$$\begin{cases} x + y + z = 3xy \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xz \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3yz. \end{cases}$$

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 6. Едно множество C от различни естествени числа ще наричаме "добро ако за всяко цяло число k съществуват $a, b \in C$, $a \neq b$, такива, че числата $a + k$ и $b + k$ не са взаимно прости. Да се докаже, ако сумата от елементите на C е равна на 2003, то за някое $c \in C$ множеството $C \setminus \{c\}$ също е "добро".

Александър Иванов, Емил Колев

Контролно за определяне на отбора за 20. БОМ
Казанлък, 30 март 2003 г.

Задача 1. Върху бедрото AC на равнобедрен триъгълник ABC с основа AB е избрана точка D , а върху отсечката BD е избрана точка E така, че $BD = 2AD = 4BE$. Да се докаже, че $\angle EDC = 2\angle CED$.

Средиземноморско математическо състезание

Задача 2. Да се докаже, че ако a , b и c са неотрицателни числа със сума 3, то

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{2}.$$

Средиземноморско математическо състезание

Задача 3. Във всяка точка от равнината с целочислени координати е записано по едно реално число от интервала $(0; 1)$. Известно е, че числото, записано в дадена точка, е средно аритметично на числата, записани в четирите най-близки точки. Да се докаже, че всички числа са равни.

Средиземноморско математическо състезание

Задача 4. За всяко естествено число n означаваме

$$A_n = \{j : 1 \leq j \leq n, \text{НОД}(j, n) = 1\}.$$

Да се намерят всички n , за които полиномът

$$P_n(x) = \sum_{j \in A_n} x^{j-1}$$

може да се представи като произведение на два неконстантни полинома с цели коефициенти.

Amer. Math. Monthly

Контролно за определяне на отбора за 44. МОМ
София, 29–30 май 2003 г.

Задача 1. От остроъгълен $\triangle ABC$ да се изрежат 2003 правоъгълника, всеки от които има страна, успоредна на AB , и сумата от лицата им е максимална.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такива, че

$$f(x^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x))^2$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Някои от върховете на изпъкнал n -ъгълник са съединени с отсечки, всеки две от които нямат обща вътрешна точка. Да се докаже, че за произволни n точки, никои три от които не лежат на една права, съществува взаимно еднозначно съответствие между върховете на n -ъгълника и тези точки така, че всеки две отсечки, съответстващи на прекарани отсечки между върховете на n -ъгълника, нямат обща вътрешна точка.

Задача 4. Вярно ли е, че за всяка пермутация $a_1, a_2, \dots, a_{2002}$ на числата $1, 2, \dots, 2002$ съществуват естествени числа m и n с еднаква четност, за които $1 \leq m < n \leq 2002$ и $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$.

Задача 5. Четириъгълник $ABCD$ е описан около окръжност с център O . Ако P е проекцията на O върху диагонала AC , да се докаже, че $\sphericalangle APB = \sphericalangle APD$.

Задача 6. Да се докаже, че не съществуват естествени числа m и n , за които

$$m(m+1)(m+2)(m+3) = n(n+1)^2(n+2)^3(n+3)^4.$$

20. Балканска олимпиада по математика

Тирана, 4 май 2003 г.

Задача 1. Съществува ли множество от 4004 естествени числа такова, че сумата на кои да са 2003 негови елемента не се дели на 2003?

Македония

Задача 2. Даден е триъгълник ABC с $|AB| \neq |AC|$. Допирателната към описаната за триъгълника окръжност през т. A пресича правата BC в т. D . Точките E и F съответно върху симетралите на страните AB и AC са такива, че BE и CF са перпендикулярни на BC . Да се докаже, че точките D , E и F лежат на една права.

Румъния

Задача 3. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ такива, че:

- (i) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$ за всички $x, y \in \mathbb{Q}$;
- (ii) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$ за всяко $x \in \mathbb{Q}$;
- (iii) $f(1) > -1$.

Кипър

Задача 4. Нека m и n са взаимно прости нечетни естествени числа. Правоъгълник $ABCD$ със страни $|AB| = m$ и $|AD| = n$ е разделен на mn единични квадратчета. С $A_1, A_2, \dots, A_k$ са означени последователните пресечни точки на диагонала AC със страните на единичните квадратчета ($A_1 = A$, $A_k = C$). Да се докаже, че

$$\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} |A_i A_{i+1}| = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{mn}.$$

*България**

*Задачата е предложена от Емил Колев и Николай Николов.

44. Международна олимпиада по математика

Токио, 11–12 юли 2003 г.

Задача 1. Нека A е подмножество на множеството $S = \{1, 2, \dots, 10^6\}$, което има точно 101 елемента. Да се докаже, че съществуват числа $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ от S , за които всеки две от множествата $A_j = \{x + t_j | x \in A\}$, $j = 1, 2, \dots, 100$, не се пресичат.

Бразилия

Задача 2. Намерете всички двойки (a, b) от естествени числа, за които $\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ е естествено число.

България*

Задача 3. Даден е изпъкнал шестоъгълник, в който всяка двойка срещуположни страни притежава свойството: отношението на разстоянието между средите на тези страни и сумата от дължините им е равно на $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Да се докаже, че всички ъгли на шестоъгълника са равни.

Полша

Задача 4. Нека $ABCD$ е вписан четириъгълник, а P , Q и R са петите на перпендикулярите от точка D съответно към правите BC , CA и AB . Да се докаже, че $PQ = QR$ тогава и само тогава, когато ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle ADC$ се пресичат върху AC .

Финландия

Задача 5. Нека n е естествено число и $x_1, x_2, \dots, x_n$ са реални числа, за които $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$.

а) Да се докаже неравенството

$$\left(\sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i,j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

б) Да се докаже, че равенство се достига тогава и само тогава, когато $x_1, x_2, \dots, x_n$ образуват аритметична прогресия.

Ирландия

*Задачата е предложена от Александър Иванов.

Задача 6. Нека p е просто число. Да се докаже, че съществува просто число q , такова, че за всяко цяло n числото $n^p - p$ не се дели на q .

Франция

Зимни математически състезания

Русе, 31 януари 2004 г.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които уравнението $(a^2 - a - 9)x^2 - 6x - a = 0$ има два различни положителни корена.

Иван Ланджесев

Задача 9.2. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е описан около окръжност с център точката I . Диагоналите AC и BD се пресичат в точката E . Да се докаже, че ако средите на отсечките AD , BC и IE лежат на една права, то $AB = CD$.

Стоян Атанасов

Задача 9.3. Да се намери минималният брой цветове, с които могат да бъдат оцветени естествените числа от 1 до 2004 така, че да не съществува тройка различни едноцветни числа a, b, c , за които a дели b и b дели c .

Александър Иванов

Задача 10.1. Нека $f(x) = x^4 - x^3 + 8ax^2 - ax + a^2$ и $g(y) = y^2 - y + 6a$.

а) Да се докаже, че $f(x) = (x^2 - y_1x + a)(x^2 - y_2x + a)$, където y_1 и y_2 са корените на уравнението $g(y) = 0$.

б) Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $f(x) = 0$ има четири реални различни положителни корена.

Керопе Чакърян

Задача 10.2. Даден е вписан петоъгълник $ABCDE$, в който $AC \parallel DE$ и точка M е среда на BD . Да се докаже, че ако $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC$, то BE разполовява AC .

Петър Бойваленков

Задача 10.3. Да се намери най-голямото естествено число n , за което съществува множество $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ от естествени числа със следните свойства:

- (1) числата a_i са съставни;
- (2) всеки две от тези числа са взаимно прости;
- (3) $1 < a_i \leq (3n + 1)^2$ за $i = 1, \dots, n$.

Иван Ланджесев

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за

които уравнението

$$4^x - (a^2 + 3a - 2)2^x + 3a^3 - 2a^2 = 0$$

има единствено решение.

Александър Иванов, Емил Колев

Задача 11.2. Точка M от страната AB на $\triangle ABC$ е такава, че радиусите на вписаните окръжности в $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ са равни. Центровете на двете окръжности са означени съответно с O_1 и O_2 , а допирните им точки със страната AB са съответно P и Q . Известно е, че $\frac{S_{ABC}}{S_{PQO_2O_1}} = 6$.

а) Да се докаже, че $10CM + 5AB = 7(AC + BC)$.

б) Да се намери отношението $\frac{AC + BC}{AB}$.

Емил Колев

Задача 11.3. Нека $a > 1$ е фиксирано естествено число. Редицата $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ е зададена с равенствата $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $a_{n+2} = a \cdot a_{n+1} - a_n$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че съществуват безбройно много прости числа, всяко от които дели поне един член на дадената редица.

Александър Иванов

Задача 12.1. Нека $a_1 > 0$ и $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{a_n}$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) $a_n \geq n$ при $n \geq 2$;

б) редицата с общ член $\frac{a_n}{n}$ е сходяща и да се намери нейната граница.

Олег Мушкарров, Николай Николов

Задача 12.2. За $\triangle ABC$ с ортоцентър H са в сила равенствата $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 7$ и $AH \cdot BH \cdot CH = 3$. Да се намерят:

а) радиуса на описаната окръжност около $\triangle ABC$;

б) страните на $\triangle ABC$ с максимално лице.

Олег Мушкарров, Николай Николов

Задача 12.3. Да се докаже, че за всяко естествено число $a \geq 4$ съществуват безбройно много естествени числа n , които делят $a^n - 1$, но не се делят на квадрат на просто число.

Олег Мушкарров, Николай Николов

Пролетен математически турнир "Атанас Радев"
Ямбол, 27 март 2004 г.

Задача 8.1. Ъглополовящите на ъглите при върховете A, B и C на $\triangle ABC$ пресичат описаната около триъгълника окръжност съответно в точки A_1, B_1 и C_1 . Означаваме $AA_1 \cap CC_1 = I$, $AA_1 \cap BC = N$ и $BB_1 \cap A_1C_1 = P$. Нека O е центърът на описаната около $\triangle IPC_1$ окръжност и $OP \cap BC = M$. Ако $BM = MN$ и $\sphericalangle BAC = 2 \sphericalangle ABC$, да се намерят ъглите на $\triangle ABC$.

Чавдар Лозанов

Задача 8.2. В турнира по волейбол за Евро-африканската купа участващите отбори от Европа били с 9 повече от тези от Африка и спечелили 9 пъти повече точки от африканските (всеки отбор играл срещу всеки веднъж, като за победа се давала 1 точка, а за загуба - 0 точки). Колко най-много точки може да е спечелил най-добрият африкански отбор?

Иван Тонов

Задача 8.3. Във всяка от клетките на таблица с размери $n \times n$ е написано едно от числата $-1, 0$ и 1 . Възможно ли е сборовете на написаните числа по редове и стълбове да бъдат две по две различни $2n$ на брой числа, ако:
а) $n = 4$; б) $n = 5$?

Иван Тонов

Задача 9.1. Дадена е системата

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a, \end{cases}$$

където a е реален параметър.

а) Да се реши системата при $a = 0$.

б) Да се намерят стойностите на a , за които системата има точно две решения.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.2. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, а M е средата на страната AB . Ако $CI = MI$, да се намери възможно най-малката мярка на $\sphericalangle CIM$.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.3. (за наградата на СМБ) Да се намерят всички нечетни прости числа p , които делят числото $1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + 2004^{p-1}$.

Кероне Чакърян

Задача 10.1. Нека $f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a , за които:

а) уравнението $f(x) = 0$ има реални корени x_1 и x_2 (не непременно различни) такива, че $|x_1^3 - x_2^3| \leq 4$;

б) неравенството $f(x) \geq 0$ е изпълнено за всяко цяло число x .

Петър Бойваленков

Задача 10.2. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. С I и J са означени съответно центровете на вписаните в $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ окръжности. Да се докаже, че $ABCD$ е описан около окръжност четириъгълник тогава и само тогава, когато точките A , I , J и C лежат на една права или на една окръжност.

Стоян Атанасов

Задача 10.3. Вж. Задача 9.3.

Задача 11.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$\log_{4ax}(x - 3a) + \frac{1}{2} \log_{x-3a} 4ax = \frac{3}{2}$$

има точно две различни решения.

Емил Колев

Задача 11.2. В остроъгълен $\triangle ABC$ точките A_1 , B_1 и C_1 са петите на височините съответно от върховете A , B и C . Ако O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, а H_1 е ортоцентърът на $\triangle A_1B_1C_1$, да се докаже, че средата на отсечката OH_1 съвпада с центъра на вписаната окръжност на триъгълника с върхове средите на страните на $\triangle A_1B_1C_1$.

Александър Иванов

Задача 11.3. (за наградата на Атанас Радев) Нека k е естествено число, $1 < k < 100$. За произволна пермутация $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ на естествените числа от 1 до 100 полагаме $a_{101} = 0$ и избираме минималното $m > k$, за което a_m е по-малко от поне $k - 1$ от числата $a_1, a_2, \dots, a_k$. Да се намерят всички k такива, че броят на пермутациите, за които $a_m = 1$, е равен на $\frac{100!}{4}$.

Петър Бойваленков, Емил Колев, Николай Николов

Задача 12.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които графиките на функциите $x^2 - 2ax$ и $-x^2 - 1$ имат две общи допирателни и периметърът на четириъгълника с върхове допирните точки е равен на 6.

Олег Мушкарров, Николай Николов

Задача 12.2. Вписаната окръжност в $\triangle ABC$ се допира до AC и BC , $AC \neq BC$, в точки P и Q , а външновписаните окръжности към AC и BC се допират до AB в точки M и N . Ако M , N , P и Q лежат на една окръжност, да се намери $\sphericalangle ACB$.

Олег Мушкарров, Николай Николов

Задача 12.3. Вж. Задача 11.3.

53. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 17–18 април 2004 г.

Задача 9.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$\sqrt{(4a^2 - 4a - 1)x^2 - 2ax + 1} = 1 - ax - x^2$$

има точно две решения.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.2. Върху бедрата AC и BC на равнобедрения $\triangle ABC$ са взети съответно точки A_1 и B_1 така, че $4AA_1 \cdot BB_1 = AB^2$. Да се докаже, че ъглополовящите на $\angle AA_1B_1$ и $\angle BB_1A_1$ се пресичат върху правата AB .

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.3. Да се докаже, че

$$\frac{9}{10} \leq \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} < 1,$$

където a , b и c са положителни числа така, че $a + b + c = 1$.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.4. Да се реши в цели числа уравнението

$$x^3 + 10x - 1 = y^3 + 6y^2.$$

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 9.5. Даден е квадрат $n \times n$ ($n \geq 2$), съставен от n^2 единични квадратчета, всяко от които е оцветено в бяло или черно така, че за всеки правоъгълник (от най-малко четири квадратчета) в квадрата поне две от единичните квадратчета в четирите му ъгъла са разноцветни. Да се намери възможно най-голямата стойност на n .

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 10.1. Дадени са уравненията

$$[x]^3 + x^2 = x^3 + [x]^2 \quad \text{и} \quad [x^3] + x^2 = x^3 + [x^2],$$

където $[t]$ е най-голямото цяло число, ненадминаващо t . Да се докаже, че:

а) целите числа са единствените решения на първото уравнение;

б) съществува решение на второто уравнение, което не е цяло число.

Сава Гроздев, Светлозар Дойчев

Задача 10.1. Да се реши неравенството $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 - 3} + x\sqrt{3} > 0$.

Петър Бойваленов

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ с медицентър M .

а) Да се докаже, че $\cotg \angle AMB = \frac{BC^2 + CA^2 - 5AB^2}{12S_{ABC}}$

б) Да се докаже, че $\cotg \angle AMB + \cotg \angle BMC + \cotg \angle CMA \leq -\sqrt{3}$.

Петър Бойваленов

Задача 10.3. В едно предприятие има $m \geq 1$ мъже и $j \geq 1$ жени, $j < 2004$. Всеки пратил на всеки (освен на себе си) по една картичка. Оказало се, че всички картички, пратени от мъже, са колкото картичките, пратени от жени на жени. Намерете всички възможни стойности на j .

Ивайло Кортезов

Задача 10.4. Нека $f(x) = (a^2 + 4a + 2)x^3 + (a^3 + 4a^2 + a + 1)x^2 + (2a - a^2)x + a^2$, където a е реален параметър.

а) Да се докаже, че $f(-a) = 0$.

б) Да се намерят всички стойности на a , за които уравнението $f(x) = 0$ има три различни реални положителни корена.

Иван Ланджеев

Задача 10.5. Нека O е център на описаната окръжност за $\triangle ABC$, M е средата на страната AB , а G е медицентърът на $\triangle ACM$. Ако $OG \perp CM$, да се докаже, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Ивайло Кортезов

Задача 10.6. Даден е граф G с 10 върха и 26 ребра. Да се докаже, че G съдържа поне 4 триъгълника.

Иван Ланджеев

Задача 11.1. За кои стойности на $x \in (-\pi, \pi)$ числата $2^{\sin x}$, $2 - 2^{\sin x + \cos x}$ и $2^{\cos x}$ са последователни членове на геометрична прогресия?

Емил Колев

Задача 11.2. Допирателните към описаната около остроъгълния триъгълник ABC окръжност, построени в точките A и B , се пресичат в точка D . Ако M е среда на AB , докажете, че $\angle ACM = \angle BCD$.

Емил Колев

Задача 11.3. Нека $N = mn - n + 1$, където $m \geq 3$ и $n \geq 2$ са естествени числа. Да се докаже, че ако в група от N човека измежду всеки m има двама, които се познават, то съществува човек, който познава поне n от останалите членове на групата. Вярно ли е твърдението при $N < mn - n + 1$?

Александър Иванов

Задача 11.4. Даден е триъгълник ABC . Точките D и E са от симетралите съответно на страните AB и BC , като D е вътрешна за триъгълника ABC , а E – външна и $\angle ADB = \angle CEB$. Ако AE пресича отсечката CD в точка O докажете, че триъгълникът ACO и четириъгълникът $DBEO$ имат равни лица.

Емил Колев

Задача 11.5. Нека a , b и c са естествени числа, поне едно от които е взаимнопросто с останалите две. Да се докаже, че съществуват естествени числа x , y и z , за които $x^a = y^b + z^c$.

Александър Иванов

Задача 11.6. Във вътрешността на триъгълник ABC с лице равно на 1 е избрана произволна точка, която е съединена с върховете му. След това в един от получените три триъгълника отново е избрана произволна точка и е съединена с върховете му. На всяка стъпка се избира произволна точка от вътрешността на някои от получените до момента триъгълници и тя се свързва с върховете на този триъгълник. Да означим с n броя на избраните точки.

- а) Да се докаже, че триъгълникът ABC е разделен на $2n+1$ триъгълника.
- б) За всеки два триъгълника от разделянето с обща страна е пресметната сумата от лицата им. Да се докаже, че максималната от тези суми е не по-малка от $\frac{2}{2n+1}$.

Александър Иванов

Задача 12.1. Да се намерят всички цели числа a , b и c , за които

$$2^a + 8b^2 - 3^c = 283.$$

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.2. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които най-голямата стойност на функцията $f(x) = \frac{ax - 1}{x^4 - x^2 + 1}$ е равна на 1.

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.3. Равнина разполовява обема на триъгълна пирамида $ABCD$ и пресича ръбовете AB и CD в точки M и N така, че $\frac{AM}{BM} = \frac{CN}{DN} \neq 1$. Да се докаже, че равнината минава през средите на ръбовете AC и BD .

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.4. Нека E е пресечната точка на диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$. Ако $AC = BC$, $AD = 5$, $BE = 12$ и $DE = 3$, да се намери $\sphericalangle BCD$.

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.5. Множество A от естествени числа, по-малки от 2 000 000, ще наричаме "добро ако $2000 \in A$ и a дели b за всеки $a, b \in A$, $a < b$.

- а) Колко най-много елемента може да има едно "добро" множество?
- б) Да се намери броят на "добрите" множества с максимален брой елементи.

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.6. Да се намерят всички неконстантни полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ с реални коефициенти такива, че

$$P(x)Q(x+1) = P(x+2004)Q(x)$$

за произволно реално число x .

Олег Мушкаргов, Николай Николов

53. Национална олимпиада по математика

Национален кръг, София, 15–16 май 2004 г.

Задача 1. Нека I е центърът на вписаната в триъгълник ABC окръжност и A_1, B_1, C_1 са точки съответно върху отсечките AI, BI и CI . Симетралите на отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в точки A_2, B_2 и C_2 . Да се докаже, че центърът на описаната около триъгълник $A_2B_2C_2$ окръжност съвпада с центъра на описаната около триъгълник ABC окръжност тогава и само тогава, когато I е ортоцентър на триъгълник $A_1B_1C_1$.

Олег Мушкарров, Николай Николов

Задача 2. За всяко естествено число n сумата $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ е представена като несъкратима дроб $\frac{p_n}{q_n}$.

- а) Да се докаже, че 3 не дели p_{67} .
- б) Да се намерят всички n , за които 3 дели p_n .

Николай Николов

Задача 3. Туристическа група се състои от n човека. Измежду всеки трима има двама, които не се познават. Известно е, че групата не може да бъде разпределена в два автобуса така, че всеки да пътува само с непознати. Да се докаже, че в групата има турист с не повече от $\frac{2}{5}n$ познати.

Иван Ланджеев

Задача 4. Във всяка дума, съставена от буквите a и b , можем да извършваме следните замени: $aba \rightarrow b, b \rightarrow aba, bba \rightarrow a, a \rightarrow bba$. Възможно ли е от думата $b \underbrace{aa \dots a}_{2003}$ да се получи думата $\underbrace{aa \dots a}_{2003} b$?

Емил Колев

Задача 5. Нека a, b, c и d са естествени числа такива, че броят на наредените двойки от числа $(x, y), x, y \in (0, 1)$, за които $ax + by$ и $cx + dy$ са едновременно цели числа, е 2004. Ако $\text{НОД}(a, c) = 6$, да се намери $\text{НОД}(b, d)$.

Олег Мушкарров, Николай Николов

Задача 6. Нека p е просто число. За произволни цели числа $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m < p$ и $0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_n < p$ да означим с k броят на различните остатъци при деление на p на числата $a_i + b_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Да се докаже, че:

- а) ако $m + n > p$, то $k = p$; б) ако $m + n \leq p$, то $k \geq m + n - 1$.

Владимир Барзов, Александр Иванов

Контролно за определяне на отбора за 21. БОМ
София, 30–31 март 2004 г.

Задача 1. Съществува ли множество $A \supset \{1, 2, \dots, 2004\}$ от естествени числа, произведението на които е равно на сумата от квадратите им?

Задача 2. Да се докаже, че ако $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ са неотрицателни числа и $c_k = \prod_{i=1}^k b_i^{\frac{1}{k}}, 1 \leq k \leq n$, то

$$nc_n + \sum_{k=1}^n k(a_k - 1)c_k \leq \sum_{k=1}^n a_k^k b_k.$$

Задача 3. Нека $A = \{1, 2, \dots, n\}, n \geq 4$. За всяка функция $f : A \rightarrow A$ и всяко $a \in A$ дефинираме $f_1(a) = f(a), f_{i+1}(a) = f(f_i(a)), i \geq 1$. Да се намери броят на функциите $f : A \rightarrow A$, за които f_{n-2} е константа, но f_{n-3} не е константа.

Задача 4. Нека $A_1 A_2 \dots A_n$ е изпъкнал многоъгълник и p_i е дължината на ортогоналната му проекция върху правата $A_i A_{i+1}, 1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} \equiv A_1$). Да се докаже, че ако $\sum_{i=1}^n \frac{|A_i A_{i+1}|}{p_i} = 4$, то многоъгълникът е правоъгълник.

Задача 5. Дадени са непропорционалните полиноми $p(x)$ и $q(x)$, всеки от които има по $m \geq 2$ ненулеви коефициента. Да се намери минималният възможен брой ненулеви коефициенти на полинома $f(u, v) = p(u)q(v) - p(v)q(u)$.

Задача 6. Върху окръжност k е избрана точка M . С център M е построена окръжност k_1 , която пресича k в точките C и D . Хордата AB от k допира окръжността k_1 в точка H . Да се докаже, че правата CD разполовява отсечката MH тогава и само тогава, когато AB е диаметър на k .

Задача 7. Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ са такива крайни множества, че

$$|A_i \cap A_{i+1}| > \frac{n-2}{n-1} |A_{i+1}|$$

за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ ($A_{n+1} \equiv A_1$). Да се докаже, че сечението на тези множества е непразно.

Задача 8. Нека a , b и n са естествени числа, $K(n)$ е броят на представянията на 1 като сума на реципрочните на n естествени числа, $L(a, b)$ е най-малкото естествено число m , за което уравнението $\sum_{i=1}^m \frac{1}{x_i} = \frac{a}{b}$ има решение в естествени числа и $L(b) = \max\{L(a, b), 1 \leq a \leq b\}$. Да се докаже, че броят на различните естествени делители на b не надминава $2L(b) + K(L(b) + 2)$.

Първо контролно за определяне на отбора за 45. МОМ
София, 27–28 май 2004 г.

Задача 1. Нека n е естествено число. Да се намерят всички естествени числа m , за които съществува полином $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$ с цели коефициенти такъв, че $\text{НОД}(a_0, a_1, \dots, a_n, m) = 1$ и $f(k)$ се дели на m за всяко цяло число k .

Задача 2. Да се намерят всички прости числа $p \geq 3$ такива, че за всяко просто число $q < p$ числото $p - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor q$ е свободно от квадрати (едно естествено число е свободно от квадрати, ако не се дели на квадрат на просто число).

Задача 3. Нека r е радиусът на вписаната окръжност на триъгълник, чийто върхове лежат във вътрешността или върху границата на единичен квадрат. Да се намери най-голямата стойност на r .

Задача 4. Колко най-много може да бъде произведението на различни естествени числа със сума 2004?

Задача 5. Нека H е ортоцентъра на триъгълник ABC . Върху описаните окръжности на $\triangle BSH$, $\triangle SAH$ и $\triangle ABH$ са избрани съответно точки A_1 , B_1 и C_1 , различни от A , B и C такива, че $A_1H = B_1H = C_1H$. Нека H_1 , H_2 и H_3 са ортоцентровете съответно на $\triangle A_1BC$, $\triangle B_1CA$ и $\triangle C_1AB$. Докажете, че $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle H_1H_2H_3$ имат един и същ ортоцентър.

Задача 6. Във всяка от клетките на таблица $n \times n$ е записано по едно число така, че всички редове са различни. Докажете, че съществува стълб, след изтриването на който, в новополучената таблица всички редове са също различни.

Второ контролно за определяне на отбора за 45. МОМ
София, 30–31 май 2004 г.

Задача 1. В четириъгълник $ABCD$ точките $P \in AC$ и $Q \in BD$ са такива, че $\frac{AP}{AC} + \frac{BQ}{BD} = 1$. Правата PQ пресича отсечките AD и BC в точки M и N . Докажете, че описаните окръжности около триъгълниците AMP , BNQ , DMQ и CNP се пресичат в една точка.

Задача 2. Ребрата на пъления граф с $2n$ върха, $n \geq 4$, са оцветени в синьо и червено така, че няма син триъгълник и няма пълен подграф с червени ребра и n върха. Колко най-малко могат да бъдат сините ребра?

Задача 3. ?

Задача 4. Да се намерят всички положителни реални числа k , за които съществува функция $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, изпълняваща следните условия:

- а) $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ за всички $x, y, z \in [0, 1]$;
- б) $f(x, y) = f(y, x)$ за всички $x, y \in [0, 1]$;
- в) $f(x, 1) = x$ за всички $x \in [0, 1]$;
- г) $f(zx, zy) = z^k f(x, y)$ за всички $x, y, z \in [0, 1]$.

Задача 5. Да се докаже, че ако $a, b, c \geq \frac{1}{3}$ и $a + b + c = 9$, то

$$\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Задача 6. Дадена е таблица с m реда и n стълба. На един ход се избират няколко празни клетки, никои две от които не лежат в един ред или стълб, поставя се по един бял пул във всяка от избраните клетки и след това във всяка клетка, в чийто ред и стълб има бял пул, се поставя по един черен пул. Играта свършва когато не са възможни повече ходове. Колко най-много бели пулове могат да се поставят?

21. Балканска олимпиада по математика
Плевен, 7 май 2004 г.

Задача 1. Редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ от реални числа изпълнява условието

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

за всеки $m \geq n \geq 0$. Ако $a_1 = 3$, намерете a_{2004} .

Кипър

Задача 2. Да се реши в прости числа уравнението $x^y - y^x = xy^2 - 19$.

Албания

Задача 3. Нека O е вътрешна точка за остроъгълен $\triangle ABC$. Окръжностите с центрове в средите на страните на триъгълника и минаващи през O се пресичат за втори път в точки K, L и M , различни от O . Да се докаже, че O е център на вписаната окръжност в $\triangle KLM$ тогава и само тогава когато O е център на описаната окръжност около $\triangle ABC$.

Румъния

Задача 4. Равнината е разделена на части чрез краен брой прави, никои три от които не минават през една точка. Две части се наричат "съседни ако сечението на границите им е отсечка, лъч или права (точките не са отсечки). Във всяка от частите трябва да се напише цяло число така, че:

(i) произведението на числата във всеки две части е по-малко от сбора им;

(ii) сборът на числата във всяка от двете полуравнини, определени от коя да е от дадените прави, е нула.

Да се докаже, че това е възможно тогава и само тогава, когато не всичките прави са успоредни.

Сърбия и Черна гора

45. Международна олимпиада по математика
Атина, 12–13 юли 2004 г.

Задача 1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC , за който $AB \neq AC$. Окръжността с диаметър BC пресича страните AB и AC съответно в точки M и N . Нека O е средата на страната BC . Тъглополовящите на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle MON$ се пресичат в точка R . Докажете, че окръжностите, описани около триъгълниците BMR и CNR , се пресичат върху страната BC .

Румъния

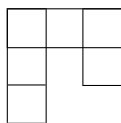
Задача 2. Намерете всички полиноми $P(x)$ с реални коефициенти, които удовлетворяват равенството

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

за произволни реални числа a, b, c , за които $ab + bc + ca = 0$.

Корея

Задача 3. Да наречем *кука* фигурата, съставена от шест единични квадратчета, както е показано на диаграмата



и всички фигури, получени от нея чрез ротации и отразявания.

Намерете всички правоъгълници $m \times n$, които могат да бъдат покрити с куки така, че:

- правоъгълникът е покрит без празнини и припокривания;
- никоя част от кука не излиза от правоъгълника.

Естония

Задача 4. Нека $n \geq 3$ е естествено число $t_1, t_2, \dots, t_n$ са положителни реални числа, за които

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right).$$

Докажете, че t_i, t_j, t_k са дължини на страни на триъгълник за всички i, j, k , за които $1 \leq i < j < k \leq n$.

Корея

Задача 5. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ диагоналът BD не разполовява $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$. Точка P от вътрешността на $ABCD$ е такава, че

$$\sphericalangle PBC = \sphericalangle DBA \text{ и } \sphericalangle PDC = \sphericalangle BDA$$

Докажете, че четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато $AP = CP$.

Полша

Задача 6. Едно естествено число се нарича *алтернативно*, ако всеки две последователни цифри в неговото десетично представяне са с различна четност.

Намерете всички естествени числа n , за които съществува алтернативно число, което се дели на n .

Иран

Български математически състезания, 2005 г.

Зимни математически състезания

Бургас, 29 януари 2005 г.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравненията

$$x^2 - (2a + 1)x + a = 0 \text{ и } x^2 + (a - 4)x + a - 1 = 0$$

имат реални корени съответно x_1, x_2 и x_3, x_4 , така, че е изпълнено равенството

$$\frac{x_1}{x_3} + \frac{x_4}{x_2} = \frac{x_1 x_4 (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{a}.$$

Петър Бойваленков

Задача 9.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Окръжност k през A и B пресича страните AC и BC съответно във вътрешни точки M и N . Допирателните към k в M и N се пресичат в точка O . Да се докаже, че O е център на описаната около $\triangle CMN$ окръжност тогава и само тогава, когато AB е диаметър на k .

Петър Бойваленков

Задача 9.3. Да се намерят всички четирицифрени естествени числа m , по-малки от 2005, за които съществува естествено число $n < m$, такова, че $m - n$ има не повече от три естествени делителя и mn е точен квадрат.

Петър Бойваленков, Ивайло Кортезов

Задача 9.4. Иво номерирал 100 картички с целите числа от 1 до 100 и дал на Яна част от тях. Известно е, че за всяка картичка на Иво и всяка картичка на Яна, сборът от числата на тях не е в Иво и произведението им не е в Яна. Колко картички има Яна, ако числото 13 не е в нея?

Ивайло Кортезов

Задача 10.1. (*Стоян Атанасов*) Дадено е неравенството

$$|x^2 - 5x + 6| \leq x + a,$$

където a е реален параметър.

а) Да се реши неравенството при $a = 0$.

б) Да се определи за кои стойности на a неравенството има точно три цели решения.

Стоян Атанасов

Задача 10.2. В $\triangle ABC$, $AC \neq BC$, с I е означен центърът на вписаната окръжност k , а с D, E, F – допирните точки на k съответно със страните AB, BC и AC .

а) Ако $S = CI \cap EF$, да се докаже, че $\triangle CDI \sim \triangle DSI$.

б) Нека M е втората пресечна точка на k и CD . Допирателната към k в M пресича правата AB в точка G . Да се докаже, че $GS \perp CI$.

Стоян Атанасов, Иван Ланджеев

Задача 10.3. Да се реши в цели числа уравнението

$$z^2 + 1 = xy(xy + 2y - 2x - 4).$$

Иван Ланджеев

Задача 10.4. Във всяка от клетките на квадратна таблица с n реда и n стълба, $n \geq 2$, е записано едно от числата $+1$ и -1 . Клетката, намираща се в i -тия ред и j -тия стълб означаваме с (i, j) , $i, j = 0, 1, \dots, n-1$. Съседни на клетката (i, j) са клетките $(i, j-1)$, $(i, j+1)$, $(i-1, j)$ и $(i+1, j)$, където събирането и изваждането са по модул n . На всяка стъпка заменяме числото, записано във всяка клетка, с произведението на числата в четирите съседни клетки. Например,

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & -1 & +1 \\ \hline +1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & +1 & -1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline +1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & +1 & +1 \\ \hline -1 & +1 & +1 \\ \hline \end{array}.$$

Да се намерят всички стойности на n , за които от произволна таблица след краен брой стъпки се достига до таблица, съставена само от $+1$.

Иван Ланджеев

Задача 11.1. Сумата от първите n члена на аритметична прогресия с първи член m и разлика 2 е равна на сумата на първите m члена на геометрична прогресия с първи член n и частно 2.

а) Да се докаже, че $m + n = 2^m$;

б) Да се намерят m и n , ако 3-ият член на геометричната прогресия е равен на 23-ия член на аритметичната прогресия.

Емил Колев

Задача 11.2. За кои стойности на реалния параметър a уравнението

$$\lg(ax + 1) = \lg(x - 1) + \lg(2 - x)$$

има само едно решение?

Александър Иванов

Задача 11.3. В остроъгълен $\triangle ABC$, $CA \neq CB$, точките A_1 и B_1 са допирните точки на външноописаните окръжности съответно със страните CB и CA , и O е центърът на вписаната окръжност. Правата CO пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка P , а правата през P , перпендикулярна на CP , пресича правата AB в точка Q . Да се докаже, че правите QO и A_1B_1 са успоредни.

Александър Иванов

Задача 11.4. В интернет турнир по шах участвали 2005 шахматисти, като всеки играл срещу всеки по една среща. Оказало се, че ако двама шахматисти A и B са завършили реми, то всеки друг шахматист е загубил или от A , или от B . Да се докаже, че ако в турнира има поне две ремита, то шахматистите могат да се наредят в редица, така че всеки е победил следващия в редицата.

Александър Иванов

Задача 12.1. Редиците $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ от реални числа изпълняват равенствата $a_{n+1} = 2b_n - a_n$ и $b_{n+1} = 2a_n - b_n$ за всяко n . Да се докаже, че:

- а) $a_{n+1} = 2(a_1 + b_1) - 3a_n$;
- б) ако $a_n > 0$ за всяко n , то $a_1 = b_1$.

Николай Николов

Задача 12.2. Окръжност през върха A на $\triangle ABC$, $AB \neq AC$, пресича страните AB и AC съответно в точки M и N , а страната BC в точки P и Q така, че Q е между B и P . Да се намери $\angle BAC$, ако $MP \parallel AC$, $NQ \parallel AB$ и $\frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{AC}$.

Олег Мушкаргов, Николай Николов

Задача 12.3. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които множеството от стойностите на функцията

$$f(x) = \frac{\sin^2 x - a}{\sin^3 x - (a^2 + 2) \sin x + 2}$$

съдържа интервала $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Николай Николов

Задача 12.4. Да се намерят всички целочислени триъгълници ABC , за които страната AC е равна на ъглополовящата през върха A и чийто периметър е число от вида $10p$, където p е просто число.

Олег Мушкарров

Пролетен математически турнир

Казанлък, 25–27 март 2005 г.

Задача 8.1. Да се реши уравнението $\left| x - \frac{5}{2} \right| - \frac{3}{2} = |x^2 - 5x + 4|$.

Иван Тонов

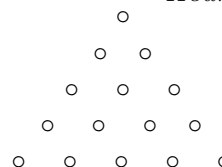
Задача 8.2. В окръжност k е вписан $\triangle ABC$ с $\angle ACB > 90^\circ$. Нека BD е диаметър на k . Окръжността k_1 с център D и радиус DC пресича k за втори път в точка E и AB в точка G . Ако F е пресечната точка на GE и BD , да се докаже, че $\angle DCG = \angle EFD$.

Чавдар Лозанов

Задача 8.3. Да се докаже, че уравнението $x^2 + 2y^2 + 98z^2 = \underbrace{77 \dots 7}_{2005}$ няма решение в множеството на целите числа.

Иван Тонов

Задача 8.4. Дадени са 15 лампички, които са подредени във формата на равностранен триъгълник, както е показано на фигурата. Първоначално всички лампички са загасени.



а) Да се докаже, че е възможно да се запалят 8 лампички така, че никои три от тях не образуват равностранен триъгълник.

б) Да се докаже, че както и да се запалят 9 лампички, някои три от тях образуват равностранен триъгълник.

Иван Тонов

Задача 9.1. Нека $f(x) = x^2 + (2a - 1)x - a - 3$, където a е реален параметър.

а) Да се докаже, че уравнението $f(x) = 0$ има два реални различни корена x_1 и x_2 .

б) Да се намерят стойностите на a , за които $x_1^3 + x_2^3 = -72$.

Петър Бойваленков

Задача 9.2. Триъгълник ABC има медицентър G и център на вписаната окръжност I . Ако $AB = 42$, $GI = 2$ и $AB \parallel GI$, да се намерят AC и BC .

Ивайло Кортезов

Задача 9.3. Четирима души A_1, A_2, A_3 и A_4 играят следната игра със седем зара: A_1 хвърля седемте зара и след това изплаща на всеки от останалите трима по $\frac{1}{k}$ част от парите, които притежава в момента съответния играч,

където k е сумата от точките на седемте зара, после същото последователно правят A_2 , A_3 и A_4 . В началото всички имали еднакво количество пари, а след като всички хвърлили заровете по веднъж, се оказало, че парите им са в отношение $3 : 3 : 2 : 2$ (парите на A_1 към парите на A_2 към парите на A_3 към парите на A_4). Да се определят сумите от точките, хвърлени от всеки играч.

Петър Бойваленков

Задача 9.4. За естествените числа M и n е известно, че M се дели на всички естествени числа от 1 до n , но не се дели на $n + 1$, $n + 2$ и $n + 3$. Да се намерят всички възможни стойности на n .

Ивайло Кортезов

Задача 10.1. Да се реши уравнението

$$(x + 6)5^{1-|x-1|} - x = (x + 1)|5^x - 1| + 5^{x+1} + 1.$$

Иван Ланджесев

Задача 10.2. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които неравенството $\sqrt{4 + 3x} \geq x + a$ няма целочислени решения.

Стоян Атанасов

Задача 10.3. В $\triangle ABC$ е спусната височината CH към страната AB , като точка H е вътрешна за AB . С P и Q са означени центровете на окръжностите, вписани съответно в $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$. Да се докаже, че четириъгълникът $ABQP$ е вписан тогава и само тогава, когато $AC = BC$ или $\angle ACB = 90^\circ$.

Стоян Атанасов

Задача 10.4. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват цели числа p и q , за които е изпълнено $|p^2 + 2q^2 - n| \leq \sqrt[4]{9n}$.

Иван Ланджесев

Задача 11.1. Дадена е редицата $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, за която $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = a_n + 4n + 3$.

а) Да се намери общият член на редицата.

б) Да се пресметне границата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{4n}} + \sqrt{a_{4^2n}} + \dots + \sqrt{a_{4^{10}n}}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{2n}} + \sqrt{a_{2^2n}} + \dots + \sqrt{a_{2^{10}n}}}.$$

Емил Колев

Задача 11.2. Да се реши неравенството $\log_a(x^2 - x - 2) > \log_a(3 + 2x - x^2)$, ако е известно, че то е изпълнено за $x = a + 1$.

Емил Колев

Задача 11.3. Върху страната AB на $\triangle ABC$ са избрани точки M и N , като M е между A и N . Правата през M , успоредна на AC , пресича описаната около $\triangle MNC$ окръжност в точка P , а правата през M , успоредна на NC , пресича описаната около $\triangle AMC$ окръжност в точка Q . Аналогично, правата през N , успоредна на BC , пресича описаната около $\triangle MNC$ окръжност в точка K и правата през N , успоредна на MC , пресича описаната около $\triangle BNC$ окръжност в точка L .

а) Да се докаже, че точките P , Q и C лежат на една права.

б) Да се докаже, че точките P , Q , K и L лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато $AM = BN$.

Александър Иванов

Задача 11.4. Нека s е фиксирано естествено число и редицата от естествени числа $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има следното свойство: $a_n < a_{n+1} < a_n + s$ за всяко $n \geq 1$. Членовете на редицата са записани последователно един след друг и по този начин е получена една безкрайна редица от цифри. Да се докаже, че за всяко естествено число m съществува k , такова че числото образувано от първите k цифри на получената редица се дели на m .

Александър Иванов

Задача 12.1. Даден е $\triangle ABC$, за който $AC = BC = 1$ и $AB = 2x$.

а) Да се изрази като функция на x радиуса r на вписаната в триъгълника окръжност.

б) Да се намери най-голямата стойност на r .

Олег Мушкаргов

Задача 12.2. Даден е $\triangle ABC$, за който външновписаната към страната AB окръжност се допира до окръжността с диаметър BC . Да се намери $\angle ACB$, ако страните BC , CA и AB образуват в този ред аритметична прогресия.

Олег Мушкаргов

Задача 12.3. Да се намери броят на редиците $a_1, \dots, a_n, \dots$ от цели числа такива, че $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 2005$ за произволно n .

Николай Николов

Задача 12.4. Нека $a, b_1, c_1, \dots, b_n, c_n$ са такива реални числа, че

$$x^{2n} + ax^{2n-1} + ax^{2n-2} + \dots + ax + 1 = (x^2 + b_1x + c_1) \dots (x^2 + b_nx + c_n)$$

за всяко реално число x . Да се докаже, че $c_1 = \dots = c_n = 1$.

Николай Николов

54. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 16–17 април 2005 г.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b , за които остатъкът при делението на полинома $x^4 - 3ax^3 + ax + b$ на полинома $x^2 - 1$ е полиномът $(a^2 + 1)x + 3b^2$.

Петър Бойваленков

Задача 9.2. Във вътрешността на даден ъгъл са построени две окръжности с центрове O_1 и O_2 . Окръжностите се допират до раменете на ъгъла и помежду си. Да се докаже, че ако трета окръжност с център върху отсечката O_1O_2 се допира до раменете на ъгъла и минава през една от точките O_1 и O_2 , то тя минава и през другата точка.

Петър Бойваленков

Задача 9.3. Нека a и b са цели числа и k е естествено число. Да се докаже, че ако уравнението $a^kx - b^ky = a - b$ има за решение двойка (x, y) от последователни цели числа, то $|a - b|$ е точна k -та степен.

Петър Бойваленков

Задача 9.4. Да се намерят всички стойности на реалния параметър p , за които уравнението $|x^2 - px - 2p + 1| = p - 1$ има четири реални корена x_1, x_2, x_3, x_4 , за които $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20$.

Ивайло Кортезов

Задача 9.5. Четириъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност k . Лъчите DA и CB се пресичат в точка N , а NT е допирателна към k . Диагоналите AC и BD се пресичат в точка P , която е медицентър на $\triangle NTD$. Да се намери отношението $NT : AP$.

Ивайло Кортезов

Задача 9.6. "Ламя" е игра на карти за петима. В един лагер 25 души обичат да играят Ламя, но имат само едно тесте карти. След всяка игра петимата играли се изпокарват и всеки решава, че повече няма да играе с никого от останалите четирима. Колко игри най-много могат да се изиграят?

Ивайло Кортезов

Задача 10.1. Да се реши системата:

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0 \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8 \end{cases}.$$

Иван Ланджеев

Задача 10.2. Даден е четириъгълник $ABCD$, в който $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$, $|AC| = e$, $|BD| = f$.

а) Да се докаже, че $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2$.

б) Ако $ABCD$ е вписан в окръжност, да се докаже, че $|a - c| \geq |e - f|$.

Стоян Атанасов

Задача 10.3. Да се намерят всички двойки естествени числа (m, n) , $m > n$, за които е изпълнено

$$[m^2 + mn, mn - n^2] + [m - n, mn] = 2^{2005},$$

където $[a, b]$ означава най-малкото общо кратно на числата a и b .

Иван Ланджесев

Задача 10.4. Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които уравнението

$$3(5x^2 - a^4) - 2x = 2a^2(6x - 1)$$

има не повече решения от уравнението

$$2x^3 + 6x = (3^{6a} - 9)\sqrt{2^{8a} - \frac{1}{6}} - (3a - 1)^2 12^x.$$

Иван Ланджесев

Задача 10.5. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H . Нека M е средата на AB , а H_1 и H_2 са проекциите на H съответно върху вътрешната и външната ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Да се докаже, че точките H_1, H_2 и M лежат на една права.

Стоян Атанасов

Задача 10.6. Да се намери най-голямото число A със следното свойство: ако числата $1, 2, \dots, 1000$ са написани в произволен ред, то съществуват 50 последователни числа, чиято сума е по-голяма или равна на A .

Иван Ланджесев

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението

$$a(\sin 2x + 1) + 1 = (a - 3)(\sin x + \cos x)$$

има решение.

Емил Колев

Задача 11.2. В остроъгълен триъгълник ABC с лице 1 са избрани точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ така, че $\angle CC_1B = \angle AA_1C = \angle BB_1A = \varphi$, където φ е остър ъгъл. Отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 се пресичат в точките M , N и P .

а) Да се докаже, че центърът на описаната около $\triangle MNP$ окръжност съвпада с ортоцентъра на $\triangle ABC$.

б) Ако $S_{MNP} = 2 - \sqrt{3}$, да се намери φ .

Емил Колев

Задача 11.3. Нека n е дадено естествено число. Естествените числа a, b, c, d са по-малки или равни на n , като d е най-голямото от тях и е изпълнено равенството

$$(ab + cd)(bc + ad)(ac + bd) = (d - a)^2(d - b)^2(d - c)^2.$$

а) Да се докаже, че $d = a + b + c$.

б) Да се намери броят на наредените четворки (a, b, c, d) с посочените свойства.

Александър Иванов

Задача 11.4. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението

$$\log_{ax}(3^x + 4^x) = \log_{(ax)^2}(7^2(4^x - 3^x)) + \log_{(ax)^3} 8^{x-1}$$

има решение.

Емил Колев

Задача 11.5. Ъглополовящите на $\angle BAC$, $\angle ABC$ и $\angle ACB$ в $\triangle ABC$ пресичат описаната около триъгълника окръжност съответно в точки A_1 , B_1 и C_1 . Страната AB пресича правите C_1B_1 и C_1A_1 съответно в M и N , BC пресича A_1C_1 и A_1B_1 съответно в P и Q и AC пресича B_1A_1 и B_1C_1 съответно в R и S .

а) Да се докаже, че височината през R в триъгълник CRQ е равна на радиуса на вписаната в триъгълник ABC окръжност.

б) Да се докаже, че правите MQ , NR и SP се пресичат в една точка.

Александър Иванов

Задача 11.6. Измежду върховете на правилен 26-ъгълник са избрани по произволен начин 9 върха. Да се докаже, че съществува равнобедрен триъгълник с върхове измежду избраните. Остава ли в сила твърдението, ако изберем по произволен начин 8 върха?

Александър Иванов

Задача 12.1. Да се докаже, че ако a , b и c са цели числа, за които числото

$$\frac{a(a-b) + b(b-c) + c(c-a)}{2}$$

е квадрат на цяло число, то $a = b = c$.

Олег Мушкаргов

Задача 12.2. Да се намерят стойностите на реалните параметри a и b , за които графиката на функцията $y = x^3 + ax + b$ има точно три общи точки с координатните оси и те са върхове на правоъгълен триъгълник.

Николай Николов

Задача 12.3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. С A_1 и C_1 са означени проекциите на върха D съответно върху правите BC и BA . Отсечката A_1C_1 пресича диагонала AC във вътрешна точка B_1 така, че $DB_1 \geq DA_1$. Да се докаже, че $ABCD$ е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато

$$\frac{BC}{DA_1} + \frac{BA}{DC_1} = \frac{AC}{DB_1}.$$

Николай Николов

Задача 12.4. Върху ръба AB на куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ е взета точка K така, че правата $A_1 B$ сключва с равнината $(B_1 C K)$ ъгъл с големина 60° . Да се намери тангенсът на ъгъла между тази равнина и равнината на основата $ABCD$ на куба.

Олег Мушкаргов

Задача 12.5. Да се докаже, че от безкрайна хартиена лента с ширина $\sqrt{3}$ може да се изреже произволен триъгълник с лице $\sqrt{3}$.

Олег Мушкаргов

Задача 12.6. Нека m е естествено число, $A = \{-m, -m+1, \dots, m-1, m\}$ и $f : A \rightarrow A$ е такава функция, че $f(f(n)) = -n$ за всяко $n \in A$.

а) Да се докаже, че m е четно число.

б) Да се намери броят на всички функции $f : A \rightarrow A$ с даденото свойство.

Николай Николов

54. Национална олимпиада по математика
Национален кръг, София, 14–15 май 2005 г.

Задача 1. Да се намерят всички тройки от естествени числа (x, y, z) , за които $\sqrt{\frac{2005}{x+y}} + \sqrt{\frac{2005}{x+z}} + \sqrt{\frac{2005}{y+z}}$ е естествено число.

Олег Мушкаров

Задача 2. Окръжности k_1 и k_2 се допират външно в точка T . Права пресича k_1 в точки A и B и се допира до k_2 в точка X . Правата XT пресича k_1 в точка S . Върху дъгата TS , несъдържаща A и B , е избрана точка C . Нека CY е допирателната към k_2 ($Y \in k_2$), за която отсечките CY и ST не се пресичат. Ако I е пресечната точка на правите XY и SC , да се докаже, че:

- а) точките C , T , Y и I лежат на една окръжност;
- б) точка I е център на външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ към BC .

Стоян Атанасов

Задача 3. Нека M е множеството на рационалните числа в интервала $(0, 1)$. Съществува ли подмножество A на M такова, че всяко число от M може да се представи по единствен начин като сума на едно или краен брой различни числа от A ?

Николай Николов

Задача 4. Нека $\triangle A'B'C$ е образ на $\triangle ABC$ при ротация с център C . Точките M , E и F са средите съответно на отсечките BA' , AC и $B'C$. Ако $AC \neq BC$ и $EM = FM$, да се намери $\angle EMF$.

Ивайло Кортезов

Задача 5. Ако t , a и b са положителни цели числа, то (t, a, b) -игра наричаме следната игра между двама: първият заменя t с едно от числата $t - a$ или $t - b$, след това вторият заменя полученото число, като изважда от него a или b , след това отново първият изважда a или b от числото, получено от втория и т.н. Губи този, който пръв получи отрицателно число. Да се докаже, че съществуват безбройно много t , така че първият играч има печеливша стратегия за (t, a, b) -игра за всички a и b със сума 2005.

Емил Колев

Задача 6. Нека a , b и c са естествени числа такива, че ab дели $c(c^2 - c + 1)$ и $a + b$ се дели на $c^2 + 1$. Да се докаже, че множествата $\{a, b\}$ и $\{c, c^2 - c + 1\}$ съвпадат.

Александър Иванов

Контролно за определяне на отбора за 22. БОМ
София, 29–30 март 2005 г.

Задача 1. Да се намерят всички положителни числа a и b такива, че $[a[bn]] = n - 1$ за произволно естествено число n ($[x]$ означава най-голямото цяло число, ненадминаващо x).

Задача 2. Точки P и Q от вътрешността на $\triangle ABC$ са такива, че $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ$ и $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BAQ$. С D , E и F са означени петите на перпендикулярите от P съответно към правите BC , CA и AB . Да се докаже, че ако $\sphericalangle DEF = 90^\circ$, то Q е ортоцентърът на $\triangle BDF$.

Задача 3. Съществува ли строго растяща редица от естествени числа $a_1, \dots, a_n, \dots$ така, че $a_n \leq n^3$ за произволно n и всяко естествено число може да се представи по единствен начин като разлика на два члена на редицата?

Задача 4. В равнината е даден изпъкнал многоъгълник $\mathcal{P}$ и на всяка точка от нея е съпоставено реално число. Известно е, че сумата от числата, съответстващи на върховете на произволен подобен на $\mathcal{P}$ многоъгълник, е равна на 0. Да се докаже, че всички числа са равни на 0.

Задача 5. Ако $a_0 = 0$ и $a_n = a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $n \geq 1$, да се намери $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n}$.

Задача 6. Дадени са различни естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_m$. Да се докаже, че съществуват различни естествени числа $b_1, b_2, \dots, b_n$, $n \leq m$, за които са изпълнени следните две условия:

(1) Всички подмножества на $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ имат различни суми на елементите си.

(2) Всяко от числата $a_1, a_2, \dots, a_m$ е сума на елементите на подмножество на $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Задача 7. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който продълженията на страните AB и CD се пресичат в точка P , а продълженията на страните BC и AD се пресичат в точка Q . Точка O от вътрешността на четириъгълника е такава, че $\sphericalangle BOP = \sphericalangle DOQ$. Да се докаже, че $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180^\circ$.

Задача 8. В група от B младежи и G девойки е известно, че $G \geq 2B - 1$. Някои младежи познават някои девойки. Да се докаже, че в един танц всички младежи могат да танцуват с девойки по такъв начин, че всеки младеж, който не познава девойката, с която танцува, да познава само девойки, които не танцуват.

Контролно за определяне на отбора за 46. МОМ
София, 18–19 май 2005 г.

Задача 1. Даден е остроъгълен триъгълник ABC . Да се намери геометричното място на точка M от вътрешността на триъгълника за която

$$AB - FG = \frac{MF \cdot AG + MG \cdot BF}{CM},$$

където F и G са петите на перпендикулярите от M съответно към правите BC и AC .

Петър Бойваленков, Николай Николов

Задача 2. Да се намери броят на подмножествата B на множеството $\{1, 2, \dots, 2005\}$ със свойството: сумата от елементите на B при деление на 2048 дава остатък 2006.

Емил Колев

Задача 3. Нека R_* е множеството от ненулевите реални числа. Да се намерят всички функции $f : R_* \rightarrow R_*$ такива, че

$$f(x^2 + y) = f^2(x) + \frac{f(xy)}{f(x)} \quad \text{при } x, y \in R_*, y \neq -x^2.$$

Александър Иванов

Задача 4. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{2005}, b_1, b_2, \dots, b_{2005}$ са такива реални числа, че неравенството

$$(a_i x - b_i)^2 \geq \sum_{j=1, j \neq i}^{2005} (a_j x - b_j)$$

вярно за всяко реално число x и всяко $i = 1, 2, \dots, 2005$. Колко най-много от числата a_i и b_i , $i = 1, 2, \dots, 2005$ могат да бъдат положителни?

Назар Агаханов, Николай Николов

Задача 5. В остроъгълен ABC с ортоцентър H и център на вписаната окръжност I е дадено, че $AC \neq BC$. Правите CH и CI пресичат описаната окръжност около $\triangle ABC$ за втори път съответно в точки D и L . Да се докаже, че $\sphericalangle CIH = 90^\circ$ тогава и само тогава, когато $\sphericalangle IDL = 90^\circ$.

Стоян Атанасов

Задача 6. В група от 6 човека няма четирима, всеки двама от които се познават. Да се докаже, че групата може да се раздели на четири части така, че във всяка група да няма познати.

Емил Колев

22. Балканска олимпиада по математика

Яш, 6 май 2005 г.

Задача 1. Вписаната в остроъгълен триъгълник ABC окръжност се допира до страните AB и AC съответно в точки D и E . Нека X и Y са пресечните точки на правата DE съответно с ъглополовящите на $\angle ACB$ и $\angle ABC$, а Z е средата на страната BC . Да се докаже, че триъгълникът XYZ е равнобедрен тогава и само тогава, когато $\angle BAC = 60^\circ$.

Гърция

Задача 2. Да се намерят всички прости числа p , за които $p^2 - p + 1$ е точен куб.

Албания

Задача 3. Нека a , b и c са положителни реални числа. Да се докаже неравенството

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Кога се достига равенство?

Сърбия и Черна гора

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е цяло число. Нека S е подмножество на $\{1, 2, \dots, n\}$ такова, че S не съдържа нито два елемента, единият от които дели другия, нито два елемента, които са взаимнопрости числа. Какъв е максималният възможен брой елементи на такова множество?

Молдова

46. Международна олимпиада по математика
Мерида, 13–14 юли 2005 г.

Задача 1. Върху страните на равностранен триъгълник ABC са избрани шест точки A_1, A_2 върху BC ; B_1, B_2 върху CA ; C_1, C_2 върху AB . Тези точки са върхове на изпъкнал шестоъгълник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ с равни страни. Да се докаже, че правите A_1B_2 , B_1C_2 и C_1A_2 се пресичат в една точка.

Румъния

Задача 2. Нека $a_1, a_2, \dots$ е редица от цели числа с безбройно много положителни и безбройно много отрицателни членове. Известно е, че за всяко естествено число n числата $a_1, a_2, \dots, a_n$ дават n различни остатъка при деление на n . Да се докаже, че всяко цяло число се среща точно един път като член на редицата.

Холандия

Задача 3. Нека x, y и z са положителни реални числа, за които $xyz \geq 1$. Да се докаже, че

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Корея

Задача 4. Нека $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ ($n = 1, 2, \dots$). Да се намерят всички естествени числа, които са взаимно прости с всеки от членовете на редицата $a_1, a_2, \dots$.

Полша

Задача 5. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, чиито страни BC и AD са равни и не са успоредни. Нека E и F са вътрешни точки съответно върху страните BC и AD , за които $BE = DF$. Правите AC и BD се пресичат в точка P , правите BD и EF се пресичат в точка Q и правите EF и AC се пресичат в точка R . Разглеждаме всички триъгълници PQR , когато E и F се променят. Да се докаже, че описаните около тези триъгълници окръжности имат обща точка, различна от P .

Полша

Задача 6. На участниците в математическо състезание били предложени шест задачи. За всеки две от задачите броят на участниците, решили и двете задачи, е по-голям от $\frac{2}{5}$ от общия брой на участниците. Никой не

решил и шестте задачи. Да се докаже, че поне двама от участниците са решили точно по пет задачи.

Румъния

Решения

Български математически състезания, 2003 г.

Зимни математически състезания

9.1. Тъй като $CP = CQ$, $CA = CB$ и $\angle APC = \angle BQC = 90^\circ$, то $\triangle APC \cong \triangle BQC$. Следователно $\angle CAP = \angle CBQ$, което означава, че ако пресечната точка на правите AP и BQ е T , то около четириъгълника $ABTC$ може да се опише окръжност. Оттук следва, че $\angle BAC = \angle QTC$ и тогава от $\angle TQC = \angle AHC = 90^\circ$ следва $\angle QCT = \angle ACH$. От равенствата $\angle AHC = \angle APC = \angle CPT = \angle CQT = 90^\circ$ следва, че около четириъгълниците $AHPC$ и $CPTQ$ може да се опишат окръжности. Оттук получаваме $\angle APH = \angle ACH$ и $\angle QPT = \angle QCT$, което означава, че $\angle APH = \angle QPT$, т.е. H , P и Q лежат на една права.

Алтернативно решение. Нека S е пресечната точка на HQ и k . Тъй като около $BHCQ$ може да се опише окръжност и $\triangle ABC$ и $\triangle CQS$ са равнобедрени, получаваме $\angle BAC = \angle ABC = \angle HQC = \angle CSQ$, т.е. $\angle BAC = \angle CSQ$. Това означава, че около $AHSC$ може да се опише окръжност, откъдето следва $\angle ASC = \angle AHC = 90^\circ$. Следователно точката S съвпада с P , т.е. H , P и Q лежат на една права.

9.2. Преобразуваме уравнението във вида

$$\frac{2(ax^2 + (1-2a)x + (1-a))}{(x+1)^2(2x^2 - x - 1)} = 0,$$

където $x \neq -1, -\frac{1}{2}, 1$. Корените на това уравнение са корени на

$$ax^2 + (1-2a)x + 1 - a = 0.$$

От друга страна

$$\begin{aligned} x_2^2 - ax_1 &= a^2 - a - 1 \iff \\ x_2^2 + ax_2 - a(x_1 + x_2) - a^2 + a + 1 &= 0 \iff \\ x_2^2 + ax_2 - a^2 - a + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Решавайки системата

$$\left| \begin{array}{l} ax_2^2 + (1-2a)x_2 + 1 - a = 0 \\ x_2^2 + ax_2 - a^2 - a + 2 = 0 \end{array} \right|$$

получаваме $(a^2 + 2a - 1)x_2 = a^3 + a^2 - 3a + 1 = (a^2 + 2a - 1)(a - 1)$. Коефициентът пред x се анулира при $a = -1 \pm \sqrt{2}$.

Ако $a = -1 + \sqrt{2}$, то първото уравнение на системата приема вида

$$(-1 + \sqrt{2})x_2^2 + (3 - 2\sqrt{2})x + (2 - \sqrt{2}) = 0,$$

чиято дискриминанта е $33 - 24\sqrt{2} < 0$, т.е. за $a = -1 + \sqrt{2}$ уравнението няма реални корени. При $a = -1 - \sqrt{2}$ получаваме

$$(-1 - \sqrt{2})x_2^2 + (3 + 2\sqrt{2})x_2 + (2 + \sqrt{2}) = 0,$$

което има два реални корена които са различни от ± 1 и $-\frac{1}{2}$.

Нека $a \neq -1 \pm \sqrt{2}$. Тогава $x_2 = a - 1$ и замествайки обратно в уравнението получаваме $a(a - 1)(a - 3) = 0$. При $a = 0$ уравнението има един корен; при $a = 1$, то има два реални корена 0 и 1, единият от които не е в множеството от допустимите стойности. При $a = 3$ то има два корена $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 2$, които са в множеството от допустимите стойности и удовлетворяват условието $x_2^2 - ax_1 = a^2 - a - 1$.

Окончателно търсените стойности са две: $a = -1 - \sqrt{2}$ и $a = 3$.

9.3. Ще докажем, че търсените числа при деление на 9 дават остатък 1 или -1 или са от вида 3^3b , 3^6c , където b и c при деление на 9 дават остатък 1 или -1 .

Да допуснем, че a не се дели на 3. Тъй като n^3 дава остатъци 0, 1 или -1 при деление на 9, то a трябва да дава остатък -1 или 1.

Обратно, нека a дава остатък -1 или 1 при деление на 9. Понеже $2^3 + 1$ и $4^3 - 1$ се делят на 9, следва че съществува n , за което 3^s , $s \geq 2$ дели $n^3 + a$ и 3^{s+1} не дели $n^3 + a$, т.е. $n^3 + a = 3^s t$, където t не се дели на 3. Ще покажем, че числото $n_1 = n + 3^{s-1}t$ е такова, че $n_1^3 + a$ се дели на 3^{s+1} . Имаме

$$\begin{aligned} (n + 3^{s-1}t)^3 + a &= n^3 + a + 3^s n^2 t + 3^{2s-1} n t^2 + 3^{3s-3} t^3 = \\ &= 3^s t (n^2 + 1) + 3^{2s-1} n t^2 + 3^{3s-3} t^3. \end{aligned}$$

Понеже n не се дели на 3, то $n^2 + 1$ се дели на 3. Освен това $2s - 1 \geq s + 1$ и $3s - 3 \geq s + 1$. Следователно $n_1^3 + a$ се дели на 3^{s+1} . Продължавайки по този начин ще получим, че съществува число n_p , за което 3^{2003} дели $n_p^3 + a$.

Ако $a < 2003$ се дели на 3, то $a = 3^s b$, където $s \leq 6$. Тогава и n се дели на 3, т.е. $n = 3^p n_0$. При $p \geq 3$ имаме 3^9 дели n^3 и 3^9 не дели a , което означава,

че 3^{2003} не дели $n^3 + a$. Следователно $p = 1$ или 2 и лесно се вижда, че съответно $s = 3$ или 6 .

В първия случай получаваме, че 3^{2000} дели $n_0^3 + b$, където b не се дели на 3 и $27b < 2003$. Както по-горе следва, че b дава остатък 1 или -1 при деление на 3 .

Във втория случай получаваме, че 3^{1997} дели $n_0^3 + b$, където b не се дели на 3 и $729b < 2003$. Освен това b дава остатък 1 или -1 при деление на 3 .

Броят на целите положителни числа, по-малки от 2003 и даващи остатък ± 1 при деление на 9 е $2 \cdot 222 + 1 = 445$. Броят на целите положителни числа b , даващи остатък ± 1 при деление на 9 и $27b < 2003$ е $2 \cdot 8 + 1 = 17$.

Броят на целите положителни числа b , даващи остатък ± 1 при деление на 9 и $729b < 2003$ е 1 .

Следователно търсеният брой е $445 + 18 = 463$.

10.1. При $ax + 2 < 0$ уравнението няма решение, а при $ax + 2 \geq 0$ то е еквивалентно на $ax^2 + ax + 2 = (ax + 2)^2$, откъдето следва

$$(a^2 - a)x^2 + 3ax + 2 = 0.$$

За да има това уравнение единствен корен са възможни следните случаи:

1. Коефициентът пред x^2 е нула и съответното линейно уравнение има корен, за който $ax + 2 \geq 0$.

При $a = 0$ получаваме $2 = 0$, което няма корени. При $a = 1$ намираме $x = -\frac{2}{3}$ и понеже $ax + 2 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} > 0$, $a = 1$ е решение на задачата.

2. Коефициентът пред x^2 не е нула (т.е. $a \neq 0, 1$) и съответното квадратно уравнение има единствен корен, който удовлетворява $ax + 2 \geq 0$. Тогава $D = 9a^2 - 8(a^2 - a) = a^2 + 8a = 0$ откъдето $a = 0$ или $a = -8$. Тъй като $a \neq 0$, а при $a = -8$ получаваме $x = \frac{1}{6}$ и $ax + 2 = -8 \cdot \frac{1}{6} + 2 = \frac{2}{3} > 0$, то $a = -8$ е решение на задачата.

3. Коефициентът пред x^2 не е нула (т.е. $a \neq 0, 1$) и съответното квадратно уравнение има два корена x_1 и x_2 и $ax_1 + 2 < 0$ и $ax_2 + 2 \geq 0$. Последното означава, че числото $-\frac{2}{a}$ се намира между корените на уравнението, като

може да съвпада с по-големия корен. Ако $-\frac{2}{a} = x_2$, получаваме $(a^2 - a) \left(-\frac{2}{a}\right)^2 + 3a \left(-\frac{2}{a}\right) + 2 = 0$, откъдето $a = 0$, което е противоречие.

Следователно числото $-\frac{2}{a}$ не може да съвпада с някои от корените.

Оттук следва, че е изпълнено неравенството

$$(a^2 - a) \left((a^2 - a) \left(-\frac{2}{a} \right)^2 + 3a \left(-\frac{2}{a} \right) + 2 \right) < 0.$$

Да отбележим, че това неравенство гарантира съществуването на два корена. След опростяване получаваме $a \geq 1$. Окончателно при $a = -8$ или $a \geq 1$ уравнението има единствен корен.

10.2. а) Нека $O_1O_2 \cap AB = S$. Ще докажем, че S не зависи от k . Нека O_3 е центърът на k . От теоремата на Менелай за $\triangle O_1O_2O_3$ и правата AB имаме

$$\frac{O_3B}{BO_2} \cdot \frac{O_2S}{SO_1} \cdot \frac{O_1A}{AO_3} = 1,$$

и понеже $O_3B = AO_3$ получаваме $\frac{O_2S}{SO_1} = \frac{BO_2}{O_1A} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{16}{4} = 4$. Следователно S е постоянна точка и от $O_1O_2 = 25 = O_2S + O_1S$ намираме $O_2S = 20$ и $O_1S = 5$.

б) Ако $\sphericalangle O_1O_3O_2 = x$ и $\sphericalangle O_1O_2O_3 = y$, то $\sphericalangle AO_1S = x + y$. Тъй като $\triangle O_1AP$ е равнобедрен имаме $\sphericalangle APS = \frac{x+y}{2}$. От друга страна, понеже $\triangle AO_3B$ и $\triangle BO_2Q$ са равнобедрени, то $\sphericalangle SBO_3 = 90 - \frac{x}{2}$ и $\sphericalangle QBO_2 = 90 - \frac{y}{2}$, откъдето $\sphericalangle SBQ = \frac{x+y}{2}$. Оттук $\sphericalangle APS = \sphericalangle SBQ$, т.е. около $PBQA$ може да се опише окръжност.

в) Понеже PQ и AB са хорди в една окръжност, то $SP \cdot SQ = SA \cdot SB$. От друга страна $SP \cdot SQ = (SO_1 + R_1)(SO_2 - R_2) = 9 \cdot 4 = 36$. От неравенството $AB = SA + SB \geq 2\sqrt{SA \cdot SB} = 2\sqrt{SP \cdot SQ} = 12$ (като равенство се достига само при $SA = SB$) следва, че минималната стойност на $SA + SB$ е равна на 12 и се достига при $SA = SB$.

Остава да докажем, че съществува окръжност, за която $SA = SB$. Ако точка $A \in k_1$ е такава, че $SA = 6$, то като разгледаме окръжността k (тъй като степента на S спрямо k_1 е равна на $SO_1^2 - R_1^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ и $SA^2 = 36 > 9$, не е трудно да се види, че окръжност k съществува), която минава през A и е със свойствата от условието, ще получим $SB = \sqrt{SP \cdot SQ}$, т.е. $SA = SB$.

10.3. Да разгледаме таблица, редовете на която отговарят на елементите на A , а стълбовете - на елементите на M . В една клетка поставяме $\times$, ако елемента на A в съответния ред е съседен на елемента на M в съответния

стълб. Нека $|M| = k$. От условието следва, че няма два еднакви реда, което означава, че M има поне 16 различни подмножества. Тъй като множество с n елемента има 2^n подмножества, то $k \geq 4$.

Тъй като всяка редица има точно пет съседни (това са самата редица и онези, които се различават от нея в 1-ия, 2-ия, 3-ия или 4-ия член), то във всеки стълб има точно пет знака $\times$, т.е. общият им брой е $5k$. Минимален брой знаци $\times$ по редове се получават когато имаме един ред с нула знака, k реда с по един знак $\times$, $\binom{k}{2}$ елемента с два знака $\times$ и т.н.

1. При $k = 4$ всички подмножества на M са 16 и следователно всяко подмножество на M трябва да се среща точно по веднъж като множество от съседни на някой елемент на A . Тогава по редове имаме един ред без $\times$, 4 реда с по един $\times$, 6 реда с по два знака $\times$, 4 реда с по 3 знака $\times$ и един ред с четири $\times$. Общият брой на знаците $\times$ става $32 > 20$, противоречие.

2. При $k = 5$ имаме 25 знака $\times$. По редове минималният им брой се достига при един ред с нула знака, 5 реда с по един $\times$ и 10 реда с по два знака $\times$. Тъй като $5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 25$ разпределението трябва да бъде точно описаното. Това означава, че всеки два елемента на M трябва да бъдат едновременно съседни на някой елемент на A . Лесно се вижда, че ако два елемента на M се различават в повече от две позиции, то не съществува елемент, на който и двата да са съседни. Следователно всеки два елемента на M се различават в една или две позиции. Ако допуснем, че има два елемента, които се различават в точно една позиция, то без ограничение това са 0000 и 1000. Тогава съседните на $a = 0000$ и $b = 1000$ в M са 0000 и 1000 и редовете на $a = 0000$ и $b = 1000$ съвпадат, противоречие. Това показва, че всеки два елемента на M се различават в точно две позиции. Без ограничение $0000 \in M$. Тогава останалите 4 елемента са измежду 0011, 1100, 0101, 1010, 1001 и 0110. Но от всяка от двойките (0011, 1100), (0101, 1010) и (1001, 0110) може да се избере най-много един елемент, противоречие.

3. При $k = 6$ множеството $M = \{0000, 1111, 0111, 0100, 1001, 0101\}$ разделя всеки два елемента на A .

Следователно, търсения минимален брой е 6.

11.1. а) След повдигане на квадрат получаваме, че

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 1 + \frac{1}{4a_n^2}.$$

В частност, $a_{n+1}^2 > a_n^2 + 1$ и по индукция следва, че $a_n^2 \geq n$. Пак по индукция ще докажем и другото неравенство. То е очевидно при $n = 1$ и

нека

$a_n^2 < n + \sqrt[3]{n}$. Тогава

$$a_{n+1}^2 < n + \sqrt[3]{n} + 1 + \frac{1}{4n}$$

и остава да проверим, че

$$\sqrt[3]{n} + \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1} \iff \frac{1}{4n} < \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \iff$$

$$\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2} < 4n \iff 1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} < 4\sqrt[3]{n}.$$

Последното неравенство следва от неравенствата $1 + \frac{1}{n} \leq 2$ и $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} < 4$.

б) Твърдението следва от неравенствата

$$0 \leq a_n - \sqrt{n} < \sqrt{n + \sqrt[3]{n}} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n + \sqrt[3]{n}} + \sqrt{n}} < \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt[6]{n}}.$$

11.2. Нека A_1 е среда на BC . От теоремата на Чева следва, че

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Оттук $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{B_1A}{B_1C}$, т.е. $B_1C_1 \parallel BC$, откъдето $S_{BC_1M} = S_{CB_1M} = 2S_{AC_1M}$ и $S_{AB_1M} = S_{AC_1M}$. Тогава

$$\frac{1}{3} = \frac{S_{AC_1M}}{S_{AMC}} = \frac{C_1M}{MC} = \frac{S_{BC_1M}}{S_{BMC}} = \frac{2S_{AC_1M}}{2S_{BA_1M}}$$

и оттук $S_{BA_1M} = 3S_{AC_1M}$.

Обратно, нека $S_{AC_1M} = 1$, $S_{CB_1M} = 2$ и $S_{BA_1M} = 3$, $S_{BC_1M} = x$, $S_{CA_1M} = 3y$ и $S_{AB_1M} = 2z$. Трябва да докажем, че $y = 1$. Имаме

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{S_{AC_1M}}{S_{AMC}} = \frac{C_1M}{CM} = \frac{S_{C_1MB}}{S_{CMB}} = \frac{x}{3(y+1)}.$$

Аналогично

$$\frac{3}{x+1} = \frac{3y}{2(z+1)}, \quad \frac{2}{3(y+1)} = \frac{2z}{x+1}.$$

Като умножим тези равенства получаваме, че $xyz = 1$ (теорема на Чева).
Оттук $z = \frac{1}{xy}$ и от първото равенство следва, че

$$(1) \quad xy = \frac{3y^2 + 3y - 2}{2}.$$

Аналогично от второто равенство получаваме, че

$$(2) \quad 2 \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = xy + y.$$

Като заместим (1) в (2) стигаме до следното уравнение $(3y^2 + 3y - 2)^2 + 2y(3y^2 + 3y - 2) - 12y(y + 1) = 0$, което записваме във вида

$$(y - 1)(3(y + 2)(3y^2 + 3y + 2) + 6y^2 - 16) = 0.$$

От (1) следва, че $3y^2 + 3y > 2$ и тъй като $y > 0$ заключаваме, че $3(y + 2)(3y^2 + 3y + 2) + 6y^2 - 16 > 6(3y^2 + 3y + 2) - 16 > 8$. Следователно $y = 1$ и задачата е решена. Да отбележим, че в този случай $x = 2$ и $z = \frac{1}{2}$.

11.3. Елица има печеливша стратегия. Ако уравнението е

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

и на първия ход Александър попълни a_0, a_1, a_2 или a_3 , Елица попълва съответно $a_1 = a_0, a_0 = a_1, a_4 = a_3$ или $a_3 = a_4$, а иначе попълва $a_1 = 1$ (или $a_3 = 1$). С подобна стратегия на втория ход тя може да получи $a_1 \leq a_0$ и $a_3 \leq a_2$. Да допуснем, че полученото накрая уравнение има целочислен корен $-y$. Очевидно $y \geq 1$ и тогава $a_4 = y^3(a_1 - a_0y) + a_3 - a_2y \leq 0$, което е противоречие.

12.1. а) Понеже $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$, достатъчно е да се покаже, че локалният минимум на $f'(x)$ е положителен. При това, този минимум се достига в т. x_1 , където $x_1 > x_2$ са реалните корени на $f''(x) = 0$. Лесно се вижда, че $x_1 \in (-1; 0)$ и $f'(x_1) > 0$.

б) От а) следва, че уравнението $f'(x) = 0$ има точно един реален корен. Понеже $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ и $f(0) < 0$, то реалните корени на $f(x) = 0$ са точно два. За да ги намерим, означаваме $y = 2003$ и разглеждаме уравнението $f(x) = 0$ като квадратно относно y . Имаме $y_{1,2} =$

$\frac{x \pm x(4x+3)}{2}$, откъдето $2y = x + x(4x+3)$ или $2y = x - x(4x+3)$. Първото уравнение има два реални корена спрямо x , а второто няма реални корени. Окончателно, търсените решения са $\frac{-1 \pm \sqrt{4007}}{2}$.

12.2. а) Нека $\frac{AM}{MB} = x$, $\frac{BN}{NC} = y$ и $\frac{CP}{PA} = z$, $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$, h_C е височината в $\triangle ABC$ през върха C и h_P е дължината на перпендикуляра от P към AB . Ще използваме, че сумата от лицата на трапеците $AMTP$, $BMTN$ и $CNTP$ е равна на S_{ABC} . Нека правата NT пресича AB в точка N_1 . Имаме $\frac{AN_1}{BN_1} = \frac{CN}{NB} = \frac{1}{y}$, откъдето $PT = AN_1 = \frac{c}{y+1}$. Аналогично, $\frac{h_P}{h_C} = \frac{AP}{AC} = \frac{1}{z+1}$, откъдето $h_P = \frac{h_C}{z+1}$. Освен това, от $\frac{AM}{MB} = x$ следва, че $AM = \frac{cx}{x+1}$. Тогава

$$S_{AMTP} = \frac{1}{2}(AM + PT)h_P = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) \cdot \frac{ch_C}{z+1}$$

и значи $\frac{S_{AMTP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{x}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) \frac{1}{z+1}$. Аналогично

$$\frac{S_{BMTN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{y}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \frac{1}{x+1} \quad \text{и} \quad \frac{S_{CNTP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{z}{z+1} + \frac{1}{x+1} \right) \frac{1}{y+1}.$$

След сумиране и преобразуване получаваме

$$(*) \quad xyz = x + y + z + 2$$

а) От $*$ при $x = y = z$ получаваме $x^3 - 3x - 2 = (x-2)(x+1)^2 = 0$ и следователно $x = 2$. Оттук $h_P = \frac{1}{3}h_C$, което показва, че T е на разстояние $\frac{1}{3}h_C$ от AB . Аналогично получаваме за разстоянията от T до другите две страни на $\triangle ABC$. Единствената вътрешна точка с това свойство е медицентърът.

б) Лесно намираме, че

$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \frac{x}{(x+1)(z+1)}, \quad \frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{y}{(y+1)(x+1)} \quad \text{и} \quad \frac{S_{CPN}}{S_{ABC}} = \frac{z}{(z+1)(y+1)}.$$

Като изразим z от $*$, получаваме, че неравенството от б) е еквивалентно с $\frac{1}{3} \frac{f(x,y)}{(x+1)(y+1)(xy+x+y+1)} \geq 0$, където

$$f(x,y) = (y^2 - y + 1)x^2 - (y^2 + 5y - 2)x + y^2 + 2y + 4 = 0.$$

Понеже $xy > 1$, достатъчно е да покажем, че $f(x, y) \geq 0$. Последното неравенство разглеждаме като квадратно спрямо x , чиято дискриминанта $-3(y+1)^2(y-2)^2$ е отрицателна при $y \neq 2$. Понеже $y^2 - y + 1 > 0$ за всяко y , то $f(x, y) > 0$ за всяко x и всяко $y \neq 2$. От друга страна $f(x, 2) = 3(x-2)^2 \geq 0$, което решава задачата. В частност равенство се получава при $x = y = z = 2$.

12.3. Да означим тримата познати с A , B и C .

Нека $n = 2k + 1$ е нечетно число. В този случай всеки един от A , B и C има поне $k + 1$ познати ($k - 1$ от които не са A , B или C). Да означим с T множеството на всички от компанията без A , B и C и нека a_i , $i = 0, 1, 2, 3$ е броят на хората от T , които имат точно i познати измежду A , B и C . Тогава $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ е броят на всички членове на T , т.е. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2k - 2$. От друга страна, $a_1 + 2a_2 + 3a_3$ е броят на познатите на A , B и C , т.е. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 \geq 3k - 3$. Оттук

$$3k - 3 \leq a_1 + 2a_2 + 3a_3 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + a_2 + 2a_3 = 2k - 2 + a_2 + 2a_3$$

и следователно $a_2 + 2a_3 \geq k - 1$.

Тъй като всеки познат с двама от A , B и C образува една тройка познати, а всеки познат и с тримата образува три тройки познати, то броят на тройките познати е поне $1 + a_2 + 3a_3$. Тогава $1 + a_2 + 3a_3 > a_2 + 2a_3 \geq k - 1$, което означава, че броят на тройките познати е не по-малък от k .

Остава да покажем пример, при който броят на тройките познати е точно k . Нека никои двама от T не са познати. Ако A познава точно $k - 1$ от T , B познава останалите $k - 1$ от T , а C познава кои да са $k - 1$ човека от T , то само познатите на C влизат в тройка познати и общият брой тройки познати е k .

Нека $n = 2k$ е четно число. Както в случая на нечетното n , получаваме, че броят на тройките познати е поне $k + 1$. Ако A и B имат само един общ познат в T (това е възможно, тъй като $|T| = 2k - 3$, а познатите на A и B са по $k - 1$), който не е между познатите на C , то тройките познати са точно $k + 1$.

И така, отговорът на задачата е k при $n = 2k + 1$ и $k + 1$ при $n = 2k$.

Забележка. Задачата може да се реши и директно чрез принципа за включване и изключване, приложен към множествата от познатите съответно на A , B и C .

Пролетен математически турнир

8.1. а) Не. Да допуснем, че числата са в реда $a_1, a_2, \dots, a_8$ и $a_1 + a_2 + a_3 \geq 14$, $a_2 + a_3 + a_4 \geq 14, \dots, a_7 + a_8 + a_1 \geq 14, a_8 + a_1 + a_2 \geq 14$. Събираме горните неравенства и получаваме $3(a_1 + a_2 + \dots + a_8) \geq 8 \cdot 14 = 112$. Но $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 1 + 2 + \dots + 8 = 36$, откъдето $108 \geq 112$, което е противоречие.

б) Да. Например $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 7, a_7 = 3, a_8 = 8$.

в) Не. Да допуснем, че такова разположение съществува. Лесно се вижда, че числата 2 и 3 не могат да са разположени в съседни върхове, защото в противен случай и отляво и отдясно на тях трябва да има число, по-голямо или равно на 8, което е невъзможно. От друга страна, числата 2 и 3 трябва да са записани на поне три върха от мястото, където е записано числото 1. Това е възможно само при следната конфигурация $a_1 = 1, a_4 = 2, a_6 = 3$ (с точност до посока на обхождане). Тогава между 2 и 3 трябва да е записано числото 8. Но където и да бъде поставено сега числото 4 в някой от останалите четири върха, ще бъде нужна поне още една осмица. Противоречие.

8.2. Понеже $A_1D \parallel MB_1$ и $A_1, B_1, M, C_1 \in k$, имаме

$$\sphericalangle AA_1D = \sphericalangle AMB_1 = \sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle ABC.$$

От $B_1C_1 \parallel BA_1$ и $A_1D \parallel BB_1$, четириъгълникът BA_1DB_1 е успоредник. Тогава $BA_1 = B_1D = B_1C_1$. Но $AB_1 = B_1C$, откъдето следва, че AC_1CD е успоредник, т.е. $AD \parallel CC_1$. Тогава $\sphericalangle DAA_1 = \sphericalangle CMA_1 = \sphericalangle AMC_1 = \sphericalangle AB_1C_1 = \sphericalangle ACB$. Оттук

$$\sphericalangle ADA_1 = 180^\circ - (\sphericalangle DAA_1 + \sphericalangle DA_1A) = 180^\circ - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB) = \sphericalangle CAB.$$

8.3. Нека $m = 2^k p$, където $p > 1$ е нечетно число. Тогава $2003^m - 1 = 2003^{2^k p} - 1 = (2003^{2^k} - 1)K$, където K е сбор от p на брой четни събираеми и 1, т.е. K е нечетно. Следователно най-малкото търсено число m трябва да е от вида $m = 2^k$. Имаме

$$\begin{aligned} 2003^{2^k} - 1 &= (2003^{2^{k-1}} - 1)(2003^{2^{k-1}} + 1) = \\ &= (2003^{2^{k-1}} + 1)(2003^{2^{k-2}} + 1) \dots (2003^2 + 1)(2003 + 1)(2003 - 1). \end{aligned}$$

Понеже $2003^{2^i} + 1$ дава остатък 2 при деление с 4, т.е. всички числа от горния вид са четни, но не се делят на 4, то $2003^{2^k} - 1$ ще се дели на 2^{k+2} , защото $2003 + 1$ се дели на 4 и не се дели на 8 и $2003 - 1$ се дели на 2, но не се дели на 4. Следователно $k + 2 = 2000$, откъдето $k = 1998$. Търсеното число е 2^{1998} .

9.1. При $x \neq -1$ и $y \neq -1$ се освобождаваме от знаменателя в първото уравнение и като вземем в предвид второто, получаваме $y = a$. Заместваме във второто уравнение и получаваме $ax^2 - (a^2 - 2a - 1)x + a^3 = 0$. При $a = 0$ системата има единствено решение $(0; 0)$. При $a \neq 0$ е необходимо дискриминантата на последното уравнение да е равна на 0 и съответното решение е в дефиниционната област или точно едно от двете решения на квадратното уравнение не е в дефиниционната област и $y = a \neq -1$.

В първия случай имаме $(a^2 - 2a - 1)^2 - 4a^4 = 0 \iff a^2 - 2a - 1 = \pm 2a^2$. Следователно $a = -1$, $a = 1$ или $a = -\frac{1}{3}$. В първите два случая получаваме съответно $y = -1$ и $x = -1$, т.е. системата няма решение, а при $a = -\frac{1}{3}$ имаме единственото решение $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. Ако $x = -1$ или $y = -1$, получаваме съответно $a = 1$ или $a = -1$ и системата няма решение. Следователно търсените стойности са $a = -\frac{1}{3}$ и 0.

9.2. Нека DH е перпендикуляр към AC ($H \in AC$). Имаме $\triangle AHD \sim \triangle AFC$ и $\triangle CHD \sim \triangle AEC$ по първи признак. Оттук $AC^2 = AH \cdot AC + HC \cdot AC = AF \cdot AD + AE \cdot CD = AQ^2 + AE \cdot AB = AQ^2 + AP^2$. Ако $QP = PC = x$, имаме $(1 + 2x)^2 = 1 + (1 + x)^2 \iff 3x^2 + 2x - 1 = 0$, което има само един положителен корен $x = \frac{1}{3}$. Следователно $AC = 1 + 2x = \frac{5}{3}$.

9.3. Ще казваме, че Спаска е от ред 1, родителите ѝ са от ред 2, техните родители от ред 3 и т.н. Да запишем броя на главите на всяка ламя в троична бройна система: Спаска има 1 глава, майка ѝ има 10 глави, баща ѝ има 11 глави, баба ѝ по майчина линия има 100 глави и т.н. С индукция по реда на ламите е лесно да се види, че главите на ламите от ред n са всички n -цифрени троични числа, в които не участва цифрата 2 (и различните ламы имат различен брой глави). При събирането на две такива числа не може да има пренос. Тогава, ако две ламы имат общо $a + b = k$ ($a > b$) глави и запишем k в троичен вид, то a и b трябва да имат 0 на позициите, в които k има 0; 1 на позициите, в които k има 2; а на позициите, в които k има 1, едното събираемо трябва да има 0, а другото 1. Така ако в троичния запис на k има само 0 и 2, непременно $a = b$, т.е. става дума за една и съща ламя,

а не за две лами, и k не е змейско число. Ако в троичния запис на k има поне две единици ($k = \dots 1\dots 1\dots$), имаме поне две различни възможности: ($a = \dots 1\dots 1\dots$; $b = \dots 0\dots 0\dots$) и ($a = \dots 1\dots 0\dots$; $b = \dots 0\dots 1\dots$). Такова k не е змейско число, освен в случая, когато в k има точно две единици, а всички останали цифри са нули (понеже няма ламя с 0 глави)- там се реализира само втората възможност.

Ако в k има точно една цифра 1, то на тази позиция a ще има 1, b ще има 0, а останалите им позиции са еднозначно определени. Изключение прави случаят, при който всички останали цифри на k са нули, понеже трябва $b = 0$, което е недопустимо. Всички числа с точно една единица и поне една цифра 2 са змейски.

Понеже $2003 = 2202012_3$, числото 2003 е змейско. Да преброим всички змейски числа с не повече от 7 цифри. Имаме $\binom{7}{2} = 21$ числа с точно две единици и другите цифри – нули. Числата с не повече от 6 цифри 0 или 2, от които поне една 2, са $2^6 - 1 = 63$. Сега можем да поставим единицата навсякъде между, пред или след цифрите на такова число, т.е. има 7 възможности. Общо имаме $7 \cdot 63 = 441$ такива числа, и като добавим горните 21, имаме 462 змейски числа с не повече от 7 цифри.

Да преброим колко са седемцифрените змейски числа, които са по-големи от 2202012_3 . Това са (троичните) $2202021, 2202100, 2202102, 2202120, 2202122, 2202201, 2202210, 2202212, 2202221$, още 16 числа от вида $\overline{221mnpq}$, където $m, n, p, q \in \{0; 2\}$ и още $4 \cdot 8 = 32$ числа от вида $\overline{222mnpq}$, където една от цифрите m, n, p, q е 1, а останалите са 0 или 2. Общо имаме $1+9+16+32 = 58$ седемцифрени змейски числа, по-големи или равни на 2202012_3 . Остават $462 - 58 = 404$ змейски числа, по-малки от 2003.

10.1. а) Нека $t = \frac{x^2}{x-1}$. Тогава $x^2 = t(x-1)$. Това е квадратно уравнение за x и за да имаме решение $x \in R$, трябва $D \geq 0$, т.е. $t^2 - 4t \geq 0$, което дава множеството от стойности $t \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

б) Записваме $f(x) = x^4 - ax^2(x-1) + (x-1)^2$. Очевидно $x = 1$ не е решение на $f(x) = 0$. След разделяне на двете страни с $(x-1)^2$ и полагане $t = \frac{x^2}{x-1}$, получаваме уравнението $t^2 - at + 1 = 0$.

Разглеждаме два случая:

1. $D = a^2 - 4 < 0$, т.е. $a \in (-2; 2)$. Тогава разглежданото уравнение няма реални корени. Това означава, че и уравнението $f(x) = 0$ няма реални корени.

2. $D = a^2 - 4 \geq 0$, т.е. $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Тогава уравнението има два реални корена t_1 и t_2 и за да няма уравнението $f(x) = 0$ реални корени, трябва $t_1, t_2 \in (0; 4)$. Ако $g(t) = t^2 - at + 1$, последното е равносилно на

$$\begin{cases} g(0) > 0 \\ g(4) > 0 \\ 0 < \frac{a}{2} < 4 \end{cases}. \text{ Тази система има за решение } a \in \left(0; \frac{17}{4}\right). \text{ След съобразяване}$$

с $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, получаваме $a \in \left[2; \frac{17}{4}\right)$. Окончателно $a \in \left(-2; \frac{17}{4}\right)$.

10.2. Ако F и E са вторите допирни точки на k_1 и k_2 с раменете на ъгъла, то тъй като $AF^2 = AL \cdot AC$, $CE^2 = CK \cdot CA$ и $AF = CE$, следва че $AL = CK$. Следователно $AK = CL$ и аналогично $CM = BN$. От теоремата на Чева за точките P и S намираме

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AK \cdot CM}{KC \cdot MB} \text{ и } \frac{AT}{TB} = \frac{AL \cdot CN}{LC \cdot NB}.$$

Като умножим тези равенства получаваме $\frac{AX}{XB} = \frac{TB}{AT}$, откъдето $\frac{AX + XB}{XB} = \frac{TB + AT}{AT}$, т.е. (1) $AT = BX$ или $AX = BT$. Аналогично, след използване на теоремата на Чева за точките Q и R , получаваме (2) $AZ = YB$. От (1) и (2) следва, че $XZ = YT$.

10.3. а) Ще докажем, че 4 измервания са достатъчни. Да означим топките с 1, 2, 3, 4, 5, 6 и да измерим последователно $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ и $\{1, 5\}$.

1. Ако при всички измервания има радиоактивност, то 1 е радиоактивна (в противен случай и четирите 2, 3, 4, 5 са радиоактивни). Ако в $\{1, a\}$, $a = 2, 3, 4, 5$ има повече от една радиоактивна, то и a е радиоактивна, а ако има само една, то a не е. Следователно можем да разберем кои от 2, 3, 4, 5 са радиоактивни, а оттам и дали 6 е такава.

2. Ако има при някое от измерванията няма радиоактивност, то 1 не е радиоактивна. Следователно можем да определим кои от 2, 3, 4, 5 са радиоактивни, а оттам и дали 6 е такава.

Да допуснем, че $L(6) \leq 3$, т.е. можем да считаме, че 3 измервания са достатъчни. Изходите от всяко измерване са три: няма радиоактивни; има само една или има повече от една. Следователно при две измервания имаме $3^2 = 9$ възможни изхода. При първото измерване могат да се изберат 1, 2, 3, 4, 5 или 6 топки. Ясно е, че измежду всеки 5 или 6 топки винаги има повече от 1 радиоактивна, така че такова измерване не ни носи никаква информация.

Нека първото измерване е на множество от $x, x \leq 4$ топки. При $x = 1$ и резултат "има една радиоактивна" възможностите за радиоактивните топки са 10 (в останалите 5 топки има две радиоактивни и $\binom{5}{2} = 10$), а в същото време възможните изходи от останалите две измервания са $3^2 = 9$. Аналогично, при първо измерване на:

- две топки и отговор "има една радиоактивна" възможностите са $\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 12 > 9$;

- три топки и отговор "има повече от една радиоактивна" възможностите са $\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{3}{3} = 10 > 9$;

- четири топки и отговор "има повече от една радиоактивна" възможностите са $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} + \binom{4}{3} = 13 > 9$.

Следователно три измервания не са достатъчни и $L(6) = 4$.

б) Ще покажем, че $\left\lceil \frac{n+5}{2} \right\rceil$ измервания са достатъчни за определяне на трите радиоактивни, откъдето ще следва исканото неравенство. Нека $n = 2t - \varepsilon$, където $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Да разделим всички топки на t множества от по две (при $\varepsilon = 0$) или на $t - 1$ множества от по две и едно множество с една топка (при $\varepsilon = 1$). И в двата случая да проверим за радиоактивност всички $t - 1$ множества от по две топки. В зависимост от резултатите от тези измервания за всичките t множества имаме два случая:

1. Намираме едно множество с две радиоактивни и едно множество с една радиоактивна.

2. Намираме три множества с по една радиоактивна всяко.

И в двата случая още три измервания са достатъчни за намиране на радиоактивните. Общият брой измервания е $t - 1 + 3 = t + 2$. Тъй като

$$\left\lceil \frac{n+5}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2t - \varepsilon + 5}{2} \right\rceil = t + 2 + \left\lceil \frac{1 - \varepsilon}{2} \right\rceil = t + 2$$

получаваме $L(n) \leq \left\lceil \frac{n+5}{2} \right\rceil$.

11.1. При $a \geq 2$ корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - ax + 1 = 0$ са положителни и $x_1 x_2 = 1$. В частност $S_n > 0$ за $n = 1, 2, \dots$.

а) Имаме

$$\begin{aligned}\frac{S_{n-1}}{S_n} \geq \frac{S_n}{S_{n+1}} &\iff (x_1^{n-1} + x_2^{n-1})(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) \geq (x_1^n + x_2^n)^2 \iff \\ &\iff x_1^{n-1}x_2^{n+1} + x_2^{n-1}x_1^{n+1} \geq 2x_1^n x_2^n \\ &\iff (x_1 x_2)^{n-1} (x_1 - x_2)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

което очевидно е изпълнено.

б) Нека $a \geq 2$ има исканото свойство. Тогава от а) следва, че

$$n \frac{S_1}{S_2} \geq \frac{S_1}{S_2} + \dots + \frac{S_n}{S_{n+1}} > n - 1,$$

т.е. $\frac{S_1}{S_2} > 1 - \frac{1}{n}$. Тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ от последното неравенство получаваме,

че $\frac{S_1}{S_2} \geq 1$. От формулите на Виет имаме $S_1 = a$, $S_2 = a^2 - 2$. Тогава $\frac{a}{a^2 - 2} \geq 1 \iff \frac{(a+1)(a-2)}{a^2 - 2} \leq 0$ и от $a \geq 2$ следва, че $a = 2$. Обратно, ако $a = 2$, то $x_1 = x_2 = 1$ и $S_n = 2$ за всяко $n = 1, 2, \dots$. Следователно

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_3} + \dots + \frac{S_n}{S_{n+1}} = n > n - 1.$$

11.2. Ще използваме стандартните означения за $\triangle ABC$ и без ограничение ще считаме, че $b > c$. Ако I е центърът на вписаната окръжност, то от условието $A_1N = r\sqrt{3}$ следва, че в правоъгълния $\triangle INA_1$ е изпълнено $\angle NIA_1 = 60^\circ$. Ще докажем, че $AA_1 \perp IN$, откъдето ще следва, че $\angle AA_1N = 60^\circ$. Тогава, ако M е средата на AA_1 , ще се окаже, че $\triangle MNA_1$ е равностранен, откъдето $\triangle ANM$ ще е равнобедрен с ъгъл при основата равен на 30° , което ще доведе до равенството $\angle ANC = 90^\circ$. Фактът $AA_1 \perp IN$ е еквивалентен на условието за перпендикулярност на диагоналите в четириъгълника ANA_1I , т.е. на $AI^2 - IA_1^2 = AN^2 - A_1N^2$. Понеже $AI^2 - IA_1^2 = AI^2 - IC_1^2 = (p-a)^2$, свеждаме задачата до изразяване на AN и A_1N чрез елементите на $\triangle ABC$. От косинусовата теорема за $\triangle ANB$ имаме

$$AN^2 = c^2 + BN^2 + 2c \cdot BN \cos \beta = c^2 + BN^2 + 2c \cdot BN \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

а от теоремата на Менелай за $\triangle ABC$ и правата B_1C_1 намираме $\frac{CB_1}{B_1A} \frac{AC_1}{C_1B} \frac{BN}{NC} =$

1, откъдето $\frac{p-c}{p-b} \frac{BN}{BN+a} = 1$ и значи $BN = \frac{a(p-b)}{b-c}$. Тогава $A_1N =$

$BN + p - b$ и

$$\begin{aligned}
 AN^2 - A_1N^2 &= c^2 - (p-b)^2 + BN \frac{a^2 + c^2 - b^2 - a^2 - ac + ab}{a} = \\
 &= c^2 - (p-b)^2 - \frac{a(p-b)}{b-c} \frac{2(b-c)(p-a)}{a} = \\
 &= c^2 - (p-b)^2 - 2(p-a)(p-b) = \\
 &= c^2 - (p-a+p-b)^2 + (p-a)^2 = \\
 &= c^2 - c^2 + (p-a)^2 = (p-a)^2.
 \end{aligned}$$

Доказахме, че $AI^2 - IA_1^2 = AN^2 - A_1N^2$ и от направените разглеждания следва, че $\angle ANC = 90^\circ$, което е отговорът на задачата.

Забележка. Задачата се основава на факта $AA_1 \perp IN$, който не зависи от конкретните данни и може да се докаже и по други начини, освен изложения: например, с използването на полюс и поляра или с помощта на комплексни числа. Да забележим още, че ако P е втората пресечна точка на правата AA_1 и вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, то NP е допирателна към окръжността. При конкретните данни имаме $P \equiv M$.

11.3. Ще покажем, че единственото решение е $n = 6$. Ако имаме 6 точки в общо положение (никои три не лежат на една права), то общо правите са 15 и всяка точка лежи на 5 прави, т.е. $n = 6$ е решение.

Да означим броя на различните прави, определени от дадените n точки, с k . Да допуснем, че има права, върху която лежат 4 от дадените точки. Всяка от дадените точки лежи на още $\frac{k}{3} - 1$ прави, което означава, че има поне $4\left(\frac{k}{3} - 1\right) + 1$ различни прави. Оттук $4\left(\frac{k}{3} - 1\right) + 1 \leq k$, т.е. $k \leq 9$. От друга страна, тъй като всяка точка, нележаща на разглежданата права, лежи на поне 4 различни прави (правите през тази точка и четирите точки върху правата), то $k \geq 12$, противоречие. Следователно върху всяка от правите има най-много 3 точки. Нека върху a от правите има точно по 2 точки. Тогава върху всяка от останалите $k - a$ прави има по 3 точки.

Броят на точките (всяка броена $\frac{k}{3}$ пъти) е равен на $2a + 3(k - a)$, откъдето $2a + 3(k - a) = \frac{nk}{3}$. От друга страна, тъй като n точки определят $\frac{n(n-1)}{2}$ прави (някои от които съвпадат) и всяка права с три точки върху нея е броена три пъти, то $a + 3(k - a) = \frac{n(n-1)}{2}$. От получените две равенства

намираме $a = \frac{n(n-1)(9-n)}{2(2n-9)}$ и $k = \frac{3n(n-1)}{2(2n-9)}$. Тъй като $k \leq \frac{n(n-1)}{2}$, то $2n-9 \geq 3$, т.е. $n \geq 6$ и тъй като $a \geq 0$, то $n \leq 9$. При $n = 7$ стойностите на a и k не са цели и следователно $n = 8$ или $n = 9$. При $n = 8$ имаме $k = 12, a = 4$, а при $n = 9$ получаваме $k = 12, a = 0$.

Да означим с l максималния брой точки измежду дадените n , никои три от които не лежат на една права. Тогава всички останали точки лежат на правите, определени от тези l точки.

1. $l = 3$ и нека това са точките A_1, A_2, A_3 . Всяка от останалите точки лежи на една от трите прави A_1A_2, A_1A_3 и A_2A_3 . Тъй като на една права няма повече от 3 точки, то имаме най-много 6 точки, противоречие.

2. $l = 4$ и нека това са точките A_1, A_2, A_3, A_4 . Тъй като точките са поне 8, то съществува точка, която лежи на точно една от правите, определени от A_1, A_2, A_3, A_4 . Без ограничение това е A_5 и $A_5 \in A_1A_2$. Тогава четворките точки A_3, A_4, A_1, A_5 и A_3, A_4, A_2, A_5 са в общо положение. Следователно всички точки трябва да лежат на правите, определени от A_1, A_2, A_3, A_4 и A_3, A_4, A_1, A_5 и A_3, A_4, A_2, A_5 . Единствените общи прави са A_3A_4 и $A_1A_2A_5$, т.е. всички точки лежат на две прави, противоречие с факта, че на права няма повече от 3 точки.

3. $l = 5$ и нека това са точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . От всяка от точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 излизат по точно 4 прави. Това означава, че $A_6A_i, i = 1, 2, \dots, 5$ трябва да е измежду вече съществуващите прави. Без ограничение можем да считаме, че $A_6 \in A_1A_2$. Тогава A_6A_3 трябва да съвпада с някоя от правите A_3A_4, A_3A_5 или A_4A_5 . Без ограничение $A_6 \in A_3A_4$ и тогава A_6A_5 е нова права, противоречие.

12.1. а)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(1 - \cos x)[k(1 + \cos x + \cos^2 x) - \cos^2 x]}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} (k - f(x)) = \\ &= \frac{(1 - \cos x)(k - f(x))}{f(x)}. \end{aligned}$$

б) Ако $\cos x = t$, то при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ е изпълнено $t \in (0; 1]$. Производната на функцията $h(t) = \frac{t^2}{1+t+t^2}$ е $h'(t) = \frac{t^2+2t}{(1+t+t^2)^2}$ и $h'(t) > 0$ при $t \in (0; 1]$, откъдето следва, че $h(t)$ е растяща функция в разглеждания

интервал. Понеже $h(0) = 0$ и $h(1) = \frac{1}{3}$, то множеството от стойностите на $h(t)$, а следователно и на $f(x)$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, е интервалът $\left(0; \frac{1}{3}\right]$.

в) Ако $k < 0$, то $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} g(x) < 0$, и следователно тези стойности на k не са решения на задачата. Директно се проверява, че и $k = 0$ не е решение. От б) следва, че при $k \geq \frac{1}{3}$ е изпълнено $g'(x) > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Но $g(0) = 0$ и следователно неравенството $g(x) \geq 0$ е изпълнено при всяко $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ако $k \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$, то уравнението $g'(x) = 0$ има точно един корен $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, когато $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. От поведението на функциите $f(x)$ и $y = \cos x$ следва, че $g'(x) < 0$ при $x \in (0; x_0)$, т.е. $g(x)$ е намаляваща в този интервал. Но $g(0) = 0$ и значи разглежданото неравенство не е изпълнено за такива стойности на k .

И така, отговорът е $k \in \left[\frac{1}{3}; \infty\right)$.

12.2. При стандартните означения за елементите на триъгълника имаме, че

$$\cotg \sphericalangle AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot MB \sin \sphericalangle AMB} = \frac{a^2 + b^2 - 5c^2}{12S_{ABC}}.$$

Понеже $\cotg 2\gamma = \frac{2 \cos^2 \gamma - 1}{2 \sin \gamma \cos \gamma}$, условието $\sphericalangle AMB = 2\gamma$ добива вида

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + b^2 - 5c^2}{3ab} &= 2 \cos \gamma - \frac{1}{\cos \gamma} \iff \\ \frac{a^2 + b^2 - 5c^2}{3ab} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} &= -\frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} \iff \\ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3ab} &= \frac{ab}{a^2 + b^2 - c^2} \iff \end{aligned}$$

$$(a^2 + b^2)^2 - c^4 = 3a^2b^2 \iff c^4 = a^4 + b^4 - a^2b^2.$$

б) Лесно се проверява, че $a^4 + b^4 - a^2b^2 \geq (a^2 + b^2 - ab)^2$ за произволни $a, b > 0$. Тогава от а) следва, че $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2 \geq a^2 + b^2 - ab$. Оттук $\cos \gamma \leq \frac{1}{2}$, т.е. $\gamma \geq 60^\circ$

Забележка. Неравенството б) следва и от факта, че M лежи на отсечката с краища центъра на описаната окръжност O и ортоцентъра H на $\triangle ABC$.

Наистина, понеже $\sphericalangle AMB = 2\gamma = \sphericalangle AOB$, то H не лежи във вътрешността на описаната окръжност около $\triangle AOB$. Тъй като $\gamma < 90^\circ$, то O , H и C лежат в една и съща полуравнина спрямо правата AB и тогава

$$180^\circ - \gamma = \sphericalangle AHB \leq \sphericalangle AOB = 2\gamma, \quad \text{т.е.} \quad \gamma \geq 60^\circ.$$

12.3. Като положим $h(x) = f(x+1) - 1$, лесно се проверява, че условията за $f(x)$ са еквивалентни на $h(x) = ax$ за всяко $x \in [1, 2)$ и $h(h(x)) = -2x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Тогава $h(-2x) = h(h(h(x))) = -2h(x)$; в частност $h(0) = 0$. По индукция $h(4^n x) = 4^n h(x)$ и значи $h(x) > 0$ при $x \in [4^n, 2 \cdot 4^n)$ за всяко цяло n . Понеже $0 > -2x = h(h(x)) = h(ax)$ при $x \in [1, 2)$, то $[a, 2a) \subset [2 \cdot 4^k, 4^{k+1})$ за някое цяло k . Следователно $a = 2 \cdot 4^k$. Обратно, ако a има този вид, то директно се проверява, че функцията

$$h(x) = \begin{cases} ax, & x \in [4^n, 2 \cdot 4^n), \\ -\frac{2x}{a}, & x \in [2 \cdot 4^n, 4^{n+1}), \\ 0, & x = 0, \\ ax, & x \in (-4^{n+1}, -2 \cdot 4^n], \\ -\frac{2x}{a}, & x \in (-2 \cdot 4^n, -4^n], \end{cases}$$

където n "пробягва" целите числа, има исканите свойства. Лесно може да се докаже, че това е единствената функция с тези свойства.

52. Национална олимпиада по математика

Областен кръг

1. Нека $ABCD$ е трапец с лице 10 и бедро $AD = 4$, перпендикулярно на основите $AB = a$ и $CD = b$, $a > b$. Нека правата $MN \parallel AB$, $M \in AD$, $N \in BC$, го разделя на два трапеца, в които могат да се впишат окръжности. Означаваме $MN = c$, $AM = h_1$ и $DM = h_2$. Тогава $h_1^2 + (a-c)^2 = (a+c-h_1)^2$, т.е. $h_1 = \frac{2ac}{a+c}$. Аналогично $h_2 = \frac{2bc}{b+c}$, откъдето $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a(b+c)}{b(a+c)}$. От друга страна, $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a-c}{c-b}$ и следователно $(a+b)(ab-c^2) = 0$. Тогава $c^2 = ab$, $h_1 = \frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $h_2 = \frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ и $h_1 + h_2 = 2\sqrt{ab}$. От условието получаваме, че $\sqrt{ab} = 2$, $a+b = 5$, т.е. a и b са корени на уравнението $x^2 - 5x + 4 = 0$. Следователно $a = 4$, $b = 1$ и търсените радиуси са равни на $\frac{h_1}{2} = \frac{4}{3}$ и $\frac{h_2}{2} = \frac{2}{3}$.

2. Яна има печеливша стратегия при $n \leq 10$, като напише например числата $1, 2, \dots, 2^{n-1}$. Наистина, както и да играе Иво, полученият резултат не може да се дели на 2003, защото е между -1023 и 1023 и не е равен на 0, понеже има знака, поставен пред най-голямото неизтрито число ($2^j > 2^j - 1 = \sum_{i=0}^{j-1} 2^i$).

Ако $n \geq 11$, множеството C на избраните от Яна числа има $2^n - 1 > 2003$ различни непразни подмножества. Следователно сумите на числата в две от тях, например A и B , дават равни остатъци при деление на 2003. Ако Иво постави $+$ пред числата от $A \setminus B$, $-$ пред числата от $B \setminus A$ и изтрие останалите числа от C , той печели, защото получената сума се дели на 2003.

3. От условието следва, че

$$4(an-1) < n + a(an) \text{ и } 4an > n + a(an-1) - 1,$$

$$\text{т.е. } 1 + a^2 - \frac{a+1}{n} < 4a < 1 + a^2 + \frac{4}{n}.$$

При $n \rightarrow \infty$ заключаваме, че $1 + a^2 = 4a$, откъдето $a = 2 - \sqrt{3}$ или $a = 2 + \sqrt{3}$. Като заместим $n = 1$ в условието виждаме, че първият случай не

е възможен. Във втория случай полагаме $b = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ и $c = \frac{n}{a} - b$. Понеже $a = 4 - \frac{1}{a}$, то

$$\begin{aligned} n + [a[an]] &= [n + a[4n - \frac{n}{a}]] = [n + a(4n - b - 1)] = [a(4n - 1 + c)] = \\ &= [(4 - \frac{1}{a})(4n - 1 + c)] = [4(4n - 1) - 4(\frac{n}{a} - c) + \frac{1 - c}{a}] = 4(4n - 1 - b) = \\ &= 4[4n - \frac{n}{a}] = 4[an]. \end{aligned}$$

Следователно $a = 2 + \sqrt{3}$ е единственият отговор на задачата.

4. Ако $H = AC \cap EF$, то $\sphericalangle CDG = \sphericalangle FHC$ и

$$\frac{CD}{DG} = \frac{BD}{DG} = \frac{FH}{HE} = \frac{FH}{HC}.$$

Тогава $\triangle CDG \sim \triangle FHC$ и значи $\sphericalangle GCD = \sphericalangle CFH$, откъдето

$$\sphericalangle BCG = \sphericalangle BCD - \sphericalangle GCD = \sphericalangle CEH - \sphericalangle CFH = \sphericalangle BCF.$$

5. Ако $y = 0$, от първото уравнение следва, че $x = -z$, заместваме във второто и намираме $x = z = 0$, като тройката $(0, 0, 0)$ очевидно е решение на системата. При $y \neq 0$ полагаме $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{z}{y}$ и системата добива вида

$$\begin{cases} 1 + a + b = 3ay \\ 1 + a^2 + b^2 = 3ab \\ y(1 + a^3 + b^3) = 3b. \end{cases}$$

Като изключим y , получаваме

$$\begin{cases} (1 + a + b)(1 + a^3 + b^3) = 9ab \\ 1 + a^2 + b^2 = 3ab. \end{cases}$$

Тогава за $u = a + b$, $v = ab$ имаме, че

$$\begin{cases} (1 + u)(1 + u^3 - 3uv) = 9v \\ 1 + u^2 - 2v = 3v \end{cases}$$

откъдето $v = \frac{u^2 + 1}{5}$ и $0 = u^4 + u^3 - 6u^2 + u - 2 = (u - 2)(u^3 + 3u^2 + 1)$. Случаят $u = 2$ води до $v = 1$, $a = b = 1$ и решението $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Функцията

$f(u) = u^3 + 3u^2 + 1$ има локален максимум при $u = -2$ и локален минимум при $u = 0$. Понеже $f(0) = 1 > 0$, уравнението $f(u) = 0$ има единствен реален корен u_0 , като $u_0 < -2$. Тогава $u_0^2 - 4\frac{u_0^2 + 1}{5} = \frac{u_0^2 - 4}{5} > 0$ и следователно системата

$$\begin{cases} a + b = u_0 \\ ab = \frac{u_0^2 + 1}{5} \end{cases}$$

има две решения, които водят до още две решения на дадената система. Окончателно, системата от условието на задачата има четири реални решения.

6. Нека $p_1, p_2, \dots, p_n$ са всички прости делители на всевъзможните разлики на две различни числа от C . Да допуснем, че за всяко p_i съществува остатък α_i , който се среща най-много веднъж при деление на числата от C на p_i . Съгласно Китайската теорема за остатъците можем да намерим цяло число k , даващо остатък $-\alpha_i$ при деление на p_i за всяко i . От условието следва, че p_j дели $a + k$ и $b + k$ за някое j и някои $a, b \in C$. Тогава a и b дават остатък α_j при деление на p_j , което е противоречие. И така, числата от C дават поне по два пъти всеки остатък при деление на някое просто число p . Ако допуснем, че тези остатъци се срещат точно по два пъти, то сумата от числата в C ще има вида $p \cdot r + 2(0 + 1 + \dots + p - 1) = p(r + p - 1)$, $r \geq 1$ - противоречие, понеже 2003 е просто число. Следователно някой остатък се среща поне три пъти и като махнем от C кое да е число, даващо този остатък, получаваме отново "добро"множество.

Контролно за определяне на отбора за 21. БОМ

1. Да отбележим, че $\sphericalangle EDC = 2 \sphericalangle CED \iff DI = EI$, където DI ($I \in CE$) е ъглополовящата на $\sphericalangle CDE$. Нека $BD = 2AD = 4BE = 4x$ и $AC = BC = y$. Тогава

$$DI = \frac{\sqrt{ED \cdot CD((ED + CD)^2 - CE^2)}}{ED + CD} = \frac{\sqrt{3x(y - 2x)((x + y)^2 - CE^2)}}{x + y},$$

$$EI = CE \frac{ED}{ED + CD} = CE \frac{3x}{x + y}.$$

Оттук след преобразуване получаваме, че

$$DI = EI \iff CE^2 = (x + y)(x - 2y).$$

Последното следва от формулата на Стюарт за $\triangle BCD$:

$$CE^2 = \frac{BC^2 DE + CD^2 BE}{BD} - BE \cdot DE = \frac{3y^2 + (y - 2x)^2}{4} - 3x^2 = (x + y)(x - 2y).$$

2. Имаме, че

$$\begin{aligned} a + b + c - \frac{a}{b^2 + 1} - \frac{b}{c^2 + 1} - \frac{c}{a^2 + 1} &= \frac{b}{b^2 + 1}ab + \frac{c}{c^2 + 1}bc + \frac{a}{a^2 + 1}ca \\ &\leq \frac{ab + bc + ca}{2} \leq \frac{(a + b + c)^2}{6} \end{aligned}$$

и остава да използваме, че $a + b + c = 3$.

3. Нека $f(x, y)$ е числото, записано в точката с координати (x, y) . Тогава

$$f(x, y) = \frac{f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1)}{4}.$$

Да допуснем, че не всички числа са равни. Тогава има две точки на разстояние 1, в които числата са различни и след евентуална ротация можем да считаме, че $f(x_0 + 1, y_0) > f(x_0, y_0)$ за някои $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$. Тогава за $g(x, y) = f(x + 1, y) - f(x, y)$ следва, че $M = \sup_{x \in \mathbb{Z}} g(x) \in (0, 1]$ и

$$g(x, y) = \frac{g(x + 1, y) + g(x - 1, y) + g(x, y + 1) + g(x, y - 1)}{4}.$$

В частност, ако $g(a, b) \geq M - \varepsilon$, то

$$g(a+1, b) = 4g(a, b) - g(a-1, b) - g(a, b+1) - g(a, b-1) \geq 4(M - \varepsilon) - 3M = M - \varepsilon$$

и по индукция получаваме, че $g(a + n, b) \geq M - 4^n \varepsilon$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Като изберем първо $n \geq \frac{2}{M}$, след това $\varepsilon \in \left(0, \frac{M}{2 \cdot 4^{n-1}}\right]$ и накрая такива $a, b \in \mathbb{Z}$, че $g(a, b) \geq M - \varepsilon$, следва, че

$$1 > f(a + n, b) > f(a + n, b) - f(a, b) = \sum_{k=0}^{n-1} g(a + k, b) \geq n \frac{M}{2} \geq 1,$$

което е противоречие.

4. Пресмятаме, че $P_1(x) = P_2(x) = 1$, $P_3(x) = x + 1$, $P_4(x) = x^2 + 1$, $P_6(x) = x^4 + 1$. Следователно $n = 1, 2, 3, 4, 6$ са измежду търсените числа. Ще докажем, че други няма.

За целта ще покажем, че при $n \geq 3$ полиномът $P_n(x)$ има делител от вида $1 + x^r$, $r \geq 1$, който не съвпада с него при $n = 5$ и $n \geq 7$.

Ако $n \geq 3$ е просто число, това следва от разлагането

$$P_n(x) = (1 + x)(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{n-3}).$$

При $n = 4$ имаме, че $P_4(x) = x^2 + 1$.

По-нататък ще разсъждаваме индуктивно по n .

Когато $n \geq 6$ е съставно, то $n = mp$, където $m \geq 3$ и p е просто число.

1. p дели m . Имаме, че $A_n = \cup_{i=0}^{p-1} (A_m + im)$ и значи $P_n(x) = P_m(x) \sum_{i=0}^{p-1} x^{im}$.

Остава да съобразим, че съгласно индуктивното предположение $P_m(x)$ има делител от вида $1 + x^r$.

2. p не дели m . Тогава $A_n = \left(\cup_{i=0}^{p-1} (A_m + im)\right) \setminus (pA_m)$ и понеже $x^{kp-1} = x^{p-1}(x^p)^{k-1}$, то $P_n(x) = P_m(x) \sum_{i=0}^{p-1} x^{im} - x^{p-1} P_m(x^p)$. Съгласно индуктивното предположение $P_m(x)$ има делител от вида от $1 + x^r$. Следователно $1 + x^{pr}$ дели $P_m(x^p)$.

а) $p \geq 3$. Тъй като p е нечетно, то $1 + x^r$ дели $1 + x^{pr}$. Значи $1 + x^r$ дели $P_m(x^p)$, а оттам и $P_n(x)$.

б) $p = 2$. Можем да считаме, че m е просто число (иначе ще заменим p с прост множител на m и ще попаднем в първия случай.) Тогава

$$P_n(x) = (1 + x^{m+1})(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{m-3}).$$

Остава да отбележим, че $P_n m$ съвпада със съответния множител $1 + x^r$ само при $n = 3, 4, 6$, с което задачата е решена.

Контролно за определяне на отбора за 44. МОМ

1. Не е трудно да се съобрази, че сумата от лицата е максимална, ако правоъгълниците имат общи страни, но не и общи вътрешни точки, страната на най-долния лежи на AB и всеки има по един връх на страните AC и BC . Ще докажем по индукция, че максималната сума при n правоъгълника се достига, когато страната AC е разделена на $n + 1$ равни части от върховете на правоъгълниците върху нея. Оттук ще следва, че максималната сума е $\frac{(k-1)S}{k}$, където $S = S_{ABC}$.

При $n = 1$ търсим правоъгълник $MNPQ$, $M, N \in AB$, $P \in BC$, $Q \in AC$, с максимално лице. Ако означим $\frac{CQ}{AC} = x$, лесно се вижда, че $S_{MNPQ} = 2x(1-x)S$, което означава, че лицето е максимално при $x = \frac{1}{2}$, т.е. когато Q е среда на AC .

Нека твърдението е вярно за k правоъгълника и да разгледаме $k + 1$ правоъгълника $M_i N_i P_i Q_i$, $M_i, N_i \in P_{i-1} Q_{i-1}$ ($P_0 \equiv A$, $Q_0 \equiv B$), $P_i \in BC$, $Q_i \in AC$, $i = 1, 2, \dots, k + 1$. Ако $\frac{CQ_1}{AC} = x$, то $S_{M_1 N_1 P_1 Q_1} = 2x(1-x)S$.

От индукционното предположение следва, че $\sum_{i=2}^{k+1} S_{M_i N_i P_i Q_i}$ е максимална, когато $Q_1 Q_2 = Q_2 Q_3 = \dots = Q_k Q_{k+1} = Q_{k+1} C$ и следователно

$$\sum_{i=2}^{k+1} S_{M_i N_i P_i Q_i} \leq \frac{(k-1)S_{Q_1 P_1 C}}{k} = \frac{(k-1)x^2 S}{k}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} S_{M_i N_i P_i Q_i} &\leq \left(2x(1-x) + \frac{(k-1)x^2}{k} \right) S \\ &= \left[\frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k} \left(x - \frac{k}{k+1} \right)^2 \right] S \leq \frac{kS}{k+1}, \end{aligned}$$

като равенство се достига при $x = \frac{k}{k+1}$.

2. От условието

$$(1) \quad f(x^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x))^2$$

следва, че f приема всяка реална стойност. Освен това, $(f(x))^2 = (f(-x))^2$. Нека $f(a) = 0$ за някое a (такова a съществува). Тогава $f(-a) = 0$ и при $x = 0$, $y = \pm a$ от (1) следва, че $0 = f(\pm a) = (f(0))^2 \pm 2a$, т.е. $a = 0$. Като заместим $y = -\frac{f(x^2)}{2}$ в (1), получаваме, че $f(x^2 + y + f(y)) = 0$, откъдето $y + f(y) = -x^2$. Значи $y + f(y)$ приема всяка неположителна стойност. Понеже $f(0) = 0$, от (1) следва, че

$$f(x^2) = ((f(x))^2 \geq 0 \text{ и } f(y + f(y)) = 2y.$$

Като положим $z = x^2$ и $t = y + f(y)$, пак от (1) заключаваме, че

$$f(z + t) = f(z) + f(t) \text{ за произволни } t \geq 0 \geq z.$$

Оттук $f(-t) = -f(t)$ и тогава лесно получаваме, че

$$f(z + z) = f(z) + f(t) \text{ за произволни } z \text{ и } t$$

(използвайте, че $f(-t) = -f(t)$). Понеже $f(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, следва, че f е растяща функция. Сега ако допуснем, че $f(y) > y$, то $f(f(y)) \geq f(y)$ и достигахме до противоречието

$$2y = f(y + f(y)) = f(y) + f(f(y)) > 2f(y).$$

Аналогично се вижда, че не може $f(y) < y$. Следователно $f(x) \equiv x$, като тази функция очевидно изпълнява (1).

3.

4. Ще докажем по индукция, че отговорът е отрицателен, т.е. за всяко естествено число $k \geq 3$ съществува пермутация $a_1, a_2, \dots, a_k$ на числата $1, 2, \dots, k$, за която равенството $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ не е изпълнено за някои m и n , $1 \leq m < n \leq k$.

При $k = 3$ и $k = 4$ исканото свойство притежават съответно пермутациите $1, 3, 2$ и $1, 3, 2, 4$. Нека твърдението е вярно за всички числа, по-малки от k . Да направим следната първоначална пермутация: в първи блок (позиции от 1 до $\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$) да са нечетните числа, после във втори блок тези, които се делят на 2, но не и на 4 и т.н. (например при $k = 12$ имаме следните четири блока: $1, 3, 5, 7, 9, 11; 2, 6, 10; 4, 12; 8$).

Ако a_m и a_n са в различни блокове, да означим $a_m = 2^s b$, $a_n = 2^t c$, където $t > s > 0$ (при $s = 0$ лесно получаваме противоречие). Тогава

$\frac{a_m + a_n}{2} = 2^{s-1}(b + 2^{t-s}c)$ е в s -тия блок, а $a_{\frac{m+n}{2}}$ е между a_m и a_n , т.е. в някой от блоковете с номер $s+1, \dots, t+1$. Следователно исканото равенство не е възможно за числа от различни блокове независимо от наредбата вътре в блоковете.

Остава да покажем как можем да подредим числата във фиксиран блок така, че равенството $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ да не е изпълнено за никои a_m и a_n от този блок. Да разгледаме $(r+1)$ -вия блок $2^r, 3 \cdot 2^r, \dots, (2d-1)2^r$, където $2d-1 \leq k$. Съгласно индукционното предположение съществува пермутация на $b_1, b_2, \dots, b_d$ на числата $1, 2, \dots, d$ с исканото свойство. Да положим $c_i = 2b_i - 1$ за $i = 1, 2, \dots, d$ и да подредим разглеждания блок във вида $2^r c_1, 2^r c_2, \dots, 2^r c_{2d-1}$. Тогава имаме

$$\frac{c_m + c_n}{2} = b_m + b_n - 1 \neq 2b_{\frac{m+n}{2}} - 1 = c_{\frac{m+n}{2}},$$

с което доказателството е завършено.

5. Ще използваме следния факт: ако α, β, γ и δ са ъгли, за които $\sin \alpha \sin \delta = \sin \beta \sin \gamma$ и $\alpha + \beta = \gamma + \delta < 180^\circ$, то $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$.

Да означим с M, N, R и S допирните точки на вписаната окръжност съответно със страните AB, BC, CD и DA . Тогава точките A, M, O, P и S лежат на окръжността с диаметър AO и $\angle APM = \frac{\widehat{AM}}{2} = \frac{\widehat{AS}}{2} = \angle APS$. Аналогично имаме $\angle CPR = \angle CPN$ и следователно $\angle SPR = \angle MPN$ от допълването до 180° .

От синусовата теорема за $\triangle BPM$ и $\triangle BPN$ имаме

$$\frac{\sin \angle MPB}{\sin \angle PMB} = \frac{BM}{BP} = \frac{BN}{BP} = \frac{\sin \angle BPN}{\sin \angle BNP},$$

откъдето $\frac{\sin \angle MPB}{\sin \angle NPB} = \frac{\sin \angle PMB}{\sin \angle PNB}$. Но $\angle PMB = 180^\circ - \angle AMP = 180^\circ - \angle AOP$ и $\angle PNB = 180^\circ - \angle CNP = 180^\circ - \angle COP$, което означава, че $\frac{\sin \angle MPB}{\sin \angle NPB} = \frac{\sin \angle AOP}{\sin \angle COP}$. Аналогично се вижда, че $\frac{\sin \angle SPD}{\sin \angle RPD} = \frac{\sin \angle AOP}{\sin \angle COP}$ и остава да приложим споменатия по-горе факт за ъглите $\alpha = \angle MPB$, $\beta = \angle NPB$, $\gamma = \angle SPD$ и $\delta = \angle RPD$. Получаваме $\angle MPB = \angle SPD$ и следователно $\angle APB = \angle APM + \angle MPB = \angle APS + \angle SPD = \angle APD$.

6.

20. Балканска олимпиада по математика

1. Да, например множеството $A = \{2003k, 2003k + 1 : k = 1, 2, \dots, 2002\}$. Ако изберем t елемента с остатък 1 и $2003 - t$ елемента с остатък 0, то сумата на тези 2003 числа дава остатък t при деление на 2003 и понеже $1 \leq t \leq 2002$, то t не се дели на 2003.

2. Без ограничение можем да считаме, че $\angle ABC > \angle ACB$. Ако C_1 и B_1 са среди съответно на AB и AC , то $\angle FCB_1 = 90^\circ - \gamma$ и $\angle C_1BE = 90^\circ - \beta$ (ако $\beta \leq 90^\circ$) или $\angle C_1BE = \beta - 90^\circ$ (ако $\beta > 90^\circ$). Тогава $BE = \frac{c}{2 \sin \beta}$

и $CF = \frac{b}{2 \sin \gamma}$. Тъй като $\angle BAD = \gamma$, от синусовата теорема за $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ имаме $DB = \frac{c \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)}$ и $DC = \frac{b \sin(\gamma + \alpha)}{\sin(\beta - \gamma)}$. Следователно

$$\frac{BD}{BE} = \frac{2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{DC}{CF},$$

което означава, че $\triangle DBE \sim \triangle DCF$, Тогава $\angle BDE = \angle CDF$, т.е. D , E и F лежат на една права.

3. Записваме първото равенство във вида

$$f(x + y) + (x + y) = (f(x) + x)(f(y) + y)$$

и след субституцията $g(x) = f(x) + x$ получаваме класическото уравнение $g(x + y) = g(x)g(y)$. Както е добре известно, неговите решения са $g(x) = 0$ и $g(x) = a^x$, $a > 0$. Понеже $f(0) = 2(f(1) + 1) > 0$, то $g(x) \neq 0$. Сега от второто равенство, което е еквивалентно на $g(x + 1) = 2g(x)$, намираме, че $a = \frac{1}{2}$. Следователно $f(x) = 2^{-x} - x$, като тази функция очевидно изпълнява условията на задачата.

4. Можем да считаме, че $m \geq n$. Ще казваме, че отсечката $A_p A_{p+1}$ е от първи вид, ако точките A_p и A_{p+1} са пресечни точки на AC с вертикални страни на единични квадратчета. Когато едната от точките A_p или A_{p+1} е пресечна точка на AC с хоризонтална страна на квадратче, ще казваме, че отсечката $A_p A_{p+1}$ е от втори вид.

Диагоналът AC пресича $m - 1$ пъти вертикални страни и $n - 1$ пъти хоризонтални страни. Тъй като $\gcd(m, n) = 1$ всички такива точки са различни и следователно те разделят AC на $m + n - 1$ отсечки. Понеже

първото събираемо е със знак $+$ и $m+n-1$ е нечетно число, получаваме, че положителните събираеми са с едно повече от отрицателните. Да забележим, че ако A_p е пресечна точка на AC с хоризонтална страна, то $A_{p-1}A_p$ и A_pA_{p+1} са от втори вид и имат противоположни знаци. Следователно отсечките от първи вид със знак $+$ са с една повече от отсечките от първи вид със знак $-$, което означава, че отсечките от първи вид дават принос в търсената сума точно дължината на една такава отсечка, т.е. $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$.

За фиксирано $k = 1, 2, \dots, n-1$, нека $km = t_k n + r_k$, където $0 < r_k < n$. Тогава пресечната точка на AC с хоризонталната права k (без да броим AB) има координати (по отношение на координатна система с център A) $(t_k + \frac{r_k}{n}; k)$ и това е точка номер $s = k + t_k + 1$. Това означава, че когато $k + t_k$ е четно, то $A_{s-1}A_s$ има знак $-$ и A_sA_{s+1} има знак $+$ и аналогично когато $k + t_k$ е нечетно, то $A_{s-1}A_s$ има знак $+$ и A_sA_{s+1} има знак $-$.

Да забележим, че r_k има същата четност както $k + t_k$. Наистина, ако k е четно, то $t_k n + r_k$ е четно, което означава, че t_k и r_k имат еднаква четност. Ако k е нечетно, то $t_k n + r_k$ е нечетно, т.е. t_k и r_k са с различна. И в двата случая r_k и $k + t_k$ имат една и съща четност.

От друга страна, тъй като $pm = qm \pmod{n}$ дава $p = q \pmod{n}$, то r_k "пробягва" всички остатъци по модул n . Следователно, когато r_k е четно имаме $-A_{s-1}A_s + A_sA_{s+1} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m} \left(\frac{-r_k + (n-r_k)}{n} \right)$, а когато r_k е нечетно, получаваме $+A_{s-1}A_s - A_sA_{s+1} = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m} \left(\frac{r_k - (n-r_k)}{n} \right)$.

И така, търсената сума е равна на

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} A_i A_{i+1} &= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m} \left(1 + \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n-4s}{n} + \sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{4s-2-n}{n} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m} \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}. \end{aligned}$$

44. Международна олимпиада по математика

1. Ако $x + t_i = y + t_j$ за някои $x, y \in A$ и $i, j \in \{1, 2, \dots, 100\}$, то $x - y = t_j - t_i$, т.е. разликата $t_j - t_i$ се среща измежду разликите на елементи от A . Очевидно е вярно и обратното. Следователно трябва да избираме числата $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ от S така, че никоя тяхна разлика да не е разлика на елементи от A .

Избираме t_1 по произволен начин и нека сме избрали $t_1, t_2, \dots, t_k, k \leq 99$. Всяко от избраните вече k числа забранява най-много $|B| + 1 \leq 101 \cdot 101 + 1 = 10101$, където $B = \{x - y | x, y \in A\}$ е множеството от разликите на елементите от A . Тъй като $10101k \leq 999999$, изборът на $k + 1$ -вото число може да бъде извършен.

2. Тъй като знаменателят трябва да е положителен, от $2ab^2 - b^3 + 1 = b^2(2a - b) + 1 > 0$ следва, че $2a - b \geq 0$. Да отбележим, че при $2a - b > 0$ от неравенството $b^2(2a - b) + 1 \leq a^2$ следва, че $b < a$.

При $b = 1$ получаваме решението $(a, b) = (2k, 1)$. Нека $b > 1$ и $x = \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ е естествено число. Тогава a е корен на квадратното уравнение $a^2 - 2xb^2a + (b^3 - 1)x = 0$. Решенията са $a_{1,2} = xb^2 \pm t$, където t е естествено число и $t^2 = x^2b^4 - xb^3 + x$. От формулите на Виет следва, че ако единият корен е естествено число, то и другият е такова.

Тъй като $a_1 = xb^2 + t > xb^2$, за по-малкия корен имаме $a_2 < \frac{a_1 a_2}{xb^2} = \frac{x(b^3 - 1)}{xb^2} < b$, което е невъзможно при $2a > b$. Следователно за a_2 имаме

$2a_2 - b = 0$, откъдето $k = \frac{b}{2} = a_2 = xb^2 - t$. Тогава $\left(xb^2 - \frac{b}{2}\right)^2 = t^2 = x^2b^4 - xb^3 + x$, значи $x = \frac{b^2}{4}$ и $a_1 = \frac{b^4 - b}{2}$. Така получаваме, че всички решения са $(a, b) = (k, 2k)$ и $(8k^4 - k, 2k)$, където k е естествено число.

3. Ще използваме следния факт: в произволен $\triangle PQR$ с $\angle QPR \geq 60^\circ$ медианата PM не надминава $\frac{QR\sqrt{3}}{2}$, като равенство се достига точно когато $\triangle PQR$ е равностранен.

Нека диагоналите AD и BE се пресичат в точка P . Без ограничение на общността можем да считаме, че $\angle APB \geq 60^\circ$. Да означим с M и N средите съответно на AB и DE . Тогава от условието, горната забележка и неравенството на триъгълника следва, че $MN = \frac{(AB + DE)\sqrt{3}}{2} \geq PM +$

$PN \geq MN$. Следователно $\triangle APB$ и $\triangle DPE$ са равностранни.

Не е трудно да се съобрази, че диагоналът CF сключва с някои от диагоналите AD и BE ъгъл, който е поне 60° (независимо от това, дали минава през P или не). Без ограничение на общността можем да считаме, че AD и CF се пресичат в точка Q и $\angle A Q F \geq 60^\circ$. Тогава както по-горе заключаваме, че $\triangle A Q F$ и $\triangle C Q D$ са равностранни.

Нека CF и BE се пресичат в точка R . Тогава $\triangle P Q R$ е равностранен или точките P , Q и R съвпадат, като и в двата случая имаме $\angle B R C = 60^\circ$. Отново прилагаме горното разсъждение и заключаваме, че $\triangle B C R$ и $\triangle E F R$ са равностранни. Сега вече лесно се вижда, че всички ъгли на шестоъгълника са равни на 120° и главните диагонали ги разполовяват.

4. Очевидно четириъгълникът $APRD$ е вписан в окръжност $k(O, r)$ с диаметър AD . Имаме $\angle P A R = \frac{1}{2} \angle P O R$ и $P R = 2r \sin \frac{1}{2} \angle P O R = A D \sin \angle P A R = A D \sin \angle B A C$. Аналогично се вижда, че $R Q = C D \sin \angle R C Q = C D \sin \angle A C B$.

От синусовата теорема за $\angle A B C$ имаме $\frac{\sin \angle A C B}{\sin \angle B A C} = \frac{A B}{B C}$. Следователно $\frac{A D}{C D} = \frac{P R}{R Q} \cdot \frac{A B}{B C}$. Остава да отбележим, че равенството $\frac{A D}{C D} = \frac{A B}{B C}$ е необходимо и достатъчно условие за пресичането на ъглополовящите на $\angle A B C$ и $\angle A D C$ върху $A C$.

5. а,б) Да оценим дясната страна с помощта на неравенството на Коши-Буняковски по следния начин

$$\sum_{i,j=1}^n (x_i - x_j)^2 \geq \frac{\left(\sum_{i,j=1}^n (i-j)(x_i - x_j)\right)^2}{\sum_{i,j=1}^n (i-j)^2} = \frac{6 \left(\sum_{i,j=1}^n (i-j)(x_i - x_j)\right)^2}{n^2(n^2 - 1)}.$$

Да отбележим, че равенство се достига точно когато $\frac{x_i - x_j}{i - j} = \text{const}$, което е необходимо и достатъчно условие за аритметична прогресия.

Остава да докажем, че

$$\frac{2(n^2 - 1)}{3} \cdot \frac{6 \left(\sum_{i,j=1}^n (i-j)(x_i - x_j)\right)^2}{n^2(n^2 - 1)} \geq \left(\sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j|\right)^2.$$

Това неравенство е еквивалентно на $\sum_{i,j=1}^n (i-j)(x_i - x_j) \geq \frac{n}{2} \sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j|$.

Чрез сравняване на коефициентите пред x_i не е трудно да се провери, че това всъщност е равенство, с което решението е завършено.

6. Ако $p = 2$, то $q = 3$ има исканите свойства.

Нека p е нечетно. Да разгледаме числото $N = 1 + p + p^2 + \dots + p^{p-1}$. Очевидно N е нечетно и $N \equiv p + 1 \pmod{p^2}$. Тогава $N \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ и следователно N има прост делител q , за който $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Ще докажем, че q има исканите свойства.

Тъй като p не дели N , имаме $q \neq p$. Освен това, ако допуснем, че q дели $p - 1$, то $N \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p \pmod{q}$, т.е. q дели p , което е невъзможно. Следователно q не дели $p - 1$. Да отбележим още, че от равенството $(p - 1)N = p^p - 1$ следва, че $p^p \equiv 1 \pmod{q}$.

Да допуснем, че $n^p \equiv p \pmod{q}$ за някое естествено число n . От горното следва, че n не се дели на q и $n \not\equiv 1 \pmod{q}$. Повдигаме на p -та степен и получаваме $n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 \pmod{q}$.

Нека k е показателят на n по модул q . Тогава k дели едновременно $q - 1$ (поради малката теорема на Ферма) и p^2 (поради последното сравнение). Тъй като от избора на q следва, че $q - 1$ не дели p^2 , имаме $k = 1$ или $k = p$. Първото противоречи на $n \not\equiv 1 \pmod{q}$. Във втория случай получаваме $n^p \equiv 1 \pmod{q}$, което заедно с предположението $n^p \equiv p \pmod{q}$ показва, че $p \equiv 1 \pmod{q}$, което е невъзможно.

Български математически състезания, 2004 г.

Зимни математически състезания

9.1. Очевидно трябва да е изпълнено

$$\left| \begin{array}{l} D = a^3 - a^2 - 9a + 9 > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{6}{a^2 - a - 9} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{-a}{a^2 - a - 9} > 0 \end{array} \right. .$$

Първото неравенство е изпълнено за всяко $a \in (-3, 1) \cup (3, +\infty)$, второто – за всяко $a \in ((1 - \sqrt{37})/2, (1 + \sqrt{37})/2)$, а третото – за всяко $a \in (-\infty, 0)$. Окончателно търсените стойности за a са всички реални числа от интервала $a \in (-3, (1 - \sqrt{37})/2)$.

9.2. Означаваме средите на AD и BC съответно с M и N . Без ограничение на общността ще считаме, че I е вътрешна за $AMNB$, а E е вътрешна за $MDCN$. Имаме

$$\begin{aligned} S_{MIN} &= S_{AMNB} - S_{ABI} - S_{AMI} - S_{BNI} \\ &= S_{AMNB} - S_{ABI} - \frac{1}{2}(S_{ADI} + S_{BCI}) \\ &= S_{AMNB} - \frac{1}{2}S_{ABI} - \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{CDI}). \end{aligned}$$

Аналогично, $S_{MEN} = S_{MDNC} - \frac{1}{2}S_{DCE} - \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{ABE})$. Сега от $S_{MIN} = S_{MEN}$ получаваме

$$\begin{aligned} S_{AMNB} - \frac{1}{2}S_{ABI} - \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{CDI}) &= S_{MDNC} - \frac{1}{2}S_{DCE} - \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{ABE}) \\ \frac{1}{2}S_{ADN} + \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{2}S_{ABI} - \frac{1}{2}(S_{ABCD} + \frac{1}{2}S_{CDI}) &= \\ \frac{1}{2}S_{ADN} + \frac{1}{2}S_{CBD} - \frac{1}{2}S_{DCE} - \frac{1}{2}(S_{ABCD} + \frac{1}{2}S_{ABE}) &= \\ S_{ABC} - S_{CBD} + S_{DCE} - S_{ABE} &= S_{ABI} - S_{CDI} \\ S_{ABE} - S_{CDE} + S_{DCE} - S_{ABE} &= S_{ABI} - S_{CDI}. \end{aligned}$$

Следователно, $S_{ABI} = S_{CDI}$, откъдето $AB = CD$.

9.3. Нека $f(n)$ е минималният брой цветове, с които могат да бъдат оцветени естествените числа от 1 до n така, че да не съществува тройка различни едноцветни числа a, b, c , за които a дели b и b дели c . Ще докажем, че $f(n) = \lfloor (k+1)/2 \rfloor$, където $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Най-напред в редицата $1, 2, 2^2, \dots, 2^{k-1}$ не може да има три едноцветни числа, откъдето следва, че $f(n) \geq \lfloor (k+1)/2 \rfloor$. Да номерираме използваните цветове с първите $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$ естествени числа и нека $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t} \leq n$. Очевидно $h(m) := \alpha_1 + \dots + \alpha_t < k$. Оцветяваме числото m в цвета с номер $\lfloor (h(m)+1)/2 \rfloor$. Ако a дели b , а b дели c , то е изпълнено $h(a) < h(b) < h(c)$, т.е. $h(c) - h(a) \geq 2$. Следователно числата a и c са оцветени в различни цветове. Прилагайки формулата за $n = 2004$, получаваме $f(2004) = 6$.

10.1. а) Тъй като $y_1 + y_2 = 1$ и $y_1 y_2 = 6a$, имаме

$$\begin{aligned} & (x^2 - y_1 x + a)(x^2 - y_2 x + a) \\ &= x^4 - (y_1 + y_2)x^3 + (2a + y_1 y_2)x^2 - a(y_1 + y_2)x + a^2 = f(x). \end{aligned}$$

б) Корените на уравнението $f(x) = 0$ се изчерпват с корените x_1, x_2 и x_3, x_4 съответно на уравненията

$$x^2 - y_1 x + a = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - y_2 x + a = 0.$$

Лесно се вижда, че x_1, x_2, x_3 и x_4 са реални, различни и положителни точно когато едновременно са изпълнени следните условия:

- 1) $a \neq 0, y_1 \neq y_2$ са реални $\iff a \neq 0, D = 1 - 24a > 0 \iff a \neq 0, a < \frac{1}{24}$;
- 2) $D_1 = y_1^2 - 4a > 0$ и $D_2 = y_2^2 - 4a > 0 \iff y_1 > 10a$ и $y_2 > 10a$;
- 3) $x_1 + x_2 = y_1 > 0, x_1 x_2 = a > 0, x_3 + x_4 = y_2 > 0$ и $x_3 x_4 = a > 0 \iff y_1 > 0, y_2 > 0$ и $a > 0$.

Тези условия са равносилни с $0 < a < \frac{1}{24}, y_1 > 10a$ и $y_2 > 10a$, или все едно с $0 < a < \frac{1}{24}, g(10a) > 0$ и $10a < \frac{1}{2} \iff 0 < a < \frac{1}{24}, 4a(25a - 1) > 0$ и $a < \frac{1}{20}$. Следователно търсените стойности на параметъра са $a \in \left(\frac{1}{25}, \frac{1}{24}\right)$.

10.2. Нека BE пресича AC в точка N и P е среда на AB . Означаваме $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC = \alpha$, $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBD = \beta$ и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB = \gamma$. Тогава $\triangle ABN \sim \triangle DBC$, а тъй като NP и CM са съответни медиани в тези триъгълници, имаме $\triangle BPN \sim \triangle BMC$.

Нека $\sphericalangle AMB = \sphericalangle BMC = \varphi$. От горното следва, че $\sphericalangle BPN = \varphi$.

Ще използваме следния факт: ако две хорди разполовяват трета и сключват с нея равни ъгли, то те са равни помежду си и се разделят на съответно равни части от пресечната си точка (направете чертеж и разгледайте еднакви триъгълници или осева симетрия). Нека AM пресича окръжността за втори път в точка F . Тогава $CM = FM$ и следователно $\triangle BMC \cong \triangle BMF$, откъдето $BC = BF$ и $\sphericalangle MAD = \sphericalangle BDC = \alpha$.

От $\triangle AMD$ получаваме $\varphi = \alpha + \gamma$. Оттук и от $\triangle APN$ заключаваме, че $\sphericalangle ANP = \varphi - \alpha = \gamma = \sphericalangle ACB$. Тогава $NP \parallel BC$, т.е. NP е средна отсечка в $\triangle ABC$ и N е среда на AC , с което твърдението е доказано.

10.3. За всяко $j = 1, 2, \dots, n$ да означим с q_j минималния прост делител на a_j . Нека $q = \max_{1 \leq i \leq n} q_i$. Без ограничение на общността можем да считаме, че този максимум се достига за $i = 1$, т.е. $q = q_1$. Очевидно имаме

$$(3n+1)^2 \geq a_1 \geq q_1^2 \geq p_n^2,$$

където с p_n означаваме n -тото просто число. Следователно $p_n \geq 3n+1$. Лесно се доказва (индукция), че $p_n > 3n+1$ за всяко $n \geq 15$. Оттук за търсената мощност n имаме $n \leq 14$. Множество с 14 елемента, притежаващо исканите свойства е например $\{2^2, 3^2, 5^2, \dots, 14^2\}$. Окончателно $n = 14$.

11.1. След полагане $y = 2^x$ задачата се свежда до намирането на всички стойности на параметъра a , за които уравнението

$$y^2 - (a^2 + 3a - 2)y + 3a^3 - 2a^2 = 0$$

има единствено положително решение. Това уравнение е еквивалентно на $(y - a^2)(y - 3a + 2) = 0$. Тъй като при $a = 0$ корените са $y_1 = 0$ и $y_2 = -2$, то $a = 0$ не е измежду търсените стойности. При $a \neq 0$ уравнението има положително решение $y_1 = a^2$. За да бъде то единствено трябва $y_2 = 3a - 2 \leq 0$ или $y_2 = y_1$. В първият случай получаваме $a \leq \frac{2}{3}$, а във вторият имаме $a^2 = 3a - 2$, откъдето $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Следователно решението е

$$a \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{2}{3}\right) \cup \{1\} \cup \{2\}.$$

11.2. Използваме стандартните означения за страните на триъгълника. Да означим радиусите на двете окръжности с r .

а) Тъй като $S_{ABC} = r \left(\frac{a+b+c}{2} + CM \right)$ и

$$\begin{aligned} S_{PQO_2O_1} &= r(MQ + MP) = r \left(\frac{MB + CM - a}{2} + \frac{MA + CM - b}{2} \right) = \\ &= r \left(CM + \frac{c}{2} - \frac{a+b}{2} \right), \end{aligned}$$

получаваме

$$\left(\frac{a+b+c}{2} + CM \right) = 6 \left(CM + \frac{c}{2} - \frac{a+b}{2} \right),$$

което е еквивалентно на исканото равенство.

б) Първо ще докажем, че $CM = \sqrt{p(p-c)}$, където $p = \frac{a+b+c}{2}$. Ако $\sphericalangle AMC = \varphi$, лесно се доказва, че

$$2r = PQ \sin \varphi = \left(CM + \frac{c}{2} - \frac{a+b}{2} \right) \sin \varphi = (CM - (p-c)) \sin \varphi.$$

Освен това,

$$S_{ABC} = r(p + CM) = \frac{(CM - (p-c)) \sin \varphi}{2} (p + CM)$$

и тъй като $S_{ABC} = \frac{c \cdot CM \sin \varphi}{2}$, получаваме

$$c \cdot CM = (CM - (p-c))(p + CM),$$

което е еквивалентно на $CM = \sqrt{p(p-c)}$.

Следователно са в сила равенствата

$$10CM + 5c = 7(a+b) \text{ и } 4CM^2 = (a+b+c)(a+b-c).$$

След полагане $\frac{CM}{c} = p$ и $\frac{a+b}{c} = q$, горните равенства се записват във вида

$$10p + 5 = 7q \text{ и } 4p^2 = (q+1)(q-1) = q^2 - 1.$$

Решенията на тази система са $p = \frac{3}{8}, q = \frac{5}{4}$ и $p = \frac{2}{3}, q = \frac{5}{3}$. Следователно търсеното отношение е равно на $\frac{5}{4}$ или $\frac{5}{3}$.

11.3. Ще докажем с индукция по m , че за всеки две естествени числа n и $m \geq 2$ имаме $a_{n+m} = a_m \cdot a_{n+1} - a_{m-1}a_n$. При $m = 2$ това е точно рекурентната зависимост. Ако за някое m твърдението е изпълнено за всяко n , то

$$\begin{aligned} a_{m+1+n} &= a_{m+(n+1)} = a_m a_{n+2} - a_{m-1} a_{n+1} = \\ &= a_m (a a_{n+1} - a_n) - a_{m-1} a_{n+1} = \\ &= (a a_m - a_{m-1}) a_{n+1} - a_m a_n = a_{m+1} a_{n+1} - a_m a_n, \end{aligned}$$

т.е. твърдението е вярно и при $m+1$ и всяко n . От рекурентната зависимост имаме $(a_n, a_{n-1}) = 1$ за всяко $n \geq 2$, където (x, y) е най-големият общ делител на x и y . Сега от $a_{n+m} = a_m \cdot a_{n+1} - a_{m-1}a_n$ получаваме $(a_{m+n}, a_m) = (a_m, a_n)$. Оттук с тривиална индукция можем да заключим, че за всеки две числа m и n е изпълнено $(a_m, a_n) = a_{(m,n)}$. Сега задачата следва непосредствено. Ако $n_1 < n_2, \dots < n_k < \dots$ е безкрайна редица от две по две взаимнопрости естествени числа, то $(a_{n_i}, a_{n_j}) = a_{(n_i, n_j)} = a_1 = 1$, т.е. $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$ са две по две взаимнопрости, т.е. простите числа, които са техни делители са безбройно много.

12.1. а) Имаме, че $a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2$. Нека $a_n \geq n$. Тогава

$$a_{n+1} - n - 1 = a_n + \frac{n}{a_n} - n - 1 = \frac{(a_n - 1)(a_n - n)}{a_n} \geq 0$$

и твърдението следва по индукция.

б) Нека $n \geq 2$. От а) следва, че $a_{n+1} \leq a_n + 1$. Тогава $a_n \leq a_2 + n - 2$ и значи $1 \leq \frac{a_n}{n} \leq 1 + \frac{a_2 - 2}{n}$. Следователно редицата с общ член $\frac{a_n}{n}$ е сходяща и нейната граница е равна на 1.

Забележка. Може да се докаже, че $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - n) = 0$.

12.2. а) Ако $\triangle ABC$ е остроъгълен, от косинусовата теорема за $\triangle AHB$ намираме, че

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 - 2AH \cdot BH \cos(\pi - \gamma).$$

Понеже $AB = 2R \sin \gamma$ и $CH = 2R \cos \gamma$, то $AB^2 + CH^2 = 4R^2$ и следователно

$$4R^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2 + \frac{AH \cdot BH \cdot CH}{R}.$$

Тогава $4R^3 = 7R + 3$, т.е. $(R + 1)(2R + 1)(2R - 3) = 0$, откъдето $R = \frac{3}{2}$.

Ако $\triangle ABC$ е тъпоъгълен, аналогично намираме, че

$$4R^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2 - \frac{AH \cdot BH \cdot CH}{R}$$

и следователно $4R^3 = 7R - 3$, т.е. $(R - 1)(2R - 1)(2R + 3) = 0$. От $3 = AH \cdot BH \cdot CH < (2R)^3$, заключаваме, че $R = 1$.

Съществуването на $\triangle ABC$ с $R = \frac{3}{2}$ и $R = 1$ следва от б).

б) Тъй като $S = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}$, то

$$S^2 = \frac{(4R^2 - AH^2)(4R^2 - BH^2)(4R^2 - CH^2)}{16R^2}.$$

Като положим $x = AH^2, y = BH^2, z = CH^2$ и $t = 4R^2$, получаваме

$$S^2 = \frac{t^3 - 7t^2 + t(xy + yz + zx) - 9}{4t}$$

Без ограничение можем да считаме, че $x \geq y \geq z$. Тогава $x \geq \frac{7}{3}$ и следователно

$$xy + yz + zx = \frac{9}{x} + x(7 - x) = 15 - \frac{(x - 3)^2(x - 1)}{x} \leq 15,$$

като равенство се достига само при $x = 3$. Оттук

$$S^2 \leq \frac{t^3 - 7t^2 + 15t - 9}{4t}.$$

Понеже $R = \frac{3}{2}$ или $R = 1$, виждаме, че най-голямата стойност на S е равна на $\sqrt{8}$ и тя се получава за остроъгълен $\triangle ABC$ с $R = \frac{3}{2}$, $AH = BH = \sqrt{3}$ и $CH = 1$. Накрая намираме, че страните на този триъгълник са равни на $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{8}$.

12.3. Първо ще докажем следната

Лема. Нека $p \geq 3$ е нечетен делител на числото b . Тогава съществува нечетно просто число q , което дели $(b + 1)^p - 1$, но не дели b .

Доказателство. Ако $b = ps$, то

$$(b + 1)^p - 1 = b((b + 1)^{p-1} + \dots + b + 1) =$$

$$b(Bb^2 + \frac{p(p-1)}{2}b + p) = bp(b(Bc + \frac{p-1}{2}) + 1) = bpd$$

и остава да изберем прост делител на нечетното число d .

Сега ще докажем, че ако $a \neq 2^k + 1$, то съществува редица $p_1, p_2, \dots$ от нечетни прости числа такава, че ако $p_0 = 1$ и $P_n = a^{p_0 p_1 \dots p_n} - 1$, то p_1 дели $a - 1$ и p_{n+1} дели P_n , но не дели P_{n-1} , $n \geq 1$.

Нека p_1 е нечетен прост делител на $a - 1$ и вече сме избрали числата $p_1, \dots, p_k$. Като приложим лемата за $b = P_k$ и $p = p_k$, намираме нечетно просто число p_{k+1} , което дели P_k , но не дели P_{k-1} .

Понеже P_{k-1} се дели на числата $p_1, p_2, \dots, p_k$, то p_{k+1} е различно от тези числа. Следователно числата от вида $p_1 p_2 \dots p_k$ имат исканото в задачата свойство.

Ако $a = 2^l + 1$, $l \geq 2$, то $a^2 \neq 2^m + 1$ и остава да умножим по 2 намерените за a^2 числа.

Забележка. Може да се докаже, че ако n дели $2^n - 1$, то $n = 1$, а ако n дели $3^n - 1$, то $n = 1$, $n = 2$ или n се дели на 4. Горното решение за $a = 3^4$ показва, че съществуват безбройно много естествени числа n , които не се делят на квадрат на просто число и такива, че $4n$ дели $3^{4n} - 1$. По подобен начин се доказва, че ако $a \neq 2^k - 1$, то съществуват безбройно много естествени числа n , които не се делят на квадрат на просто число и такива, че n дели $a^n - 1$. От друга страна, може да се покаже, че ако $a = 2^k - 1 \geq 3$ и n дели $a^n + 1$, то $n = 1$ или $n = 2$.

Пролетен математически турнир "Атанас Радев"

8.1. Нека $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle BCA = \gamma$. Имаме

$$\sphericalangle IPC_1 = \frac{1}{2}(\widehat{BA_1} + \widehat{C_1B_1}) = \frac{1}{2}(\widehat{BA_1} + \widehat{AC_1} + \widehat{AB_1}) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90^\circ$$

и следователно O е средата на IC_1 . Тогава

$$\sphericalangle IOP = 2 \sphericalangle IC_1P = \widehat{CA_1} = \alpha.$$

Също така $\sphericalangle CC_1B = \alpha$ и значи $OP \parallel C_1B$. Понеже $C_1O = OI$ и $BM = MN$, следва, че $IN \parallel C_1B$, т.е. $\sphericalangle CIA_1 = \alpha$. От друга страна,

$$\sphericalangle CIA_1 = \frac{1}{2}(\widehat{CA_1} + \widehat{AC_1}) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Отгук $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2}$, т.е. $\alpha = \gamma$. Понеже $\alpha = 2\beta$, то $\alpha = \gamma = 72^\circ$ и $\beta = 36^\circ$.

8.2. Нека x е броят на африканските отбори. Тогава броят на европейските е $x + 9$. Африканците са изиграли помежду си $\frac{(x-1)x}{2}$ срещи и общият брой спечелени от тях точки е $\frac{(x-1)x}{2} + k$, където k е броят на победите на африкански отбори над европейски. Тогава броят на спечелените точки от европейските отбори е $\frac{(x+8)(x+9)}{2} + x(x+9) - k$. Следователно

$$9\left(\frac{(x-1)x}{2} + k\right) = \frac{(x+8)(x+9)}{2} + x(x+9) - k,$$

откъдето $3x^2 - 22x + 10k - 36 = 0$. Последното уравнение трябва да има за корен естествено число и значи дискриминантата му е точен квадрат, т.е. $121 - 3(10k - 36) = 229 - 30k$ е точен квадрат. Тогава $k \leq 7$ и с непосредствена проверка се вижда, че само при $k = 2$ и $k = 6$ се получават точни квадрати. При $k = 2$ имаме $x = 8$ и следователно най-добрият африкански отбор може да е постигнал най-много $7 + 2 = 9$ точки. При $k = 6$ получаваме $x = 6$, като в турнира са участвали 6 отбора от Африка и 15 отбора от Европа. В този случай най-добрият африкански отбор е постигнал най-много $5 + 6 = 11$ точки, като това може да се реализира така: този отбор е

надиграл останалите африкански отбори и е единственият от тях с победи над европейски отбори, като тези победи са 6 (всички останали срещи са без значение). Окончателно, отговорът на задачата е 11.

8.3. а) Да, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Не. Имаме 11 възможности за 10-те сбора: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ и ± 5 . Да означим с a_i сбора на числата в i -ия ред и с b_j - сбора на числата в j -ия стълб. Очевидно

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5,$$

което показва, че броят на нечетните числа a_i и броят на нечетните числа b_j имат еднаква четност. Следователно всичките нечетни сборове трябва да се реализират.

Без ограничение можем да считаме, че $b_1 = 5$. Тогава никое a_i не може да е -5 и можем да приемем, че $b_2 = -5$. От възможните сборове 4 и -4 трябва да има поне един и нека той е 4. Това се реализира само ако в един стълб има 4 единици и 1 нула. Нека $b_3 = 4$ и нулата е в последния ред. Следователно $a_i \neq -3$ за всяко i и можем да считаме, че $b_4 = -3$. Тогава в третия стълб има поне 3 минус единици.

Ако те са в първите четири реда, можем да приемем, че те са в първите три реда и получаваме, че a_1, a_2 и a_3 е пермутация на числата $-1, 0$ и 1 . Следователно $b_5 \neq 3$ и тъй като $a_5 \neq 3$, то $a_4 = 3$, т.е. в двете последни клетки на четвъртия ред са написани единици. Тъй като $b_4 = -3$, то числото в последната клетка на четвъртия стълб е -1 . Сега за всяка стойност на числото в петия ред и петия стълб стига до противоречие.

Остава да разгледаме случая, когато в първите четири реда на четвъртия стълб има най-много две минус единици. Можем да считаме, че числата в четвъртия стълб са последователно $-1, -1, 0, 0$ и -1 . Понеже сборовете на първите четири числа по редове са $0, 0, 1, 1$ и -1 , то никой от сборовете по редове не може да е 3 и следователно $b_5 = 3$. Това е възможно само когато числата в петия стълб са $1, 0, 1, 0, 1$ и тогава $a_1 = a_4 = 1$, което отново е противоречие.

9.1. а) При $a = 0$ следва, че $x = -y$ и тогава $2x^2 = 2$, откъдето $(x, y) = (1, -1)$ или $(x, y) = (-1, 1)$.

б) От а) имаме, че $a = 0$ е решение. При $a \neq 0$ полагаме $x + y = p$, $xy = q$ и получаваме $p = aq$, $p^2 - 2q = a^2 + 2$. Оттук $a^2 q^2 - 2q - a^2 - 2 = 0$ и следователно $(p, q) = (-a, -1)$ или $(p, q) = \left(\frac{a^2 + 2}{a}, \frac{a^2 + 2}{a^2}\right)$, като очевидно двете двойки са различни. Първият случай $x + y = -a$, $xy = -1$ води до квадратното уравнение $z^2 + az - 1 = 0$, което има два различни реални корена z_1 и z_2 . Значи $(x, y) = (z_1, z_2)$ и $(x, y) = (z_2, z_1)$ са решения на дадената система. Така задачата се свежда до намиране на стойностите на a , за които вторият случай е невъзможен. Това означава, че дискриминантата на квадратното уравнение $z^2 - \frac{a^2 + 2}{a}z + \frac{a^2 + 2}{a^2} = 0$ е отрицателна, откъдето $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$. Окончателно отговорът на задачата е $a \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

9.2. Можем да считаме, че $AC < BC$. Понеже $\sphericalangle ACI$ и $\sphericalangle AMI$ са остри ъгли, то $\triangle ACI \cong \triangle AMI$. Следователно $AC = AM$ и $\sphericalangle AIC = \sphericalangle AIM$, т.е. $\sphericalangle CIM = 360^\circ - 2 \sphericalangle AIC = 180^\circ - \sphericalangle ABC$. Имаме, че $\sphericalangle ABC$ е най-голям, когато BC е допирателна към окръжността с център A и радиус AM . Тогава $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, откъдето намираме, че отговорът на задачата е 150° .

9.3. Имаме $k^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$, ако k се дели на p и $k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ в противен случай. Тогава

$$0 \equiv 1^{p-1} + 2^{p-1} + \dots + 2004^{p-1} \equiv 0 \cdot \left[\frac{2004}{p} \right] + 1 \cdot \left(2004 - \left[\frac{2004}{p} \right] \right) \pmod{p},$$

откъдето

$$2004 \equiv \left[\frac{2004}{p} \right] \pmod{p} \quad (1)$$

(в частност $p < 2004$). Нека $2004 = qp + r$, където $0 \leq r \leq p - 1$. Тогава $\left[\frac{2004}{p} \right] = \left[q + \frac{r}{p} \right] = q$ и (1) е еквивалентно с $r \equiv q \pmod{p}$.

При $q < p$ от последното сравнение получаваме $r = q$, откъдето $2004 = (p+1)q \leq p^2 - 1$, т.е. $p \geq \sqrt{2005}$. Следователно $p \geq 47$ и тъй като $p+1$ дели $2004 = 3.4.167$, намираме $p = 2003$, което е решение на задачата.

При $q \geq p$ имаме $2004 \geq pq \geq p^2$, т.е. $p \leq \sqrt{2004}$ и $p \leq 43$. Директна проверка чрез (1) показва, че задачата има още едно решение $p = 17$.

10.1. а) Тъй като $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 4$ (от формулите на Виет), получаваме $|x_1^3 - x_2^3| \leq 4 \iff |x_1 - x_2| \leq 1$. Следователно $0 \leq D = 16 - 3a^2 \leq 1$, откъдето $a \in \left[-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{5} \right] \cup \left[\sqrt{5}, \frac{4\sqrt{3}}{3} \right]$.

б) Ако $D = 16 - 3a^2 \leq 0$, т.е. $a \in \left(-\infty, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{4\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$, то $f(x) \geq 0$ за всяко x . Ако $D > 0$, условието $|x_1 - x_2| \leq 1$ е необходимо, но не е достатъчно. Следователно $a \in \left[-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$ и трябва да намерим стойностите на a в тези интервали, за които $f(x) \geq 0$ за всяко цяло x .

Ако $f(x) < 0$ за някое цяло x , то върхът на параболата $\frac{a}{2}$ е на разстояние най-много $\frac{1}{2}$ от x . Тъй като $-\frac{3}{2} < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq \frac{a}{2} \leq -\frac{\sqrt{5}}{2} < -1$ или $\frac{3}{2} > \frac{2\sqrt{3}}{3} \geq \frac{a}{2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, заключаваме, че единствените възможни стойности на x са ± 1 . Следователно е достатъчно да бъдат изпълнени неравенствата $f(-1) \geq 0$ и $f(1) \geq 0$, откъдето намираме $a \in \left[-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$. Окончателно, търсените стойности са

$$a \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty\right).$$

10.2. Ако A, I, J и C лежат на една права, то $AB = AD$ и $BC = CD$, следователно $ABCD$ е описан. Нека A, I, J и C лежат на една окръжност. Понеже $\angle AIC > \angle AIB$ или $\angle AIC > \angle AID$, то $\angle AIC > 90^\circ$. Аналогично $\angle AJC > 90^\circ$ и следователно $\angle AIC + \angle AJC > 180^\circ$. Това показва, че I и J лежат от една и съща страна на AC . Нека AI и CJ се пресичат в точка S и пресичат описаната около $ABCD$ окръжност съответно в точки P и Q . Тъй като P и Q са средите съответно на $\widehat{BCD}$ и $\widehat{BAD}$, то $PQ \perp BD$. От друга страна, $\angle SJI = \angle CAI = \angle CQP$, откъдето $IJ \parallel PQ$. Следователно $IJ \perp BD$, което означава, че окръжностите, вписани в $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ се допират в точка $T \in BD$. Тогава $DT = (AD + BD - AB)/2 = (BD + CD - BC)/2 \iff AB + CD = BC + AD$, т.е. $ABCD$ е описан.

Обратно, да предположим, че $ABCD$ е описан. Ако $I \in AC$, то $J \in AC$. Нека $I \notin AC$. От $AB + CD = BC + AD$ следва, че окръжностите, вписани в $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ се допират в точка от BD . Следователно $IJ \perp BD \Rightarrow IJ \parallel PQ \Rightarrow \angle SJI = \angle CQP = \angle CAI$ и значи $ACJI$ е вписан четириъгълник.

10.3. Вж. 9.3.

11.1. Множеството от допустими стойности за x се задава с неравенствата $4ax > 0$, $4ax \neq 1$, $x - 3a > 0$ и $x - 3a \neq 1$.

Тъй като $\log_{x-3a} 4ax = \frac{1}{\log_{4ax}(x-3a)}$, полагането $t = \log_{4ax}(x-3a)$ води до уравнението $t + \frac{1}{2t} = \frac{3}{2}$. Корените на това уравнение са $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Сега от $\log_{4ax}(x-3a) = 1$ намираме $x_1 = \frac{3a}{1-4a}$ при $a \neq \frac{1}{4}$, а от $\log_{4ax}(x-3a) = \frac{1}{2}$ получаваме уравнението $x^2 - 6ax + 9a^2 = 4ax$ с корени $x_2 = 9a$ и $x_3 = a$. Следователно търсим стойностите на a , за които измежду числата $x_1 = \frac{3a}{1-4a}$ при $a \neq \frac{1}{4}$, $x_2 = 9a$ и $x_3 = a$ има точно две различни решения на даденото уравнение. Ясно е, че $a \neq 0$.

1. Нека $a > 0$. Тогава $x_3 - 3a = -2a < 0$, откъдето следва, че x_1 и x_2 трябва да бъдат двете решения. Следователно $x_1 = \frac{3a}{1-4a}$ трябва да принадлежи на допустимите стойности, откъдето $4ax_1 = \frac{12a^2}{1-4a} > 0$, $4ax_1 = \frac{12a^2}{1-4a} \neq 1$, $x_1 - 3a = \frac{3a}{1-4a} - 3a > 0$ и $x_1 - 3a = \frac{3a}{1-4a} - 3a \neq 1$. Оттук $a < \frac{1}{4}$ и $a \neq \frac{1}{6}$. Лесно се проверява, че при $a \neq \frac{1}{6}$ имаме $x_1 \neq x_2$ и x_2 е от допустимите стойности. Окончателно в този случай

$$a \in (0, \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}, \frac{1}{4}).$$

2. Нека $a < 0$. Тогава $x_2 - 3a = 6a < 0$, откъдето следва, че x_1 и x_3 трябва да бъдат двете решения. Следователно $x_1 = \frac{3a}{1-4a}$ трябва да принадлежи на допустимите стойности. Както в 1. получаваме $a \neq -\frac{1}{2}$. Лесно се проверява, че при $a \neq -\frac{1}{2}$ имаме $x_1 \neq x_3$ и x_3 е от допустимите стойности. Окончателно в този случай

$$a \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0).$$

И така, решенията на задачата са

$$a \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}, \frac{1}{4}).$$

11.2. Да означим с H ортоцентъра на $\triangle ABC$, с G_1 - медицентъра на $\triangle A_1B_1C_1$ и с O_1 - средата на OH .

Добре известно е, че O_1 е центърът на окръжността на деветте точки, на която лежат на A_1 , B_1 и C_1 , а H е центърът на вписаната окръжност в $\triangle A_1B_1C_1$. Тъй като H_1 , G_1 и O_1 са съответно ортоцентърът, медицентърът и центърът на описаната окръжност за $\triangle A_1B_1C_1$, то те лежат на една права в този ред, като $H_1G_1 : G_1O_1 = 2 : 1$.

Да разгледаме хомотетия с център G_1 и коефициент $-\frac{1}{2}$. Тъй като $\triangle A_1B_1C_1$ се изобразява в триъгълника $A_2B_2C_2$, образуван от средите на B_1C_1 , A_1C_1 и A_1B_1 , то точката H се изобразява в центъра I_2 на вписаната окръжност за $\triangle A_2B_2C_2$. Понеже G_1 е медицентърът на $\triangle OHH_1$, то I_1 е среда на OH_1 .

11.3. Разглеждаме по-общата задача за $n + 1$ вместо 100 и означаваме с $p_{k,n+1}$ вероятността a_m да бъде 1. Ако 1 не е на последно място в пермутация на естествените числа от 1 до $n + 1$, то $a_m = 1$ с вероятност $p_{k,n}$ (считаме $p_{n,n} = 0$). В противен случай $a_m = 1$ само когато 2 и 3 са измежду първите k числа от пермутацията. Тогава

$$p_{k,n+1} = \frac{n}{n+1}p_{k,n} + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}.$$

и оттук

$$\begin{aligned} (n+1)p_{k,n+1} &= \sum_{j=k}^n ((j+1)p_{k,j+1} - jp_{k,j}) \\ &= k(k-1) \sum_{j=k}^n \frac{1}{j(j-1)} = \frac{k(n+1-k)}{n}. \end{aligned}$$

Следователно $p_{k,n} = \frac{k(n-k)}{n(n-1)}$ и значи $p_{k,100} = \frac{1}{4}$ само при $k = 45$ или $k = 55$.

12.1. Уравнението на обща допирателна към графиките на функциите $f(x) = x^2 - 2ax$ и $g(x) = -x^2 - 1$ в точките $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, g(x_2))$ има вида

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) = g(x_2) + g'(x_2)(x - x_2).$$

Оттук $f'(x_1) = g'(x_2)$ и $f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$. Понеже $f'(x) = 2x - 2a$ и $g'(x) = -2x$, намираме, че $x_1 + x_2 = a$ и $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Тогава $x_1x_2 =$

$\frac{a^2 - 1}{2}$ и значи x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $x^2 - ax + \frac{a^2 - 1}{2} = 0$. Тъй като графиките на функциите $f(x) = x^2 - 2ax$ и $g(x) = -x^2 - 1$ имат две общи допирателни, следва, че $x_1 \neq x_2$, т.е. $a^2 < 2$, и допирните точки M, N, P, Q имат координати $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_2, g(x_2)), (x_1, g(x_1))$. Сега пресмятаме

$$PQ^2 = (x_1 - x_2)^2 + (g(x_1) - g(x_2))^2 =$$

$$(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2)^2(1 + x_1 + x_2) = (2 - a^2)(1 + a^2),$$

$MQ = |f(x_1) - g(x_1)| = |x_1^2 - 2ax_1 + x_1^2 + 1| = 2 - a^2$ и аналогично $MN^2 = (2 - a^2)(1 + a^2)$, $NP = 2 - a^2$. Следователно $MNPQ$ е успоредник с периметър $2(\sqrt{(2 - a^2)(1 + a^2)} + 2 - a^2) = 6$. Оттук $\sqrt{(2 - a^2)(1 + a^2)} = 1 + a^2$, т.е. $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

12.2. Симетралата на AB и ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ се пресичат в средата D на дъгата $\widehat{AB}$, несъдържаща C от описаната окръжност около $\triangle ABC$. Понеже $AM = BN = CP = CQ = p - c$, условието на задачата е еквивалентно на $DM = DP$. Като извадим равенствата

$$DP^2 = DC^2 + CP^2 - 2DC \cdot CP \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$DM^2 = DA^2 + AM^2 + 2DA \cdot AM \cos \frac{\gamma}{2},$$

получаваме $DC - DA = 2(p - c) \cos \frac{\gamma}{2}$. От теоремата на Птоломей имаме $DC = \frac{(a + b)DA}{c}$. Тъй като $c = 2DA \cos \frac{\gamma}{2}$, заключаваме, че $\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$, т.е. $\gamma = 90^\circ$.

Забележка. От горното решение следва, че M, N, P и Q лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато $AC = BC$ или $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

12.3. Вж. 11.3.

53. Национална олимпиада по математика

Областен кръг

9.1. Повдигаме двете страни на даденото уравнение

$$(1) \quad \sqrt{(4a^2 - 4a - 1)x^2 - 2ax + 1} = 1 - ax - x^2$$

и достигахме до уравнението

$$x^2(x^2 + 2ax - 3a^2 + 4a - 1) = 0$$

с корени $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - 3a$ и $x_3 = a - 1$. Ясно е, че $x_1 = 0$ е решение на (1) за всяко a . Числото $x_2 = 1 - 3a$ е решение на (1), когато дясната страна на (1) е неотрицателна, т.е.

$$1 - a(1 - 3a) - (1 - 3a)^2 \geq 0 \iff 5a - 6a^2 \geq 0 \iff a \in \left[0, \frac{5}{6}\right].$$

Аналогично x_3 е решение на (1) при $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$. Възможни са два случая.

1. Някои от числата x_1 , x_2 и x_3 са равни. Това е изпълнено при $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ и от намереното следва, че $a = \frac{1}{3}$ и $a = \frac{1}{2}$ са решения на задачата.

2. Числата x_1 , x_2 и x_3 са две по две различни. Тогава лесно следва, че $a \in \left(\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$.

И така, $a = \frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{2}$ и $a \in \left(\frac{5}{6}, \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$.

9.2. Нека M е средата на AB . Тогава равенството от условието можем да запишем във вида $\frac{AM}{BB_1} = \frac{AA_1}{BM}$. Следователно $\triangle AMA_1 \sim \triangle BB_1M$ по втори признак. Значи $\frac{AA_1}{BM} = \frac{MA_1}{B_1M}$, т.е. $\frac{AA_1}{AM} = \frac{MA_1}{MB_1}$. Освен това, $\sphericalangle AA_1M = \sphericalangle BMB_1$ и тогава

$$\sphericalangle A_1MB_1 = 180^\circ - \sphericalangle AMA_1 - \sphericalangle BMB_1 = 180^\circ - \sphericalangle AMA_1 - \sphericalangle AA_1M = \sphericalangle A_1AM.$$

Следователно $\triangle AMA_1 \sim \triangle MB_1A_1$ по втори признак, откъдето $\sphericalangle AA_1M = \sphericalangle MA_1B_1$. Накрая от $\triangle BB_1M \sim \triangle AMA_1 \sim \triangle MB_1A_1$ следва, че $\sphericalangle BB_1M =$

$\nless MB_1A_1$. Значи $M \in AB$ е пресечната точка на ъголполовящите на $\nless AA_1B_1$ и $\nless BB_1A_1$.

9.3. За дясното неравенство е достатъчно да съобразим, че знаменателите са по-голем от 1 и тогава $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} < a+b+c = 1$.

За да докажем лявото неравенство, можем да считаме, че $a \leq b \leq c$. Тогава $\frac{1}{1+bc} \leq \frac{1}{1+ca} \leq \frac{1}{1+ab}$. Като приложим последователно неравенството на Чебишев, неравенството между средното аритметично и средното хармонично, и неравенството $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$ (което след разкриване на скобите е еквивалентно на $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$), получаваме, че

$$\begin{aligned} \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} &\geq \frac{a+b+c}{3} \left(\frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} + \frac{1}{1+ab} \right) \\ &= \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} + \frac{1}{1+ab} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+\frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{27}{10}. \end{aligned}$$

9.4. Ясно е, че x и y трябва да са с различна четност. Тогава $k = x - y$ е нечетно число и получаваме уравнението

$$(3k-6)y^2 + (3k^2+10)y + k^3 + 10k - 1 = 0,$$

което е квадратно относно y . Дискриминантата му $D = -3k^4 + 24k^3 - 60k^2 + 252k + 76$ трябва да е точно квадрат. Понеже $D = -k^2(k^2 - 24k + 60) + 252k + 76$, то $D < 0$ при $k \leq -1$. От друга страна, $D = 3k^3(8-k) + 2(38-k^2) + 2k(126-29k)$ и следователно $D < 0$ и при $k \geq 8$. Също така $D = -71 < 0$ при $k = 7$. Остават случаите $k = 1, 3, 5$. Тогава съответно $D = 289 = 17^2$, $D = 697$ и $D = 961 = 31^2$, което води до решенията $x = 6, y = 5$ и $x = 2, y = -3$.

9.5. Ще покажем, че търсената стойност е 4.

Нека (i, j) е единичното квадратче, стоящо в i -я ред и j -а стълб на квадрат 4×4 . Лесно се проверява, че ако оцветим квадратчетата $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4)$ в черно, а останалите в бяло, то условието на задачата е изпълнено.

За да покажем, че при $n \geq 5$ нямаме съответно оцветяване, достатъчно е да разгледаме случая $n = 5$ (защото квадрат $n \times n$ съдържа квадрат 5×5 .) Да разгледаме произволно оцветяване на квадрат 5×5 . Поне 13

от единичните квадратчета са едноцветни, например - черни. Възможни са три случая.

1. Един от редовете е изцяло от черни квадратчета. Тогава измежду останалите редове има поне един с най-малко 2 черни квадратчета. Сега е достатъчно да разгледаме правоъгълника, за който тези квадратчета са в два от ъглите му, а в другите му два ъгъла са единични квадратчета от реда с 5 черни.

2. В един от редовете има точно 4 черни квадратчета. Тогава измежду останалите редове има поне един с най-малко 3 черни квадратчета. Тогава поне 2 от тях не съответстват на бялото и с тяхна помощ можем да образуваме правоъгълник с 4 черни ъгъла квадратчета

3. Всеки ред съдържа най-много 3 черни квадратчета. Тогава поне 3 реда съдържа точно по 3 черни квадратчета. Можем да считаме, че това са редовете с номера 1,2 и 3 отгоре надолу. Един стълб ще наричаме *черен*, ако най-горното му квадратче е черно. В противен случай стълбът е *бял*. Имаме 3 черни стълба. Ако в ред или ред 3 квадратчета в поне два от черните стълбове са черни, то очевидно имаме правоъгълник с 4 черни ъгъла. В противен случай 2 от черните квадратчета от ред 2 и 2 от черните квадратчета са разположени в двата бели стълба и точно тези 4 квадратчета образуват правоъгълник с 4 черни ъгъла, което завършва решението.

9.6. а) Нека x изпълнява $[x^3] + x^2 = x^3 + [x^2]$. Тогава за $t = [x]$ и $\alpha = x - t \in [0, 1)$ имаме, че $t^2 - t^2 = (t + \alpha)^3 - (t + \alpha)^2 \iff \alpha(\alpha^2 + (3t - 1)\alpha + 3t^2 - 2t) = 0$. Оттук $\alpha = 0$ или α е корен на квадратното уравнение в скобите. Във втория случай неговата дискриминанта $(3t + 1)(1 - t)$ трябва да е неотрицателна и понеже t е цяло число, то $t = 0$ или $t = 1$. Тогава $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$. Понеже $\alpha \in [0, 1)$, отново следва, че $\alpha = 0$, т.е. x е цяло число.

б) Полиномът $y^3 - y^2 - 1$ е от нечетна степен и следователно има поне един реален корен α , който очевидно не е цял (всъщност реалният корен е единствен и лежи в интервала $(1, 2)$). Тогава $[\alpha^3] = [\alpha^2 + 1] = [\alpha^2] + 1$, откъдето $[\alpha^3] - [\alpha^2] = 1 = \alpha^3 - \alpha^2$.

10.1. Неравенството има смисъл при $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$. Очевидно

всички стойности на x от последния интервал са решения. Нека $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$.

Тогава неравенството е еквивалентно на $\sqrt{(x^2 - 1)(2x^2 - 3)} > 2 \iff 2x^4 - 5x^2 - 1 > 0$. Като вземем предвид решенията на биквадратното неравенство,

получаваме в този случай $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5+\sqrt{33}}}{2}\right)$. И така,

$$x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5+\sqrt{33}}}{2}\right) \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right).$$

10.2. Ще използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$.

а) С помощта на косинусова теорема за $\triangle AMB$ имаме

$$\cos \sphericalangle AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot MB}.$$

Оттук и от равенството $\sin \sphericalangle AMB = \frac{2S}{3AM \cdot MB}$ получаваме

$$\cotg \sphericalangle AMB = \frac{3(AM^2 + BM^2 - AB^2)}{4S} = \frac{a^2 + b^2 - 5c^2}{12S}$$

(за последното равенство се използва формулата за медианата).

б) Както в а) се вижда, че

$$\cotg \sphericalangle BMC = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{12S}, \quad \cotg \sphericalangle CMA = \frac{c^2 + a^2 - 5b^2}{12S}.$$

Следователно

$$\cotg \sphericalangle AMB + \cotg \sphericalangle BMC + \cotg \sphericalangle CMA = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Остава да докажем, че $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$. От Хероновата формула получаваме

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

(приложихме неравенството между средното аритметично и средното геометрично), откъдето

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$$

(приложихме неравенството между средното аритметично и средното квадратично).

10.3. От условието следва равенството $m(m+j-1) = j(j-1)$, откъдето $m^2 = (j-m)(j-1)$. Ако p е прост делител на $j-m$ и $j-1$, то е делител

и на m , а значи и на j , а тогава и на 1. Това противоречие сочи, че $j - m$ и $j - 1$ са взаимно прости и следователно $j - m = u^2$, $j - 1 = v^2$ за някои цели неотрицателни u, v . Сега имаме $uv = m$ и $u^2 + uv = j = v^2 + 1$, а от условието $1 \leq j < 2004$ получаваме $0 \leq v \leq 44$. Следователно трябва да решим уравнението

$$(*) \quad u^2 + uv = v^2 + 1$$

в цели неотрицателни числа. При $v = 0$ получаваме $u = 1$. Да предположим, че двойката $(u_0; v_0)$ е решение на $(*)$ и $v_0 \geq 1$. Тогава $u_0 \geq 1$ и щом $u_0 v_0 \geq 1$, то $u_0 \leq v_0$. Да положим $v_1 = v_0 - u_0$, $0 \leq v_1 < v_0$. Имаме $u_0^2 = v_0(v_0 - u_0) + 1 = (u_0 + v_1)v_1 + 1 = u_0 v_1 + v_1^2 + 1$. Да положим $u_1 = u_0 - v_1$. Тогава

$$(u_1 + v_1)^2 = (u_1 + v_1)v_1 + v_1^2 + 1 \iff u_1^2 + u_1 v_1 = v_1^2 + 1,$$

т.е. получихме ново решение на $(*)$. Ако $v_1 = 0$, получаваме $u_1 = 1$. Нека $v_1 \geq 1$; значи $u_1 \geq 1$. Тогава полагайки $v_2 = v_1 - u_1 < v_1$ и $u_2 = u_1 - v_2$, аналогично получаваме ново решение. Така получаваме редица от неотрицателни цели числа $v_0 > v_1 > \dots$. Единственият начин процесът да прекъсне е на някоя стъпка да се получи $v_k = 0$. Тогава $u_k = 1$ и като възстановим обратно $u_{k-1}, v_{k-1}, \dots, u_0, v_0$, получаваме редицата на Фибоначи. Така решения на $(*)$ са $(u; v) = (1; 0), (1; 1), (2; 3), (5; 8), (13; 21)$ а при следващите решения $v > 44$. При първото от тях $j = v^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$ и имаме $m = uv = 0$, което не отговаря на условията. Останалите дават решенията $j = 1^2 + 1 = 2$, $j = 3^2 + 1 = 10$, $j = 8^2 + 1 = 65$ и $j = 21^2 + 1 = 442$.

10.4. а) Следва след директно заместване.

б) Уравнението се записва във вида

$$(x + a)((a^2 + 4a + 2)x^2 + (1 - a)x + a) = 0, \quad (1)$$

откъдето следва, че $a < 0$. Освен това квадратният тричлен в (1) трябва да има два различни корена, т.е. $D = (1 - a)^2 - 4a(a^2 + 4a + 2) > 0 \iff (a + 1)(-4a^2 - 11a + 1) > 0$. Решавайки това неравенство и вземайки предвид $a < 0$, получаваме

$$a \in \left(-\infty, \frac{-11 - \sqrt{137}}{8}\right) \cup (-1, 0). \quad (2)$$

Корените на квадратния тричлен са положителни точно когато $\frac{a}{a^2 + 4a + 2} > 0$ и $-\frac{1 - a}{a^2 + 4a + 2} > 0$. Оттук $a \in (-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$ и пресичайки с (2)

получаваме

$$a \in \left(-2 - \sqrt{2}, \frac{-11 - \sqrt{137}}{8}\right) \cup (-1, -2 + \sqrt{2}). \quad (3)$$

Остава да изключим стойностите на a , за които $-a$ е корен на квадратния тричлен в (1). Имаме $(a^2 + 4a + 2)(-a)^2 + (1 - a)(-a) + a = 0 \iff a^2(a^2 + 4a + 3) = 0 \iff a = -3, -1, 0$. Окончателно получаваме

$$a \in (-2 - \sqrt{2}, -3) \cup \left(-3, \frac{-11 - \sqrt{137}}{8}\right) \cup (-1, -2 + \sqrt{2}).$$

10.5. Нека означим $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Имаме $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, значи $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{6}(3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$. От друга страна $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$. Тогава

$$0 = \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{CM} = (3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) = 3R^2 + 3\vec{a}\vec{b} - 6\vec{a}\vec{c} + \vec{a}\vec{b} + R^2 - 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c} + 2\vec{b}\vec{c} - 4R^2.$$

И така, $0 = 4\vec{a}(\vec{b} - \vec{c})$, следователно $OA \perp BC$, т.е. $AB = AC$.

10.6. Да означим с V и E съответно множествата от върховете и ребрата на G , а за всеки връх $x \in V$ да означим с $\Gamma(x)$ множеството от върховете на G , които са съседни на x и нека $d(x) = |\Gamma(x)|$. Тогава за $x, y \in V$ имаме

$$|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| = |\Gamma(x)| + |\Gamma(y)| - |\Gamma(x) \cup \Gamma(y)| \geq d(x) + d(y) - |V|.$$

Сумираме по всички ребра $(x, y) \in E$ и получаваме

$$3t(G) = \sum_{(x,y) \in E} |\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| \geq \sum_{(x,y) \in E} (d(x) + d(y)) - |V| \cdot |E| = \sum_{x \in V} d^2(x) - |V| \cdot |E|$$

(тук $t(G)$ е броят на триъгълниците в G). Следователно

$$3t(G) \geq \frac{1}{|V|} \left(\sum_{x \in V} d(x) \right)^2 - |V| \cdot |E| = \frac{4|E|^2}{|V|} - |V| \cdot |E|.$$

В нашия случай имаме $|V| = 10$, $|E| = 26$ и от последното неравенство получаваме $t(G) \geq \frac{52}{15}$, т.е. $t(G) \geq 4$.

11.1. Необходимо и достатъчно условие дадените числа да образуват геометрична прогресия е

$$2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} = (2 - 2^{\sin x + \cos x})^2,$$

откъдето след преобразуване получаваме

$$4^{\sin x + \cos x} - 5 \cdot 2^{\sin x + \cos x} + 4 = 0.$$

Полагането $y = 2^{\sin x + \cos x}$ свежда уравнението до квадратно $y^2 - 5y + 4 = 0$ с корени $y_1 = 4$ $y_2 = 1$.

При $2^{\sin x + \cos x} = 4$ получаваме $\sin x + \cos x = 2$, т.е. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, което очевидно няма решение.

При $2^{\sin x + \cos x} = 1$ получаваме $\sin x + \cos x = 0$, т.е. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$. Оттук $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, където k е цяло число. От тези корени в интервала $(-\pi, \pi)$ се намират $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

11.2. От синусовата теорема за триъгълниците AMC и BMC имаме

$$\frac{AM}{CM} = \frac{\sin \angle ACM}{\sin \alpha}, \quad \frac{BM}{CM} = \frac{\sin(\gamma - \angle ACM)}{\sin \beta}.$$

Оттук, тъй като $AM = BM$, получаваме $\frac{\sin \angle ACM}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\gamma - \angle ACM)}{\sin \beta}$, т.е.

$$(1) \quad \operatorname{tg} \angle ACM = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \alpha \cos \gamma}.$$

От синусовата теорема за триъгълниците ADC и BDC имаме

$$\frac{AD}{CD} = \frac{\sin(\gamma - \angle BCD)}{\sin(\alpha + \gamma)}, \quad \frac{BD}{CD} = \frac{\sin \angle BCD}{\sin(\beta + \gamma)}.$$

Оттук, тъй като $AD = BD$, получаваме $\frac{\sin(\gamma - \angle BCD)}{\sin \beta} = \frac{\sin \angle BCD}{\sin \alpha}$, т.е.

$$(2) \quad \operatorname{tg} \angle BCD = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \alpha \cos \gamma}.$$

От (1) и (2) следва, че $\operatorname{tg} \angle ACM = \operatorname{tg} \angle BCD$. Тъй като и двата ъгъла са остри и функцията тангенс е растяща в интервала $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\angle ACM = \angle BCD$.

11.3. От дадените N човека да изберем подгрупа с максимален брой хора никои двама от които не се познават. Ясно е, че ако в групата има l човека, то $l \leq m-1$. Освен това от максималността на l следва, че с прибавянето на кой да е от останалите членове на групата, ще имаме поне едно познанство. Следователно всеки от останалите $N-l$ познава поне един от избраните l . Тогава, някой от избраните l ще има поне $\frac{N-l}{l}$ познати. Тъй като

$$\frac{N-l}{l} = \frac{N}{l} - 1 \geq \frac{N}{m-1} - 1 = n + \frac{1}{m-1} - 1 > n-1,$$

има човек с поне n познати.

Нека $N = mn - n = (m-1)n$ и да разгледаме $m-1$ групи от по n човека всяка, като всеки двама от една група се познават и няма познати от различни групи. Тогава измежду всеки m човека има двама от една и съща група, т.е. двама които се познават. От друга страна всеки познава точно $n-1$ от останалите. Следователно твърдението не е вярно при $N < mn - n + 1$.

11.4. От подобие на равнобедрените триъгълници ABD и CBE имаме $\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{BE}$. Тъй като $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DBE$, получаваме, че $\triangle ABC$ е подобен на $\triangle DBE$ с коефициент на подобие $\frac{1}{2 \cos \varphi}$, където φ е ъгълът при основата на триъгълниците $\triangle ABD$ и $\triangle CBE$. Оттук $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DEB = \gamma$. Изразяваме

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} AC \cdot CE \cdot \sin(\varphi + \gamma) = \frac{1}{2} b \cdot \frac{a}{2 \cos \varphi} \cdot \sin(\varphi + \gamma)$$

и

$$S_{EBDC} = \frac{1}{2} CB \cdot DE \cdot \sin(\varphi + \gamma) = \frac{1}{2} a \cdot \frac{b}{2 \cos \varphi} \cdot \sin(\varphi + \gamma).$$

От полученото равенство $S_{ACD} = S_{EBDC}$ следва твърдението на задачата.

11.5. 1. Нека $(a, b) = (a, c) = 1$. Тогава $(a, bc) = 1$ и следователно съществуват цели числа u и v , за които $ua + vbc = 1$, което означава, че a дели $-vbc + 1$. Ако $k \geq 1$ е такова естествено число, че $-v - k$ се дели на a (това означава, че $-v$ е сравнимо с k по модул a), то a дели $kbc + 1$, т.е. $kbc + 1 = at$. Тогава при $x = 2^t$, $y = 2^{kc}$ и $z = 2^{kb}$ имаме

$$y^b + z^c = 2^{kbc} + 2^{kbc} = 2^{kbc+1} = (2^t)^a = x^a.$$

2. Нека $(c, a) = (c, b) = 1$. Тогава $(c, ab) = 1$ и както в 1. следва, че съществува естествено число k , за което c дели $kab + 1$, т.е. $kab + 1 = ct$. Тогава при $x = 2(2^a - 1)^{kb}$, $y = (2^a - 1)^{ka}$ и $z = (2^a - 1)^t$ имаме

$$x^a - y^b = 2^a(2^a - 1)^{kab} - (2^a - 1)^{kab} = (2^a - 1)^{kab+1} = z^c.$$

11.6. а) На всяка стъпка триъгълникът, от който се избира точка се разделя на три нови триъгълника, т.е. общият брой триъгълници се увеличава с 2. Тъй като в началото имаме само един триъгълник, то след n -та стъпка ще имаме $2n + 1$ триъгълника.

б) С индукция по n ще докажем, че ако "извадим" произволен триъгълник, то останалите триъгълници могат да бъдат групирани по двойки като триъгълниците в една двойка имат обща страна.

1. При $n = 1$ твърдението е очевидно.

2. Нека твърдението е вярно за $n = k$.

3. Ще докажем, че то е вярно и за $n = k + 1$. Нека на $k + 1$ -та стъпка да сме добавили точка O в триъгълник MNP . От полученото разделяне да "извадим" произволен триъгълник XYZ . Ако XYZ е някои от $\triangle OMN$, $\triangle OMP$ или $\triangle ONP$ (без ограничение нека това е $\triangle OMN$), то да разгледаме конфигурацията на k -та стъпка с изваден $\triangle MNP$.

Съгласно индукционната хипотеза останалите триъгълници могат да бъдат групирани по двойки с обща страна. Остава да добавим двойката $(\triangle OMP, \triangle ONP)$. Ако XYZ е различен от $\triangle OMN$, $\triangle OMP$ и $\triangle ONP$, то разглеждаме конфигурацията на k -та стъпка с изваден триъгълник XYZ . Съгласно индукционната хипотеза останалите триъгълници могат да бъдат групирани по двойки с обща страна и нека MNP е в двойко с QMN . Тогава заместваме двойката $(\triangle MNP, \triangle QMN)$ с двойките $(\triangle OMN, \triangle QMN)$ и $(\triangle OMP, \triangle OPN)$. С това индукцията е завършена.

Тъй като лицето на $\triangle ABC$ е 1, то минималното лице на триъгълник е не по-голямо от $\frac{1}{2n+1}$. Да разгледаме всички триъгълници от разбиването, без този с минимално лице. Съгласно доказаното по-горе останалите триъгълници могат да бъдат групирани по двойки с обща страна. Тъй като имаме n такива двойки с общо лице поне $1 - \frac{1}{2n+1}$, то максималната сума от лицата на два триъгълника в една двойка е поне $\frac{1 - \frac{1}{2n+1}}{n} = \frac{2}{2n+1}$.

12.1. Лесно се вижда, че $a, c \geq 0$. Тъй като 3^c дава остатък 1 или 3 при

деление на 8, то $0 \leq a \leq 2$. Ако $a = 0$ или $a = 1$, то съответно 2 дели 3^c или 8 дели $3^c + 1$ - противоречие. Нека $a = 2$, т.е. $8b^2 - 3^c = 279$. Случаите $c = 0, 1$ са невъзможни и значи $c \geq 2$. Тогава b се дели на 3 и като положим $b = 3d$, намираме, че $8d^2 - 3^{c-2} = 31$. Ако $c \geq 3$, следва, че 3 дели $d^2 + 1$ - противоречие. Следователно $c = 2$ и $d = \pm 2$. Окончателно $a = 2$, $b = \pm 6$ и $c = 2$.

12.2. Понеже знаменателят на дадената функция е винаги положителен, условието означава, че $ax - 1 \leq x^4 - x^2 + 1$ за всяко x като равенство се достига поне за едно x . Нека $a \geq 0$. Тогава $ax \leq 0$ за $x \leq 0$ и следователно a съвпада с най-малката стойност на $f(x)$ при $x > 0$. Понеже $f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)}{x^2}$, следва, че тази стойност е $f(1) = 2$. Случаят $a \leq 0$ се свежда до разглеждания, като заменим a с $-a$ и x с $-x$. И така, $a = \pm 2$.

12.3. Нека равнина π разполовява обема на $ABCD$ и пресича ръбовете AB , BC , CD и DA съответно в точки M , Q , N и P . Полагаме $x = \frac{AM}{BM}$, $y = \frac{CN}{DN}$, $z = \frac{AP}{DP}$ и $t = \frac{CQ}{BQ}$. Ако $T = \pi \cap AC$ (считаме $T = \infty$ при $\pi \parallel AC$), от теоремата на Менелай следва, че $\frac{x}{t} = \frac{AT}{CT} = \frac{z}{y}$, т.е. $xy = zt$. От друга страна,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{V_{AMQCNP}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{AMQCP} + V_{QCNP}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{AMQC}}{S_{ABC}} \cdot \frac{AP}{AD} + \frac{S_{QCN}}{S_{BCD}} \cdot \frac{DP}{AD} = \\ &= \left(1 - \frac{BM}{AB} \cdot \frac{BQ}{BC}\right) \frac{AP}{AD} + \frac{CN}{CD} \cdot \frac{CQ}{CB} \cdot \frac{DP}{AD} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+t)}\right) \frac{z}{1+z} + \frac{yt}{(1+y)(1+t)(1+z)}, \end{aligned}$$

откъдето

$$(1) \quad 2z(1+y)(x+t+xt) + 2yt(1+x) = (1+x)(1+y)(1+z)(1+t).$$

Нека сега равнината от условието на задачата пресича ръба BC във вътрешна точка. Тогава тя пресича и ръба AD . Понеже $x = y$ и $xy = zt$, то след преобразования в (1) достигахме до $(x-1)(t^2 + t(x+1)^2 + x^2) = 0$. Тъй като $x \neq 1$ и вторият израз е положителен, следва, че този случай е невъзможен.

Значи дадената равнина пресича ръбовете AC и BD . Като разменим местата на върховете C и D , имаме $xy = 1 = zt$ и равенството (1) отново

е в сила. Оттук лесно получаваме $(x-1)(t^2-1)=0$, т.е. $t=z=1$, което трябваше да докажем.

12.4. Ако симетралата на CD пресича BD в точка O , то

$$\sphericalangle COD = 180^\circ - 2 \sphericalangle ODC = 180^\circ - 2 \sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADO$$

и следователно $AD \parallel CO$. Тогава $\frac{OE}{3} = \frac{CO}{AD} = \frac{OE+3}{5}$ и значи $OE = \frac{9}{2}$, т.е. O е среда на BC , откъдето $\sphericalangle BCD = 90^\circ$.

12.5. а) Нека $a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 2000 < a_{n+1} < \dots < a_m$ са елементите на едно "добро" множество. Понеже $a_{i+1} \geq 2a_i$, то $2\,000\,000 > a_m \geq 2^{m-n}2000$ и следователно $m-n \leq 9$. От друга страна, равенството $2000 = 2^4 5^3$ показва, че $a_i = 2^{k_i} 5^{l_i}$ за $i \leq n-1$, където $0 \leq k_i \leq k_{i+1} \leq 4$, $0 \leq l_i \leq l_{i+1} \leq 3$ и $k_i + l_i \leq 6$. Следователно $n \leq 8$ и значи A има най-много $8+9=17$ елемента. Примерът $a_i = 2^{i-1}$, $1 \leq i \leq 5$, $a_i = 2^4 5^{i-5}$, $6 \leq i \leq 8$, $a_i = 2^{i-4} 5^3$, $9 \leq i \leq 17$, показва, че $m=17$ се реализира

б) За едно "добро" множество с максимален брой елементи имаме $m=17$ и $n=8$, т.е. $a_8 = 2000$. Освен това, $k_i + l_i = i-1$ за $1 \leq i \leq 7$, което показва, че $a_1 = 1$ и подмножеството $\{a_2, \dots, a_7\}$ еднозначно се определя от номерата $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 7$, за които $l_{i_1} = 0$, $l_{i_1+1} = 1$, $l_{i_2} = 1$, $l_{i_2+1} = 2$, $l_{i_3} = 2$ и $l_{i_3+1} = 3$. Следователно за това подмножество има $\binom{7}{3} = 35$ възможности. Понеже $2^9 < 2^8 \cdot 3 < 1000 < 2^{10}$, следва, че $a_i = 2^{i-4} 5^3$ за $9 \leq i \leq 17$ или съществува такъв номер j , $9 \leq j \leq 17$, че $a_i = 2^{i-4} 5^3$ за $8 \leq i < j$ и $a_i = 2^{i-5} 5^3 \cdot 3$ за $j \leq i \leq 17$. Следователно за подмножеството $\{a_9, \dots, a_{17}\}$ има 10 възможности. И така, броят на "добрите" множества с максимален брой елементи (17) е равен на $35 \cdot 10 = 350$.

12.6. Нека $R(x) = P(x)P(x+1) \dots P(x+2003)$. От условието следва, че ако x е по-голямо от реалните корени на $P(x)$, то

$$(1) \quad \frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x+1)}{R(x+1)}$$

и по индукция получаваме $\frac{Q(x)}{R(x)} = \frac{Q(x+n)}{R(x+n)}$ за всяко естествено число n .

Да отбележим, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(x+n)}{R(x+n)}$ е число, независимо от x , или безкрайност,

а от друга страна тази граница е равна на $\frac{Q(x)}{R(x)}$. Следователно $Q(x) = cR(x)$

за всяко x , където $c \neq 0$ е константа. Обратно, ясно е, че ако $Q(x) = cP(x)P(x+1)\dots P(x+2003)$, то условието на задачата е изпълнено.

Забележка. След получаване на равенството (1), решението може да се довърши и със сравняване на коефициенти.

53. Национална олимпиада по математика

Национален кръг

1. Нека O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност и нека той съвпада с този на $\triangle A_2B_2C_2$.

Тогава $\sphericalangle C_2OB_2 = 2\sphericalangle C_2A_2B_2 = 2(180^\circ - \sphericalangle BIC) = \sphericalangle B + \sphericalangle C$. Следователно

$$\sphericalangle OB_2C_2 = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle C_2OB_2) = \frac{\sphericalangle A}{2} = \sphericalangle IAC.$$

Оттук $OB_2 \perp AC$, т.е. OB_2 е симетралата на AC . Тогава точките A , A_1 , C_1 и C лежат на окръжност с център B_2 , което показва, че $\sphericalangle A_1C_1I = \sphericalangle A_1AC = \frac{\sphericalangle A}{2}$ и $\sphericalangle C_1A_1I = \frac{\sphericalangle C}{2}$. Аналогично $\sphericalangle B_1A_1I = \frac{\sphericalangle B}{2}$. Оттук

$$\sphericalangle IC_1A_1 + \sphericalangle C_1A_1B_1 = \frac{\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = 90^\circ,$$

т.е. $C_1I \perp A_1B_1$. По същия начин виждаме, че $B_1I \perp A_1C_1$ и $A_1I \perp B_1C_1$, т.е. I е ортоцентър на $\triangle A_1B_1C_1$. Обратно, нека I е ортоцентър на $\triangle A_1B_1C_1$. Тогава $\sphericalangle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \sphericalangle B_1IC_1 = \frac{\sphericalangle B}{2} + \frac{\sphericalangle C}{2}$. Следователно

$\sphericalangle A_1C_1I = 90^\circ - \sphericalangle B_1A_1C_1 = \frac{\sphericalangle A}{2}$. Тогава около AA_1C_1C може да се опише окръжност и значи симетралата на AC минава през B_2 . Нека O е центърът на описаната окръжност на $\triangle ABC$. Тъй като O лежи на симетралата на AC заключаваме, че $\sphericalangle OB_2C_2 = \sphericalangle CAI = \frac{\sphericalangle A}{2}$ (ъгли с перпендикулярни рамене). Аналогично $\sphericalangle OC_2B_2 = \sphericalangle BAI = \frac{\sphericalangle A}{2}$ и значи $OB_2 = OC_2$. По същия начин доказваме, че $OA_2 = OC_2$, т.е. O е център на описаната около $\triangle A_2B_2C_2$ окръжност.

2. а) Нека $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Имаме, че $S_2 = 3 \cdot \frac{1}{2}$, $S_7 = 3 \cdot \frac{121}{140}$,

$$S_{22} - S_7 = \frac{1}{8} + \frac{1}{22} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{11} + \frac{1}{19} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} +$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{21} = 30 \cdot \frac{a}{b} + \frac{51}{140} = 3 \cdot \frac{c}{d},$$

където $(a, b) = (c, d) = 1$. Лесно се съобразява, че a и b дават един и същ ненулев остатък при деление на 3. Следователно c и d дават различни

ненулеви остатъци при деление на 3, $p_{22} = 3p'_{22}$ и 3 не дели p'_{22} . По подобен начин получаваме $S_{67} - S_{22} = 90\frac{e}{f} + \frac{c}{d}$, където 3 не дели f . Това показва, че 3 не дели p_{67} и q_{67} .

б) Нека $S_n = \frac{k_n}{3^{m_n}l_n}$, където 3 не дели k_n и l_n . Тогава

$$S_{3n} = \frac{S_n}{3} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} =$$

$$\frac{k_n}{3^{m_n+1}l_n} + 3 \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_nb_n + 3^{m_n+2}l_na_n}{3^{m_n+1}l_nb_n},$$

където b_n не се дели на 3. Следователно, ако $m_n \geq -1$, то $m_{3n} = m_n + 1$. По подобен начин се вижда, че $m_{3n+2} = m_n + 1$ при $m_n \geq -1$ и $m_{3n+1} = m_n + 1$ при $m_n \geq 0$. Понеже $m_1 = 0$, $m_2 = m_7 = m_{22} = -1$, $m_{67} = 0$, лесно следва, че отговорът на задачата е $n = 2, 7, 22$.

3. Да разгледаме граф G с n върха, на върховете на който съответстват членовете на групата и два върха са свързани само когато съответните членове се познават. Условието *измежду всеки трима има двама, които не се познават* означава, че в G няма триъгълник. Ще покажем, че условието *известно е, че групата не може да бъде разпределена в два автобуса така, че всеки да пътува само с непознати* означава, че в графа има цикъл с нечетна дължина. Действително, ако всички цикли са с четна дължина, лесно се доказва, че върховете могат да бъдат разпределени в две групи, така, че във всяка група да няма ребра.

Да изберем нечетен цикъл с най-малка дължина - $A_1, A_2, \dots, A_k$. Поради това, че G не съдържа триъгълник и поради факта, че избрания цикъл е с минимална дължина, всеки връх извън цикъла е свързан с най-много два върха от него. Следователно броят на ребрата от вида (X, A_i) , $X \neq A_j$, $j = 1, 2, \dots, k$ е не по-голям от $2(n - k)$. Да означим минималната степен на връх с δ . Очевидно $\sum_{i=1}^k d(A_i) = |E^*| + 2k$, където E^* е множеството на ребрата от вида XA_i . Имаме

$$2(n - k) \geq |E^*| = \sum_{i=1}^k d(A_i) - 2k \geq k\delta - 2k.$$

Оттук $\delta \leq \frac{2n}{k}$. Тъй като $k \geq 5$, то $\delta \leq \frac{2n}{5}$.

4. Ще докажем, че при прилагане на коя да е от разрешените замени броят на буквите a на четни (съответно нечетни) позиции запазва четността си. Действително, да разгледаме замяната $aba \rightarrow b$, приложена към думата w_1abaw_2 . В новополучената дума w_1bw_2 всички букви a от w_1 са останали на местата си, а всички букви a от w_2 са се преместили с две позиции на ляво и следователно са запазили четността на позицията си. Изтриването на двете букви a от aba е намалило броя на буквите a на четни или нечетни позиции с две.

Аналогично, при прилагане на $bba \rightarrow a$ към w_1bbaw_2 получаваме w_1aw_2 и лесно се вижда, че свойството е изпълнено.

Тъй като $a \rightarrow aba$ и $a \rightarrow bba$ са обратни на разгледаните, то за тях е в сила същото свойство.

Да забележим, че в думата $b \underbrace{aa \dots a}_{2003}$ броят на буквите a на четни позиции е 1002, докато броят на буквите a на четни позиции в думата $\underbrace{aa \dots a}_{2003}b$ е 1001.

Следователно от първата дума не може да се получи втората.

5. Да предположим първо, че $ad \neq bc$. Множеството от точки с координати $(ax + by, cx + dy)$, $x, y \in (0, 1)$, е вътрешността на успоредника с върхове $A = (0, 0)$, $B = (a, c)$, $C = (b, d)$ и $D = (a + b, c + d)$. Неговото лице S е равно на $|ad - bc|$. От друга страна, съгласно формулата на Пик, имаме $S = n + \frac{m}{2} - 1$, където n (съответно m) е броят на точките с цели координати във вътрешността (съответно по контура) на успоредника. Нека $e = \text{НОД}(a, c)$, $f = \text{НОД}(b, d)$, $a = ea_1$, $c = ec_1$, $b = fb_1$ и $d = fd_1$. Вътрешните точки от страната AB имат координати (ax, cx) , $x \in (0, 1)$. Следователно броят на тези с цели координати е равен на $e - 1$. Аналогично броят на вътрешните точки с цели координати от страните BD , CD и AC е равен съответно на $f - 1$, $e - 1$ и $f - 1$. Следователно $\frac{m}{2} = e + f$ и тогава условието приема вида

$$(1) \quad ef|a_1d_1 - b_1c_1| = 2003 + e + f.$$

Тъй като $e = \text{НОД}(a, c) = 6$ следва, че f дели $2009 = 7^2 \cdot 41$ и $6f$ дели $2009 + f$. Това е възможно само при $f = 1, 7, 49$. За всяка от тези стойности на f числата $e = 6$, $a_1 = 1 + \frac{2009+f}{6f}$, $b_1 = c_1 = d_1 = 1$ изпълняват (1) и следователно $\text{НОД}(b, d) = 1, 7$ или 49 .

Нека сега $ad = bc$. Тогава лесно се вижда, че $a_1 = b_1$ и $c_1 = d_1$. За всяко $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ полагаме $y = \frac{1 - xe}{f} < \frac{1}{f}$. Тогава $ex + fy = 1$ и $ax + by = a_1$

и $cx + dy = c_1$ са цели числа. Следователно в този случай съществуват безбройно много двойки (x, y) с исканото свойство, което противоречи на условието.

6. а) Нека t е произволен остатък при деление на p , т.е. $t \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Да разгледаме остатъците при деление на p на числата $t - a_i$, $1 \leq i \leq m$ и b_j , $1 \leq j \leq n$. Това са $m + n > p$ на брой числа, всяко от които може да приема p възможни стойности $0, 1, \dots, p-1$. Следователно измежду тях има две равни. Тъй като при $i \neq j$ числата $t - a_i$ и $t - a_j$ (съответно b_i и b_j), дават различни остатъци при деление на p , то съществуват r и s , за които $t - a_r$ и b_s дават еднакви остатъци, т.е. $a_r + b_s$ при деление на p дава остатък t . Тъй като t е произволен остатък, то $k = p$.

б) Нека $m + n \leq p$ и да означим $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. За всеки две множества X и Y нека $X + Y = \{x + y \pmod p \mid x \in X, y \in Y\}$. Искаме да покажем, че $k = |A + B| \geq m + n - 1$. Без ограничение можем да предполагаме, че $m \leq n$. Ще докажем твърдението с индукция по m .

1. При $m = 1$ и за произволно n имаме $|A + B| = |a_1 + B|$. Тъй като при $i \neq j$ имаме $a_1 + b_i \neq a_1 + b_j \pmod p$, то $|a_1 + B| = |B| = n = m + 1 - 1$, т.е. твърдението е вярно при $m = 1$.

2. Да допуснем, че твърдението е вярно за всеки две множества X и Y , за които $|X| < m$, $|X| < |Y|$ и $|X| + |Y| \leq p$.

3. Нека $|A| = m > 1$, $|B| = n$, където $m \leq n$ и $m + n \leq p$. Тъй като $m > 1$ и $m + n \leq p$, то $n < p$ и следователно съществува елемент $c \notin B$. Нека $a_1, a_2 \in A$. Понеже редицата $c + t(a_2 - a_1)$, $t = 1, 2, \dots, p-1$ модул p обхожда всички остатъци без c , то можем да считаме, че t е минималното, за което $b = c + t(a_2 - a_1)$ е елемент на B . Множеството $A' = (b - a_2) + A$ съдържа елементите $b - a_2 + a_1$ и $b - a_2 + a_2 = b$. За първият от горните елементи имаме $b - a_2 + a_1 = c + (t-1)(a_2 - a_1)$, който елемент не принадлежи на B . Тъй като $|A' + B| = |\{b - a_2\} + A + B|$, то достатъчно е да докажем, че $|A' + B| \geq m + n - 1$.

Да означим $F = A' \cap B$ и $G = A' \cup B$. Имаме $F \neq \emptyset$ (защото $b \in F$), F е същинско подмножество на A' и B е същинско подмножество на G (защото $b - a_2 + a_1 \in A'$ и $b - a_2 + a_1 \notin F$), което дава $0 < |F| < m \leq n < |G|$. Освен това $m + n = |A'| + |B| = |A' \cap B| + |A' \cup B| = |F| + |G|$. Да забележим още, че $F + G \subset A' + B$ (защото ако $f \in F$ и $g \in G$, то без ограничение $g \in A'$ и тогава $f \in F \subset B$ дава $f + g \in A' + B$), което дава $|A'| + |B| \geq |F| + |G|$. Понеже $0 < |F| < m \leq n < |G|$, и $|F| + |G| \leq p$, то твърдението е вярно за

множествата $|F|$ и $|G|$. Следователно

$$|A + B| = |A' + B| \geq |F + G| \geq |F| + |G| - 1 = |A'| + |B| - 1 = m + n - 1,$$

с което индукцията е завършена.

Контролно за определяне на отбора за 21. БОМ

1. Съществува. Нека $a_0 = 1$, $a_i = 2004!a_0a_1 \dots a_{i-1} - 1$, $i \geq 1$ и $A_i = \{2, 3, \dots, 2004, a_0, a_1, \dots, a_i\}$, $i \geq 0$. Тогава

$$\left(\prod_{a \in A_{i-1}} a - \sum_{a \in A_{i-1}} a^2 \right) - \left(\prod_{a \in A_i} a - \sum_{a \in A_i} a^2 \right) - 1 =$$

$$a_i^2 - 1 - (a_i - 1) \prod_{a \in A_{i-1}} a = (a_i - 1)(a_i + 1 - 2004!a_0a_1 \dots a_{i-1}) = 0$$

и следователно $\prod_{a \in A_n} a = \sum_{a \in A_n} a^2$ за $n = \prod_{a \in A_0} a - \sum_{a \in A_0} a^2$.

2. От неравенството между средното аритметично и средното геометрично за всяко $k = 2, 3, \dots, n$ следва, че

$$ka_k c_k = ka_k b_k^{\frac{1}{k}} \underbrace{c_{k-1}^{\frac{1}{k}} \dots c_{k-1}^{\frac{1}{k}}}_{k-1 \text{ пъти}} \leq a_k^k b_k + (k-1)c_{k-1}.$$

Като съберем тези неравенства и прибавим към тях равенството $a_1 c_1 = a_1 b_1$, получаваме исканото неравенство.

3. Да дефинираме ориентиран граф G с върхове елементите на A , в който е прекарано ориентирано ребро xy точно когато $f(x) = y$. Трябва да преброим графите G , за които:

- не съществуват цикли с дължина, по-голяма от 1;
- съществува верига $a_2 \dots a_n$ с дължина $n - 2$ и не съществува верига с дължина $n - 1$;
- единственото ребро, невключено в тази верига, има вида $a_1 a_j$, $3 \leq j \leq n$;
- има единствена примка и тя е $a_n a_1$.

Веригата може да бъде избрана по $n!$ начина, а реброто, което не е от нея - по $n - 2$ начина. Да забележим, че графите, за които това ребро е $a_1 a_3$, са броеви два пъти и техният брой е $\binom{n}{2}(n - 2)!$. Следователно отговорът на задачата е $n!(n - 2) - \binom{n}{2}(n - 2)! = \frac{n!(2n - 5)}{2}$.

4. Понеже даденият многоъгълник A е изпъкнал, то $2p_i$ е сумата от проекциите на страните му върху правата $A_i A_{i+1}$. Разглеждаме векторите $\overrightarrow{A_1 A_2}$, $\overrightarrow{A_2 A_3}$, $\dots$, $\overrightarrow{A_n A_1}$

и техните противоположни. От края на вектора $\overrightarrow{A_1 A_2}$ нанасяме вектор, сключващ най-малък положително ориентиран ъгъл с $\overrightarrow{A_1 A_2}$ (ако тези вектори са два, избираме този от вида $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$). За нанесения вектор правим същото и т.н.

Получаваме изпъкнала фигура $B = B_1 B_2 \dots B_{2n}$, срещуположните страни на която са успоредни и равни. Следователно главните диагонали на B се пресичат в една точка; да я означим с O . Нека q_i е проекцията на B върху правата $B_i B_{i+1}$. Като разгледаме правоъгълника с размери $q_i \times \text{dist}(B_i B_{i+1}, B_{i+n} B_{i+n+1})$, съдържащ B , заключаваме, че

$$\frac{|B_i B_{i+1}|}{q_i} \leq 4 \frac{S_{\triangle B_i B_{i+1} O}}{S_B}.$$

Оттук

$$\sum_{i=1}^n \frac{|A_i A_{i+1}|}{p_i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{|B_i B_{i+1}|}{q_i} \leq 4,$$

като равенство се достига само когато крайните точки на B образуват правоъгълник, т.е. A е правоъгълник.

5. Полиномите $p(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1$ и $q(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + a$, $a \neq 1$, показват, че търсеният минимален брой е не по-голям от $2m-2$ (имаме $f(u, v) = (a-1)(u^{m-1} + u^{m-2} + \dots + u) + (1-a)(v^{m-1} + v^{m-2} + \dots + v)$). Ще докажем с индукция по m , че ненулевите коефициенти са поне $2m-2$.

Ако в $p(x)$ или $q(x)$ участва степен, която не се среща в другия, то ненулевите коефициенти в $f(u, v)$ са поне $2m$. Затова оттук нататък ще считаме, че в $p(x)$ и $q(x)$ участват едни и същи степени. Да отбележим още, че умножението с ненулева константа на някои от полиномите $p(x)$ и $q(x)$ не променя броя на ненулевите коефициенти на $f(u, v)$.

При $m = 2$ имаме $p(x) = ax^n + bx^k$ и $q(x) = cx^n + dx^k$, като $ad - bc \neq 0$. Тогава $f(u, v) = (ad - bc)u^n v^k + (bc - ad)u^k v^n$ има точно два ненулеви коефициента. При $m = 3$ нека $p(x) = x^k + ax^n + bx^\ell$ и $q(x) = x^k + cx^n + dx^\ell$, като $ad - bc \neq 0$. Тогава $f(u, v) = (ad - bc)u^\ell v^k + (bc - ad)u^\ell v^n + (c - a)u^k v^n + (a - c)u^n v^k + (d - b)u^k v^\ell + (b - d)u^\ell v^k$. Първите два коефициента са ненулеви, а тъй като равенствата $a = c$ и $b = d$ са невъзможни едновременно, поне два от последните четири коефициента също са ненулеви.

Нека $m \geq 4$ и $p(x) = p_1(x) + ax^n + bx^k$ и $q(x) = q_1(x) + cx^n + dx^k$, като $ad - bc \neq 0$, а полиномите $p_1(x)$ и $q_1(x)$ имат по $m-2 \geq 2$ ненулеви

коефициента. Тогава

$$f(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v) + f_3(u, v),$$

където $f_1(u, v) = p_1(u)q_1(v) - p_1(v)q_1(u)$, $f_2(u, v) = (au^n + bu^k)q_1(v) + (cv^n + dv^k)p_1(u) - (av^n + bv^k)q_1(u) - (cu^n + du^k)p_1(v)$ и $f_3(u, v) = (ad - bc)u^n v^k + (bc - ad)u^k v^n$, като в различните полиноми няма подобни едночлени. Ако $p_1(x)$ и $q_1(x)$ са непропорционални, по индукционно предположение $f_1(u, v)$ има поне $2(m-2) - 2 = 2m - 6$ ненулеви коефициента. Освен това $f_2(u, v)$ има поне 2 ненулеви коефициента, а $f_3(u, v)$ има два ненулеви коефициента.

Ако $p_1(x) = \alpha q_1(x)$, $\alpha \neq 0$, получаваме

$$f_2(u, v) = q_1(v) \left[(a - c\alpha)u^n + (b - d\alpha)u^k \right] + q_1(u) \left[(c\alpha - a)v^n + (d\alpha - b)v^k \right].$$

Тъй като равенствата $a - c\alpha = 0$ и $b - d\alpha = 0$ са невъзможни едновременно, полиномът $f_2(u, v)$ има поне $2(m-2)$ ненулеви коефициента (два пъти повече от тези на $q_1(x)$). Заедно с двата ненулеви коефициента на $f_3(u, v)$ получаваме исканото.

6. Нека AB е диаметър на k . Тъй като $\sphericalangle DHA = \sphericalangle DCH = \alpha$, $\sphericalangle CHB = \sphericalangle CDH = \beta$, $\sphericalangle DMH = 2\alpha$, $\sphericalangle CMH = 2\beta$ и $\sphericalangle MDC = 90^\circ - \alpha - \beta$, от синусовата теорема за $\triangle DMO$ намираме

$$(1) \quad MO = \frac{r \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)},$$

където r е радиусът на k_1 , а $O = MH \cap CD$.

От друга страна, ако $MH \cap k = P$, то

$$\sphericalangle MAP = \frac{1}{2} \widehat{MP} = \frac{1}{2} (\widehat{DM} + \widehat{CP}) = \sphericalangle DOM = 90^\circ - \alpha + \beta$$

и по синусовата теорема за $\triangle APM$ получаваме

$$2r = MP = 2R \cos(\alpha - \beta),$$

където R е радиусът на k . Тъй като от синусовата теорема за $\triangle DMC$ имаме

$$r = MC = 2R \cos(\alpha + \beta),$$

то $2 \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta)$. Сега от (1) следва, че точка O е среда на MH .

По обратен път лесно следва, че ако O е среда на MH , то H е среда на MP , т.е. AB е диаметър на k .

Алтернативно решение. Нека AB е диаметър на k и MH пресича k за втори път в точка P . Ясно е, че $MH = HP = r$, където r е радиусът на k_1 . Разглеждаме инверсия с център M и радиус r . Тогава средата T на MH се изобразява в точка P . Образът на k при тази инверсия е правата DC и следователно образът на P лежи върху DC , т.е. $T \in DC$.

Обратното твърдение следва лесно от същата инверсия.

7. Можем да смятаме, че A_1 е множеството с максимална мощност. Означаваме $A_i \cap A_{i+1} = B_i, i = 1, 2, \dots, n$. Тъй като $A_n \supset B_{n-1} \cup B_n$, получаваме

$$\begin{aligned} |A_n| &\geq |B_{n-1} \cup B_n| = |B_{n-1}| + |B_n| - |B_{n-1} \cap B_n| \\ &> \frac{n-2}{n-1}|A_n| + \frac{n-2}{n-1}|A_1| - |B_{n-1} \cap B_n|. \end{aligned}$$

Оттук $|B_{n-1} \cap B_n| > \frac{n-2}{n-1}|A_1| - \frac{1}{n-1}|A_n| \geq \frac{n-3}{n-1}|A_1|$, т.е. $|A_{n-1} \cap A_n \cap A_1| > \frac{n-3}{n-1}|A_1|$. По-нататък, ако $C = A_{n-1} \cap A_n \cap A_1$, $A_{n-1} \supset C \cup B_{n-2}$ и аналогично

$$\begin{aligned} |A_{n-1}| &\geq |B_{n-2} \cup C| = |B_{n-2}| + |C| - |B_{n-2} \cap C| \\ &> \frac{n-2}{n-1}|A_{n-1}| + \frac{n-3}{n-1}|A_1| - |B_{n-2} \cap C|. \end{aligned}$$

Оттук $|B_{n-2} \cap C| > \frac{n-3}{n-1}|A_1| - \frac{1}{n-1}|A_{n-1}| \geq \frac{n-4}{n-1}|A_1|$, т.е.

$$|A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n \cap A_1| > \frac{n-4}{n-1}|A_1|.$$

Индуктивно получаваме $|A_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap A_1| > \frac{n-k-2}{n-1}|A_1|$ за $k = 1, 2, \dots, n-2$ и в частност, $|A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap A_1| > 0$.

8. Функцията $K(n)$ е монотонно растяща при $n \geq 3$, защото от $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 1$

следва, че $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_n+1} + \frac{1}{x_n(x_n+1)} = 1$. Значи е достатъчно да докажем,

че съществува $t \leq L(b)$, за което $K(t+2) + 2L(b) \geq d(b)$, където $d(b)$ е броят на различните естествени делители на b .

Нека t е минималното естествено число, за което уравнението $\sum_{i=1}^t \frac{1}{x_i} = 1 - \frac{1}{b}$ има решение. Тогава $t \leq L(b)$. Да фиксираме $t, b, x_1, \dots, x_t$.

Да отбележим, че броят на решенията на уравнението $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = \frac{1}{b}$, за които b дели y_2 и $y_1 \leq y_2$, е равен на $d(b)$. Действително, ако $\frac{1}{b} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{kb}$ за някое $k \geq 2$, то $y_1 = b + \frac{b}{k-1}$, т.е. $k-1$ дели b и имаме точно $d(b)$ възможности за k .

Следователно $K(t+2)$ е поне $d(b)$ минус броя на случаите, в които $y_i = x_j$. Тези случаи обаче са най-много $2L(b)$ и исканото неравенство следва.

Първо контролно за определяне на отбора за 45. МОМ

3. Не е трудно да се види, че ако един триъгълник съдържа друг, то радиусът на вписаната окръжност на първия е по-голям. Поради това можем без ограничение на общността да разглеждаме само триъгълници с върхове по контура на квадрата. Нещо повече, можем да се ограничим с триъгълниците с (поне) един връх във връх на квадрата и два върха върху страните (включително краищата на тези страни), които не съдържат този връх. Следователно разглеждаме триъгълници OAB , където $O = (0, 0)$, $A = (a, 1)$ и $B = (1, b)$, $0 \leq a, b \leq 1$.

Да разгледаме и $\triangle OCD$, където $C = (a + b, 1)$ и $D = (1, 0)$. Да означим лицето и периметъра на $\triangle OAB$ съответно с S и P , $x = OA = \sqrt{1 + a^2}$, $y = AB = \sqrt{(1 - a)^2 + (1 - b)^2}$, $z = OB = \sqrt{1 + b^2}$, $u = OC = \sqrt{1 + (a + b)^2}$ и $v = CD = \sqrt{1 + (1 - a - b)^2}$. Да отбележим, че $OD = 1$, $u \geq z \geq 1$, $x \geq 1$ и $v \geq 1$.

Сравнявайки периметрите на $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$, имаме последователно

$$\begin{aligned} (u + v + 1) - (x + y + z) &= \frac{u^2 - x^2}{u + x} + \frac{v^2 - y^2}{v + y} + \frac{1 - z^2}{1 + z} \\ &= \frac{2ab + b^2}{u + x} + \frac{2ab}{v + y} - \frac{b^2}{1 + z} \leq \frac{2ab + b^2}{1 + z} + \frac{2ab}{v + y} - \frac{b^2}{1 + z} \\ &= 2ab \left(\frac{1}{v + y} + \frac{1}{1 + z} \right) \leq 3ab \leq (u + v + 1)ab. \end{aligned}$$

Следователно

$$(u + v + 1)(1 - ab) \leq x + y + z \iff \frac{1}{u + v + 1} \geq \frac{1 - ab}{x + y + z} = \frac{2S}{P} = r.$$

Но $u + v + 1 = \sqrt{1 + (a + b)^2} + \sqrt{1 + (1 - a - b)^2} + 1 \geq \min_x F(x)$, където $F(x) = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + (1 - x)^2} + 1$. Тъй като $\min_x F(x) = \sqrt{5} + 1$, получаваме

$$r \leq \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

21. Балканска олимпиада по математика

1. При $m = n = 0$ следва, че $a_0 = 1$ и тогава за $n = 0$ получаваме $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$. Оттук по индукция $a_{2m} = (2m)^2 + 2m + 1$ и значи $a_m = \frac{a_{2m} + 2m + 3}{4} = m^2 + m + 1$ за всяко m (директно се проверява, че така намерената редица изпълнява даденото условие). В частност, $a_{2004} = 2004^2 + 2005$.

2. От малката теорема на Ферма следва, че y дели $x + 19$ и x дели $y - 19$. Очевидно $x \neq y$ и значи xy дели $x - y + 19$. Тогава $xy \leq y - x - 19$ или $xy \leq x - y + 19$. Първият случай води до $(x - 1)(y + 1) \leq -20$, което е невъзможно, а вторият - до $(x + 1)(y - 1) \leq 18$. При $x \geq 7$ следва, че $y = 2$ и понеже x дели 17, то $x = 17$. Директна проверка показва, че $(17, 2)$ не е решение на уравнението. Следователно $x = 2$, $x = 3$ или $x = 5$ и по подобен начин намираме, че единствените решения на задачата са $(2, 3)$ и $(2, 7)$.

3. Нека A_1 , B_1 и C_1 са средите на страните на $\triangle ABC$. Понеже общата хорда на две окръжности е перпендикулярна на отсечката, свързваща двата центъра, и се разполюва от нея, то средите K_1 , L_1 и M_1 на отсечките OK , OL и OM са ортогоналните проекции на O върху страните на $\triangle A_1B_1C_1$. Както е добре известно, оттук следва, че точката O е ортоцентър на остроъгълния $\triangle A_1B_1C_1$, т.е. център на описаната окръжност около $\triangle ABC$, точно когато тя е център на вписаната окръжност в $\triangle K_1L_1M_1$ (докажете!). От друга страна, хомотетията с център O и коефициент 2 изобразява $\triangle K_1L_1M_1$ в $\triangle KLM$ и следователно O е център на вписаната окръжност в $\triangle K_1L_1M_1$ само ако тази точка е център на вписаната окръжност в $\triangle KLM$. С това задачата е решена.

4. Ако всички прави са успоредни, от (ii) лесно следва, че всички числа са нула и тогава (i) не се изпълнява.

Нека не всички прави са успоредни. На всяка част можем да съпоставим знак $+$ или $-$ така, че знаците в съседни части да са противоположни (убедете в това с индукция по броя на правите, като при добавяне на нова права смените знаците от едната ѝ страна, а от другата ги запазите). В дадена част написваме числото sa , където s е съпоставеният знак, а a е броят на ъглите на частта. Остава да проверим, че условията са изпълнени:

(i) ако $a < 0 < b$ са написаните числа в две съседни части, то $ab \leq a < a + b$;

(ii) всеки от ъглите в полуравнината, определена от права l , е броен два

пъти с противоположни знаци, ако върхът му лежи на l , и четири пъти със знаци $+, -, +, -$ в противен случай.

45. Международна олимпиада по математика

1. Ясно е, че O е центърът на окръжността с диаметър BC . Тогава ъглополовящата на $\angle MON$ е симетрала на отсечката MN . Тъй като ъглополовящата на $\angle MAN$ и симетралата на отсечката MN минават през средата на дъгата MN от описаната около $\triangle AMN$ окръжност, несъдържаща A , то R е средата на тази дъга. Понеже $CM \perp AB$ и $BN \perp AC$, то около $MBCN$ може да се опише окръжност, откъдето получаваме $\angle MNA = \angle ABC$ и $\angle NMA = \angle ACB$. Нека L е пресечната точка на ъглополовящата AR и страната BC . Имаме $\angle ARN = \angle NMA = \angle ACB$, откъдето следва, че около четириъгълникът $CNRL$ може да се опише окръжност. Аналогично се доказва, че около четириъгълникът $BMRL$ може да се опише окръжност. Следователно окръжностите, описани около триъгълниците BMR и CNR , се пресичат в точката L от страната BC .

2. Тройката $(a, b, c) = (6x, 3x, -2x)$ удовлетворява условието $ab + bc + ca = 0$. Замествайки в

$$(1), \quad P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

получаваме, че

$$P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x).$$

Ако $P(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, то сравняването на коефициентите пред равните степени на x дава

$$a_i(3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i) = 0.$$

Ако i е нечетно, то $8^i = (3+5)^i > 3^i + 5^i$ и следователно $3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i <$

0. Ако $i \geq 6$ е четно, от $\left(\frac{8}{7}\right)^i > 2$ следва, че $3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i > 0$. Директна проверка дава $3^2 + 5^2 + (-8)^2 - 2 \cdot 7^2 = 3^4 + 5^4 + (-8)^4 - 2 \cdot 7^4 = 0$, докато $3^0 + 5^0 + (-8)^0 - 2 \cdot 7^0 = 1$. Следователно $P(x) = a_4 x^4 + a_2 x^2$.

Ще покажем, че полином от горния вид удовлетворява (1). Достатъчно е да докажем това за полиномите $P_1(x) = x^2$ и $P_2(x) = x^4$. Като използваме условието $ab + bc + ca = 0$, получаваме

$$\begin{aligned} P_1(a - b) + P_1(b - c) + P_1(c - a) &= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) = \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ca) = 2(a + b + c)^2 = P_1(a + b + c). \end{aligned}$$

За доказателство, че $P_2(x)$ изпълнява (1), пресмятаме

$$\begin{aligned} P_2(a + b + c) &= (a + b + c)^2(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2). \end{aligned}$$

От друга страна,

$$\begin{aligned} P_2(a-b) + P_2(b-c) + P_2(c-a) &= 2(a^4 + b^4 + c^4) + 6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= -4(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b) \end{aligned}$$

Равенството се свежда до

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 2(a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b).$$

За доказването на последното използваме, че

$$0 = (ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2,$$

откъдето

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = -2(a^2bc + ab^2c + abc^2).$$

Следователно остана да проверим, че

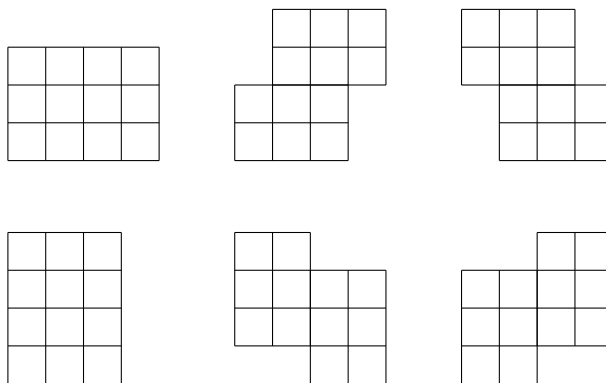
$$a^2bc + ab^2c + abc^2 + a^3b + a^3c + b^3a + b^3c + c^3a + c^3b = 0,$$

което е еквивалентно на

$$(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) = 0.$$

Окончателно, търсените полиноми имат от вида $\alpha x^4 + \beta x^2$.

3. Ясно е, че вътрешното квадратче, заградено от дадена кука, може да бъде покрито само от друга кука, като при това се получава някоя от следните фигури:



Оттук следва, че ако правоъгълник $m \times n$ може да бъде покрит с куки, той може да бъде покрит с фигури от горния вид. Да наречем трите фигури от първия ред фигури тип A , а трите фигури от втория ред фигури тип B . Тъй като всяка фигура има 12 квадратчета, то mn трябва да се дели на 12. Следните случаи изчерпват всички възможности:

1. $m = 4m_0$ и $n = 3n_0$. В този случай правоъгълникът се покрива по очевиден начин от правоъгълници 3×4 , т.е. и от куки.

2. $m = 12m_0$. Очевидно при $n = 1, 2$ правоъгълникът не може да се покрие. При $n = 5$, като се разгледа покриването на ъглова клетка, лесно следва, че покритие е невъзможно. За всяко $n \neq 1, 2, 5$ съществуват естествени числа a и b , за които $n = 3a + 4b$ (за $n = 3, 4, 6, 7, 8$ това е очевидно, а ако е вярно за някое n , то очевидно е вярно и за $n + 3$). Такъв правоъгълник се покрива с правоъгълници $3 \times 12m_0$ и $4 \times 12m_0$, които според 1. се покриват с куки.

3. $m = 2m_0$ и $n = 2n_0$, където m_0 и n_0 са нечетни. Ще покажем, че такъв правоъгълник не може да се покрие с куки. Да въведем координатна система, започваща от долната лява клетка (m е по оста x) и да оцветим клетките с координати (a, b) , за $a = 1, 3, \dots, m - 1$ като $b = 1, 3, \dots, n - 1$ при $a = 4t + 1$ и $b = 2, 4, \dots, n$ при $a = 4t + 3$. Да забележим, че общият брой оцветени клетки е n_0m_0 , което е нечетно число. Директно се проверява, че фигурите от тип A покриват по 3 оцветени клетки, докато фигурите от тип B покриват 4 или 2 оцветени клетки. Следователно фигурите от тип A са нечетен брой. С аналогично оцветяване на нечетните редове получаваме, че фигурите от тип B са нечетен брой. Следователно всички фигури са четен брой, което означава, че mn се дели на 24 - противоречие.

Окончателно, търсените m и n са такива, че едното се дели на 4, а другото на 3, или едното се дели на 12, а другото е различно от 1, 2 и 5.

4. Поради симетрията е достатъчно да докажем, че $t_1 < t_2 + t_3$. След разкриване на скобите получаваме

$$\begin{aligned} n^2 + 1 &> n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) = \\ &= n + t_1 \left(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) + \frac{1}{t_1} (t_2 + t_3) + \sum_{(i,j) \neq (1,2), (1,3)} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right). \end{aligned}$$

Тъй като числата са положителни, от неравенството между средното аритметично

и средното геометрично имаме $\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \geq 2$ за $1 \leq i < j \leq n$, $\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \geq \frac{2}{\sqrt{t_2 t_3}}$ и $t_1 + t_3 \geq 2\sqrt{t_1 t_3}$. Ако положим $a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}}$, получаваме, че

$$n^2 + 1 > n + 2\frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} + 2\frac{\sqrt{t_2 t_3}}{t_1} + 2\left[\binom{n}{2} - 2\right] = 2a + \frac{2}{a} + n^2 - 4.$$

Следователно $2a + \frac{2}{a} - 5 < 0$, което дава $\frac{1}{2} < a = \frac{t_1}{\sqrt{t_2 t_3}} < 2$. Оттук $t_1 < 2\sqrt{t_2 t_3} \leq t_2 + t_3$.

5. Да предположим, че P е вътрешна точка за $\triangle ABD$ и нека BP и DP пресичат описаната около този триъгълник окръжност за втори път съответно в точки Q и R . Имаме, че $\triangle RPQ \sim \triangle BPD$ и $\triangle RAQ \sim \triangle BCD$, понеже съответните им ъгли са равни. Следователно четириъгълниците са $RPQA$ и $BPDC$ са подобни. Тогава

$$AP = CP \iff RPQA \cong BPDC \iff RQ = BD \iff$$

$$RB \parallel QD \iff \sphericalangle BRD = \sphericalangle QDR \iff \sphericalangle BAD = 180^\circ - \sphericalangle BCD,$$

тъй като

$$\sphericalangle QDR = \sphericalangle QDA + \sphericalangle RDA = \sphericalangle PBA + \sphericalangle PDA = \sphericalangle DBC + \sphericalangle BDC.$$

Подобни разсъждения са сила и в случая, когато P е вътрешна точка за $\triangle BCD$, с което задачата е решена.

6. Ще докажем, че n има алтернативно кратно, тогава и само тогава, когато n не се дели на 20. Ако n се дели на 20, то всяко кратно A на n завършва на $a0$, където a е четно и следователно A не може да е алтернативно.

За да установим обратното, най-напред ще разгледаме числата от вида 2^n и 2.5^n . Ще пишем $u^k \parallel a$, ако k е най-голямата степен, за която u^k дели a .
Лема 1. Всяко число от вида 2^n има алтернативно кратно с четен брой цифри.

Доказателство. Достатъчно е да конструираме безкрайна редица $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ от цифри, за която

$$a_n \equiv n - 1 \pmod{2} \text{ и } 2^{2n-1} \parallel \overline{a_{2n-1} \dots a_1}; \quad 2^{2n+1} \parallel \overline{a_{2n} a_{2n-1} \dots a_1}.$$

Нека $a_1 = 2$ и $a_2 = 7$. Ако сме построили редицата до a_{2n} , да изберем $a_{2n+1} = 4$. Тогава a_{2n+1} е четно и

$$2^{2n+1} \parallel \overline{a_{2n+1} a_{2n} \dots a_1} = 4.10^{2n} + \overline{a_{2n} a_{2n-1} \dots a_1}$$

защото $2^{2n+1}||\overline{a_{2n}a_{2n-1}\dots a_1}$ и $2^{2n+2}||4.10^{2n}$. Следователно $\overline{a_{2n+1}a_{2n}\dots a_1} = 2^{2n+1}A$, където A е нечетно число. Сега директно се проверява, че можем да изберем a_{2n+2} измежду 1, 3, 5 и 7 така, че $5a_{2n+2} \equiv 4 - A \pmod{8}$ и значи

$$2^{2n+3}|| = 2^{2n+1}[a_{2n+2}5^{2n+1} + A] = \overline{a_{2n+2}a_{2n+1}\dots a_1}.$$

По аналогичен начин се доказва и

Лема 2. Всяко число от вида 2.5^n има алтернативно кратно с четен брой цифри.

Накрая, да представим произволно число n , което не се дели на 20, във вида $n = 2^\alpha 5^\beta k$, където k е взаимно просто с 10. От доказаните лемии следва, че числото $2^\alpha 5^\beta$ има алтернативно кратно M с четен брой цифри. Ясно е, че числата от вида $\overline{MM\dots M}$ са алтернативни кратни на $2^\alpha 5^\beta$. От принципа на Дирихле следва, че има две от тях, които дават еднакъв остатък при деление на k . Като ги извадим и вземем предвид, че k е взаимно просто с 10, получаваме, че съществува число от вида $\overline{MM\dots M}$, което се дели на k . Това число се дели и на $n = 2^\alpha 5^\beta k$.

Български математически състезания, 2005 г.

Зимни математически състезания

9.1. При $a \neq 0$, $a \neq 1$, даденото равенство е еквивалентно на $a(x_1x_2+x_3x_4) = x_1x_2x_3x_4(x_1+x_2+x_3+x_4) \iff 2a-1 = (a-1)(a+5) \iff a^2+2a-4=0 \iff a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$. Непосредствено може да се провери, че за тези стойности на a и двете уравнения имат реални корени.

9.2. Ако AB е диаметър на k , то AM и BN са височини на $\triangle ABC$. Нека H е ортоцентърът на $\triangle ABC$ и допирателната към k в M пресича височината CH в точка O_1 . Тогава $\triangle CMH$ е правоъгълен, като $\sphericalangle CMO_1 = \sphericalangle ABM = \widehat{AM}/2$. Но $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACH$ и следователно $\sphericalangle CMO_1 = \sphericalangle MCO_1$, т.е. $\triangle MCO_1$ е равнобедрен, откъдето заключаваме, че O_1 е среда на CH . Аналогично се вижда, че допирателната към k в N минава през O_1 , т.е. $O \equiv O_1$ и $OM = ON = OC = CH/2$.

Нека O е център на описаната около $\triangle CMN$ окръжност. Тогава

$$\sphericalangle CMO = \sphericalangle MCO = \sphericalangle ABM \text{ и } \sphericalangle CNO = \sphericalangle NCO = \sphericalangle BAN,$$

откъдето

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle MCO + \sphericalangle NCO = \sphericalangle ABM + \sphericalangle BAN.$$

Следователно

$$2\sphericalangle ANB = \sphericalangle ANB + \sphericalangle AMB = 180^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle BAN +$$

$$180^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ABM = 360^\circ - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC) = 180^\circ,$$

откъдето $\sphericalangle ANB = 90^\circ$ и AB е диаметър на k .

9.3. Условието $m-n$ да има не повече от три естествени делителя означава, че $m-n = p^k$, където p е просто число и $k \in \{0, 1, 2\}$. При $k = 0$ е необходимо $n(n+1)$ да е точен квадрат, което е невъзможно. Нека $m-n = p^k$, $mn = t^2$, където $k \in \{1, 2\}$, t е естествено число. Тогава $n(n+p^k) = t^2 \iff (2n+p^k-2t)(2n+p^k+2t) = p^{2k}$. Следователно $2n+p^k-2t = p^s$ и $2n+p^k+2t = p^r$, където r и s са цели числа, $0 \leq s < r \leq 2k$ и $r+s = 2k$.

При $k = 1$ имаме единствена възможност $2n+p-2t = 1$, $2n+p+2t = p^2$, откъдето $n = (p-1)^2/4$ и $m = n+p = (p+1)^2/4$. Поради условието $1000 \leq m < 2005$ получаваме решенията $m = 1764, 1600, 1369, 1296$ и 1156 (съответно при $p = 83, 79, 73, 71$ и 67).

При $k = 2$ е възможно $(r, s) = (4, 0)$ и $(r, s) = (3, 1)$. В първия случай получаваме $m = n + p^2 = (p^2 + 1)^2/4$, което няма решение за просто p и $1000 \leq m < 2005$. Във втория случай имаме $m = p(p + 1)^2/4$, което дава решенията $m = 1900$ и 1377 (съответно при $p = 19$ и 17).

9.4. Яна има поне една картичка k . Ако 1 е в Иво, то произведението на 1 и k е в Яна, което противоречи на условието. Значи 1 е в Яна.

Ако 12 е в Иво, то сборът на 1 и 12 е в Иво, противоречие. Значи 12 е в Яна.

Понеже сборът на 6 и 7 е в Иво, те са в един човек. Но ако са в Иво, то сборът на 1 и 6 е в Иво, противоречие. Значи са в Яна.

Понеже сборът на 3 и 10 е в Иво, те са в един човек. Но ако са в Иво, то сборът на 3 и 7 е в Иво, противоречие. Значи са в Яна.

Понеже сборът на 5 и 8 е в Иво, те са в един човек. Но ако са в Иво, то сборът на 5 и 3 е в Иво, противоречие. Значи са в Яна.

Понеже сборът на 4 и 9 е в Иво, те са в един човек. Но ако са в Иво, то сборът на 4 и 5 е в Иво, противоречие. Значи са в Яна.

Понеже сборът на 2 и 11 е в Иво, те са в един човек. Но ако са в Иво, то сборът на 2 и 9 е в Иво, противоречие. Значи са в Яна.

И така, числата от 1 до 12 са в Яна. Тогава числата от вида $13k$ ($k = 1, \dots, 7$) са в Иво, а сборовете им с числата от 1 до 12 са в Яна. И така, в Яна са картичките, които не се делят на 13, а те са $100 - 7 = 93$.

10.1. а) Разглеждаме два случая. Ако $x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$, неравенството добива вида $x^2 - 6x + 6 \leq 0$, откъдето $x \in [3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$. Следователно решенията в разглеждания интервал са $x \in [3 - \sqrt{3}, 2] \cup [3, 3 + \sqrt{3}]$. Ако $x \in (2, 3)$, неравенството приема вида $x^2 - 4x + 6 \geq 0$, което е изпълнено за всяко x в разглеждания интервал. Окончателно $x \in [3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$.

б) Ако неравенството $|x^2 - 5x + 6| \leq x + a$ има точно три цели решения, то има точно три такива в обединението на интервалите $(-\infty, 2]$ и $[3, \infty)$. В това обединение то е еквивалентно на $x^2 - 6x + 6 - a \leq 0$. Дискриминантата е неотрицателна при $a \geq -3$ и тогава $x \in [3 - \sqrt{a+3}, 3 + \sqrt{a+3}]$. Този интервал съдържа числото 3 и е симетричен относно него. Следователно той включва точно три цели числа, когато $1 \leq \sqrt{a+3} < 2$, т.е. $a \in [-2, 1)$.

10.2. а) От правоъгълния $\triangle CEI$ имаме, че $EI^2 = SI \cdot CI = DI^2$. Оттук $DI/SI = CI/DI$ и тогава $\triangle CDI \sim \triangle DSI$ по първи признак.

б) Четириъгълникът $DIMG$ е вписан. От (а) имаме, че $\sphericalangle ISD = \sphericalangle IDC = \sphericalangle IMD$, откъдето следва, че S лежи на описаната около $DIMG$ окръжност. Сега очевидно $\sphericalangle GSI = \sphericalangle GMI = 90^\circ$.

Забележка. От доказаното лесно следва, че точките E , F и G лежат на една права.

10.3. След полагането $x = u - 1$, $y = v + 1$ получаваме $z^2 + 1 = (u^2 - 1)(v^2 - 1)$. Непосредствено се проверява, че u , v и z са четни. По-нататък, ако $|u| > 1$, то $u^2 - 1$ има прост делител p от вида $4k + 3$. Следователно $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, което е невъзможно. Аналогично се отхвърля и случая $|v| > 1$. Очевидно е невъзможно да имаме $|u| = 1$ или $|v| = 1$. Така единствено решение остава $u = v = z = 0$. Окончателно $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$.

10.4. Най-напред ще докажем, че за нечетно n има началниположения, от които не можем да достигнем до таблица, съставена само от 1. Да допуснем, че сме достигнали до таблица, състояща се изцяло от 1. Ако P_i е произведението на числата в i -тия ред на предпоследната стъпка за съответните произведения, то $P_1P_3 = P_2P_4 = \dots = P_{n-1}P_1 = P_nP_2 = 1$. Понеже n е нечетно, лесно следва, че тези произведения са равни. По този начин заключаваме, че и в началната таблица произведенията по редове са равни. Следователно от начална таблица, при която не всички произведения по редове са равни, не можем да достигнем до таблица, съставена само от 1.

Сега да разгледаме таблица от ред $n = 2^k m$, където m е нечетно число, а $k \geq 1$. След две стъпки числото в клетката (i, j) става равно на произведението на числата в клетките $(i - 2, j)$, $(i, j - 2)$, $(i, j + 2)$ и $(i + 2, j)$. Следователно резултатът, получен на всяка четна стъпка, може да се разглежда, като получен от прилагането на операцията върху следните четири по-малки таблици:

- таблицата, съставена от всички клетки (i, j) с $i \equiv j \equiv 0 \pmod{2}$;
- таблицата, съставена от всички клетки (i, j) с $i \equiv 0 \pmod{2}$, $j \equiv 1 \pmod{2}$;
- таблицата, съставена от всички клетки (i, j) с $i \equiv 1 \pmod{2}$, $j \equiv 0 \pmod{2}$;
- таблицата, съставена от всички клетки (i, j) с $i \equiv j \equiv 1 \pmod{2}$.

Сега по индукция получаваме, че до таблица от $n = 2^k m$, съставена само от 1, можем да достигнем от всяко начално положение, тогава и само тогава, когато това твърдение е вярно и за таблица от ред $2^{k-1}m$. За всяка таблица от ред 2 достигаем в един ход до таблица, съставена само от 1.

Така заключаваме, че търсените n имат вида 2^k , където k е произволно естествено число.

11.1. а) Като използваме формулата за сумата на първите n члена на

аритметична и геометрична прогресия, имаме

$$\frac{2m + (n-1)2}{2} \cdot n = n(2^m - 1),$$

откъдето получаваме $m + n = 2^m$.

б) Тъй като $n2^2 = m + 22$ имаме $4n = m + 44$. Като използваме полученото в а), намираме $2^{m+2} = 44 + 5m$. Директно се вижда, че $m = 4$ е решение. При $m < 4$ имаме $2^{m+2} < 44 + 5m$, а при $m > 4$ имаме $2^{m+2} > 44 + 5m$. Следователно $m = 4, n = 12$.

11.2. Уравнението е равносилно на $ax + 1 = (x - 1)(2 - x)$ за $x \in (1, 2)$, което е еквивалентно на $x^2 + (a - 3)x + 3 = 0$. Следователно търсим онези стойности на a , за които уравнението $f(x) = x^2 + (a - 3)x + 3 = 0$ има точно един корен в интервала $(1, 2)$. Това е възможно в следните случаи:

1. $f(1)f(2) < 0$, което е еквивалентно на $(a + 1)(2a + 1) < 0$, откъдето $a \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

2. $f(1) = 0$, т.е. $a = -1$. Тогава $x_1 = 1, x_2 = 3$, което означава, че $a = -1$ не е решение.

3. $f(2) = 0$, т.е. $a = -\frac{1}{2}$. Тогава $x_1 = 2, x_2 = \frac{3}{2}$, което означава, че $a = -\frac{1}{2}$ е решение.

4. $D = 0$, т.е. $(a - 3)^2 - 12 = a^2 - 6a - 3 = 0$, откъдето $a = 3 \pm 2\sqrt{3}$. При $a = 3 + 2\sqrt{3}$ имаме $x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$, т.е. $a = 3 + 2\sqrt{3}$ не е решение. При $a = 3 - 2\sqrt{3}$ имаме $x_1 = x_2 = \sqrt{3} \in (1, 2)$, т.е. $a = 3 - 2\sqrt{3}$ е решение.

Окончателно $a \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \{3 - 2\sqrt{3}\}$.

11.3. Нека $K = CO \cap AB$ и $\angle AKC = \varphi$. Нека M и N са пресечните точки на QO съответно с CB и CA . От $\triangle APQ$ и синусовата теорема получаваме

$$(1) \quad \frac{AQ}{PQ} = \frac{\sin(90^\circ + \beta)}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos \beta}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

От правоъгълния триъгълник KPQ намираме

$$(2) \quad \frac{KQ}{PQ} = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

От (1) и (2) получаваме

$$(3) \quad \frac{AQ}{QK} = \frac{\cos \beta \sin \varphi}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

От $\triangle AKC$ и свойството на ъглополовящата следва, че

$$(4) \quad \frac{KO}{OC} = \frac{AK}{AC} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \varphi}.$$

Прилагаме теоремата на Менелай за $\triangle AKC$ и правата OQ :

$$\frac{AQ}{QK} \cdot \frac{KO}{OC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1.$$

След заместване от (3) и (4) намираме $\frac{CN}{NA} = \frac{1}{\cos \beta}$, откъдето $\frac{CN}{CA} = \frac{1}{1 + \cos \beta}$, т.е. $CN = \frac{2R \sin \beta}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = 2R \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$. По аналогичен начин получаваме $CM = 2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Следователно

$$(5) \quad \frac{CN}{CM} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Добре известно е, че $CB_1 = p - a = r \cotg \frac{\alpha}{2}$ и $CA_1 = p - b = r \cotg \frac{\beta}{2}$. Като използваме (5) намираме

$$\frac{CB_1}{CA_1} = \frac{\cotg \frac{\alpha}{2}}{\cotg \frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{CN}{CM}.$$

Следователно $A_1B_1 \parallel MN$.

11.4. Да отбележим, че един шахматист не може да има повече от едно реми. Действително, ако A е завършил реми с B и C , то условието на задачата за A и B дава, че B е победил C , а това за A и C означава, че C е победил B .

Нека $A_1, A_2, \dots, A_k$ е най-дългата редица, за която всеки шахматист е победил следващия, т.е. A_i е победил A_{i+1} за $i = 1, 2, \dots, k-1$. Ако $k = 2005$, то получаваме търсената редица. Когато $k < 2005$ да разгледаме шахматист B , който не е измежду $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Ако B е победил A_1 , ще получим редица с дължина $k+1$, именно $B, A_1, A_2, \dots, A_k$.

Ако A_1 е победил B , то B и A_2 не може да са завършили реми, защото A_1 е победил и двамата. Ако B е победил A_2 ще получим редица с дължина

$k + 1$, именно $A_1, B, A_2, \dots, A_k$. Следователно A_2 трябва да е победил B . Аналогично ще получим, че $A_3, A_4, \dots, A_k$ са победили B . Тогава получаваме редица $A_1, A_2, \dots, A_k, B$ с дължина $k + 1$.

От горните разсъждения следва, че извън разглежданата редица има само един шахматист B , като A_1 и B са завършили реми. Тогава B няма повече ремита. Ако A_2 е победил B , то както по-горе получаваме, че B е загубил от A_i за $i = 3, 4, \dots, k$. Следователно има редица $A_1, A_2, \dots, A_k, B$ с дължина $k + 1$. Следователно A_2 е загубил от B и аналогично получаваме, че $A_i, i = 3, \dots, k$ са загубили от B . От условието на задачата знаем, че има поне още едно реми, например между A_i и A_j . Но A_i и A_j са загубили от B , което е противоречие с условието на задачата.

12.1. а) Понеже $a_{n+1} + b_{n+1} = 2b_n - a_n + 2a_n - b_n = a_n + b_n$, то $a_{n+1} = 2(a_n + b_n) - 3a_n = 2(a_1 + b_1) - 3a_n$.

б) От а) следва, че

$$a_{n+1} - \frac{a_1 + b_1}{2} = -3 \left(a_n - \frac{a_1 + b_1}{2} \right)$$

и отгук

$$a_{n+1} - \frac{a_1 + b_1}{2} = (-3)^n \left(a_1 - \frac{a_1 + b_1}{2} \right).$$

Тъй като $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = +\infty$, ако $a_1 > b_1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = -\infty$, противоречие. Аналогично не може $a_1 < b_1$ и значи $a_1 = b_1$.

12.2. Нека $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$. От свойството на секущите имаме, че $BA \cdot BM = BP \cdot BQ$, а успоредността дава, че $\frac{BM}{c} = \frac{BP}{a}$. Отгук $BQ = \frac{c^2}{a}$ и аналогично $CP = \frac{b^2}{a}$. Тогава $BP = \frac{a^2 - b^2}{a}$, $CQ = \frac{a^2 - c^2}{a}$ и условието $\frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{AC}$ добива вида

$$b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2), \text{ т.е. } (b - c)(a^2 - b^2 - c^2 - bc) = 0.$$

Понеже $b \neq c$, от косинусовата теорема следва, че $\cos \sphericalangle BAC = -\frac{1}{2}$ и значи $\sphericalangle BAC = 120^\circ$.

Алтернативно решение. Понеже $AMPN$ е вписан в окръжнос трапец, то той е равнобедрен, т.е. $AM = NP$. Съща така, ако $T = MP \cap NQ$, то $AMTN$ е успоредник и значи $AM = NT$. Тогава $NP = NT$ и аналогично $MQ =$

MT . Следователно TPN и TQM са равнобедрени подобни триъгълници, откъдето

$$(1) \quad \frac{TP}{TQ} = \frac{TN}{TM}.$$

От друга страна, синусовата теорема ни дава, че $\frac{MP}{\sin \beta} = \frac{BP}{\sin \alpha}, \frac{NQ}{\sin \gamma} = \frac{CQ}{\sin \alpha}$ и понеже $\frac{BP}{CQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$, заключаваме, че $MP = NQ$. Оттук и (1) следва, че $TM + TQ \frac{TN}{TM} = TN + TQ$, т.е. $(TM - TN)(TM - TQ) = 0$.

Да допуснем, че $TM = TN$. Имаме, че $MQ = NP$ и $NA = MA$. Първото от тези равенства показва, че $MN \parallel PQ$ и тогава от второто получаваме противоречието $AC = AB$.

И така, $TM = TQ$, т.е. MTQ е равнобедрен триъгълник, откъдето $\sphericalangle BAC = \sphericalangle MTN = 120^\circ$.

12.3. Полагаме $t = \sin x$ и $g(t) = \frac{t^2 - a}{t^3 - (a^2 + 2)t + 2}$.

Ако числителят и знаменателят на g имат обща нула, то $a \geq 0$ и $t = \pm \sqrt{a}$. При $t = -\sqrt{a}$ следва, че $\sqrt{a}(a^2 - a + 2) = -2$, което е невъзможно, понеже $a^2 - a + 2 > 0$ за всяко a . При $t = \sqrt{a}$ получаваме $\sqrt{a}(a(a - 1) + 2) = 2$ и лесно се вижда, че $a = 1$ е единственото решение на това уравнение (при $a \in [0, 1)$ лявата страна е по-малка от 2, а при $a > 1$ тя е по-голяма от 2. За $a = 1$ имаме, че

$$g(t) = \frac{t^2 - 1}{t^3 - 3t + 2} = \frac{t + 1}{(t - 1)(t + 2)} \leq 0$$

за всяко $t \in [-1, 1)$ и следователно тази стойност не е измежду търсените.

Сега търсим за кои $a \neq 1$ уравнението $g(t) = c$, т.е. $h(t) = c(t^3 - (a^2 + 2)t + 2) + a - t^2 = 0$, има решение в интервала $[-1, 1]$ за всяко $c \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

При $c \geq \frac{1}{2}$ имаме, че

$$h(-1) = ca^2 + a + 3c - 1 \geq \frac{a^2}{2} + a + \frac{1}{2} = \frac{(a + 1)^2}{2},$$

откъдето $h(-1) \geq 0$ за всяко a . Освен това, $h'(t) = 3ct^2 - 2t - c(a^2 + 2)$ и следователно $h'(1) = c - ca^2 - 2 \leq 0$ за $c \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ и всяко a , т.е. $h'(t) = 0$

има реални корени $t_1 \leq t_2$ и 1 лежи между тях. Тъй като h е намаляваща функция в интервала $[t_1, t_2] \ni 1$, растяща функция в интервала $(-\infty, t_1]$ и $h(-1) \geq 0$, то лесно се съобразява, че $h(t) = 0$ има решение в интервала $[-1, 1]$ за всяко $c \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ тогава и само тогава, когато $h(1) = (a-1)(1-c(1+a)) \leq 0$ за всяко такова c . При $a > 1$ това неравенство е изпълнено понеже $1 - \frac{1}{2}(1+a) < 0$, а при $a < 1$ трябва $1 - 2(1+a) \geq 0$, т.е. $a \leq -\frac{1}{2}$.

И така, $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.

Алтернативно решение. Както по-горе, задачата се свежда до намирането на онези a , за които $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset g([-1, 1])$.

За $h(t) = t^3 - (a^2 + 2)t + 2$ имаме, че $h'(t) = 3t^2 - (a^2 + 2)$. При $a^2 \geq 1$ следва, че $h'(t) < 0$ за $t \in (-1, 1)$. Следователно h е строго намаляваща непрекъсната функция в интервала $(-1, 1]$ и понеже $h(1) = 1 - a^2 \leq 0 < a^2 + 3 = h(-1)$, то тя има единствена нула t_0 в този интервал.

Ще разгледаме няколко случая.

1. $a > 1$. Имамے, че $t_0 \neq 1$, $\lim_{t \rightarrow t_0+0} g(t) = \frac{t_0^2 - a}{-0} = +\infty$ и $g(1) = \frac{1-a}{1-a^2} = \frac{1}{1+a} < \frac{1}{2}$. Тъй като g е непрекъсната функция в интервала $(t_0, 1]$, следва,

$$\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \subset g((t_0, 1]) \subset g([-1, 1]).$$

2. $a \leq -1$. Сега $\lim_{t \rightarrow t_0-0} g(t) = \frac{t_0^2 - a}{+0} = +\infty$ и $g(-1) = \frac{1-a}{a^2+3} \leq \frac{1}{2}$ (последното неравенство е еквивалентно на $(a+1)^2 \geq 0$). Тогава

$$\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \subset g([-1, t_0)) \subset g([-1, 1]).$$

3. $a = 1$. В първото решение проверихме, че $g(t) \leq 0$ при $t \in [-1, 1)$.

4. $a \in (-1, 1)$. Първо ще проверим, че $h(t) > 0$ при $t \in [-1, 1]$, откъдето следва, че g е непрекъсната функция в този интервал. Ако $t \in [-1, 0]$, то $h(t) \geq t^3 + 2 > 0$. Ако $t \in (0, 1]$, то $h(t) > t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2) \geq 0$.

4.1. $a \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right]$. Тогава $g(-1) = \frac{1-a}{a^2+3} < \frac{1}{2}$, $g(1) = \frac{1}{1+a} \geq 2$ и следователно $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subset g([-1, 1])$.

4.2. $a \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Ще покажем, че $g(t) < 2$ за всяко $t \in [-1, 1]$. Понеже $h(t) > 0$ в този интервал, трябва да проверим, че $t^2 < 2(t^3 - (a^2 + 2)t + 2)$, т.е.

$$(1) \quad m(t) = 2t^3 - t^2 - 2(a^2 + 2)t + a + 4 > 0, \quad t \in [-1, 1].$$

Имаме, че

$$m'(t) = 6t^2 - 2t - 2(a^2 + 2) \leq 6t^2 - 2t - 4 = (6t + 4)(t - 1).$$

и следователно $m'(t) \leq 0$ в интервала $\left[-\frac{2}{3}, 1\right]$. Тогава $m(t) \geq m(1) = -2a^2 + a + 1 = (1 + 2a)(1 - a) > 0$ в този интервал.

От друга страна,

$$m(t) \geq 2t^3 - t^2 + a + 4 \geq -2 - 1 - \frac{1}{2} + 4 > 0$$

при $t \in [-1, 0]$, с което проверката на (1) е завършена.

От разгледаните случаи, които изчерпват всички възможности, заключаваме, че отговорът на задачата е $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.

12.4. При стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$, за ъглополовящата l_a имаме $l_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b + c)^2}$ и от $l_a = b$ получаваме

$$(1) \quad a^2 c = (c - b)(c + b)^2.$$

Нека $\frac{a}{c} = \frac{m}{n}$, $(m, n) = 1$ и $\frac{b}{c} = \frac{r}{s}$, $(r, s) = 1$. Тогава от (1) следва, че $\frac{m^2}{n^2} = \frac{(s - r)(s + r)^2}{s^3}$. Тъй като двете страни са несъкратими, то $m^2 = (s - r)(s + r)^2$ и $n^2 = s^3$. От първото равенство следва, че $s - r$ е точен квадрат, а от второто, че s е точен квадрат. Полагаме $s = t^2$ и $s - r = k^2$. Тогава $r = t^2 - k^2$, $m = k(2t^2 - k^2)$ и $n = t^3$. Нека сега $a = mx$, $c = nx$, $b = ry$, $c = sy$. Тогава $nx = sy$, т.е. $y = tx$. Следователно $a = xk(2t^2 - k^2)$, $b = xt(t^2 - k^2)$, $c = xt^3$, като $t > k$ и $(t, k) = 1$ (проверете, че a , b и c са страни на триъгълник). Сега условието $a + b + c = 10p$ приема вида

$x(k+t)(2t^2-k^2) = 10p$. Да отбележим, че $(k+t, 2t^2-k^2) = 1$. Тогава лесно се вижда, че имаме следните възможности:

$$\left| \begin{array}{l} x = 1 \\ k+t = 5 \\ 2t^2-k^2 = 2p, \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ k+t = 10 \\ 2t^2-k^2 = p, \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ k+t = 5 \\ 2t^2-k^2 = p. \end{array} \right|$$

Оттук $(x, k, t) = (1, 2, 3)$, $(x, k, t) = (1, 3, 7)$ и $(x, k, t) = (2, 1, 4)$, откъдето $(a, b, c) = (28, 15, 27)$, $(a, b, c) = (267, 280, 343)$ и $(a, b, c) = (62, 120, 128)$.

Пролетен математически турнир

8.1. Понеже двете страни на уравнението са неотрицателни, последното е еквивалентно на

$$\left(\left|x - \frac{5}{2}\right| - \frac{3}{2}\right)^2 = (x^2 - 5x + 4)^2,$$

откъдето

$$\left(\left|x - \frac{5}{2}\right| - \frac{3}{2} - x^2 + 5x - 4\right)\left(\left|x - \frac{5}{2}\right| - \frac{3}{2} + x^2 - 5x + 4\right) = 0.$$

Сега решаваме всяко от уравненията

$$\left|x - \frac{5}{2}\right| - x^2 + 5x - \frac{11}{2} = 0,$$

$$\left|x - \frac{5}{2}\right| + x^2 - 5x + \frac{5}{2} = 0.$$

При $x \leq \frac{5}{2}$ последователно имаме

$$\frac{5}{2} - x - x^2 + 5x - \frac{11}{2} = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0,$$

т.е. $x = 1$ или $x = 3$. Освен това,

$$\frac{5}{2} - x + x^2 - 5x + \frac{5}{2} = 0 \iff x^2 - 6x + 5 = 0,$$

т.е. $x = 1$ или $x = 5$. Следователно решение в този случай е само $x = 1$.

Съответно при $x > \frac{5}{2}$ имаме

$$x - \frac{5}{2} - x^2 + 5x - \frac{11}{2} = 0 \iff x^2 - 6x + 8 = 0,$$

т.е. $x = 2$ или $x = 4$. Освен това,

$$x - \frac{5}{2} + x^2 - 5x + \frac{5}{2} = 0 \iff x^2 - 4x = 0,$$

т.е. $x = 0$ или $x = 4$. Следователно решение в този случай е само $x = 4$.

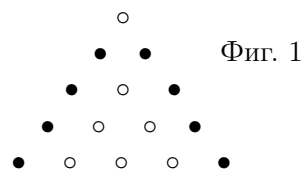
Окончателно уравнението има два корена $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

8.2. Тъй като $\angle ACB > 90^\circ$, точките G и E са разположени в различни полуравнини относно диаметъра BD . Тогава $\angle EFD$ е външен за четириъгълника $CDFG$. Ако $\angle DCG = \angle EFD$, то $\angle DCG + \angle DFG = 180^\circ$, т. е. достатъчно е да докажем, че $CDFG$ е вписан в окръжност. От друга страна $CE \perp BD$ и D е център на k_1 . Следователно $\angle CDF = \frac{1}{2} \widehat{CGE}_{k_1}$ (като централен ъгъл), $\angle CGF = \angle CGE$ е вписан в k_1 и $\angle CGF = \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{CGE}_{k_1})$. Тогава $\angle CDF + \angle CGF = 180^\circ$, т. е. $CDFG$ е вписан в окръжност, откъдето $\angle DCG = \angle EFD$.

8.3. Да допуснем, че даденото уравнение има решение (x_0, y_0, z_0) . Тогава $x_0^2 + 2y_0^2$ се дели на 7. Ако някое от числата x_0 и y_0 се дели на 7, то и другото се дели на 7. Ако никое от тях не се дели на 7, получаваме противоречие, защото тогава остатъците при деление на 7 на квадратите и удвоените квадрати са 1, 2 и 4, а сума на някои два такива остатъка не се дели на 7.

Следователно x_0 и y_0 се делят на 7. Но тогава лявата страна се дели на 7^2 и следователно числото $\underbrace{11 \dots 1}_{2005}$ се дели на 7. Но последното не е вярно, тъй като 111111 се дели на 7 и $2005 = 6.334 + 1$. Полученото противоречие доказва твърдението.

8.4. а) Можем да запалим 8 лампички, както е показано на фиг. 1 (запълнените кръгчета са запалени лампи).



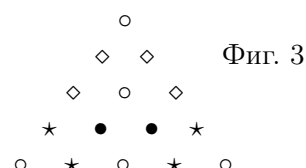
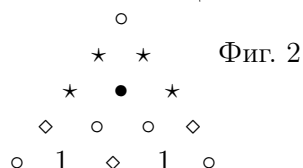
Фиг. 1

б) Ще докажем, че ако е налице ситуацията, при която някои три запалени лампички не са върхове на равностранен триъгълник, не са върхове на равностранен триъгълник, то ще има поне 7 незапалени лампички, т. е. при произволни 9 запалени лампички ще има поне 3, които образуват равностранен триъгълник. За целта ще проследим броя на запалените лампички от централния триъгълник от 3 лампички.

Ясно е, че не е възможно и трите централни лампички да са запалени. Остава да разгледаме три случая.

Случай 1. Нека да няма запалена лампичка в централния триъгълник, т. е. всички запалени лампички са по периферията. Тогава ще имаме поне още 4 незапалени лампички – по една във всеки от равностранните триъгълници по върховете на големия триъгълник и една в триъгълника, образуван от средите на страните.

Случай 2. Нека да има точно една запалена лампичка в централния триъгълник. Без ограничение на общността можем да считаме, че тази лампичка е означената на фиг. 2 със запълнено кръгче. Тогава, освен двете незапалени в централния триъгълник, ще имаме поне две незапалени лампички измежду означените със $\star$, поне още една измежду означените с $\diamond$, поне още една измежду означените с 1 и поне още една измежду върховете на големия триъгълник – общо поне 7.



Случай 3. Нека да има точно две запалени лампички в централния триъгълник. Без ограничение на общността можем да считаме, че тези лампички са означените на фиг. 3 със запълнено кръгче. Тогава, освен едната незапалена в централния триъгълник, ще имаме поне две незапалени лампички измежду означените със $\star$, поне още две измежду означените с $\diamond$, поне още една измежду върховете на големия триъгълник и лампичката под двете запалени със сигурност не е запалена – общо поне 7.

9.1. а) Дискриминантата на квадратния тричлен $f(x)$ е $4a^2 + 13 > 0$.

б) Имаме последователно

$$\begin{aligned} -72 &= x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] \\ &= (1 - 2a)(4a^2 - a + 10) = -8a^3 + 6a^2 - 21a + 10. \end{aligned}$$

Следователно търсените стойности на a са решенията на уравнението

$$8a^3 - 6a^2 + 21a - 82 = 0.$$

Тъй като $a = 2$ е решение на това уравнение (например по схемата на Хорнер), то

$$8a^3 - 6a^2 + 21a - 82 = (a - 2)(8a^2 + 10a + 41).$$

Квадратният тричлен в последните скоби няма реални корени и следователно отговорът е $a = 2$.

9.2. Нека CM е медиана, а CL ъглополовяща ($I \in CL$). При стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$ имаме $AL : BL = AC : BC = b : a$,

откъдето $AL = bc : (a + b)$. От свойството на ъглополовящата за $\triangle ALC$ имаме $CI : IL = CA : AL = (a + b) : c$. От теоремата на Талес имаме $CI : IL = CG : GM$, т.е. $(a + b) : c = 2$, откъдето $a + b = 84$. При $a \geq b$ имаме $LM = \frac{3}{2}IG = 3$, $AM = 21$ и $AL = AM - LM = 18$, $LB = BM + LM = 24$ и следователно $b : a = 18 : 24 = 3 : 4$. Получаваме уравнението $3x + 4x = 84$, откъдето $x = 12$, $AC = 36$ и $BC = 48$. При $b \geq a$ получаваме $BC = 36$ и $AC = 48$.

9.3. Нека $S_k^{(m)}$ са парите на k -тия играч, $k = 1, 2, 3, 4$, след хвърлянето и разплащането на m -тия играч, $m = 1, 2, 3, 4$, като в началото $S_k^{(0)} = S$ за $k = 1, 2, 3, 4$. Нека A_i е хвърлил a_i точки. От правилата на играта следва, че

$$S_k^{(m)} = S_k^{(m-1)} + \frac{1}{a_m} S_k^{(m-1)} = S_k^{(m-1)} \frac{1 + a_m}{a_m}$$

при $k \neq m$ (т.е. когато A_k получава пари) и

$$S_k^{(k)} = S_k^{(k-1)} - \frac{1}{a_k} \sum_{i \neq k} S_i^{(k-1)} = S_k^{(k-1)} - \frac{1}{a_k} (4S - S_k^{(k-1)}) = S_k^{(k-1)} \frac{1 + a_k}{a_k} - \frac{4S}{a_k},$$

когато A_k дава пари.

С помощта на тези формули намираме парите на четиримата играчи в края на играта. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{6S}{5} &= S_1^{(4)} = PS - \frac{4S(1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_4)}{a_1 a_2 a_3 a_4}, \\ \frac{6S}{5} &= S_2^{(4)} = PS - \frac{4S(1 + a_3)(1 + a_4)}{a_2 a_3 a_4}, \\ \frac{4S}{5} &= S_3^{(4)} = PS - \frac{4S(1 + a_4)}{a_3 a_4}, \\ \frac{4S}{5} &= S_4^{(4)} = PS - \frac{4S}{a_4}, \end{aligned}$$

където $P = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)(1 + a_4) / (a_1 a_2 a_3 a_4)$ за краткост. От първото и второто уравнение получаваме $a_2 = a_1 - 1$, а от третото и четвъртото имаме $a_4 = a_3 - 1$. Сега от второто и третото уравнение получаваме

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{a_4} - \frac{4(1 + a_3)}{a_2 a_4} \iff a_2 a_4 = 10(a_2 - a_4 - 2).$$

От последното уравнение следва, че $a_4 < 10$ (в противен случай лявата страна е по-голяма от дясната). Освен това $a_4 \geq 7$ (заровете са 7 и минималната сума е 7) и остава да проверим възможностите $a_4 = 7, 8, 9$. Решение се получава единствено при $a_4 = 7$ (защото максималната сума е 42), като тогава $a_3 = 8$, $a_2 = 30$ и $a_1 = 31$.

9.4. Ще докажем, че $n + 1$, $n + 2$ и $n + 3$ са степени (евентуално първи) на прости числа. Нека допуснем, че някое от тях може да се представи във вида ab , където $a \geq 2$, $b \geq 2$ и $(a, b) = 1$. Щом ab не дели M , трябва a или b да не дели M ; нека за конкретност a не дели M . Тогава от условието следва, че $ab - a \leq 2$, което не е възможно при дадените условия.

Следователно $n + 1$, $n + 2$ и $n + 3$ са степени на прости числа. Поне едно от тях е четно, значи е равно на 2^x . Едно от тях се дели на 3, значи е равно на 3^y . От съображения за четност следва, че $2^x = 3^y \pm 1$.

Случай 1. Нека $2^x = 3^y + 1$. Имаме $2^x \equiv 1 \pmod{3}$ при четно x и $2^x \equiv 2 \pmod{3}$ при нечетно x . Следователно $x = 2z$ и $(2^z - 1)(2^z + 1) = 3^y$. Тогава $2^z - 1$ и $2^z + 1$ са степени на тройката, което е възможно само при $z = 1$, $3^y = 3$, $2^x = 4$, откъдето $n = 1$ или $n = 2$. Тези отговори са възможни съответно например при $M = 1$ и $M = 2$.

Случай 2. Нека $2^x = 3^y - 1$. При $x = 1$ получаваме един от горните отговори за n . Сега нека $x \geq 2$. Имаме $3^y \equiv 1 \pmod{4}$ при четно y и $3^y \equiv 3 \pmod{4}$ при нечетно y . Следователно $y = 2z$ и $2^x = (3^z - 1)(3^z + 1)$. Тогава $3^z - 1$ и $3^z + 1$ са степени на двойката, което е възможно само при $z = 1$, $3^y = 9$, $2^x = 8$, откъдето $n = 6$ или $n = 7$. Отговорът $n = 6$ е възможен например при $M = 60$. При $n = 7$ получаваме $n + 3 = 10$, което не е степен на просто число.

Отговор: $n = 1$, $n = 2$, $n = 6$.

10.1. За $x \geq 1$ уравнението добива вида $(x + 6)(5^x - 5^{2-x}) = 0$, откъдето $x = 2 - x$ и $x = 1$. При $0 \leq x < 1$ уравнението се превръща в твърдение, т.е. всяка стойност на x от $[0, 1)$ е решение. При $x < 0$ уравнението добива вида $2(5^x - 1)(x + 1) = 0$, откъдето $x = -1$. Окончателно решенията са $x \in [0, 1] \cup \{-1\}$.

10.2. Достатъчно е да намерим всички реални числа a , за които обратното неравенство $\sqrt{4 + 3x} < x + a$ е изпълнено за всяко цяло $x \geq -1$. В частност, ако $x = 0$ е решение на $\sqrt{4 + 3x} < x + a$, то $a > 2$ е необходимо условие. Ще докажем, че то е и достатъчно. Наистина при $a > 2$ имаме $x + a > x + 2$ и е достатъчно да покажем, че $x + 2 \geq \sqrt{4 + 3x}$ за всяко цяло $x \geq -1$.

Последователно имаме

$$x + 2 \geq \sqrt{4 + 3x} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 \geq 4 + 3x \\ x \geq -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ x \geq -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Последното е изпълнено за $x \in [-\frac{4}{3}, -1] \cup [0, \infty)$, т.е. за всяко цяло $x \geq 1$. Следователно търсените стойности са $a \in (2, \infty)$.

10.3. ($\Leftarrow$) Ако $AC = BC$, то $ABQP$ е равнобедрен трапец и очевидно е вписан. Ако $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, то $\sphericalangle ACI = \sphericalangle BCI = 45^\circ$, където I е центърът на вписаната окръжност на $\triangle ABC$. Имаме $\sphericalangle APC = \sphericalangle BQC = 135^\circ$, т.е. $\sphericalangle IPC = \sphericalangle IQC = 45^\circ$. Следователно $\triangle IPC \sim \triangle ICA$ и $\triangle IQC \sim \triangle ICB$. Оттук $IP \cdot IA = IC^2 = IQ \cdot IB$ и $ABQP$ е вписан.

($\Rightarrow$) Разглеждаме окръжността, описана около $\triangle APC$. Ако тя се допира до CI в точка S , то $\sphericalangle ACI = \sphericalangle IPC = 45^\circ$ и следователно $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Нека тази окръжност пресича CI за втори път в точка R . Тогава $IP \cdot IA = IR \cdot IC$ и $IP \cdot IA = IQ \cdot IB$. Следователно $IR \cdot IC = IQ \cdot IB$ и четириъгълникът $BCRQ$ е вписан. Оттук $\sphericalangle BRC = \sphericalangle BQC = 135^\circ = \sphericalangle APC = \sphericalangle ARC$, $\triangle ARC \cong \triangle BRC$ и $AC = BC$.

10.4. Избираме q по средния начин – нека q е цяло число, за което $2q^2 \leq n < 2(q+1)^2$. Тогава

$$n - 2q^2 < 4q + 2 \leq 4\sqrt{\frac{n}{2}} + 2 = 2(\sqrt{2n} + 1).$$

По-нататък, нека t е цяло число, за което $t^2 \leq n - 2q^2 < (t+1)^2$. За p избираме числото t или $t+1$ в зависимост от разположението на $n - 2q^2$ спрямо средата на интервала $[t^2, (t+1)^2]$. Полагаме

$$p = \begin{cases} t, & \text{ако } n - 2q^2 - t^2 \leq t; \\ t + 1, & \text{ако } n - 2q^2 - t^2 > t. \end{cases}$$

Тогава имаме

$$|p^2 + 2q^2 - n| \leq t \leq \sqrt{n - 2q^2} \leq \sqrt{2(\sqrt{2n} + 1)}.$$

Остава да забележим, че $\sqrt{2(\sqrt{2n} + 1)} \leq \sqrt[4]{9n}$ за всяко $n \geq 12$. За $n < 12$ съществуването на p и q се проверява непосредствено.

11.1. а) Като използваме рекурентната формула, лесно получаваме

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-1} + 4(k-1) + 3 = a_{k-2} + 4(k-2) + 4(k-1) + 2.3 = \\ &= a_1 + 4(1+2+\dots+k-1) + (k-1).3 = 2k(k-1) + 3(k-1) = \\ &= (2k+3)(k-1). \end{aligned}$$

б) От формулата за общия член получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_{kn}}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(2k + \frac{3}{n})(k - \frac{1}{n})} = \sqrt{2k}.$$

Следователно търсената граница е равна на

$$\frac{1+4+4^2+\dots+4^{10}}{1+2+2^2+\dots+2^{10}} = \frac{4^{11}-1}{3(2^{11}-1)} = \frac{2^{11}+1}{3} = 683.$$

11.2. За допустимите стойности на x получаваме $x^2-x-2 > 0$ и $3+2x-x^2 > 0$, откъдето $x \in (2, 3)$. Тъй като неравенството е изпълнено за $x = a+1$, то $a+1 \in (2, 3)$, т.е. $a \in (1, 2)$. Тогава неравенството е еквивалентно на $x^2-x-2 > 3+2x-x^2$, откъдето $(x+1)(2x-5) > 0$, т.е. окончателно получаваме $x \in \left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

11.3. а) Имаме $\sphericalangle QCA = \sphericalangle QMA = \sphericalangle CNA$ и $\sphericalangle PCN = \sphericalangle PMN = \sphericalangle NAC$. Следователно

$$\sphericalangle QCP = \sphericalangle QCA + \sphericalangle ACN + \sphericalangle NCP = \sphericalangle CNA + \sphericalangle ACN + \sphericalangle NAC = 180^\circ,$$

т.е. точките P , C и Q лежат на една права.

б) Нека $\sphericalangle ACM = \varphi$ и $\sphericalangle NCM = \psi$, а R_1 и R_2 са радиусите на описаните около $\triangle AMC$ и $\triangle MNC$ окръжности. Тогава с помощта на синусовата теорема имаме

$$QC = 2R_1 \sin \sphericalangle QMC = 2R_1 \sin \psi,$$

$$CP = 2R_2 \sin \sphericalangle PMC = 2R_2 \sin \varphi,$$

$$AM = 2R_1 \sin \varphi, \quad BM = 2R_2 \sin \psi.$$

Следователно $PC.CQ = AM.BM$.

Както в а) се вижда че L , C и K лежат на една права. Освен това $KC.CL = AN.BN$ както по-горе. Тъй като окръжността, описана около $\triangle MNC$, минава през K , C и P , не е възможно правите PQ и KL да

съвпадат. Следователно P, Q, K и L лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато $CP.CQ = CL.CK \iff AM.MM = BN.MN \iff AM = BN$.

11.4. Нека M е произволно естествено число. Ще докажем, че съществува член на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, десетичният запис на който се получава от този на M с добавяне отдясно на няколко цифри, т.е. числото M е "начало" на този член.

Нека k е такъв индекс, че $a_k \leq M.10^l < a_{k+1} < a_k + c$, където l е естествено число, по-голямо от броя на цифрите на c . Тогава $M.10^l < a_{k+1} < M.10^l + c$ и очевидно a_{k+1} удовлетворява изискването.

Нека $m = 2^\alpha.5^\beta.t$, където $(t, 10) = 1$. Достатъчно е да докажем твърдението за $m = 10^\alpha.t$, ако считаме $\alpha \geq \beta$. Да разгледаме числото

$$M = 1 \underbrace{00 \dots 0}_p 1 \underbrace{00 \dots 0}_p 1 \dots 1 \underbrace{00 \dots 0}_p 1 \underbrace{00 \dots 0}_q.$$

Тук $p = k\varphi(t)$, където $\varphi(t)$ е функцията на Ойлер, а k е такова, че $p > \alpha$. Числото q е по-голямо от α , а броят на единиците е $t + 1$. По доказаното числото M се появява като последователност от цифри, т.е. редицата от цифри изглежда така:

$$f_1 f_2 \dots f_r 1 \underbrace{00 \dots 0}_p 1 \underbrace{00 \dots 0}_p 1 \dots 1 \underbrace{00 \dots 0}_p 1 \underbrace{00 \dots 0}_q \dots$$

Вече е ясно, че в зависимост от остатъка на $\overline{f_1 f_2 \dots f_r 1}$ при деление с t , можем да добавим подходящите цифри така, че да получим число, което се дели на $10^\alpha.t$.

12.1. а) От питагоровата теорема следва, че височината към AB е $\sqrt{1-x^2}$.

$$\text{Тогава } r = \frac{S}{p} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x} = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

б) Трябва да намерим най-голямата стойност на функцията $f(x) = \frac{x^2(1-x)}{1+x}$ в интервала $(0, 1)$. Понеже $f'(x) = \frac{2x(1-x-x^2)}{(x+1)^2}$, то f е растяща

функция в интервала $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ и намаляваща в $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$. Следователно

най-голямата стойност на f в $(0, 1)$ е $f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{5}-11}{2}$. Значи търсеното

число е $\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}}$.

12.2. Нека M е средата на BC , I е центърът на външновписаната към AB окръжност, а T е допирната ѝ точка с BC . При стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$ имаме $IM = \frac{a}{2} + r_c$, $IT = r_c$ и $MT = p - \frac{a}{2}$, защото $BT = p - a$. От правоъгълния $\triangle MIT$ следва, че

$$\left(\frac{a}{2} + r_c\right)^2 = r_c^2 + \left(p - \frac{a}{2}\right)^2.$$

Оттук $ar_c = p(p-a)$. Тъй като $r_c = \frac{S}{p-c}$, от хероновата формула получаваме, че

$$aS = p(p-a)(p-c) = \frac{S^2}{p-b},$$

т.е.

$$(1). \quad a(p-b) = S$$

Понеже a , b и c образуват в този ред аритметична прогресия, то $a = b - x$, $c = b + x$ и тогава

$$p = \frac{3b}{2}, \quad p - a = \frac{b}{2} + x, \quad p - b = \frac{b}{2}, \quad p - c = \frac{b}{2} - x.$$

Сега от (1) и хероновата формула стигаме до уравнението

$$(b-x)^2 = 3\left(\frac{b^2}{4} - x^2\right),$$

което има единствено решение $x = \frac{b}{4}$. Следователно $a = \frac{3b}{4}$, $c = \frac{5b}{4}$ и значи $a^2 + b^2 = c^2$, т.е. $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

12.3. Като извадим почленно равенствата $a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}a_{n+3} + 1$ и $a_{n+1} + a_{n+2} = 2a_{n+3}a_{n+4} + 1$, получаваме $a_{n+2} - a_n = 2a_{n+3}(a_{n+4} - a_{n+2})$. Оттук

$$a_{n+2} - a_n = 2^k a_{n+3} \dots a_{n+2k+1} (a_{n+2k+2} - a_{n+2k})$$

и значи 2^k дели $a_{n+2} - a_n$ за всеки n и k . Следователно $a_{2n-1} = a_1$ и $a_{2n} = a_2$ за всяко n . Сега от условието следва, че $(2a_1 - 1)(2a_2 - 1) = -4009$. Понеже

простите делители на 4009 са 19 и 211, то $2a_1 - 1 = \pm 1, \pm 19, \pm 211, \pm 4009$. Следователно търсеният брой е 8.

12.4. Първо ще покажем как твърдението на задачата се получава от следната **Лема**. Полиномът $P(z) = z^{2n} + az^{2n-1} + az^{2n-2} + \dots + az + 1$ има поне $2n - 2$ комплексни корена, които лежат върху единичната окръжност и са различни от ± 1 .

Понеже $P(z)$ е с реални коефициенти, то тези корени са два по два комплексно спрегнати: $\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \dots, \alpha_{n-1}, \overline{\alpha_{n-1}}$. Можем да считаме, че $x^2 + b_1x + c_1 = (x - \alpha_1)(x - \overline{\alpha_1}), \dots, x^2 + b_{n-1}x + c_{n-1} = (x - \alpha_{n-1})(x - \overline{\alpha_{n-1}})$. Следователно $c_1 = \dots = c_{n-1} = 1$ значи и $c_n = 1$.

Доказателство на лемата. Понеже нереалните корени на $P(z)$ са два по два комплексно спрегнати, достатъчно е да покажем, че този полином има поне $n - 1$ корена върху горната полуокръжност. Нека $z = e^{i2\theta}$. Тогава

$$\frac{z^{2n} + 1}{z^{2n-1} + \dots + z} = \frac{(z^{2n} + 1)(z - 1)}{z(z^{2n-1} - 1)} =$$

$$\frac{(e^{i2n\theta} + e^{-i2n\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{(e^{i(2n-1)\theta} - e^{-i(2n-1)\theta})} = 2 \frac{\cos 2n\theta \sin \theta}{\sin(2n-1)\theta} = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin(2n-1)\theta} - 1.$$

Следователно трябва да докажем, че уравнението

$$f(\theta) = \sin(2n+1)\theta + (a-1)\sin(2n-1)\theta = 0$$

има поне $n - 1$ корена в интервала $(0, \frac{\pi}{2})$. При $a = 1$ това е очевидно, защото $f(\theta_k) = 0$, където $\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $1 \leq k \leq n$. Да забележим още, че $(k-1)\pi < (2n-1)\theta_k < k\pi$ и значи $(-1)^{k-1} \sin(2n-1)\theta_k > 0$. Следователно $f(\theta_k)f(\theta_{k+1}) < 0$ при $a \neq 1$ и от теоремата на Болцано заключаваме, че уравнението $f(\theta) = 0$ има поне по един корен във всеки от интервалите $(\theta_1, \theta_2), \dots, (\theta_{n-1}, \theta_n)$. С това лемата е доказана.

Забележка. От доказаното следва, че разглежданият полином има най-много два реални корена x_1 и x_2 (възможно $x_1 = x_2$), като $x_1x_2 = 1$. Може да се покаже, че ако:

- а) $a > 2$, то $x_1 < -1$ и $x_2 \in (-1, 0)$;
- б) $a = 2$, то $x_1 = x_2 = -1$;
- в) $a < -\frac{2}{2n-1}$, то $x_1 > 1$ и $x_2 \in (0, 1)$;

г) $a = -\frac{2}{2n-1}$, то $x_1 = x_2 = 1$;

д) ако $a \in \left(-\frac{2}{2n-1}, 2\right)$, то полиномът няма реални корени.

В последния случай полиномът има корен $z = e^{i2\theta}$, където $\theta \in (0, \theta_1)$ при $a \in \left(-\frac{2}{2n-1}, 1\right)$ и $\theta \in \left(\theta_n, \frac{\pi}{2}\right)$ при $a \in (1, 2)$.

54. Национална олимпиада по математика

Областен кръг

9.1. От условието следва, че за всяко x трябва да бъде изпълнено равенството

$$x^4 - 3ax^3 + ax + b = q(x)(x^2 - 1) + (a^2 + 1)x + 3b^2,$$

където $q(x)$ е частното от делението. Полагаме в това равенство $x = 1$ и $x = -1$ и получаваме системата $a^2 + 3b^2 + 2a - b = 0$, $a^2 - 3b^2 + 2a + b + 2 = 0$ с решение $a = -1$, $b = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

9.2. Нека окръжностите са $k_1(O_1, r)$, $k_2(O_2, R)$ и $k(O, x)$, като $r < x < R$. Да построим перпендикуляри O_1A , OB и O_2C към едното рамо $p^\rightarrow$ на ъгъла. Нека $\ell \parallel p$ е права през O_1 , която пресича OB и O_2C съответно в точки M и N . Тогава $\triangle O_1OM \sim \triangle O_1O_2N$ и следователно $\frac{OO_1}{O_1O_2} = \frac{OM}{O_2N}$.

Имаме $OM = OB - BM = OB - O_1A = x - r$, $O_2N = O_2C - CN = O_2C - O_1A = R - r$ и $O_1O_2 = r + R$. Ако k минава през O_1 , то $OO_1 = x$ и получаваме уравнението $\frac{x}{R+r} = \frac{x-r}{R-r}$, откъдето $x = \frac{r+R}{2}$. Ако k минава през O_2 , то $OO_1 = R+r-x$ и $\frac{R+r-x}{R+r} = \frac{x-r}{R-r}$, откъдето отново $x = \frac{r+R}{2}$. И в двата случая O е среда на O_1O_2 и k минава както през O_1 , така и през O_2 .

9.3. Нека уравнението има решение от вида $(x, x+1)$. Тогава имаме

$$a-b = a^k x - b^k(x+1) \Leftrightarrow b^k = (a-b) \left[-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}) \right].$$

Да допуснем, че числата $a-b$ и $-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$ имат общ прост делител p . Тогава p дели и лявата страна b^k , т.е. p дели b . Но p дели и $a-b$ и значи p дели a . Сега от факта, че p дели $-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$ следва, че p дели 1 – противоречие.

Следователно $a-b$ и $-1 + x(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$ са взаимно прости, което означава, че всяко от тях е точна k -та степен с точност до знак. В частност $|a-b|$ е точна k -та степен.

Случаят на решение от вида $(x+1, x)$ се разглежда аналогично.

9.4. Отговор: $p = 2$. За наличието на 4 корена е необходимо (но не достатъчно!) условието $p > 1$. Разглеждаме два случая:

Случай 1. Ако $x^2 - px - 2p + 1 = p - 1 \iff x^2 - px - 3p + 2 = 0$, по формулите на Виет получаваме $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2(2 - 3p) = p^2 + 6p - 4$.

Случай 2. Ако $x^2 - px - 2p + 1 = 1 - p \iff x^2 - px - p = 0$, по формулите на Виет имаме $x_3^2 + x_4^2 = p^2 + 2p$.

Тогава от условието получаваме $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 20 \iff 2p^2 + 8p - 4 = 20 \iff p^2 + 4p - 12 = 0$, откъдето $p = 2$ или $p = -6$. Втората стойност противоречи на условието $p > 1$. При $p = 2$ уравнението наистина има четири реални корена (например с директна проверка).

9.5. От условието следва, че T не е на дъгата AD , значи е на дъгата BC . Нека $M \in NT \cap DP$ е средата на NT . От свойството на допирателна и секуща имаме $MB \cdot MD = MT^2 = MN^2$.

Тогава $MB : MN = MN : MD$ и следователно $\triangle NMB \sim \triangle DMN$ по втори признак. Получаваме $\sphericalangle MNB = \sphericalangle MDN = \sphericalangle NCA$, така че $NT \parallel AC$. Следователно $NT : AP = 2NM : AP = 2MD : PD = 3 : 1$.

9.6. Общият брой на двойките играчи е $25 \cdot 24 / 2 = 300$ и с всяка изиграна игра губим по 10 двойки, следователно не е възможно да се изиграят повече от $300 : 10 = 30$ игри.

Ще докажем, че 30 игри са възможни. Номираме играчите с двойки естествени числа $(m; n)$, $m, n \leq 5$ (т.е. представяме си ги в таблица 5×5).

В игра номер i , $1 \leq i \leq 5$, играят петимата, за които $m = i$ (от ред номер i в таблицата). В игра номер $6 + 5k + i$, $0 \leq i \leq 4$, $0 \leq k \leq 4$, играят хората $(m; n)$, за които $mk + n$ дава остатък i при деление на 5. Ясно е, че за всеки конкретни k, i, m ще има единствено n с искания остатък. Така от всеки ред на таблицата има по един човек, т.е. играчите са петима и те не са играли помежду си в първите 5 игри.

За всеки двама играчи $(m; n)$ и $(m'; n')$, $m' \neq m$, числата $k(m - m')$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ дават различни остатъци при деление на 5. Следователно съществува единствено k , за което $k(m - m') \equiv n - n' \pmod{5}$. Еквивалентно, $km - n$ и $km' - n'$ дават еднакъв остатък i при деление на 5 и получените k, i определят единствената игра, в която са участвали двамата играчи $(m; n)$ и $(m'; n')$.

10.1. Полагаме $u = 2^x$, $v = 3^y$ и системата приема вида:

$$\begin{cases} 3u^2 + 2uv - v^2 = 0 \\ 2u^2 - 5uv + v^2 = -8 \end{cases}.$$

Първото уравнение се записва като $(u + v)(3u - v) = 0$, откъдето $u = -v$ или $3u = v$. първата възможност отпада, тъй като u и v са положителни. Полагайки $v = 3u$ във второто уравнение получаваме $u^2 = 2$, откъдето $x = \frac{1}{2}$. За v имаме $v = 3\sqrt{2}$, откъдето $y = 1 + \frac{1}{2} \log_3 2$.

10.2. а) Да означим средите на AC и BD съответно с M и N . Използвайки формулата за дължината на медиана, приложена за $\triangle BMD$ имаме

$$|MN|^2 = \frac{2|MB|^2 + 2|MD|^2 - f^2}{4}.$$

По нататък $|MB|^2 = (2a^2 + 2b^2 - e^2)/4$, $|MD|^2 = (2c^2 + 2d^2 - e^2)/4$ и замествайки в равенството за $|MN|^2$ получаваме

$$4|MN|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2 \geq 0.$$

б) Съгласно теоремата на Птолемей $ac + bd = ef$. Тъждеството получено в (а) лесно се преобразува до $(a - c)^2 + (b - d)^2 = (e - f)^2 + 4|MN|^2$. За да докажем исканото неравенство е достатъчно да покажем, че $(b - d)^2 \leq 4|MN|^2$. Но последното следва от неравенството на триъгълника, приложено за $\triangle MNP$, където P е средата на CD .

10.3. Лявата страна се дели на m , n и $m - n$, следователно $m = 2^a$, $n = 2^b$, $m - n = 2^c$. Очевидно $2^b(2^{a-b} - 1) = 2^c$, откъдето $a - b = 1$. Полагайки обратно в уравнението получаваме

$$[2^{2a} + 2^{2a-1}, 2^{2a-1} - 2^{2a-2}] + [2^a - 2^{a-1}, 2^{2a-1}] = 2^{2a-1} + 3 \cdot 2^{2a-1} = 2^{2a+1} = 2^{2005}.$$

Следователно $a = 1002$, $m = 2^{1002}$, $n = 2^{1001}$.

10.4. Първото уравнение е квадратно с дискриминанта е $D = (9a^2 - 1)^2$. Следователно за всяка стойност на a , различна от $\pm \frac{1}{3}$, то има две решения. За $a = \pm \frac{1}{3}$ уравнението има точно един корен. Тъй като функцията $2x^3 + 6x + (3a - 1)^2 12^x$ е строго растяща, второто уравнение има не повече от едно решение. При $a = \frac{1}{3}$ второто уравнение има корен $x = 0$, докато за $a = -\frac{1}{3}$ то не е дефинирано, тъй като подкоренната величина в дясно е отрицателна. Окончателно единствената стойност на a , удовлетворяваща условието е $a = \frac{1}{3}$.

10.5. Нека петите на височините, спуснати от върховете A и B са съответно D и E . четириъгълникът $HDCE$ е вписан в окръжност с диаметър CH . Точките H_1 и H_2 са средина двете дъги DE , тъй като BH_1 и BH_2 са ъглополовящи. Следователно правата H_1H_2 е симетрала на отсечката DE .

От друга страна четириъгълникът $ABDE$ е също вписан в окръжност с диаметър AB . Следователно симетралата на хордата DE минава през центъра на окръжността, описана около $ABDE$, която е точката M .

10.6. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{1000}$ е произволна наредба на числата от 1 до 1000. Означаваме

$$S_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_{50}, \dots, S_{20} = x_{981} + x_{982} + \dots + x_{1000}.$$

Тъй като $S_1 + \dots + S_{20} = 500500$, то поне за едно i имаме $S_i \geq \frac{500500}{20} = 25025$. От друга страна, никое число по-голямо от 25025 няма това свойство. Да разгледаме подреждането $1000, 1, 999, 2, \dots, 501, 500$. Ако първото число в петдесетица последователни числа е по-голямо от 500, то сумата на тези числа е 25025; ако първото число в петдесетица последователни числа е по-малко от 500, то сумата е 25000.

11.1. Записваме уравнението във вида

$$(1) \quad 2ay^2 - \sqrt{2}(a-3)y + 1 = 0,$$

където $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = \sin(x + 45^\circ) \in [-1, 1]$. Даденото уравнение има решение точно когато (1) има решение в интервала $[-1, 1]$.

При $a = 0$ уравнението (1) е линейно и коренът $y = -\frac{\sqrt{2}}{6} \in [-1, 1]$ води до решение.

Нека $a \neq 0$. Квадратният тричлен $f(y) = 2ay^2 - \sqrt{2}(a-3)y + 1$ има точно един корен в интервала $[-1, 1]$ или се анулира в граница на този интервал тогава и само тогава, когато $f(-1)f(1) \leq 0$. Оттук за a получаваме

$$a \in \left[-\frac{7\sqrt{2}+8}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{7\sqrt{2}-8}{2} \right].$$

Квадратният тричлен има два корена в интервала $(-1, 1)$ точно когато

$$\left| \begin{array}{l} af(-1) > 0 \\ af(1) > 0 \\ D = 2a^2 - 20a + 18 \geq 0 \\ -1 < \frac{\sqrt{2}(a-3)}{4a} < 1 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} a \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{7\sqrt{2}-8}{2}, \infty \right) \\ a \in \left(-\infty, -\frac{7\sqrt{2}+8}{2} \right) \cup (0, \infty) \\ a \in (-\infty, 1] \cup [9, \infty) \\ a \in \left(-\infty, -\frac{3+6\sqrt{2}}{7} \right) \cup \left(\frac{6\sqrt{2}-3}{7}, \infty \right) \end{array} \right.$$

и решенията на системата са $a \in \left(-\infty, -\frac{7\sqrt{2}+8}{2}\right) \cup \left(\frac{7\sqrt{2}-8}{2}, 1\right] \cup [9, \infty)$.

Окончателно, отговорът е $a \in (-\infty, 1] \cup [9, \infty)$.

Забележка. Задачата може да се реши и по следния начин. При горните означения, от изискването $D \geq 0$ получваме $a \in (-\infty, 1] \cup [9, \infty)$.

При $a \leq 1$ имаме $f(0) = 1 > 0$ и $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2a - 2 \leq 0$, следователно уравнението има корен в интервала $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, а значи и в $(-1, 1)$.

При $a \geq 9$ имаме $f(0) = 1 > 0$ и $f\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{9}(9 - a) \leq 0$, следователно уравнението има корен в интервала $\left(0, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$, а значи и в $(-1, 1)$.

Следователно при $a \in (-\infty, 1] \cup [9, \infty)$ уравнението има решение.

11.2. В остроъгълен триъгълник ABC с лице 1 са избрани точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ така, че $\sphericalangle CC_1B = \sphericalangle AA_1C = \sphericalangle BB_1A = \varphi$, където φ е остър ъгъл. Отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 се пресичат в точките M , N и P .

а) Да се докаже, че центърът на описаната около $\triangle MNP$ окръжност съвпада с ортоцентъра на $\triangle ABC$.

б) Ако $S_{MNP} = 2 - \sqrt{3}$, да се намери φ .

Решение. Нека $AA_1 \cap BB_1 = M$, $BB_1 \cap CC_1 = N$, $CC_1 \cap AA_1 = P$. При традиционните означения за ъгли, $\sphericalangle PMN = \varphi - \sphericalangle B_1BC = \varphi - (\varphi - \gamma) = \gamma$. Аналогично, $\sphericalangle MNP = \alpha$ и $\sphericalangle NPM = \beta$, т.е. триъгълниците MNP и ABC са подобни.

Нека H е ортоцентър на $\triangle ABC$. От равенството $\sphericalangle HCC_1 = \sphericalangle HBB_1 = \sphericalangle HAA_1 = 90^\circ - \varphi$ получаваме, че около всеки от четириъгълниците $ABMH$, $BCNH$, $ACHP$ може да се опише окръжност. Така получаваме, че $\sphericalangle HMA = \sphericalangle HBA = 90^\circ - \alpha$ и $\sphericalangle HPM = 180^\circ - \sphericalangle APH = \sphericalangle ACH = 90^\circ - \alpha$, откъдето следва, че H е център на описаната окръжност за $\triangle MNP$.

б) Доказахме, че точките A, B, M и H лежат на една окръжност; от синусовата теорема имаме $\frac{MH}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{c}{\sin(180^\circ - \gamma)}$, т.е. $MH = 2R \cos \varphi$.

Като вземем предвид, че MH е радиус на описаната около $\triangle MNP$ окръжност, намираме, че коефициентът на подобие за $\triangle MNP$ и $\triangle ABC$ е $2 \cos \varphi$. Следователно $4 \cos^2 \varphi = 2 - \sqrt{3} \iff 2 \cos 2\varphi = -\sqrt{3}$ и тъй като $0 < 2\varphi < 180^\circ$, намираме $2\varphi = 150^\circ$, т.е. $\varphi = 75^\circ$.

11.3. а) Директна проверка показва, че при $a + b + c = d$ условието е изпълнено. Да допуснем, че $a + b + c > d$. Тогава $ab + cd > (d - a)(d - b)$. Наистина, последното е равносилно с $ab + cd > d^2 - ad - bd + ab \iff d(a + b + c) > d^2 \iff a + b + c > d$. Аналогично $bc + ad > (d - b)(d - c)$ и $ac + bd > (d - a)(d - c)$. След почленно умножаване получаваме противоречие с условието. Аналогично разсъждаваме и при $a + b + c < d$. Следователно $d = a + b + c$.

б) При фиксирано $3 \leq d \leq n$ броят на решенията на уравнението $d = a + b + c$ е точно равен на биномния коефициент $\binom{d-1}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Можем да докажем това по следния начин: ако запишем в редица d единици, броят на решенията е равен на броя на начините, по които можем да разположим две "разделителни чертички" в редицата (например 111|11...11|1 съответства на $a = 3, b = d - 4, c = 1$), т.е. на $\binom{d-1}{2}$. Можем да приемем, че формулата е вярна и при $d = 1$ и $d = 2$, защото тогава броят е нула. Остана да пресметнем

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^n \frac{(d-1)(d-2)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^n d^2 - \frac{3}{2} \sum_{d=1}^n d + n = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \end{aligned}$$

11.4. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението

$$\log_{ax}(3^x + 4^x) = \log_{(ax)^2}(7^2(4^x - 3^x)) + \log_{(ax)^3} 8^{x-1}$$

има решение.

Решение. Да решим даденото уравнение. Тъй като условията $ax > 0$ и $4^x - 3^x > 0$, т.е. $x > 0$ трябва да бъдат изпълнени едновременно, при $a < 0$ уравнението няма решение.

При $a > 0, x > 0, ax \neq 1$ уравнението е еквивалентно на

$$3^x + 4^x = 7 \cdot 2^{x-1} \sqrt{4^x - 3^x} \iff 45 \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 57 \left(\frac{4}{3}\right)^x - 4 = 0,$$

което при $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 0$ записваме като $45y^2 - 57y - 4 = 0$. Корените на полученото уравнение са $y_1 = \frac{4}{3}$ и $y_2 = -\frac{1}{15}$ и намираме $x = 1$. За да

няма решение даденото уравнение, за $x = 1$ трябва да е в сила равенството $ax = 1$, което се получава при $a = 1$.

Окончателно, отговорът на задачата е $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$.

11.5. Ако RT е височината през R в $\triangle CRQ$, то $RT = CR \sin \gamma$ (1). От синусовата теорема за $\triangle B_1RC$ намираме

$$CR = \frac{B_1C \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{2R \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}},$$

където R е радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. След заместване в (1) получаваме $RT = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$. Но $r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$, където r е радиусът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Следователно $RT = r$.

б) Аналогично на а) височината през N на $\triangle BNP$ е равна на r , което означава, че правата NR е успоредна на BC и е на разстояние r от нея, следователно $I \in NR$, където I е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Аналогично I лежи и на правите MQ и SR .

11.6. Първо ще докажем, че ако изберем 5 от върховете на правилен 13-ъгълник, съществува равнобедрен триъгълник с върхове измежду избраните точки. Нека избраните точки образуват изпъкналия петоъгълник $ABCDE$. Да допуснем, че имаме две двойки успоредни прави, определени от върховете на петоъгълника. Понеже успоредни диагонали не съществуват, имаме следните възможности:

1) Две двойки успоредни страни - например $AE \parallel CD$ и $BC \parallel DE$. Тогава $\sphericalangle AED = \sphericalangle BCD$ или $\sphericalangle AED = 180^\circ - \sphericalangle BCD$, т.е. $\sin \sphericalangle AED = \sin \sphericalangle BCD$ и от $AD = 2R \sin \sphericalangle AED = 2R \sin \sphericalangle BCD = BD$ получаваме равнобедрения $\triangle ABD$.

2) Две двойки успоредни прави от вида диагонал - страна. Нека без ограничение $AB \parallel CE$. Ако $AC \parallel DE$, аналогично на 1) получаваме $BC = CD$. Ако $AD \parallel BC$, то $EB = BD$. Случаите $BE \parallel CD$ и $BD \parallel AE$ са аналогични на разгледаните.

3) Две двойки успоредни прави от вида диагонал-страна и страна-страна. Нека отново без ограничение $AB \parallel CE$. Понеже $AE \parallel BC$ е невъзможно – иначе $ABCE$ е правоъгълник с върхове измежду върховете на правилен 13-ъгълник, можем да считаме, че $DE \parallel BC$. Тогава $DC = CA$.

Нека сега имаме най-много една двойка успоредни прави. Тогава измежду 10-те отсечки, определени от върховете на $ABCDE$ има 9, никои две от които не са успоредни. Понеже такава отсечка е основа на равнобедрен триъгълник с връх измежду върховете на 13-ъгълника и всички такива

върхове са различни поради това, че никои две отсечки не са успоредни, получваме, че поне един от тези 9 върха е измежду $ABCDE$, понеже останалите върхове са 8.

Понеже правилният 26-ъгълник е образуван от два правилни 13-ъгълника, то ако изберем 9 от неговите върхове, поне 5 от тях ще са измежду върховете на единия от 13-ъгълниците и следователно имаме равнобедрен триъгълник.

Следният пример показва, че можем да изберем 8 върха така, че никои три от тях да не са върхове на равнобедрен триъгълник: ако номерираме последователно върховете с числата от 1 до 26, може да изберем върхове 1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14.

12.1. Нека $\frac{a(a-b) + b(b-c) + c(c-a)}{2} = d^2$, където d е цяло число. Полагаме $x = a - b$, $y = b - c$ и $z = c - a$. Тогава

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4d^2. \quad (2)$$

Тъй като квадрат на цяло число дава остатък 0 или 1 при деление на 4, от (2) следва, че x , y и z са четни числа. Нека $x_1 = \frac{x}{2}$, $y_1 = \frac{y}{2}$ и $z_1 = \frac{z}{2}$. Тогава

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = d^2$$

и както по-горе заключаваме, че x_1 , y_1 , z_1 и d са четни числа. Продължавайки по същия начин, заключаваме, че x , y и z се делят на 2^n за всяко естествено число n . Следователно $x = y = z = 0$, т.е. $a = b = c$.

12.2. Условието, че графиката на дадената функция има точно три общи точки с координатните оси, които са върхове на триъгълник, означава, че уравнението $x^3 + ax + b = 0$ има един двоен реален корен $x_1 \neq 0$ и още един реален корен $x_2 \neq 0$, т.е. $x^3 + ax + b = (x - x_1)^2(x - x_2)$. Тогава $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, където $A = (x_1, 0)$, $B = (x_2, 0)$, $C = (0, b)$ и $x_1 x_2 < 0$. Оттук $AO \cdot BO = CO^2$, т.е. $-x_1 x_2 = b^2$. Понеже $b = -x_1^2 x_2$ и $x_1, x_2 \neq 0$, то $x_1^3 x_2 = -1$. От друга страна, $2x_1 + x_2 = 0$ и значи $2x_1 = -x_2 = \frac{1}{x_1^3}$. Следователно $x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ и $x_2 = \mp \sqrt[4]{8}$. Тогава $a = x_1^2 + 2x_1 x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ и $b = -x_1^2 x_2 = \pm \sqrt[4]{2}$. От направените разглеждания е ясно, че и за двете намерени стойности на b са изпълнени условията на задачата.

12.3. Нека първо $ABCD$ е вписан в окръжност. От теоремата на Симпсън за $\triangle ABC$ имаме, че $DB_1 \perp AC$. Тогава

$$\sphericalangle B_1 C_1 D = \sphericalangle B_1 A D = \sphericalangle C B D, \quad \sphericalangle B_1 D C_1 = \sphericalangle B_1 A C_1 = \sphericalangle C D B$$

и следователно $\triangle B_1C_1D \sim \triangle CBD$. Аналогично $\triangle B_1A_1D \sim \triangle ABD$, откъдето

$$DA : DB : DC = \frac{1}{DA_1} : \frac{1}{DB_1} : \frac{1}{DC_1}.$$

Оттук и теоремата на Птоломей за $ABCD$ следва, че

$$(1) \quad \frac{BC}{DA_1} + \frac{BA}{DC_1} = \frac{AC}{DB_1}.$$

Обратно, нека за $ABCD$ е изпълнено (1). Да положим $x = \frac{DB_1}{DA_1}$ и $y = \frac{DB_1}{DC_1}$. Като повдигнем (1) на квадрат и приложим косинусовата теорема за $\triangle ABC$, получаваме, че $\frac{BA}{BC}$ е корен на уравнението

$$(2) \quad (y^2 - 1)t^2 + 2(xy + \cos \sphericalangle ABC)t + x^2 - 1 = 0.$$

Понеже B_1 лежи на отсечката A_1C_1 , от $DB_1 \geq DA_1$ следва, че $DB_1 < DC_1$. Значи $0 < x \geq 1$ и $0 < y < 1$, което показва, че (2) има най-много един положителен корен.

От друга страна, лесно се вижда, че C_1 и A_1 лежат съответно на отворените лъчи $BA^{\rightarrow}$ и $BC^{\rightarrow}$, и правата през B_1 , перпендикулярна на DB_1 , пресича тези лъчи. Ако означим съответните пресечни точки с A' и C' , получаваме изпъкнал четириъгълник $A'BC'D$, около който може да се опише окръжност съгласно обратната теорема на Симпсън. Следователно за него е изпълнено (3) и значи $\frac{BA'}{BC'}$ също е корен на (2). Оттук $\frac{BA}{BC} = \frac{BA'}{BC'}$, т.е. $AC \parallel A'C'$. Тъй като тези прави имат обща точка B_1 , следва, че $A = A'$ и $C = C'$, с което задачата е решена.

Забележка. Условието $DB_1 \geq DA_1$ е съществено само за обратната посока на твърдението.

12.4. Ще считаме, че ръбовете на куба имат дължина 1. Нека $M = A_1B \cap KB_1$ и $KB = x$. От $\triangle KBM \sim \triangle A_1MB_1$ следва, че $\frac{MB}{A_1M} = x$. Понеже

$A_1M + MB = \sqrt{2}$, намираме, че $MB = \frac{x\sqrt{2}}{x+1}$. Нека V е обемът на пирамидата $KBCB_1$. Тогава

$$V = \frac{1}{3}BB_1 \cdot S_{KBC} = \frac{x}{6}. \quad (5)$$

От друга страна, височината на $KBCB_1$ през върха B е равна на $h = BM \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{6}}{2(x+1)}$. Тъй като $B_1K = CK = \sqrt{x^2+1}$ и $B_1C = \sqrt{2}$, то $S_{B_1KC} = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{2}$. Следователно

$$V = \frac{h \cdot S_{B_1KC}}{3} = \frac{x\sqrt{6}\sqrt{2x^2+1}}{12(x+1)}.$$

Оттук и (5) следва, че

$$\frac{x}{6} = \frac{x\sqrt{6}\sqrt{2x^2+1}}{12(x+1)}.$$

След съкращаване на $\frac{x}{6}$ и повдигане в квадрат намираме, че $x = \frac{1}{2}$.

Нека сега L е петата на перпендикуляра от B към KC . От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $KC \perp B_1L$ и значи търсеният ъгъл е $\alpha = \angle B_1LB$. От $\triangle KBC$ намираме $BL = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и следователно $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$.

12.5. Да допуснем, че от лентата не може да се изреже някой триъгълник T с лице $\sqrt{3}$. Тогава е ясно, че всички височини на T са по-големи от $\sqrt{3}$ и значи страните му са по-малки от 2. Нека α е най-малкият ъгъл на триъгълника. Тогава $\alpha \leq 60^\circ$ и следователно

$$\sqrt{3} = \frac{bc \sin \alpha}{2} < \frac{2.2 \sin 60^\circ}{2} = \sqrt{3},$$

което е противоречие.

12.6. а) Нека $n \in A$ и $O_n = \{n, f(n), -n, f(-n)\}$. Понеже $f(f(n)) = -n$ и $f(f(-n)) = n$, лесно следва, ако $k \in A$, то или $O_k = O_n$, или $O_n \cap O_k = \emptyset$. От тези равенства следва още, че $f(n) \neq f(-n)$ при $n \neq 0$. По-нататък, ако $f(\pm n) = \pm n$, то $\mp n = f(f(\pm n)) = f(\pm n) = \pm n$, т.е. $n = 0$. Тогава ако $f(\pm n) = \mp n$, то $\mp n = f(f(\pm n)) = f(\mp n)$ и значи $n = 0$. Следователно $|O_n| = 4$ при $n \neq 0$. И така, $A \setminus \{0\}$ се разбива на непресичащи се четворки от числа, т.е. m е четно число.

б) Нека $m = 2k$, $f : A \rightarrow A$ е функция с даденото свойство и $A_+ = \{1, 2, \dots, m\}$. Да забележим, че $f(-n) = f(f(f(n))) = -f(n)$; в частност $f(0) = 0$. Следователно за $n \neq 0$ имаме, че или $f(n) > 0$, или $f(-n) < 0$. Значи на четворката O_n съответства двойка $(n', f(n'))$ от различни числа от $A_+ : (n, f(n))$ или $(f(-n), n)$. Така f индуцира разбиване на A_+ на наредени двойки от числа.

Обратно, на всяко разбиване на A_+ на наредени двойки (n, k) от числа съответства (нечетна) функция с дадените свойства:

$$f(0) = 0, f(n) = k, f(k) = -n, f(-n) = -k, f(-k) = n.$$

Остава да преброим тези разбивания. Като наредим всички двойки от дадено разбиване една след друга, което може да стане по $k!$ начина, получаваме пермутация на числата от 1 до m . По този начин пермутациите ($m!$ на брой) на тези числа се разделят на класове от по $k!$ "еквивалентни" пермутации. Следователно търсеният брой е равен на $\frac{m!}{k!}$.

54. Национална олимпиада по математика

Национален кръг

1. Първо ще докажем, че ако p, q и r са рационални числа и $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ е рационално число, то всяко от числата $\sqrt{p}, \sqrt{q}$ и $\sqrt{r}$ е рационално. Нека $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = s$, където $pqr \neq 0$ и s е рационално число. Тогава $\sqrt{p} + \sqrt{q} = s - \sqrt{r}$ и след повдигане на квадрат получаваме $p + q + 2\sqrt{pq} = s^2 + r - 2s\sqrt{r}$. Записваме това равенство във вида $2\sqrt{pq} = s^2 + r - p - q - 2s\sqrt{r}$ и отново повдигаме на втора степен. Получаваме $4pq = M^2 + 4s^2r - 4Ms\sqrt{r}$, където $M = s^2 + r - p - q > 0$, откъдето следва, че $\sqrt{r}$ е рационално число. Аналогично доказваме, че $\sqrt{p}$ и $\sqrt{q}$ са рационални числа.

Нека естествените числа x, y, z имат исканото свойство. Тогава $\sqrt{\frac{2005}{x+y}}$, $\sqrt{\frac{2005}{x+z}}$ и $\sqrt{\frac{2005}{y+z}}$ са рационални числа. Ако $\sqrt{\frac{2005}{x+y}} = \frac{a}{b}$, където a и b са взаимнопрости, то $2005.b^2 = (x+y)a^2$. Оттук следва, че a^2 дели 2005, което е възможно само ако $a = 1$. Следователно $x+y = 2005.b^2$. Аналогично $x+z = 2005.c^2$ и $y+z = 2005.d^2$. Тогава

$$\sqrt{\frac{2005}{x+y}} + \sqrt{\frac{2005}{x+z}} + \sqrt{\frac{2005}{y+z}} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

е естествено число. Тъй като b, c и d са естествени числа имаме, че $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq 3$. Ако $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 3$, то $b = c = d = 1$ системата $x+y = 2005$, $x+z = 2005$ и $y+z = 2005$ няма решение в естествени числа.

Ако $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 2$, то едно от числата b, c, d е равно на 1, а останалите две са равни на 2 и системата за x, y и z няма решение в естествени числа.

Остава да разгледаме случая $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$. Без ограничение предполагаме, че $b \geq c \geq d$, като е ясно, че $d > 1$. Ако $d > 3$, то дадената сума е по-малка от 1. Следователно $d = 2$ или 3. При $d = 3$ получаваме $b = c = 3$, а при $d = 2$ имаме $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, което има две решения $b = 3, c = 6$ и $b = c = 4$. Директно се проверява, че само при $d = 2, b = c = 4$ системата има решение в естествени числа и то е: $x = 14.2005, y = z = 2.2005$. Следователно решенията на задачата са всички тройки от числа (x, y, z) , две от които са равни на 2.2005, а третото е равно на 14.2005.

2. а) Понеже k_1 и k_2 се допират, имаме $\sphericalangle BXT = \frac{\widehat{XT}}{2} = \frac{\widehat{TS}}{2} = \sphericalangle TAS$.

Оттук лесно следва, че S е среда на дъгата $\widehat{AB}$. Тогава $\sphericalangle TCI = \sphericalangle TAS$ (защото $ATCS$ е вписан в k_1), $\sphericalangle TAS = \sphericalangle BXT$, $\sphericalangle BXT = \sphericalangle TYX$ (защото се измерват с една и съща дъга). Следователно $\sphericalangle TCI = \sphericalangle TYI$, което означава, че около $CTIY$ може да се опише окръжност.

б) Тъй като $\sphericalangle AXS = \sphericalangle TAS$, получаваме че $\triangle AXS \sim \triangle TAS$. Оттук намираме $SA^2 = ST \cdot SX$. От а) имаме $\sphericalangle CIT = \sphericalangle CYT = \sphericalangle TXY$ и следователно $\triangle SXI \sim \triangle SIT$. Оттук намираме $SI^2 = ST \cdot SX$. Окончателно получихме $SA = SI$. Освен това от

$$\sphericalangle BCI = 180^\circ - \sphericalangle BCS = 180^\circ - \left(\gamma + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

следва, че CI е външна ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Остава да забележим, че $SB = SA = SI$ и от равнобедрения $\triangle BSI$ с $\sphericalangle BSI = \sphericalangle BSC = \alpha$ намираме $\sphericalangle BIS = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Сега от $\triangle BCI$ намираме $\sphericalangle CBI = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, което означава, че BI е външна ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$. Следователно I е центърът на външно вписаната окръжност за триъгълник ABC към страната BC .

3. Ще докажем, че такова множество не съществува. Да допуснем противното.

Нека $a \in A$ и да допуснем, че съществува $a' \in A$ и $a' > \frac{a}{2}$. Тогава числото

$a - a' < \frac{a}{2}$ може да се представи като сума на едно или краен брой различни

числа от A . Тъй като всяко от тези числа е по-малко от $\frac{a}{2}$, то числото

$a = a' + a - a'$ се представя по два различни начина (веднъж като a и втори път като a' плюс числата от представянето на $a - a'$) като сума на едно или

няколко различни числа от A , противоречие. Следователно ако $a \in A$, то

$A \cap \left(\frac{a}{2}, a \right) = \emptyset$. В частност във всеки интервал $\left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}} \right)$, $i = 1, 2, \dots$ има

най-много един елемент на A . Тъй като A е безкрайно (в противен случай като сума на различни числа от A могат да се получат краен брой числа,

а рационалните числа в интервала $(0, 1)$ са безкрайно много), оттук лесно

следва, че числата от A могат да се подредят в безкрайна редица $a_1, a_2, \dots$, като $a_i \geq 2a_{i+1}$ за всяко i . Ако за някое i неравенството е строго, то

$$s = \sum_{i=2}^{\infty} a_i < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_1}{2^{i-1}} = a_1.$$

Това означава, че числата от интервала (s, a_1) не могат да се представят като сума на различни числа от A . Следователно $a_{i+1} = \frac{a_1}{2^i}$ за всяко i .

Тогава лесно се съобразява, че само числата от вида $a_1 \frac{m}{2^n}$ могат да се представят като сума на едно или краен брой числа от A . Тъй като всяко рационално число с нечетен знаменател, който е взаимнопрост със знаменателя на a_1 , не може да се представи в дадения вид, получаваме противоречие, с което задачата е решена.

4. Нека $a = BC = B'C$, $b = AC = A'C$, $c = AB = A'B'$, $\gamma = \angle C$. Понеже $\triangle AA'C \sim \triangle BB'C$ по втори признак, имаме $AA' : AC = BB' : BC = k$. Следователно $AA' = kb$, $BB' = ka$.

Отсечките EM и FM могат да се изразят, като се използва формулата за медиана в триъгълник, или директно чрез формулата на Ойлер за разстоянието между средите на диагоналите на четириъгълник (напомняме, че тя е валидна и за неизпъкнал, дори за самопресичащ се четириъгълник):

$$4EM^2 = k^2b^2 + c^2 + b^2 + a^2 - A'B^2 - b^2,$$

$$4FM^2 = k^2a^2 + c^2 + b^2 + a^2 - A'B^2 - a^2.$$

Условието $EM = FM$ е равносилно с $(k^2 - 1)(a^2 - b^2) = 0$, а оттам и с $k = 1$, понеже $a \neq b$. Това е в сила точно когато $\triangle AA'C$ е равностранен, т.е. при ротация на $\pm 60^\circ$. Ще разгледаме само случая на положително ориентиран $\triangle ABC$ и ъгъл на ротация 60° ; останалите са аналогични. От $\triangle CBA'$ имаме

$$A'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ - \gamma),$$

а от $\triangle AB'C$ получаваме

$$4EF^2 = B'A^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \gamma).$$

Ще докажем, че $EF = EM$. Като използваме изразяванията на двете отсечки, намираме че $EF = EM$ е равносилно на:

$$c^2 + 2ab \cos(60^\circ - \gamma) = a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \gamma),$$

откъдето поради $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma$ получаваме:

$$2ab \cos(60^\circ - \gamma) + 2ab \cos(60^\circ + \gamma) = 2ab \cos \gamma.$$

Това равенство е еквивалентно на $2 \cos 60^\circ \cos \gamma = \cos \gamma$, което е вярно. Следователно $EF = EM$ и значи $\angle EMF = 60^\circ$.

5. Първо ще докажем, че ако (t, a, b) -игра е печеливша за някой от двамата, то $(t + a + b, a, b)$ -игра е печеливша за същия играч. Да означим първият играч с A , а вторият с B . Нека B има печеливша стратегия за (t, a, b) -игра. При $(t + a + b, a, b)$ -игра след ход на A се получава $(t + a, a, b)$ -игра или $(t + b, a, b)$ -игра, като на ход е B . И в двата случая B може да получи (t, a, b) -игра, при която той отново е втори и следователно ще спечели.

Нека A има печеливша стратегия за (t, a, b) -игра. Тъй като A може да получи $(t - a, a, b)$ или $(t - b, a, b)$ -игра, при която той е втори, то следва, че или $(t - a, a, b)$, или $(t - b, a, b)$ -игра е печеливша за играещия втори. Без ограничение нека това е $(t - a, a, b)$. От доказаното по-горе следва, че $(t - a + a + b = t + b, a, b)$ -игра е печеливша за играещия втори. Понеже от $(t + a + b, a, b)$ -игра A може да получи $(t + b, a, b)$ -игра, в която той е втори, то $(t + a + b, a, b)$ -игра е печеливша за A .

Ще докажем, че при $t = 2004$ и $a + b = 2005$ първият играч A има печеливша стратегия. Без ограничение $a \leq b$. Тъй като $a > 0$, то $2004 \geq b$. За да спечели A трябва да извади от $t = 2004$ числото b . Тогава остава числото $2004 - b$, което поради $a + b = 2005$ е по-малко от a . Това означава, че при всеки ход на B ще се получи отрицателно число. Сега от доказаното по-горе следва, че за всяко s при $t = 2004 + s2005$ и $a + b = 2005$ играта (t, a, b) е печеливша за A .

Първо ще докажем, че ако x, y и n са естествени числа, за които $\frac{xy}{x+y} > n$, то $\frac{xy}{x+y} \geq n + \frac{1}{n^2 + 2n + 2}$.

Понеже $xy > n(x+y)$, то $xy = n(x+y) + r$, където r е естествено число. Записваме горното равенство във вида $(x-n)(y-n) = n^2 + r$, откъдето следва $x > n$ и $y > n$. Оттук $x = n + d_1$ и $y = n + d_2$ и $d_1 d_2 = n^2 + r$. Тогава като използваме неравенството $\frac{r}{A+r} \geq \frac{1}{A+1}$, което е вярно при $A > 0$ и $r \geq 1$ и свойството, че ако $d_1 d_2 = n^2 + r$, то $d_1 + d_2 \leq 1 + n^2 + r$, намираме:

$$\begin{aligned} \frac{xy}{x+y} &= \frac{n^2 + d_1 d_2 + n(d_1 + d_2)}{2n + d_1 + d_2} = n + \frac{r}{2n + d_1 + d_2} \\ &\geq n + \frac{r}{2n + n^2 + 1 + r} \geq n + \frac{1}{n^2 + 2n + 1}. \end{aligned}$$

Равенство имаме точно когато $\{x, y\} = \{n+1, n^2 + n + 1\}$.

От условието следва, че $c(c^2 - c + 1) = rab$ и $a + b = q(c^2 + 1)$, където p и q са естествени числа. Следователно

$$\frac{c(c^2 - c + 1)}{c^2 + 1} = \frac{pqab}{a + b} = \frac{xy}{x + y}$$

за $x = pqa$ и $y = qqb$. Тогава

$$\frac{xy}{x + y} = c - \frac{c^2}{c^2 + 1} = c - 1 + \frac{1}{c^2 + 1}.$$

Следователно $\frac{xy}{x + y} > c - 1$ и съгласно доказаното свойство

$$\frac{xy}{x + y} \geq c - 1 + \frac{1}{(c - 1)^2 + 2(c - 1) + 2} = c - 1 + \frac{1}{c^2 + 1}.$$

Следователно имаме случай на равенство, което означава, че $\{x, y\} = \{c, c^2 - c + 1\}$. Тъй като c и $c^2 - c + 1$ са взаимнопрости, то от $x = pqa$ и $y = qqb$ следва, че $p = q = 1$. Окончателно получаваме $\{a, b\} = \{c, c^2 - c + 1\}$.

Контролно за определяне на отбора за 22. БОМ

1. Като използваме два пъти неравенствата $x - 1 < [x] \leq x$, получаваме, че $abn - a - 1 < n - 1 \leq abn$. Оттук $n(ab - 1) < a$ и $n(1 - ab) \leq 1$. Ако $ab \neq 1$, то в едно от последните две неравенства коефициентът пред n е положителен и то не е изпълнено за достатъчно големи n . Следователно $ab = 1$ и изходното неравенство е еквивалентно на

$$bn - b \leq [bn] < bn. \quad (1)$$

Дясното неравенство означава, че за всяко n числото bn не е цяло, т.е. b е ирационално число. При $b > 1$ лявата неравенство в (1) очевидно е в сила.

Ако $0 < b < 1$, избираме $n = \left\lceil \frac{1}{b-1} \right\rceil$. Тогава $\frac{n-2}{n-1} < b < \frac{n}{n-1}$, откъдето $[bn] \leq n-2$ и следователно $\left\lceil \frac{[bn]}{b} \right\rceil < n-1$, противоречие.

И така, търсените a и b са произволни ирационални числа, за които $ab = 1$ и $b > 1$.

2. Имаме, че $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle ACP = \sphericalangle EDP$. Тъй като $PD \perp BC$, следва, че $ED \perp CQ$. Аналогично $AQ \perp EF$. Понеже $\sphericalangle DEF = 90^\circ$, заключаваме, че и $\sphericalangle AQC = 90^\circ$. Тогава $\triangle QCD \sim \triangle ACP$, тъй като $\sphericalangle QCD = \sphericalangle ACP$ и

$$\frac{DC}{QC} = \frac{PC \cos \sphericalangle PCD}{AC \cos \sphericalangle ACQ} = \frac{PC}{AC}.$$

Следователно $\sphericalangle DQC = \sphericalangle PAC = \sphericalangle PFE$. Понеже $CQ \parallel EF$ ($\perp ED$), следва, че $DQ \parallel PF$, т.е. $DQ \perp AB$. Аналогично $FQ \perp BC$ и значи Q е ортоцентърът на $\triangle BDF$.

Забележка. Обратното твърдение също е вярно: ако Q е ортоцентърът на $\triangle BDF$, то $\sphericalangle DEF = 90^\circ$.

3. Съществува. Ще дефинираме индуктивно редица с исканите свойства. Полагаме $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Да предположим, че вече сме определили $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$. Означаваме с m най-малкото естествено число, което не може да се представи като във вида $a_j - a_i$, $1 \leq i < j \leq 2k$. Понеже тези разлики са $d = k(2k-1)$ на брой, то $m \leq d+1$. Нека $a_{2k+2} = a_{2k+1} + m$. Ще търсим a_{2k+1} така, че $a_{2k+1} \neq a_l$, $a_{2k+1} \pm m \neq a_l$, $a_{2k+1} - a_l \neq a_j - a_j$, $a_{2k+1} + m - a_l \neq a_j - a_j$, $1 \leq l \leq 2k$, $1 \leq i < j \leq 2k$. Оттук следва, че $a_1, a_2, \dots, a_{2k+2}$ са две по две различни числа и всяко естествено число от 1 до m се представя

по единствен начин като разлика на две от тези числа. За a_{2k+1} имаме $6k + 4kd$ "забранени" стойности и следователно можем да изберем $a_{2k+1} \leq 6k + 4kd + 1$. Тогава

$$a_{2k+1} < a_{2k+2} = a_{2k+1} + m \leq 6k + 4kd + 1 + d + 1 < (2k + 1)^3$$

и остава да подредим числата $a_1, a_2, \dots, a_{2k+2}$ по големина (съобразете, че неравенството $a_n \leq n^3$ се запазва).

4. Нека O е произволна точка в равнината и $A_{1,1}A_{2,1} \dots, A_{n,1}$ е подобен на $\mathcal{P}$ многоъгълник, който съдържа O . Да построим многоъгълниците $OA_{1,1}A_{1,2} \dots A_{1,n-1}$, $OA_{2,1}A_{2,2} \dots A_{2,n-1}$, $\dots$, $OA_{n,1}A_{n,2} \dots A_{n,n-1}$, еднакво ориентирани и подобни на $A_1A_2 \dots A_n$. Като използваме въртяща хомотетия с център O , следва, че $A_{1,j}A_{2,j}, \dots, A_{n,j}$, $j = 2, \dots, n - 1$, е еднакво ориентиран и подобен на $A_{1,1}A_{2,1} \dots A_{n,1}$ многоъгълник. Да означим с o и $a_{i,j}$ числата, записани съответно в точките O и $A_{i,j}$. Като съберем равенствата

$$o + \sum_{j=1}^{n-1} a_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

и след това използваме, че

$$\sum_{i=1}^n a_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

получаваме $no = 0$, с което задачата е решена.

5. Ще докажем по индукция, че $a_n = n - wt_2(n)$, където $wt_2(n)$ означава броят на единиците в двоичното представяне на n . Наистина при $n = 0$ имаме $a_0 = 0$ и твърдението е вярно. Да допуснем, че твърдението е вярно за всяко $n \leq k - 1$. Ако $k = 2k_0$, то като използваме, че $wt_2(k_0) = wt_2(k)$ (тъй като двоичните представяния на k_0 и $k = 2k_0$ имат равен брой единици) получаваме

$$a_k = a_{k_0} + k_0 = k_0 - wt_2(k_0) + k_0 = k - wt_2(k_0) = k - wt_2(k).$$

Ако $k = 2k_0 + 1$, то като използваме, че $wt_2(2k_0 + 1) = wt_2(2k_0) + 1$ (тъй като в двоичното представяне на $2k_0 + 1$ има една единица повече от двоичното представяне на $2k_0$) получаваме

$$a_k = a_{k_0} + k_0 = k_0 - wt_2(k_0) + k_0 = 2k_0 - wt_2(2k_0)$$

$$= 2k_0 + 1 - wt_2(2k_0 + 1) = k - wt_2(k).$$

Тъй като ако $wt_2(n) = t$, то $n \geq 2^t - 1$, намираме

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{wt_2(n)}{n} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{2^t} = 0.$$

Следователно $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{wt_2(n)}{n} = 0$ и за търсената граница получаваме

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - wt_2(n)}{n} = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{wt_2(n)}{n} = 1.$$

6. Ще докажем твърдението с индукция по $N = a_1 + a_2 + \dots + a_m$. При $N = 1$ имаме $m = 1$, $a_1 = 1$ и $b_1 = 1$ е търсеното число. Да допуснем, че твърдението е вярно за всеки набор със сума ненадминаваща N и нека $a_1, a_2, \dots, a_m$ са такива, че $a_1 + a_2 + \dots + a_m = N$. Ако всички числа $a_1, a_2, \dots, a_m$ са четни, то числата $\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_m}{2}$ имат сума $\frac{N}{2}$ и по индукционното допускане съществува набор $b_1, b_2, \dots, b_n$ изпълняващ условието. Тогава търсените числа за $a_1, a_2, \dots, a_m$ са $2b_1, 2b_2, \dots, 2b_n$.

Нека измежду дадените числа има поне едно нечетно и без ограничение a_m е най-малкото нечетно число. Да разгледаме числата $a'_1, a'_2, \dots, a'_{m-1}$ получени по следния начин

$$a'_i = \begin{cases} \frac{a_i}{2} & \text{ако } a_i \text{ е четно} \\ \frac{a_i - a_m}{2} & \text{ако } a_i \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Сумата на тези числа не надминава N и по индукционното допускане съществуват числа $b'_1, b'_2, \dots, b'_k$, които изпълняват условието на задачата. Ще докаже, че търсените числа за набора $a_1, a_2, \dots, a_m$ са $2b'_1, 2b'_2, \dots, 2b'_k, a_m$.

Ако има две непресичащи се подмножества на $\{2b'_1, 2b'_2, \dots, 2b'_k, a_m\}$ с равни суми на елементите си, то a_m като единствено нечетно число не участва в тези подмножества и тогава след съкращаване на 2 ще получим две подмножества на $\{b'_1, b'_2, \dots, b'_k\}$ с равни суми от елементите, което е противоречие. Лесно се вижда, че всеки елемент от $a_1, a_2, \dots, a_m$ се представя като сума от елементи на $2b'_1, 2b'_2, \dots, 2b'_k, a_m$, с което задачата е решена.

7. Синусова теорема за триъгълниците ODQ и AOQ дава

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{QD}{OD} \quad \text{и} \quad \frac{\sin(\varphi + \sphericalangle AOD)}{\sin \beta} = \frac{AQ}{OA}.$$

След разделяне получаваме

$$\frac{\sin(\varphi + \sphericalangle AOD)}{\sin \varphi} = \frac{AQ}{OA} \cdot \frac{OD}{QD}.$$

Аналогично намираме

$$\frac{\sin(\varphi + \sphericalangle AOB)}{\sin \varphi} = \frac{AP}{OA} \cdot \frac{OB}{BP}.$$

След разделяне получаваме разделяне получаваме

$$\frac{\sin(\varphi + \sphericalangle AOD)}{\sin(\varphi + \sphericalangle AOB)} = \frac{AQ}{AP} \cdot \frac{OD}{OB} \cdot \frac{BP}{QD}.$$

По същия начин получаваме и равенството

$$\frac{\sin(\sphericalangle DOC - \varphi)}{\sin(\sphericalangle BOC - \varphi)} = \frac{QC}{PC} \cdot \frac{OB}{OD} \cdot \frac{PD}{QB}.$$

От теоремата на Менелай за $\triangle ADC$ и правата QP , и $\triangle ABC$ и правата QP следва

$$\frac{AQ \cdot DP}{DQ \cdot CP} = \frac{AL}{CL} \quad \text{и} \quad \frac{QC \cdot BP}{QB \cdot AP} = \frac{CL}{AL}.$$

Ако положим $\varphi + \sphericalangle AOD = x$, $\varphi + \sphericalangle AOB = y$, $\sphericalangle DOC - \varphi = z$ и $\sphericalangle BOC - \varphi = t$, получаваме

$$\frac{\sin x \cdot \sin z}{\sin y \cdot \sin t} = \frac{AQ \cdot DP \cdot QC \cdot BP}{DQ \cdot CP \cdot QB \cdot AP} = \frac{AL}{CL} \cdot \frac{CL}{AL} = 1,$$

т.е. $\sin x \cdot \sin z = \sin y \cdot \sin t$. Оттук лесно следва $\cos(x - z) - \cos(x + z) = \cos(y - t) - \cos(y + t)$ и тъй като $x + y + z + t = 360^\circ$, то $\cos(x + z) = \cos(y + t)$. Следователно $\cos(x - z) = \cos(y - t)$ и понеже $x - z + y - t < 360^\circ$, а равенството $x - z = t - y$ означава, че O лежи на PQ (проверете!), получаваме че $x - z = y - t$, откъдето $x + t = z + y = 180^\circ$.

8. Ако за всяко $s = 1, 2, \dots, B$ всяка група от s младежи познават заедно поне s момичета. Тогава по теоремата на Хол за представителите следва, че всяко момче може да танцува с познато момиче и условието на задачата е изпълнено. Да допуснем противното и да изберем най-голямото $s \leq B$, за което има s младежи, които заедно познават общо не повече от $s - 1$ момичета. Да означим множеството на избраните s младежи с S , а множеството

на познатите им момичета с L . Ако някои t от младежите извън S познават не повече от t от момичетата извън L , то ще получим противоречие с максималността на s . Следователно всеки t от младежите извън S познават поне $t + 1$ от момичетата извън L . От теоремата на Хол следва, че всяко момче извън S може да танцува с познато момиче извън L . Извън L нетанцуващи момичета остават поне $G - (B - s) - (s - 1) = G + 1 - B \geq B$ ($B - s$ са момичетата, които танцуват с момчета извън S , а $s - 1$ са най-много момичетата, познати на младежите от S). Ако момчетата от S танцуват с някои s от останалите нетанцуващи момичета извън S , то условието е изпълнено.

Контролно за определяне на отбора за 46. МОМ

1. Нека $AP \perp FG$ и $BQ \perp FG$, $P, Q \in FG$. Тогава $AB \geq PQ = PG + GF + FQ$. Тъй като четириъгълникът $CFMG$ е вписан в окръжност, получаваме $\sphericalangle CMF = \sphericalangle CGF = \sphericalangle AGP$. Оттук следва, че $\triangle APG \sim \triangle CFM$ и следователно $\frac{PG}{AG} = \frac{MF}{CM} \iff PG = \frac{MF \cdot AG}{CM}$. Аналогично $QF = \frac{MG \cdot BF}{CM}$. Окончателно получаваме $AB - FG \geq PG + FQ = \frac{MF \cdot AG + MG \cdot BF}{CM}$.

Ясно е, че горното равенство се достига тогава и само тогава, когато $AB \parallel FG$. Това означава, че $\sphericalangle BAC = \sphericalangle FGC = \sphericalangle AGP$, откъдето $\sphericalangle MCB = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle OCB$, където O е центърът на описаната окръжност за ABC . Следователно търсеното геометрично място е отсечката CP , където P е пресечната точка на правата OC и страната AB .

2. Да разгледаме множеството $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{10}\}$. Тъй като всяко число от 0 до 2047 се представя по единствен начин като сума от степени на 2 заключаваме, че за всяко $i, 0 \leq i \leq 2047$ има единствено подмножество на $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{10}\}$ със сума от елементите равна на i (приемаме, че празното множество има сума от елементите равна на нула).

Да разгледаме множество A със свойството: за всяко i броят на подмножествата със сума от елементите даваща остатък i при деление с 2048 не зависи от i . Лесно се вижда, че същото свойство е вярно и за множеството $A \cup \{a\}$ за всяко a . Тъй като $\{1, 2, 2^2, \dots, 2^{10}\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 2005\}$ получаваме, че броят на подмножествата B на $\{1, 2, 3, \dots, 2005\}$ със сума от елементите даваща остатък $i, 0 \leq i \leq 2047$ при деление на 2048 е равен на $\frac{2^{2005}}{2048} = \frac{2^{2005}}{2^{11}} = 2^{1994}$. Следователно търсеният брой е равен на 2^{1994} .

3. Нека $\alpha = f(1)$. От

$$(1) \quad f(x^2 + y) = f^2(x) + \frac{f(xy)}{f(x)}$$

при $y = 1$ и $x = 1$ следва, че

$$f(x^2 + 1) = f^2(x) + 1 \quad (4)$$

и

$$f(y + 1) = \alpha^2 + \frac{f(y)}{\alpha} \quad (5)$$

Използвайки (3), намираме

$$f(2) = \alpha^2 + 1, \quad f(3) = \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha},$$

$$f(4) = \frac{\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha^2}, \quad f(5) = \frac{\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha^3}.$$

От друга страна от (2) при $x = 1$ намираме $f(5) = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 2$. Следователно

$$\frac{\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1}{\alpha^3} = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 2 \iff \alpha^7 + \alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0,$$

откъдето

$$(\alpha - 1) [\alpha^4(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha + 1)^2(\alpha^2 - \alpha + 1) + 2\alpha^2] = 0.$$

Тъй като изразът в скобите е положителен, получаваме $\alpha = 1$.

От (3) следва

$$f(y+1) = f(y) + 1 \quad (6)$$

Полагайки $y = x^2$ в (4), намираме $f(x^2 + 1) = f(x^2) + 1$, откъдето като използваме (2) намираме $f(x^2) = f^2(x) > 0$. Следователно $f(x) > 0$ за всяко $x > 0$.

По индукция от (4) лесно следва, че $f(n) = n$ за всяко цяло положително n . Нека $\frac{a}{b}$ (a, b са цели положителни числа) е произволно рационално число. Тъй като (4) дава $f(y) = y \iff f(y+m) = y+m$ за всяко цяло положително m , то

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} \text{ е еквивалентно на } f\left(b^2 + \frac{a}{b}\right) = b^2 + \frac{a}{b}.$$

Последното равенство следва от (1) за $x = b$ и $y = \frac{a}{b}$. Следователно $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$.

Като използваме (1), неравенството $f(x) > 0$ за $x > 0$ и $f(x^2) = f^2(x)$, получаваме $f(x) > f(y)$ за $x > y > 0$. Тъй като $f(x) = x$ за всяко рационално число $x > 0$, лесно следва, че $f(x) = x$ за всяко реално число $x > 0$.

Накрая, ако $x < 0$, можем да изберем $y < 0$ за което $x^2 + y > 0$ и да получим от (1) че $f(x) = x$.

Следователно $f(x) = x$ за всяко $x \in R_*$. Ясно е, че тази функция удовлетворява (1).

4. Първо ще покажем, че поне едно от числата $a_1, a_2, \dots, a_{2005}$ не е положително.

Наистина, да допуснем противното и да изберем i , за което $\frac{b_i}{a_i} = M =$

$\max_{1 \leq j \leq 2005} \left\{ \frac{b_j}{a_j} \right\}$. Тогава можем да намерим $\varepsilon > 0$ такава, че

$$(a_i x - b_i)^2 < \sum_{j=1, j \neq i}^{2005} (a_j x - b_j)^2 \text{ за всяко } x \in (M, M + \varepsilon)$$

(защо?) - противоречие. От друга страна лесно се вижда, че при $a_1 = a_2 = \dots = a_{2004} = -a_{2005} = 1$ и $b_1 = b_2 = \dots = b_{2004} = b_{2005} \geq \frac{1001^2}{2}$ даденото неравенство се изпълнява. Следователно отговорът е 4009.

5. Да означим с $k(O, R)$ описаната окръжност около $\triangle ABC$ и с Q ортогоналната проекция на H върху CL . Нека

$$K = HQ \cap LO, S = k \cap LO, P = CL \cap DS, M = AB \cap LO, N = AB \cap CD.$$

Да отбележим, че N и M са среди съответно на HD и KL . Наистина, $AH = AD$ ($\sphericalangle AHD = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADH$) и аналогично $BH = BD$, откъдето следва, че AB е симетрала на отсечката HD . От друга страна $DLSC$ е равнобедрен трапец и $HK \parallel CS$. Следователно $DLKH$ е равнобедрен трапец и AB е симетрала на отсечката KL .

Тогава

$$\frac{LQ}{LC} = \frac{LK}{LS} = \frac{LM}{R},$$

откъдето

$$LQ = \frac{LC \cdot LM}{R}.$$

Също така

$$LP = \frac{LO \cdot LS}{LC} = \frac{2R^2}{LC}, \text{ (тъй като } \triangle LOP \sim \triangle LCS)$$

и

$$LB^2 = LS \cdot LM = 2R \cdot LM, \text{ (тъй като } \triangle LBS \sim \triangle LMB).$$

Следователно

$$LP \cdot LQ = LB^2.$$

От друга страна, $LB = LI$ понеже

$$\sphericalangle LBI = \frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} = \sphericalangle LIB.$$

Тогава

$$LP.LQ = LI^2$$

и в частност $Q \equiv I \iff P \equiv I$.

Остава да забележим, че

$$\sphericalangle CIH = 90^\circ \iff Q \equiv I \text{ (since } \sphericalangle CQH = 90^\circ \text{)}$$

и

$$\sphericalangle IDL = 90^\circ \iff P \equiv I \text{ (since } \sphericalangle PDL = 90^\circ \text{)}.$$

С това доказателството е завършено.

Забележка. Може да се докаже, че $\sphericalangle CIH = 90^\circ$ тогава и само тогава, когато $\cos \sphericalangle A + \cos \sphericalangle B = 1$.

2. Трябва да докажем, че върховете на пълен граф с 9 върха, чийти ребра са оцветени в два цвята (син и червен) и в който няма син четириъгълник могат да бъдат разделени в 4 групи без сини ребра във всяка група.

Първо ще покажем, че ако граф G с 6 върха $v_1, v_2, \dots, v_6$ и два цвята син и червен удовлетворява условието на задачата и върховете на G не могат да бъдат разделени на три групи без сини ребра във всяка група, то всички червени ребра образуват цикъл с дължина 5.

Ще използваме, че в граф с 6 и два цвята (червен и син) има едноцветен триъгълник. Нека съществува червен триъгълник $v_1v_2v_3$. Ако ребро v_iv_j за $i, j \in \{4, 5, 6\}$ е червено, то $\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_i, v_j\}$ и $\{v_k\}, k \neq 1, 2, 3, i, j$ е желаното разделяне. Следователно v_4, v_5, v_6 образуват син триъгълник. Сега от условието следва, че за всяко $i = 1, 2, 3$ поне едно от ребрата $v_iv_j, j = 4, 5, 6$ е червено. Ако v_1v_4 и v_2v_4 са червени, то $v_1v_2v_4$ е червен триъгълник и следователно $v_3v_5v_6$ е син триъгълник. Сега, ако v_3v_4 е синьо, то $v_2v_4v_5v_6$ е червен триъгълник и ако v_3v_4 е червено, то имаме разделянето $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5\}$ и $\{v_6\}$. Това противопечие показва, че в G няма червени триъгълници.

Без ограничение можем да приемем, че v_1v_2 и v_3v_4 са червени. Ако всички v_iv_j за $i = 1, 2, j = 3, 4$ са червени, то разделянето е $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_5\}$ и $\{v_6\}$. Нека v_2v_4 е синьо. Тъй като четириъгълникът $v_2v_4v_5v_6$ не е син, то без ограничение v_4v_6 е червено ребро. Сега v_3v_6 е синьо (иначе $v_3v_4v_6$ е

червен триъгълник) и v_3v_5 е също синьо (иначе имаме разделянето $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_5\}$ и $\{v_4, v_6\}$).

Ако v_1v_3 е червено, то като използваме, че няма червен триъгълник, син четириъгълник или разделяне получаваме, v_2v_5 е синьо, v_2v_6 е червено, v_1v_6 е синьо, v_1v_5 е синьо, v_4v_5 е синьо и v_1v_4 е също синьо. Червените ребра в G са v_1v_2 , v_2v_6 , v_6v_4 , v_4v_3 и v_3v_1 и те образуват цикъл с дължина 5.

Ако v_1v_3 е синьо подобни аргументи водят до противоречие.

Да разгледаме граф с 9 върха $v_1, v_2, \dots, v_9$ и два цвят - син и червен. Такъв граф съдържа или червен триъгълник или син четириъгълник. Тъй като не съществуват сини четириъгълници, то има червен триъгълник $v_7v_8v_9$. Ако графът, получен от $v_1, \dots, v_6$ може да бъде разделен на три части без сини ребра във всяка част, то получаваме търсеното разделяне. В противен случай без ограничение червените ребра са v_1v_2 , v_2v_3 , v_3v_4 , v_4v_5 , v_5v_1 .

Ако v_iv_6 за $i = 7, 8$ и 9 са червени, то търсеното разделяне е $\{v_6, v_7, v_8, v_9\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ и $\{v_5\}$.

Ако v_7v_6 е синьо, а v_8v_6 и v_9v_6 са червени, то поне три от ребрата v_7v_i , $i = 1, 2, \dots, 5$ са червени (иначе има червен четириъгълник) и лесно намираме исканото разделяне.

С подобни аргументи се решават и останалите два случая: две от ребрата v_6v_7 , v_6v_8 и v_6v_9 сини и едно червено или когато и трите ребра са сини.

22. Балканска олимпиада по математика

1. Нека I е центърът на вписаната в триъгълника окръжност. Понеже $\sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle BDE$, то точките B, D, X и I лежат на една окръжност, т.е. $\sphericalangle BXC = \sphericalangle BDI = 90^\circ$. Аналогично $\sphericalangle BYC = 90^\circ$ и следователно $XZ = BZ = YZ$. Освен това,

$$\sphericalangle XZY = 180^\circ - \sphericalangle BZX - \sphericalangle CZY = 180^\circ - \sphericalangle ADE - \sphericalangle AED = \sphericalangle BAC$$

и задачата следва директно.

2. Нека $p^2 - p + 1 = a^3$, т.е. $p(p-1) = (a-1)(a^2+a+1)$. Очевидно $1 < a < p$ и значи p е делител на a^2+a+1 . Следователно $a^2+a+1 = bp$, $p-1 = b(a-1)$ и отгук $a^2+a+1 = b(b(a-1)+1)$. Лесно се проверява, че $b > 2$ и тогава

$$a+1 < \frac{a^2+a+1}{a} < b^2 < \frac{a^2+a-1}{a-1} \leq a+3,$$

откъдето $b^2 = a+2$. Сега $a^2+a+1 = (a+2)(a-1)+b$, което показва, че $b = 3$, $a = 7$ и $p = 19$.

3. Записваме даденото неравенство във вида

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Последното следва от неравенството на Коши-Буняковски-Шварц и неравенството:

$$(b+c+a) \left(\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \right) \geq (|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 \geq (2|a-b|)^2.$$

Равенство в първото неравенство се достига, когато

$$\frac{(a-b)^2}{b^2} = \frac{(b-c)^2}{c^2} = \frac{(c-a)^2}{a^2},$$

т.е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2\frac{b}{c} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}.$$

Следователно всеки две от числата $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$ са равни или тяхната сума е 2. Значи всичките са равни, т.е. $a = b = c$ (тогава очевидно даденото

неравенство се превръща в равенство), или две от тях са равни, а третото ги допълва до 2. В първия случай очевидно неравенството от условието се превръща в равенство и остава да разгледаме втория случай. Понеже равенство в горното неравенство на триъгълника се достига, когато $a \leq c \leq b$ или $b \leq c \leq a$, следва, че $\frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ и $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = 2$. Оттук $c = \sqrt{ab}$ и $x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$ е корен на уравнението $x^2 + \frac{1}{x} = 2$, т.е. $(x-1)(x^2+x-1) = 0$. Следователно $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $a = x_0^2 b$, $c = x_0 b$.

4. Да разгледаме множеството от всички четни числа, по-големи от $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Ясно е, че всеки две от тези числа имат общ делител 2 и никое от тях не дели друго, защото най-голямото е по-малко от удвоеното най-малко. Следователно съществува множество с исканите свойства и $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$ елемента.

Нека S има исканото свойство. Ако в S има число $a \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, можем да вземем най-малкото такова число и да го заменим с $2a$. Новото множество има исканите свойства и същия брой елементи. Следователно можем да считаме, че всички числа от S са по-големи от $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Тъй като не е възможно в S да има две съседни числа, заключаваме, че в S има най-много $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$ елемента, освен евентуално в случая, когато $n = 4k+1$. Тогава е достатъчно да се отбележи, че $2k+1$ и $4k+1$ не могат да принадлежат едновременно на S .

Следователно търсеният максимален брой елементи на S е $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$.

46. Международна олимпиада по математика

1. Ако страната на $\triangle ABC$ е a , а страната на шестоъгълника е b , то $AC_1 + BC_2 = BA_1 + CA_2 = CB_1 + AB_2 = a - b$. Да разгледаме равностранен триъгълник XYZ със страна $a - b$ и точки $M \in XY$, $K \in YZ$ и $L \in XZ$, за които $XM = AC_1$, $MY = BC_2$, $YK = BA_1$, $KZ = CA_2$, $ZL = CB_1$ и $LX = AB_2$. От еднаквостта на триъгълниците $\triangle AC_1B_2 \cong \triangle XML$, $\triangle BC_2A_1 \cong \triangle YMK$ и $\triangle CA_2B_1 \cong \triangle ZKL$ следва, че $LM = MK = KL = b$. Тъй като $\angle XML + 60^\circ + \angle YMK = 180^\circ$ и $\angle MKY + 60^\circ + \angle YMK = 180^\circ$, то $\angle XML = \angle MKY$. Аналогично $\angle MKY = \angle KLZ$. Сега триъгълниците XML , YKM и ZLK са еднакви, което означава, че триъгълниците AC_1B_2 , BA_1C_2 и CB_1A_2 също са еднакви. Оттук получаваме, че и триъгълниците AC_2B_2 , BA_2C_2 и CB_2A_2 са еднакви, откъдето следва, че $\triangle A_2B_2C_2$ е равностранен. Тъй като $A_1A_2 = A_1C_2$ и $B_2A_1 = B_2C_2$, то правата A_1B_2 е симетрала на отсечката A_2C_2 . Аналогично получаваме, че B_1C_2 е симетрала на A_2B_2 и C_1A_2 е симетрала на B_2C_2 . Следователно тези три прави се пресичат в центъра на описаната около $\triangle A_2B_2C_2$ окръжност.

2. Да отбележим, че в редицата няма равни членове, защото ако $a_i = a_j$ за $i < j$, то $a_1, a_2, \dots, a_j$ не могат да дават различни остатъци при деление на j .

Нека $|a_1 - a_2| = t > 1$ и да разгледаме остатъците от делението на $a_1, a_2, \dots, a_t$ с t . Тъй като $|a_1 - a_2| = t$, то a_1 и a_2 дават еднакви остатъци при деление на t , което е противоречие с условието на задачата. Следователно $|a_1 - a_2| = 1$. Ако $|a_3 - a_i| = t > 2$ за $i = 1$ или $i = 2$ ще получим, че $a_1, a_2, a_3, \dots, a_t$ дават различни остатъци при деление на t , което е невъзможно поради $|a_3 - a_i| = t$. Следователно $|a_3 - a_i| = 1$ или 2 , което означава, че a_1, a_2 и a_3 (не непременно в този ред) са последователни цели числа.

Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са последователни цели числа. Ако съществува $i = 1, 2, \dots, n$, за което $|a_{n+1} - a_i| = t \geq n + 1$, то при деление на числата $a_1, a_2, \dots, a_t$ с t има два равни остатъка (на a_{n+1} и a_i). Следователно за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ имаме $|a_{n+1} - a_i| < n + 1$. Тъй като $a_1, a_2, \dots, a_n$ в някакъв ред са последователни цели числа, горното е възможно само когато и $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ в някакъв ред са също последователни цели числа. Доказахме, че за всяко n числата $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ в някакъв ред образуват блок от последователни цели числа.

Нека x е произволно цяло число. Тъй като в редицата има безбройно много положителни и безбройно много отрицателни членове, то съществуват

i и j , за които $a_i < x$ и $a_j > x$. Но тогава числата $a_1, a_2, \dots, a_m$, за $m = \max(i, j)$ са последователни цели числа откъдето следва, че заедно с a_i и a_j този блок съдържа всички числа между тях, в частност и x . Тъй като x беше произволно цяло число, то всяко цяло число се среща точно един път като член на редицата.

3. Неравенството

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^2 - 1/x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

е еквивалентно на

$$\frac{(x^3 - 1)^2(y^2 + z^2)}{x(x^5 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0,$$

което очевидно е вярно. Като използваме аналогичните неравенства за другите две събираеми и условието $xyz \geq 1$, получаваме, че

$$\begin{aligned} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} &\geq \frac{x^2 - 1/x + y^2 - 1/y + z^2 - 1/z}{x^2 + y^2 + z^2} \\ &\geq \frac{x^2 - yz + y^2 - zx + z^2 - xy}{x^2 + y^2 + x^2} = \frac{(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)} \geq 0. \end{aligned}$$

4. Тъй като $a_2 = 48$, то числата, имащи делител 2 или 3 не са взаимно прости с всеки член на редицата. Нека $p > 3$ е просто число. Имаме $6a_{p-2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$, което според малката теорема на Ферма (ако простото число p не дели a , то a^{p-1} при деление на p дава остатък 1) при деление на p дава остатък $3 + 2 + 1 - 6 = 0$, т.е. $6a_{p-2}$ се дели на p . Тъй като p и 6 са взаимно прости, то a_{p-2} също се дели на p . Следователно единственото естествено число n с исканото свойство е $n = 1$.

5. Да означим пресечната точка на симетралите на отсечките BD и AC с O . Ще докажем, че O е търсената точка, т.е. когато точките E и F се променят описаните окръжности около триъгълниците PQR минават през O . За целта е достатъчно да докажем, че около четириъгълника $PQOR$ може да се опише окръжност. Тъй като $OB = OD$, $OC = OA$ и $BC = AD$, то триъгълниците OBC и ODA са еднакви. Следователно $\sphericalangle BOC = \sphericalangle DOA$, откъдето получаваме, че $\sphericalangle BOD = \sphericalangle AOC$. Тъй като $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$ са равнобедрени с равни ъгли при върховете, то те са подобни. Освен това триъгълниците OBE и ODF са еднакви ($OB = OD$, $BE = DF$ и $\sphericalangle OBE = \sphericalangle ODF$), откъдето $OE = OF$ и $\sphericalangle EOF = \sphericalangle BOD$. Следователно $\triangle EOF$

също е подобен на $\triangle BOD$ и $\triangle AOC$ и намираме, че $\sphericalangle OEQ = \sphericalangle OBQ = \sphericalangle OCR$. От тези равенства следва, че около $OBEQ$ и $OECR$ може да се опише окръжност. Тогава $\sphericalangle OQB = \sphericalangle OEB = \sphericalangle ORC = \sphericalangle ORP$, което означава, че около $PQOR$ може да се опише окръжност.

6. От условието следва, че всеки две задачи са били решени от поне $\frac{2n+1}{5}$ участника, където n е общият брой участници. Да допуснем, че най-много един участник е решил 5 задачи. Тогава останалите участници са решили най-много по 4 задачи. Да преброим тройките (i, j, A) , където i и j са номера на различни задачи, а A е участник решил и двете задачи. Ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ означават броят на задачите, решени от съответния участник, за броя на тези тройки имаме, че

$$\binom{a_1}{2} + \binom{a_2}{2} + \dots + \binom{a_n}{2} \leq \binom{5}{2} + (n-1)\binom{4}{2} = 6n + 4.$$

От друга страна този брой е не по-малък от $\binom{6}{2} \left(\frac{2n+1}{5} \right)$. Следователно

$$(1) \quad 15 \left(\left\lceil \frac{2n+1}{5} \right\rceil + 1 \right) \leq 6n + 4.$$

Нека $n = 5k + l$ за $l = 0, 1, \dots, 4$.

- Ако $l = 0$, то $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 2k$ и неравенството става $30k + 15 \leq 30k + 4$.
- Ако $l = 1$, то $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 2k$ и неравенството става $30k + 15 \leq 30k + 10$.
- Ако $l = 2$, то $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 2k + 1$ и неравенството става $30k + 15 \leq 30k + 16$.
- Ако $l = 3$, то $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 2k + 1$ и неравенството става $30k + 30 \leq 30k + 22$.
- Ако $l = 4$, то $\left\lceil \frac{2n}{5} \right\rceil = 2k + 1$ и неравенството става $30k + 30 \leq 30k + 28$.

Във всички случаи достигнахме до противоречие. Следователно единствената възможност е когато $n = 5k + 2$, един участник е решил 5 задачи, а всички останали са решили по 4 задачи. Да разгледаме пълен граф с 6 върха $A_1, A_2, \dots, A_6$, отговарящи на шестте задачи. На реброто, свързващо задачи i и j да запишем число a_{ij} равно на броя на участниците, решили задачи i и j . От (1) следва, че 14 от тези числа са равни на $2k + 1$, а 15-то число е равно на $2k + 2$. Да положим $t = 2k + 1$ и без ограничение нека $a_{12} = 2k + 2$.

Да изберем задача A_i , която е решена от участника решил 5 задачи и не е A_1 или A_2 . Всеки участник решил заедно с тази задача още 3 задачи прибавя към сумата на числата, записани по ребрата, излизащи от A_i точно 3 единици. Участникът, решил 5 задачи, прибавя към тази сума 4 единици. Следователно $3s + 4 = 5t$, откъдето следва, че $5t \equiv 1 \pmod{3}$.

Сега да изберем задачата A_j , която не е решена от участника, решил 5 задачи. Нека тази задача е решена от p участника.

1. Ако $A_j \neq A_1$ и $A_j \neq A_2$, както по-горе имаме $3p = 5t$. Това е противоречие с $5t \equiv 1 \pmod{3}$.

2. Ако $A_j = A_1$, то $3p = 5t + 1$, което противоречи на $5t \equiv 1 \pmod{3}$.

Получените противоречия показват, че има поне двама участника решили по 5 задачи.