

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ 2012-2015

■ Петър Бойваленков, Емил Колев
Олег Мушкарров, Николай Николов

*Съюз на Математиците в България
УНИМАТ СМБ
Институт по Математика и Информатика на БАН
Американска Фондация за България*

ISBN: 9789548880459



9 789548 880459

Цена: 12.00 лв.



БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ 2012-2015

Петър Бойваленков Емил Колев
Олег Мушкаров Николай Николов

Институт по Математика и Информатика на БАН
Съюз на Математиците в България
Американска Фондация за България
УНИМАТ СМБ

Български математически състезания 2012 – 2015

Настоящата книга обхваща най-важните български състезания по математика в периода от есента на 2011 до лятото на 2015 година. Включени са условията и решенията на задачите от темите на Есенния математически турнир (8-12 клас), Зимните математически турнири (9-12 клас), Пролетните математически състезания (9-12 клас), Областните и националните кръгове на олимпиадата по математика (9-12 клас), контролните за определяне на отборите за Балканските и Международните олимпиади, както и условията и решенията на задачите от Балканските и Международните олимпиади по математика. Авторите се надяват задачите от тази книга да послужат добре на учениците с изявени интереси в областта на математиката и на специалистите, които се занимават с подготовка на олимпийци.

Петър Бойваленков, Емил Колев, Олег Мушкаров, Николай Николов

Copyright © УНИМАТ СМБ

София 1113, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8

тел. (02)979-28-06, e-mail: peter@moi.math.bas.bg

София, юли 2015 г.

ISBN: 978-954-8880-45-9

СЪДЪРЖАНИЕ

	Условия	Решения
2011-12		
Есенен математически турнир	3	67
Зимен математически турнир	6	75
Пролетни математически състезания	8	82
61. НОМ, Областен кръг	10	89
61. НОМ, Национален кръг	12	95
Контролни за определяне на отбора за 29. БОМ	13	99
Контролни за определяне на отбора за 53. МОМ	14	104
29. Балканска олимпиада по математика	15	106
53. Международна олимпиада по математика	16	107
2012-13		
Есенен математически турнир	18	112
Зимен математически турнир	21	120
Пролетни математически състезания	23	129
62. НОМ, Областен кръг	26	138
62. НОМ, Национален кръг	28	144
Контролни за определяне на отбора за 30. БОМ	29	149
Контролни за определяне на отбора за 54. МОМ	30	153
30. Балканска олимпиада по математика	31	156
54. Международна олимпиада по математика	32	158
2013-14		
Есенен математически турнир	34	163
Зимен математически турнир	37	172
Пролетни математически състезания	40	178
63. НОМ, Областен кръг	42	185
63. НОМ, Национален кръг	44	191
Контролни за определяне на отбора за 31. БОМ	45	196
Контролни за определяне на отбора за 55. МОМ	47	200
31. Балканска олимпиада по математика	48	204
55. Международна олимпиада по математика	49	206
2014-15		
Есенен математически турнир	50	212
Зимен математически турнир	53	220
Пролетни математически състезания	55	226
64. НОМ, Областен кръг	57	232
64. НОМ, Национален кръг	59	238
Контролни за определяне на отбора за 32. БОМ	60	243
Контролни за определяне на отбора за 56. МОМ	61	247
32. Балканска олимпиада по математика	63	252
56. Международна олимпиада по математика	64	254

Български математически състезания 2011–12

Есенен Математически Турнир
4–6 ноември 2011, София

Задача 8.1. (*Иван Тонов*) Да се намерят стойностите на параметъра p , при които уравненията $p^2x + p = 25x - 5$ и $|2x + 3| = |5 - 2x|$ са еквивалентни.

Задача 8.2. (*Ивайло Кортезов*) В остроъгълен $\triangle ABC$ с $\angle ACB = 45^\circ$ симетралите на страните AB и AC се пресичат в точка O . Височината AH пресича отсечката BO в точка L . Правата AO пресича страната BC в точка K . Ако $AL = 2CK$, намерете $\angle ABC$.

Задача 8.3. (*Иван Тонов*) Да се намерят всички прости числа p , такива че числото $p(p+1)(p+3)$ се представя като произведение на две последователни естествени числа.

Задача 8.4. (*Ивайло Кортезов*) Някои от полетата на квадратна мрежа $n \times n$ ($n \geq 2$) са минирани, като във всеки квадрат 2×2 има поне едно минирано поле. Във всяко поле е записан броят на минираните полета сред полетата, имащи общи точки с него (това са самото поле и неговите съседни по страна или връх). Нека M е най-голямото от записаните числа. Намерете най-малката възможна стойност на M (отговорът може да зависи от n).

Задача 9.1. (*Петър Бойваленков*) Да се намерят всички функции $f(x) = ax + b$, за които $f(f(x)) = (|a| + |b| + 2)x + b^2 - 6b$.

Задача 9.2. (*Кероне Чакърян*) В окръжност k е вписан остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H . Окръжността, описана около $\triangle ACH$, има радиус 1 и центърът ѝ лежи върху k . Да се намерят:

- а) големината на $\angle ABC$;
- б) дължината на отсечката BH .

Задача 9.3. (*Петър Бойваленков*) В клетките на таблица 100×100 са записани $100^2 - 1$ плюса и един минус (по един знак в клетка). Разрешено е за един ход да се сменят всички знаци в даден ред или стълб. Възможно ли е след краен брой ходове да се достигне до таблица, в която има точно 2011 минуса?

Задача 9.4. (*Кероне Чакърян*) Нека a е фиксирано естествено число. Да се докаже, че за всяко просто число p :

а) съществуват безбройно много естествени числа n , за които $a^n + n$ се дели на p ;

б) съществуват безбройно много естествени числа n , за които $a^n + n$ се дели на p^2 .

Задача 10.1. (*Иван Ланджес*) Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението

$$\sqrt{8x^2 + (8a - 6)x + 2(2a^2 - 3a + 1)} = 3x + a - 1$$

има два различни положителни корена.

Задача 10.2. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$ с $\angle ACB \neq 90^\circ$. Правите през върха C , перпендикулярни на страните AC и BC , пресичат съответно правите през върховете A и B , перпендикулярни на страните BC и AC , в точки P и Q . Ако M е средата на страната AB , то да се докаже, че правите PQ и CM са перпендикулярни.

Задача 10.3. (*Александър Иванов*) Дадено е просто число p . Да се докаже, че числото

$$(2^{p-2} - 1)^p(2^p - 1) - 2^{p(p-2)} + 1$$

се дели на p^3 .

Задача 10.4. (*Иван Ланджес*) Някои от градовете в една държава са свързани с пътища. Два града са съседни, ако са свързани с път, неминаващ през други градове. От всеки град излиза поне един път. Да се докаже, че е възможно да бъдат построени болници в $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ града така, че всеки град да има болница или да е съседен на град с болница. ($C[x]$ означаваме най-голямото цяло число не надминаващо x .)

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Дадена е безкрайна аритметична прогресия с първи член a_1 и разлика d , всички членове на която са положителни и числата a_1 , a_{2011} и $S_{2010} + S_{2011}$ са последователни членове на геометрична прогресия. (S_k означаваме сбора на първите k члена на аритметичната прогресия.)

а) Да се намери частното $\frac{a_1}{d}$.

б) Да се докаже, че за произволно естествено число n числата a_1 , a_n и $S_{n-1} + S_n$ са последователни членове на геометрична прогресия.

Задача 11.2. (*Александър Иванов*) Върху диагонала BD на трапец $ABCD$, $AB \parallel CD$, е избрана произволна точка M . Да се докаже, че разстоянието между центровете на описаните окръжности на $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$ не зависи от избора на точката M .

Задача 11.3. Виж зад. 10.3

Задача 11.4. (*Александър Иванов, Емил Колев*) Две подмножества X и Y на множеството $A = \{1, 2, \dots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$ се наричат *съседни*, ако $|X \cap Y| = 1$ и $X \cup Y = A$. Да се докаже, че могат да бъдат избрани най-много

$$2^{2n-1} + \frac{\binom{2n}{n}}{2} - 1$$

подмножества на A , между които няма съседни.

Задача 12.1. (*Николай Николов*) Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $\sin(\sin x) = \cos(a \cos x)$ има решение.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Права през центъра на вписаната в триъгълник окръжност го разделя на две части така, че отношението на техните лица е равно на отношението на периметрите им. Да се докаже, че това отношение е равно на 1.

Задача 12.3. (*Емил Колев*) Дадени са естествени числа M и $n \geq 3$. Двама играчи A и B (като първи е A) последователно заменят числото M с едно от числата $M-1$, $M-2$ или $M-n$. Този играч, който пръв получи отрицателно число, губи играта.

а) Да се намери най-голямото естествено число k , за което съществува n и k последователни стойности на M , за всяка от които печели A .

б) Да се намери броят на числата $3 \leq n \leq 2011$, за които се достига стойността от а).

Задача 12.4. (*Николай Николов*) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такива, че $6f(x) \geq f^4(x+1) + f^2(x-1) + 4$ за произволно x .

**Математически турнир “Атанас Радев”
27-29 януари 2012, Ямбол**

Задача 9.1. (*Петър Бойваленов*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $x^2 + (a - 2)(a - 3)x + a^3 - 4a + 9 = 0$ има два различни реални корена x_1 и x_2 , такива че $a(x_1 + x_2) = \frac{18}{x_1} + \frac{18}{x_2}$.

Задача 9.2. (*Кероне Чакърян*) В остроъгълния $\triangle ABC$ отсечките AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) са височини, а точката M е средата на страната AB . Триъгълникът A_1B_1M е правоъгълен и лицето му е равно на 2. Да се намерят:

- а) дължината на страната AB и големината на $\angle ACB$;
- б) дължината на радиуса на окръжността, описана около $\triangle A_1B_1C$.

Задача 9.3. (*Петър Бойваленов, Кероне Чакърян*) Да се намерят всички естествени числа n , за които $8f(n^2) = 27f(n)$, където с $f(n)$ е означен броят на всички различни естествени делители на n .

Задача 9.4. (*Иван Ланджеев*) Дадени са произволни реални числа $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$. Да се докаже, че тези числа могат да се разделят на две множества A и B от по n числа, така че разликата на сумите $S(A)$ и $S(B)$ на числата в множествата да удовлетворява неравенството

$$|S(A) - S(B)| \leq \max_{1 \leq i < 2n} |x_{i+1} - x_i|.$$

Задача 10.1. (*Стоян Боев*) Да се реши неравенството $\sqrt{3 - 2^x} \leq 3 - 4^x$.

Задача 10.2. (*Иван Ланджеев*) Даден е квадратен тричлен $f(x) = x^2 + 2x + b$, където b е реален параметър. Да се намерят всички стойности на b , за които уравнението $f(f(x)) = 0$ има точно три различни реални корена.

Задача 10.3. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и медицентър G . Ако G лежи на окръжността с диаметър CH , то:

- а) да се докаже, че точките A, B, G и H лежат на една окръжност;
- б) да се намери най-голямата възможна стойност на $\angle ACB$.

Задача 10.4. Виж зад. 9.4.

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Да се намерят всички цели стойности на реалния параметър a , за които съществува ненулево цяло число, което е решение на уравнението $a4^x + (a - 1)9^x = (2a - 1)6^x$.

Задача 11.2. (*Александър Иванов*) Даден е трапец $ABCD$, $AB \parallel CD$, за който $AD = 6$, $DC = 3$ и $BC = 12$. Ъглополовящата на $\angle ABC$ пресича страната AD в точка M , като $\frac{AM}{MD} = \frac{5}{3}$.

а) Да се докаже, че в $ABCD$ може да се впише окръжност.

б) Да се намери дължината на отсечката OM , където O е центърът на вписаната в $ABCD$ окръжност.

Задача 11.3. (*Емил Колев*) В държава има 2012 града. Между някои от градовете са прекарани пътища, като от всеки град може да се стигне до всеки друг. Известно е, че ако два града са свързани с път, то общият брой пътища, излизащи от тези два града е нечетно число. Колко най-много са прекараните пътища?

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) Нека a , m и n са естествени числа, като a е четно и $m < n$. Да се докаже, че едно от числата $a^m + 1$, $a^{m+1} + 1$, $a^{m+2} + 1$, $\dots$, $a^n + 1$ е взаимно просто с всяко от останалите числа.

Задача 12.1. (*Николай Николов, Олег Мушкарров*) Да се намерят всички естествени числа n , за които уравнението $\log_n(\sin \pi x) = \sin^2(\log_n x^\pi)$ има решение в реални числа.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Да се намерят всички реални числа c такива, че редицата, дефинирана чрез равенствата $a_0 = 0$ и $a_{n+1} = a_n^2 + c$ при $n \geq 0$, е ограничена.

Задача 12.3. (*Николай Николов, Олег Мушкарров*) Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $AB = 2$, $AD = 3$ и $\angle BAD = \angle BCD$. Да се намерят дължините на страните BC и CD , ако е известно, че те са естествени числа.

Задача 12.4. Виж зад. 11.4.

Пролетни математически състезания
30 март – 1 април 2012, Русе

Задача 9.1. (*Петър Бойваленов*) Даден е равностранен $\triangle ABC$. Точка D е вътрешна за страната BC . Външно за $\triangle ABC$ са построени равностранните триъгълници BDE и CDF . Правите AE и AF пресичат BC съответно в точки M и N .

- а) Да се намери $\frac{DM}{MB} + \frac{CN}{NB}$.
б) Ако $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{3}$, да се намери $\frac{MN}{BC}$.

Задача 9.2. (*Керопе Чакърян*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които системата уравнения

$$\begin{cases} x^3 = ax + y \\ y^3 = ay + x \end{cases}$$

има единствено реално решение.

Задача 9.3. (*Керопе Чакърян*) Да се докаже, че съществуват безбройно много съставни естествени числа n , за които числото $n! - 1$ се дели на поне две различни прости числа.

Задача 9.4. (*Николай Белухов*) Нека $n \geq 3$ е нечетно естествено число. Шахматна дъска $n \times n$ е оцветена по обичайния начин (т.е. долното ляво поле е черно). Разрешено е за един ход да се избере произволен правоъгълник от клетки на дъската и да се променят цветовете на всички клетки от този правоъгълник. Да се намери минималният брой ходове, за които дъската може да стане:

- а) бяла; б) черна.

Задача 10.1. (*Иван Ланджеев*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър $a > 0$, за които уравнението $a^{|x+1|} - |a^{x+1} - 1| = 1$ има точно един корен.

Задача 10.2. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$ с $\angle ACB = 90^\circ$, в който външно-вписаната окръжност към страната AB допира AB в точка N . Ако $\angle BNC = 45^\circ$, то да се намери $\angle BAC$.

Задача 10.3. (*Иван Ланджеев*) Дадено е нечетното число n . Да се докаже, че числата $0, 1, \dots, n^2 - 1$ могат да бъдат подредени в таблица с n реда и n стълба така, че всяко частно и всеки остатък, получени при делене на тези числа на n да се среща точно веднъж в ред и стълб.

Задача 10.4. (*Стоян Боев*) Да се намери най-малкото естествено число M , за което числото 2012 може да се представи като сума от кубовете на M цели числа.

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Да се намерят всички тройки (a, b, c) от различни реални числа от интервала $(0, 2\pi)$ за които:

(1) Числата a, b, c (в този ред) образуват аритметична прогресия.

(2) Числата $\sin a, \sin b, \sin c, \sin \left(\frac{a+b+c}{2} \right)$ (в този ред) образуват аритметична прогресия.

Задача 11.2. (*Емил Колев, Александър Иванов*) Върху страните на $\triangle ABC$ са избрани точки $P \in BC$, $Q \in AC$ и $R \in AB$ така, че $PQ \perp AC$ и $PR \perp AB$. Да се намери $\angle BAC$, ако $S_{PCQ} = S_{PBR} = S_{PQR}$.

Задача 11.3. (*Емил Колев, Александър Иванов*) Дадено е множеството $A = \{3, 5, 7, 9\}$. Да се намери броят на крайните множества B от естествени числа такива, че за множествата $X = \{2a + b | a \in A, b \in B\}$ и $Y = \{a + 2b | a \in A, b \in B\}$ е изпълнено следното: за всеки елемент на X (съответно Y) съществува елемент на Y (съответно X) така, че разликата на двата елемента е 1.

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) Нека p е просто число, а $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ са различни естествени числа от интервала $[1, p^2]$, чиято сума се дели на p . Да се докаже, че съществуват естествени числа $b_1, b_2, \dots, b_{2p-1}$, нито едно от които не се дели на p и такива, че:

(1) Записът на всяко едно от тях в p -ична бройна система се състои само от цифрите 0 и 1.

(2) Сумата $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{2p-1}b_{2p-1}$ се дели на p^{2012} .

Задача 12.1. (*Николай Николов*) Точка M върху страната AB на равностраничен $\triangle ABC$ е такава, че отношението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ е равно на $\frac{CM}{BM} - 1$. Да се намери това отношение.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Да се докаже, че уравнението $\lg(\sin x) = \sin(\lg x)$ има безбройно много решения в реални числа.

Задача 12.3. (*Николай Николов*) В няколко кутии са разпределени a бели и b черни топки ($a, b \geq 1$). Колко най-много може да бъде вероятността произволно избрана топка от някоя от кутиите да е бяла? (Броят на кутиите не е фиксиран.)

Задача 12.4. (*Николай Николов, Олег Мушкаргов*) Съществува ли остроъгълен $\triangle ABC$ с радиус на описаната окръжност 1 такъв, че множеството $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C\}$ е обединение на отворени кръгове с радиус, по-голям от 1?

61. Национална олимпиада по математика
Областен кръг, 8–9 април 2012 г.

Задача 9.1. (*Стоян Боев*) Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} = x$ има целочислено решение.

Задача 9.2. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$ и нека външновписаната окръжност към страната BC е с център J и се допира до правата AB в точка E и до правата AC в точка F . Ако BJ и CJ пресичат EF съответно в точките P и Q и $BC = 2PQ$, то да се намери $\angle BAC$.

Задача 9.3. (*Петър Бойваленков*) Нека a е естествено число, а p е просто число. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n , за които числото $a^{p^n} + p^n$ има поне два различни прости делителя.

Задача 9.4. (*Петър Бойваленков*) Дадени са полиномите $f(x) = x^3 + ax + b$ и $g(x) = x^3 + a^2x^2 + b^2$, където a и b са реални параметри. Да се намерят всички стойности на a и b , за които точно едно от числата -2 , -1 и 1 е общ корен за $f(x)$ и $g(x)$.

Задача 9.5. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$ с центрове I_a и I_b на външно-вписаните окръжности към страните BC и AC съответно. Ако M е среда на страната AB и правите MI_a и MI_b пресичат страните BC и AC в точките Q и P съответно, то да се докаже, че правата PQ е успоредна на AB и минава през центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 9.6. (*Иван Ланджеев*) Дадена е компания от n души (n е нечетно естествено число), в която има поне двама, които не се познават, и всички имат един и същ брой познати. Колко най-малко хора трябва да си тръгнат, за да остане група, в която всеки двама се познават.

Задача 10.1 (*Кероне Чакърян*) Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $\sqrt[3]{1+3^x} + \sqrt[3]{1-3^x} = a$ има решение.

Задача 10.2. Виж Задача 9.2.

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 10.4. Виж задача 9.4.

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 10.6. Виж задача 9.6.

Задача 11.1. (*Александър Иванов, Емил Колев*) Да се намерят всички цели стойности на параметъра a , за които уравнението $\sin x + a \sin 2x + \sin 5x = 2a$ има решение.

Задача 11.2. (Александър Иванов, Емил Колев) В остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H , ъглополовящата на $\angle ACB$ пресича HM , където M е среда на AB , в точка T .

а) Да се докаже, че $\frac{HT}{TM} = \frac{2 \cos \gamma}{1 - \cos \gamma}$, където $\gamma = \angle ACB$.

б) Ако P е петата на перпендикуляра от T към BC , да се намери $\angle HPC$.

в) Да се докаже, че H лежи на отсечката с краища петите на перпендикулярите от T към AC и BC .

Задача 11.3. (Александър Иванов, Емил Колев) Разглеждаме ъгли, съставени от едно ъглово квадратче, 2012 хоризонтални съседни и 2012 вертикални съседни квадратчета. Колко най-много ъгли могат да се разположат върху безкрайна шахматна дъска, така че всеки два ъгъла да имат поне едно общо квадратче?

Задача 11.4. (Николай Николов) Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $\lg(\lg(x^3 + ax + 1)) = \lg(\lg(2x^3 + a))$ има точно едно решение.

Задача 11.5. (Александър Иванов, Емил Колев) Да се намерят всички прости числа p и q , за които pq дели $12^{p+q} - 1$ и $p = q + 2$.

Задача 11.6. (Николай Николов) Нека a е реално число и $P(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти така, че $P(x^2 + a) = (P(x))^2$ за всяко реално число x . Да се докаже, че $a = 0$.

Задача 12.1. Вж. задача 11.1.

Задача 12.2. Вж. задача 11.2.

Задача 12.3. (Александър Иванов, Емил Колев) Естествените числа са оцветени в два цвята.

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много двойки от различно едноцветни числа x и y , за които $x + y$ е точен квадрат.

б) Вярно ли е, че винаги съществуват две различни едноцветни числа x и y , чийто сбор е степен на двойката?

Задача 12.4. Вж. задача 11.4.

Задача 12.5. (Николай Николов) а) Да се намери броят на реалните корени на уравнението $x = \cos x$.

б) Нека $a_1, a_2, \dots$ е редица от реални числа, за които $a_{n+1} = \cos a_n$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че редицата е сходяща.

Задача 12.6. Вж. задача 11.6.

61. Национална олимпиада по математика
Национален кръг, 12–13 май 2012, София

Задача 1. (*Петър Бойваленов*) Редицата $a_1, a_2, \dots$ от естествени числа удовлетворява равенството $a_{n+1} = a_n + 2\tau(n)$ за всяко $n \geq 1$, където с $\tau(n)$ е означен броят на различните естествени делители на n . Възможно ли е два последователни члена на тази редица да са точни квадрати?

Задача 2. (*Александър Иванов*) Да се докаже, че естествените числа могат да бъдат оцветени в два цвята така, че едновременно да са изпълнени следните условия:

- (1) За всяко просто число p и всяко естествено число n числата p^n, p^{n+1} и p^{n+2} не са едноцветни.
- (2) Не съществува безкрайна геометрична прогресия от едноцветни числа.

Задача 3. (*Николай Николов*) Дадено е реално число a , различно от 0 и 1. Сашо и Дени играят следната игра. Първи на ход е Сашо и след това те се редуват, като на всеки ход в уравнението

$$\star x^4 + \star x^3 + \star x^2 + \star x + \star = 0$$

заменят звездичка с цяла степен на a . Сашо печели, ако полученото уравнение няма реални корени, а в противен случай печели Дени. Кой от двамата има печеливша стратегия?

Задача 4. (*Емил Колев*) Нека n е четно естествено число, а A е множеството от всички ненулеви редици от 0 и 1 с дължина n . Да се докаже, че елементите на A могат да се разделят на непресичащи се тройки така, че за произволна тройка $(a_1 a_2 \dots a_n, b_1 b_2 \dots b_n, c_1 c_2 \dots c_n)$ броят на единиците измежду a_i, b_i, c_i за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ е четно число.

Задача 5. (*Николай Николов, Олег Мушкаргов*) Нека $Q(x)$ е квадратен тричлен, за който функцията $P(x) = x^2 Q(x)$ е растяща в интервала $(0, \infty)$. Да се докаже, че $P(x) + P(y) + P(z) > 0$ при $x + y + z > 0$ и $xyz > 0$.

Задача 6. (*Стоян Боев, Александър Иванов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ и произволна вътрешна точка X , различна от центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност k . Правите AX, BX и CX пресичат за втори път k съответно в точките A_1, B_1 и C_1 . Нека A_2, B_2 и C_2 са симетричните точки на A_1, B_1 и C_1 относно средите на BC, AC и AB съответно. Да се докаже, че описаната около $\triangle A_2 B_2 C_2$ окръжност минава през постоянна точка, независеща от избора на X .

Контролно за определяне на отбора за БОМ 2012
2–3 април 2012, София (ИМИ-БАН)

Задача 1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Точката E е симетричната на B спрямо пресечната точка на AD и BC , точката F е симетричната на B спрямо средата на CD и точката G е симетрична на A спрямо средата на CE . Да се докаже, че точките E , F , G и C лежат на една окръжност.

Задача 2. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{2012}$ са реални числа и $x_{12} = 1$. Да се намери най-малката възможна стойност на израза $\sum_{i,j=1}^{2012} \min(i, j)x_i x_j$.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са естествени числа и $a > 1$ е естествено число, което се дели на $a_1 a_2 \dots a_n$. Да се докаже, че $a^{n+1} + a - 1$ не се дели на $(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \dots (a + a_n - 1)$.

Задача 4. Да се намери максималният брой царе, които могат да се разположат върху шахматна дъска 12×12 така, че всеки от царете да атакува точно един друг цар.

Задача 5. Да се намерят всички стойности на функцията $f(x, y) = 7x^2 + 5y^3$, $x, y \in \mathbb{Z}$, които принадлежат на интервала $[2000, 2012]$.

Задача 6. Даден е четириъгълник $ABCD$. Окръжност k се допира до AD в точката D и до BC в точката C . Пресечните точки на страната AB и k са означени с K и L , като $DL = CL$. Да се докаже, че пресечната точка на AC и BD лежи на правата през K и средата на страната CD .

Задача 7. Да се докаже, че ако $x < 0$, то $2^x + 2^{1/x} \leq 1$.

Задача 8. Нека S е множество от 100-цифрени естествени числа. Едно число от S се нарича *лошо*, ако не се дели на сумата на някои две (не непременно различни) числа от S . Да се определи максималната възможна мощност на S , ако е известно, че S съдържа не повече от 10 лоши числа.

Контролно за определяне на отбора за МОМ 2012
16–17 май 2012, София (ИМИ-БАН)

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$ с център на описаната окръжност O и ъглополовяща AD , $D \in BC$. Правата ℓ минава през O и е успоредна на AD . Да се докаже, че ℓ минава през ортоцентъра на $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато $\triangle ABC$ е равнобедрен с основа BC или $\angle BAC = 120^\circ$.

Задача 2. Нека $n > 1$ е естествено число, M е произведението на всички естествени делители на n и X е най-голямото естествено число, за което X^2 дели M . Да се докаже, че броят на начините, по които от делителите на n могат да се премахнат три така, че произведението на останалите делители да е равно на X^2 , е число от вида $\frac{3^s - 1}{2}$, където s е цяло неотрицателно число.

Задача 3. За полином $f(x)$ с реални коефициенти от степен 2012 и положителен старши коефициент разглеждаме фигурата, съставена от всички точки с координати (x, y) , за които $y \geq f(x)$. Възможно ли е равнината на бъде покрита с краен брой такива фигури?

Задача 4. Даден е полином $f(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdots (x + d_9)$, където $d_1, d_2, \dots, d_9$ са различни цели числа. Да се докаже, че съществува естествено число N такова, че за всяко естествено число $x \geq N$ числото $f(x)$ има прост делител, по-голям от 22.

Задача 5. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност, която се допира до страните AB , BC и AC съответно в точките C_1 , A_1 и B_1 . Ортогоналните проекции на ортоцентъра на $\triangle A_1B_1C_1$ върху правите AA_1 и BC са съответно P и Q . Да се докаже, че правата PQ разполовява отсечката B_1C_1 .

Задача 6. Да се докаже, че съществуват естествено число n и n^9 естествени числа, по-малки от n^{10} , някои три от които не образуват аритметична прогресия.

29. Балканска олимпиада по математика
26 април – 2 май 2012, Турция (Анталия)

Задача 1. (*Румъния*) Нека A , B и C са точки върху окръжност Γ с център O , като $\angle ABC > 90^\circ$. Нека D е пресечната точка на правата AB с правата през C , перпендикулярна на AC . Нека ℓ е правата през D , перпендикулярна на AO . Нека E е пресечната точка на ℓ и правата AC , а F е пресечната точка на Γ с ℓ , която лежи между D и E . Да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците BFE и CFD , се допират в точката F .

Задача 2. (*Саудитска Арабия*) Да се докаже, че

$$\sum_{cyc} (x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx)$$

за произволни реални положителни числа x , y и z .

Задача 3. (*Великобритания*) Нека n е естествено число и $P_n = \{2^n, 2^{n-1} \cdot 3, 2^{n-2} \cdot 3^2, \dots, 3^n\}$. За произволно подмножество X на P_n означаваме с S_X сумата на всички елементи на X с уговорката, че $S_\emptyset = 0$, където $\emptyset$ е празното множество. Нека y е реално число, за което $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Да се докаже, че съществува множество Y на P_n , за което $0 \leq y - S_Y < 2^n$.

Задача 4. (*Саудитска Арабия*) Да се намерят всички функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за които са в сила следните две условия:

- (i) $f(n!) = f(n)!$ за всяко естествено число n ;
- (ii) $m - n$ дели $f(m) - f(n)$ за произволни различни естествени числа m и n .

53. Международна олимпиада по математика
4–16 юли 2012, Аржентина (Мар дел Плата)

Задача 1. (Гърция) За даден $\triangle ABC$ външновписаната окръжност срещу върха A има център J . Тази окръжност се допира до страната BC в M и до правите AB и AC съответно в K и L . Правите LM и BJ се пресичат в F , а правите KM и CJ се пресичат в G . Нека S е пресечната точка на правите AF и BC , а T е пресечната точка на правите AG и BC . Да се докаже, че точката M е средата на отсечката ST .

Задача 2. (Австралия) Нека $n \geq 3$ е цяло число, а $a_2, a_3, \dots, a_n$ са такива положителни числа, че $a_2 a_3 \dots a_n = 1$. Да се докаже, че

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Задача 3. (Канада) *Отгатване* е игра между двама играчи A и B . Правилата на играта зависят от две естествени числа k и n , които и двамата знаят.

Отначало A избира цели числа x и N , за които $1 \leq x \leq N$, като пази в тайна x и казва N на B . Играчът B се опитва да получи информация за x , задавайки на A въпроси по следния начин: за всеки въпрос B избира множество S от естествени числа и пита A дали $x \in S$ (възможно е множеството да е същото както в някой предишен въпрос). Играчът B може да задава колкото иска въпроси. Играчът A отговаря на въпросите на B с *да* или *не*, но може да лъже колкото пъти иска. Единственото условие е от $k+1$ последователни отговора поне един да е верен.

След като B зададе колкото иска въпроси, той трябва да определи множество X от най-много n естествени числа. Ако $x \in X$, то B печели, а иначе губи. Да се докаже, че:

1. ако $n \geq 2^k$, то B може да си гарантира победа.
2. за всяко достатъчно голямо k съществува $n \geq (1.99)^k$ така, че B не може да си гарантира победа.

Задача 4. (Южна Африка) Да се намерят всички функции $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ такива, че за произволни цели числа a, b, c , за които $a + b + c = 0$, е в сила равенството

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

Задача 5. (Чехия) Нека ABC е триъгълник, за който $\angle BCA = 90^\circ$, а D е петата на височината от C . Нека X е точка от вътрешността на отсечката CD . Точката K от отсечката AX е такава, че $BK = BC$, а точката L от отсечката BX е такава, че $AL = AC$. Нека M е пресечната точка на AL и BK . Да се докаже, че $MK = ML$.

Задача 6. (Сърбия) Да се намерят всички естествени числа n , за които съществуват неотрицателни цели числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ така, че

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \dots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \dots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$

Български математически състезания 2012–2013 г.

Есенен математически турнир 9 – 11 ноември 2012, София

Задача 8.1. (*Иван Тонов*) Да се намерят стойностите на параметъра a , при които за всяко реално x е в сила неравенството $x^3 + a^3 \leq (x + a)^3 - 3a(x - 1)^2$.

Задача 8.2. (*Ивайло Кортезов*) Върху страните $AB = 1$, BC и CA на равностранен триъгълник ABC са избрани съответно точките M , N и Q така, че отсечките AN , BQ и CM разделят $\triangle ABC$ на четири триъгълника и три четириъгълника. Оцветяваме всеки триъгълник в синьо или жълто, така че триъгълниците с общ връх да са разноцветни. Ако синята и жълтата част имат равни лица, да се пресметне $AM + BN + CQ$.

Задача 8.3. (*Иван Тонов*) Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува кратно на 41, което е от вида $a \underbrace{111\dots 1}_n b$.

Задача 8.4. (*Ивайло Кортезов*) Едно естествено число n ще наричаме обикновено, ако броят на различните начини за представяне на n като сбор на две или повече поредни естествени числа е нечетен. Колко са обикновените числа, по-малки от 2012?

Задача 9.1. (*Петър Бойваленков*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $|3x - a^2 + 2a - 5| = |2x - 2a^2 + a + 7|$ има два различни реални корена, които са равноотдалечени от числото 6.

Задача 9.2. (*Емил Колев*) Даден е $\triangle ABC$, за който $AC > BC$. Окръжност с център върху ъглополовящата на ъгъл ACB пресича правата AC в точки A и P , а правата BC – в точки B и Q . Правите PQ и AB се пресичат в точка L . Да се докаже, че точките C , L и M лежат на една права.

Задача 9.3. (*Николай Белухов*) Петър и Николай играят следната игра: в началото Петър си намисля едно от полетата на шахматна дъска 100×100 . След това Николай може да посочи произволно поле от дъската и да попита Петър колко минимум хода са необходими на шахматния цар да стигне от посоченото поле до намисленото. След като получи отговора, Николай може отново да зададе въпрос или да отгатне полето, намислено от Петър, и т.н. Петър отговаря на всички въпроси коректно. Колко въпроса най-малко са необходими на Николай, за да отгатне намисленото поле?

Задача 9.4. (*Керопе Чакърян*) Да се докаже, че съществуват безбройно много прости числа p от вида $4k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, такива, че p дели $2^q - 1$ за някое просто число q .

Задача 10.1. (*Стоян Боев*) Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$, $AC > BC$) с височина CH . Окръжността k с диаметър CH пресича катетите AC и BC в точките P и Q съответно. Ако PQ разполовява CG , където G е медицентърът на $\triangle ABC$, то:

- а) да се докаже, че G лежи на окръжността k ;
- б) да се намери отношението $AN : BH$.

Задача 10.2. (*Иван Ланджеев*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които съществува точно едно реално число, което е корен на уравнението $|ax - 1| = ax^2 - (2a - 1)x + 1$.

Задача 10.3. (*Иван Ланджеев*) Нека $N = 2012^{2013}$. Да се намери максималният брой елементи на множество A , изпълняващо условията:

- (1) елементите на A са естествени числа, ненадминаващи N ;
- (2) за всеки два различни елемента a и b от A , N дели ab .

Задача 10.4. (*Николай Белухов*) В равнината са разположени два еднакви, противоположно ориентирани равностранни триъгълника ABC и $A_1B_1C_1$ със страна единица. Каква е най-малката възможна дължина на най-дългата измежду отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 ?

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Дадена е безкрайна геометрична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots$, за която $a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0$ и $0 < a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \leq 2012$. Да се определи колко най-много могат да бъдат членовете на редицата, които са естествени числа.

Задача 11.2. (*Александър Иванов*) Даден е $\triangle ABC$, за който $AC = 3$, $BC = 4$ и $\angle ACB = 60^\circ$. Нека CL , $L \in AB$, е ъглополовящата на $\angle ACB$ и O е точка от отсечката CL . Ако M е петата на перпендикуляра от O към BC и $AM \perp BO$, да се намери дължината на отсечката CO .

Задача 11.3. (*Емил Колев*) Нека A е множеството от всички редици с дължина 2012, съставени от 0, 1 и 2. Нека $T \subset A$ е множество с минимален брой елементи, имащо следното свойство: за всяка редица $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$ от A съществува редица $b_1, b_2, \dots, b_{2012}$ от T , за която $a_i \neq b_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, 2012$. Да се докаже, че $\frac{3^{2011}}{2^{2010}} \leq |T| \leq 3^{1006}$.

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) Да се намерят всички полиноми $f(x)$ с цели коефициенти, които притежават следното свойство: съществува константа $c > 0$, такава че за всяко цяло число $n > c$, числото $f(n)$ е различно от нула и дели $n!$.

Задача 12.1. (*Николай Николов*) Нека $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ са такива редици от положителни числа, че

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{b_n} \right) \quad \text{и} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} \left(b_n + \frac{1}{a_n} \right) \quad \text{за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Да се докаже, че редиците са сходящи.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Точка D върху страната AB на $\triangle ABC$ и точка E върху отсечката CD са такива, че $AD = 2BD$, $\angle AED = \angle ACB$ и $2\angle BED = \angle ABC$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Задача 12.3. (*Николай Николов*) Да се докаже, че ако a , b и c са реални числа, за които $abc = 1$, то

$$\frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1.$$

Задача 12.4. Виж Задача 11.4.

Зимен математически турнир

25–27 януари 2013, Пловдив

Задача 9.1. (*Петър Бойваленов, Ангел Гушев*) Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, $AC = BC$, с ъглополовяща AL , $L \in BC$. Окръжността с диаметър AL пресича AC и BL съответно в точки D и E , $D \neq A$, $E \neq L$. Да се докаже, че D е средата на AC тогава и само тогава, когато E е среда на BL .

Задача 9.2. (*Петър Бойваленов*) Да се намерят всички цели стойности на параметрите p и q , за които уравнението $x^2 + px + q = 0$ има два реални корена x_1 и x_2 , такива че

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Задача 9.3. (*Петър Бойваленов*) Да се намерят всички естествени числа x , y и z , за които е изпълнено равенството $\frac{x^2 + y^2}{z!} = \frac{1}{x!} + \frac{1}{y!}$ (с $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n).

Задача 9.4. (*Николай Белухов*) В един турнир по тенис всеки играч изиграл по една игра с всеки друг (в тениса никоя игра не завършва наравно). Оказало се, че най-големият брой играчи, които могат да седнат около кръгла маса така, че всеки да е победил стоящия отдясно, е четирима. Да се докаже, че броят на начините, по които всички играчи могат да се строят в редица така, че всеки да е победил стоящия отдясно, е кратен на пет.

Задача 10.1. (*Стоян Боев*) Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението $|x^2 + x - 2| = ax + 2$ има точно три реални решения.

Задача 10.2. (*Стоян Боев*) Даден е ромб $ABCD$ с $\angle BAD = \alpha < 90^\circ$. Нека M е средата на страната CD и $BP \perp AM$ ($P \in AM$). Да се намери $\angle BPD$ и отношението $BP : PD$.

Задача 10.3. (*Иван Ланджеев*) Нека N е броят на двойките цели числа (x, y) , които са решения на неравенството $\sqrt{x - ay^2} > \sqrt{y - ax^2}$. Да се намерят всички положителни числа a , за които:

- а) $N = 9$; б) $N = 10$.

Задача 10.4. (*Иван Ланджеев*) В държава с n , $n \geq 4$, града се поддържат полети между повече от $3(n - 1)/2$ двойки градове. Маршрут наричаме редица от градове $v_1, \dots, v_k$, такава, че съществува полет от v_i до v_{i+1} за всяко $i = 1, \dots, k - 1$. Два маршрута наричаме независими, ако те нямат общ

град с изключение на крайните градове. Да се докаже, че съществуват два града x и y , между които съществуват три независими маршрута.

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Да се намерят всички стойности на $x \in [0, 90^\circ]$, за които числата $\sin x$, $\cos x$, 1 и $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ образуват (в някакъв ред) геометрична прогресия.

Задача 11.2. (*Александър Иванов*) Вписаната в правоъгълен $\triangle ABC$ окръжност се допира до хипотенузата AB в точка C_1 . Точките $P \in CC_1$ и $Q \in AC$ са такива, че PQ е успоредна на BC и в четириъгълника AC_1PQ може да се впише окръжност. Да се докаже, че $CP = O_1O_2$, където O_1 и O_2 са центровете на вписаните окръжности в $\triangle AC_1C$ и $\triangle BC_1C$.

Задача 11.3. (*Александър Иванов*) Намерете най-голямото реално число a със следното свойство: съществуват изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$, всички страни на който са равни на 1 и точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 и F_1 във вътрешността на $ABCDEF$, за които всяка от отсечките AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 и FF_1 има дължина a и никои две от тези отсечки нямат обща точка, която е вътрешна и за двете отсечки.

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) В равнината са дадени $2n$ точки, никои три от които не лежат на една права. Някои от точките са свързани с отсечки така, че за всеки n точки съществува точка, свързана с отсечка с всяка от тях. Да се намери минималният възможен брой прекарани отсечки.

Задача 12.1. (*Олег Мушкаров, Николай Николов*) Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $\left| \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|} \right| = a$ има четири различни реални решения, които образуват аритметична прогресия.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Дължините на страните на неравноностранен триъгълник образуват аритметична прогресия и правата през медицентъра и центъра на вписаната окръжност е перпендикулярна на негова страна. Да се докаже, че триъгълникът е правоъгълен.

Задача 12.3. (*Олег Мушкаров, Николай Николов*) Да се докаже, че ако a и b са реални числа, по-големи от -1 , то

$$\frac{1+a^6}{1+a} \cdot \frac{1+b^6}{1+b} \geq \frac{1+ab}{2} \cdot \frac{1+a^4b^4}{2}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 12.4. (*Николай Николов*) Да се докаже, че всеки полином от трета степен с реални коефициенти може да се представи като сума от кубовете на три неконстантни полинома с реални коефициенти.

Пролетни математически състезания
29–31 март 2013, Ямбол

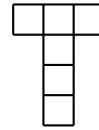
Задача 9.1. (*Динко Раднев*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър m , за които системата

$$\begin{cases} (x + m + 2)^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = 2mx \end{cases}$$

има четири различни решения?

Задача 9.2. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$. Окръжността през върховете B и C , допираща се до AC в точка S и окръжността през върховете A и C , допираща се до BC в точка S се пресичат за втори път в точка D . Да се докаже, че правата CD минава през пресечната точка P на допирателните в A и B към описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 9.3. (*Николай Белухов*) Дадена е шахматна дъска с размери 300×300 . Казваме, че едно нейно покритие с плочки 1×3 е *добро*, ако никои две плочки в покритието не образуват буква Т (вж. фигурата) в коя да е от възможните ѝ ориентации.



Буква Т

Да се намери броят на добрите покрития.

Задача 9.4. (*Петър Бойваленков*) Нека p е нечетно просто число. Съществуват ли естествени числа $a, b_1, b_2, \dots, b_6 \in \{1, 2, \dots, p-2\}$, за които да е изпълнено равенството

$$\binom{p-1}{a} \binom{p-1}{a+1} = \binom{p-1}{b_1}^2 + \binom{p-1}{b_2}^2 + \dots + \binom{p-1}{b_6}^2$$

(с $\binom{n}{k}$ означаваме числото $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$)?

Задача 10.1. (*Стоян Боев*) Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението $4^{x-2} - 2^{x-a} + a = 0$ има точно едно реално решение.

Задача 10.2. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$. Нека I е пресечната точка на ъглополовящите AE и BD , $E \in BC$, $D \in AB$. Ако $S_{ABI} = S_{CDIE}$, то да се намери най-голямата възможна стойност на $\angle ACB$.

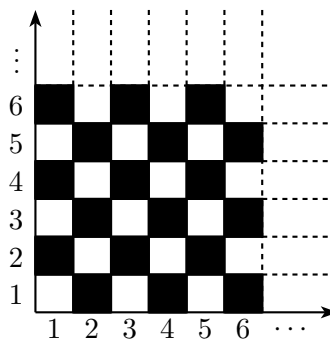
Задача 10.3. (Иван Ланджесев) Дадена е безкрайна таблица, образувана по следните правила:

- (1) в горния ляв ъгъл е записано числото 4;
- (2) числата във всеки ред и стълб са записани в нарастващ ред като разликата между две съседни числа в ред i е $2i + 1$, а в стълб j е $2j + 1$.

На колко места в таблицата се появява числото $N = \frac{2013^{2013} - 1}{2}$?

4	7	10	13	16	...
7	12	17	22	27	...
10	17	24	31	38	...
13	22	31	40	49	...
16	27	38	49	60	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Задача 10.4. (Иван Ланджесев) Дадена е безкрайна шахматна дъска, разположена в първи квадрант, полетата на която са оцветени в бяло и черно, както е показано на фигурата вдясно, а редовете и стълбовете са номерирани с числата $1, 2, 3, \dots$. В началото клетката $(1, 1)$ е поставен пул. На всяка стъпка се избира един от вече поставените на дъската пулове и се заменя с два нови по следното правило: ако на дъската има k пула и избраният пул заема позиция (i, j) , то двата нови пула се поставят в позиции $(i, k + 1)$ и $(k + 1, j)$.



Да се намери броят на достижимите конфигурации, състоящи се от n пула, разположени изцяло върху черни полета.

Задача 11.1. (Емил Колев) Да се намерят всички цели стойности на параметъра a , за които съществува x , за което $\sin^6 x + \cos^6 x = a \sin x \cos x$ и $\sin 2x$ е рационално число.

Задача 11.2. (Ержан Иманмалик) В остроъгълен $\triangle ABC$ са построени височините AA_1 , BB_1 и CC_1 . Да се докаже, че симетричната точка на B_1 относно правата, определена от средите на AA_1 и CC_1 , лежи върху отсечката A_1C_1 .

Задача 11.3. (Александър Иванов) Дадено е множество от 2013 прости числа. Иван избира двойка (p, q) от различни прости числа от даденото множество. Петър иска да намери числата p и q , като за един въпрос казва на Иван двойка (a, b) от естествени числа. Иван съобщава дали числото $ap - bq$ е положително, отрицателно или равно на нула. Колко най-малко въпроса са необходими на Петър за да може със сигурност да знае кои са числата на Иван?

Задача 11.4. (Александър Иванов) Разглеждаме редицата от полиноми $f_1, f_2, f_3, \dots$, за която $f_1(x) = x^3 - 3x$ и $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$ за всяко $n \geq 1$.

Да се намери броят на реалните корени на уравнението:

а) $f_{2013}(x) = 2$; б) $f_{2013}(x) = 3$.

Задача 12.1. (*Николай Николов*) Нека O е пресечната точка на диагоналите AC и BD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Правата през O и центъра на описаната окръжност около $\triangle CDO$ разполовява отсечката AB , а правата през O и центъра на описаната окръжност около $\triangle ABO$ разполовява отсечката CD . Да се докаже, че $AB \parallel CD$.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Четири положителни числа образуват растяща геометрична прогресия. Да се намери нейното частно, ако три от числата са нули на полином от трета степен, а четвъртото – на производната му.

Задача 12.3. (*Николай Николов*) Реалното число a е такова, че графиката на функцията $y = x^2 - a$ пресича квадрата $|x| + |y| = 1$ в шест точки. Да се докаже, че лицето на получения шестоъгълник е по-малко от $17/16$.

Задача 12.4. (*Николай Николов*) Да се намери най-малкото реално число θ такова, че за всяко естествено число $n \geq 2$ съществуват естествени числа a и b със сума n , за които $|a - b\sqrt{2}| < \theta$.

62. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 25 февруари 2013

Задача 9.1. (*Ангел Гушев*) Да се докаже, че ако за дължините на страните на $\triangle ABC$ е в сила равенството $2AC = AB + BC$, то върхът B , центърът на вписаната в триъгълника окръжност и средите на страните AB и BC лежат на една окръжност.

Задача 9.2. (*Динко Раднев*) Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b , за които полиномът $f(x) = x^3 - bx^2 + (3 - a^2)x + 3b$ е такъв, че $f(a - 1) = f(a + 1)$ и при делението му на полинома $x - b$ се получава остатък $-2a$.

Задача 9.3. (*Петър Бойваленков*) Нека p е просто число. Да се намерят всички цели числа x и y , за които $(2x + y)^3 = p^2 x(x + y)^2$.

Задача 9.4. (*Петър Бойваленков*) Нека A е множество от естествени числа със следното свойство: за всеки два елемента $m, n \in A$, $m \neq n$, е в сила неравенството $10|m - n| + 50 \geq mn$. Да се намери максималният възможен брой елементи на A .

Задача 10.1. (*Иван Ланджеев*) Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $x^3 + ax^2 - (1 - a)^2 = 0$ има три различни реални корена x_1, x_2, x_3 , изпълняващи неравенството

$$\frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_3 x_1} + \frac{x_3}{x_1 x_2} > \frac{3}{2}.$$

Задача 10.2. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$ с $\angle ACB > 90^\circ$. Нека CH е височината от върха C ($H \in AB$), а AL е ъглополовящата на $\angle BAC$ ($L \in BC$). Да се намери $\angle ALC$, ако е известно, че $\angle ALC = \angle BHL$.

Задача 10.3. (*Стоян Боев*) Да се намерят всички естествени числа n , за които 2^{n+1} дели $7^{n!} - 3^{n!}$ (с $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n).

Задача 10.4. (*Иван Ланджеев*) Нека $A(n, k)$ е броят на k -орките $(a_1, \dots, a_k)$ от цели числа, за които е изпълнено

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_{k-1} &\leq n, \\ a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k &> n, \\ 1 \leq a_i &\leq n, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

За кое k стойността на $A(12, k)$ е максимална?

Задача 11.1. (Емил Колев) Да се намерят стойностите на реалните параметри p , q и r , ако числата p , $-\frac{q}{2}$ и r образуват аритметична прогресия и уравнението $x^3 + px^2 + qx + r - 1 = 0$ има три корена, които са естествени числа и образуват аритметична прогресия с разлика 2013.

Задача 11.2. (Емил Колев) Даден е $\triangle ABC$, вписан в окръжност k с център O . Допирателната към k в точка C пресича лъча $BA^\rightarrow$ в точка S . Върху лъча $CA^\rightarrow$ след точка A са избрани точки P и Q , за които $AP = PQ$. Да се докаже, че точките P , O , C и S лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато точките Q , B , C и S лежат на една окръжност.

Задача 11.3. (Александър Иванов) Да се намерят всички естествени числа m и n , за които $n = m^{\varphi(n)} - 1$ (за всяко естествено число n с $\varphi(n)$ се означава броя на естествените числа, по-малки или равни на n , които са взаимно прости с n).

Задача 11.4. (Александър Иванов) Нека M е множество от естествени числа, всяко от които има 2013 цифри и не съдържа 0 в десетичния си запис. Две числа от M ще наричаме *съседни*, ако цифрите им съвпадат в поне един разряд. Да се определи максималният брой елементи на M , ако измежду всеки 9 числа от M можем да изберем 3, всеки две от които са *съседни*.

Задача 12.1. (Олег Мушкарров) Да се реши в цели числа уравнението $x^3 = (x - y)(3xy + 1)$.

Задача 12.2. (Олег Мушкарров) Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и A_1 , B_1 и C_1 са центровете на окръжностите, описани съответно около $\triangle BIC$, $\triangle CIA$ и $\triangle AIB$. Да се докаже, че:

- а) правите AA_1 , BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка;
- б) $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{R}{2r}$, където r и R са радиусите на вписаната и описаната окръжност на $\triangle ABC$.

Задача 12.3. (Николай Николов) Числата $1/5$ и $1/5$ се заменят със сумата и произведението им. За новите числа $2/5$ и $1/25$ се прилага същата операция и т.н. Да се докаже, че във всеки момент числата са по-малки от $1/2$.

Задача 12.4. (Николай Николов) Нека P е полином от 2013 степен с реални коефициенти такъв, че за произволни реални числа x , y и z , за които $P(x) + P(y) + P(z) = 0$, следва, че $P(x^3) + P(y^3) + P(z^3) = 3P(x)P(y)P(z)$. Да се докаже, че:

- а) $P(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$;
- б) P е нечетна функция.

62. Национална олимпиада по математика

Национален кръг, 13–14 април 2013, София

Задача 1. (*Петър Бойваленов*) Да се намерят всички прости числа p и q , за които $p^{q+1} + q^{p+1}$ е точен квадрат на естествено число.

Задача 2. (*Николай Николов*) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ограничени в интервала $(0, 1)$ и такива, че

$$x^2 f(x) - y^2 f(y) = (x^2 - y^2) f(x + y) - xy f(x - y)$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 3. (*Николай Белухов*) Всички целочислени точки в равнината са оцветени в три цвята. Да се намери най-малкото реално положително число S със следното свойство: за всяко такова оцветяване съществува триъгълник с лице S , върховете на който са оцветени в един и същи цвят?

Задача 4. (*Николай Николов*) Да се докаже, че ако $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2)$ и $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma \leq 3$, то $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geq 0$.

Задача 5. (*Александър Иванов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с височини AA_1 , BB_1 и CC_1 ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$). Върху продължението на B_1A_1 след A_1 е избрана точка C' така, че $A_1C' = B_1C_1$. Аналогично върху продължението на A_1C_1 след C_1 е избрана точка B' , така че $C_1B' = A_1B_1$ и върху продължението на C_1B_1 след B_1 е избрана точка A' , така че $B_1A' = C_1A_1$. Да означим с A'' , B'' и C'' симетричните точки на A' , B' и C' относно правите BC , CA и AB съответно. Да се докаже, че ако R , R' и R'' са радиусите на описаните окръжности съответно около $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ и $\triangle A''B''C''$, то R , R' и R'' са дължини на страните на триъгълник, чието лице е половината от лицето на $\triangle ABC$.

Задача 6. (*Александър Иванов*) Нека m е естествено число и $p > m$ е просто число. Да се докаже, че броят на естествените числа n , за които

$$m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp - 2np$$

е точен квадрат на естествено число, не зависи от p .

Контролно за определяне на отбора за 30. БОМ
6–7 април 2013, София (ИМИ-БАН)

Задача 1. (*Емил Колев*) Нека A_1 , B_1 и C_1 са петите на височините през върховете A , B и C на остроъгълен $\triangle ABC$. Да се докаже, че точките A , B и центровете на вписаните окръжности в $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle BC_1A_1$ лежат на една окръжност.

Задача 2. (***) Да се намерят всички ненаредени тройки (A, B, C) от непразни множества от цели числа такива, че $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}$, а $A + B$, $B + C$ и $C + A$ са две по две непересичащи се множества ($X + Y = \{x + y | x \in X, y \in Y\}$).

Задача 3. (*Емил Колев*) В граф с 2013 върха измежду всеки 50 върха има два, които не са свързани с ребро. Да се докаже, че съществуват поне 41 върха, всеки от които е от степен най-много 1972.

Задача 4. (***) Съществуват ли естествени числа m и n , за които

$$(m^2 + n)(n^2 + m) = 2(m - n)^3?$$

Задача 5. (***) Нека $p > 3$, $p \equiv 3 \pmod{4}$, е фиксирано просто число. Означаваме с $S_1(p)$ множеството от наредените тройки $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, за които числото $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 1$ се дели на p , и с $S_2(p)$ множеството от наредените тройки $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, за които числото $a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2c^2)$ се дели на p . Да се докаже, че $S_1(p)$ не е подмножество на $S_2(p)$.

Задача 6. (***) В $\triangle ABC$ точките D , E и F съответно от страните BC , CA и AB са такива, че $AF = EF$ и $BF = DF$. Да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle ABC$ лежи на окръжността, описана около $\triangle CDE$.

Задача 7. (*Николай Белухов*) Нека P е полиомино със следните свойства:

- (1) поне един правоъгълник може да бъде покрит с копия на P ;
- (2) за всеки правоъгълник, който може да бъде покрит с копия на P , това покритие е единствено с точност до симетриите, които запазват правоъгълника.

Да се докаже, че P е квадрат.

Задача 8. (***) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива, че $f(-1) \neq 0$ и

$$f(xy + 1) = f(x)f(y) + f(x + y)$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Контролно за определяне на отбора за 54. МОМ
15–16 май 2013, София (ИМИ-БАН)

Задача 1. (*Емил Колев*) Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните BC и AC съответно в точки A_1 и B_1 . Правата B_1A_1 пресича AB в точка X , като A е между X и B . Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$, ако $\angle CXB = 90^\circ$ и $BC^2 = AB^2 + BC \cdot AC$.

Задача 2. (*Петър Бойваленов*) Да се намерят всички естествени числа $n > 1$ със следното свойство: за всеки два делителя a и b на n , $1 < a < b < n$, и някакво просто число p , поне едно от числата ab и $\frac{a+b}{p}$, дели n .

Задача 3. (*Пламен Пенчев*) Нека $n \geq 2$ е естествено число и $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$ са реални числа. Да означим

$$S = \sum_{i=1}^{2n} a_i, \quad A_1 = \sum_{i,j,i < j} a_{2i}a_{2j}, \quad A_2 = \sum_{i,j,i < j} a_{2i-1}a_{2j-1}.$$

Да се докаже неравенството $(n-1)S^2 > 4n(A_1 + A_2)$.

Задача 4. (*Николай Николов*) Да се намери най-малкото естествено число n , за което съществуват естествени числа a , b и c , никое от които не е точен квадрат, и

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 2013^n ?$$

Задача 5. (*Александър Иванов*) Даден е $\triangle ABC$ и точки M , N и P съответно върху страните BC , CA и AB . Триъгълниците CNM , APN и BMP са остроъгълни и нека H_C , H_A и H_B са съответно техните ортоцентрове. Да се докаже, че ако правите AH_A , BH_B и CH_C се пресичат в една точка, то правите MH_A , NH_B и PH_C също се пресичат в една точка.

Задача 6. (*Александър Иванов*) Дадени са естествени числа m , n и r , $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$, и квадратна дъска с размери $(mn+r) \times (mn+r)$. Дъската е покрита с квадрати $n \times n$ със страни, успоредни на страните на дъската, като всяко единично квадратче е покрито поне веднъж. Да се намери минималният възможен брой единични квадратчета, които са покрити повече от един път.

30. Балканска олимпиада по математика

28 юни–3 юли 2013 Кипър (Агрос)

Задача 1. (*България, Александър Иванов*) В $\triangle ABC$ външновписаната окръжност срещу върха A се допира до AB в точка P и до AC в точка Q , а външновписаната окръжност срещу върха B се допира до BA в точка M и до BC в точка N . Нека K е ортогоналната проекция на C върху MN и L е ортогоналната проекция на C върху PQ . Да се докаже, че четириъгълникът $MKLP$ е вписан.

Задача 2. (*Сърбия*) Да се намерят всички естествени числа x, y и z , за които $x^5 + 4^y = 2013^z$.

Задача 3. (*Великобритания*) Нека S е множеството от реалните положителни числа. Да се намерят всички функции $f : S^3 \rightarrow S$, за които за всички реални положителни числа x, y, z и k са изпълнени следните три условия:

- a) $xf(x, y, z) = zf(z, y, x)$;
- b) $f(x, ky, k^2z) = kf(x, y, z)$;
- c) $f(1, k, k+1) = k+1$.

Задача 4. (*Сърбия*) Някои от участниците в математическо състезание са приятели, като приятелството е взаимно, т.е. ако A е приятел на B , то и B е приятел на A . Ще казваме, че n различни участници $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 3$, образуват слабо-приятелски цикъл, ако A_i не е приятел на A_{i+1} за всяко $1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} = A_1$), а всички останали двойки в цикъла са приятели.

Известно е, че е в сила следното: за всеки участник C и за всеки слабо-приятелски цикъл S от участници, който не включва C , множеството $D \subset S$ от участници, които не са приятели на C , има най-много един елемент.

Да се докаже, че участниците в това състезание могат да бъдат разположени в три стаи така, че всеки двама в една и съща стая са приятели.

54. Международна олимпиада по математика 18–28 юли 2013 Колумбия (Санта Марта)

Задача 1. (*Япония*) Да се докаже, че за всяка двойка от естествени числа k и n съществуват k естествени числа $m_1, m_2, \dots, m_k$ (не непременно различни) такива, че

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Задача 2. (*Австралия*) Конфигурация от 4027 точки в равнината се нарича *колумбийска*, ако се състои от 2013 червени точки и 2014 сини точки, като никои три точки от конфигурацията не лежат на една права. Чрез прекарване на прави равнината се разделя на части. Съвкупност от прави се нарича *добра* за колумбийска конфигурация, ако са изпълнени следните две условия:

- (1) никоя права не минава през точка от конфигурацията;
- (2) никоя част не съдържа точки от двата цвята.

Да се намери най-малката възможна стойност на k така, че за всяка колумбийска конфигурация от 4027 точки съществува добра съвкупност от k прави.

Задача 3. (*Русия*) Външноописаната окръжност за $\triangle ABC$ срещу върха A се допира до страната BC в точка A_1 . Точките B_1 върху страната CA и C_1 върху страната AB се дефинират аналогично, като се използват външноописаните окръжности съответно срещу върховете B и C . Известно е, че центърът на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност лежи върху окръжността, описана около $\triangle ABC$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е правоъгълен.

Задача 4. (*Тайланд*) Нека ABC е остроъгълен триъгълник с ортоцентър H и нека W е точка върху страната BC (различна от B и C). Точките M и N са петите на височините съответно от B и C . Нека ω_1 е описаната окръжност около $\triangle BWN$, а X е диаметрално противоположната точка на W относно ω_1 . Аналогично, нека ω_2 е описаната окръжност около $\triangle CWM$, а Y е диаметрално противоположната точка на W относно ω_2 . Да се докаже, че точките X , Y и H лежат на една права.

Задача 5. (*България, Николай Николов*) Нека $\mathbb{Q}^+$ е множеството на положителните рационални числа. Нека $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ е функция, изпълняваща следните три условия:

- (i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}^+$;

(ii) $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}^+$;

(iii) съществува рационално число $a > 1$ такова, че $f(a) = a$.

Задача 6. (*Русия*) Нека $n \geq 3$ е естествено число и $n + 1$ точки върху окръжност да образуват правилен $(n + 1)$ -ъгълник. Разглеждаме всички номерирания на тези точки с числата $0, 1, \dots, n$ такива, че всеки номер се използва точно по един път, а две номерирания се считат за еднакви, ако едното се получава от другото след ротация на окръжността. Едно номериране се нарича *красиво*, ако за всеки четири номера $a < b < c < d$, за които $a + d = b + c$, хордата, съединяваща точките с номера a и d не пресича хордата, съединяваща точките с номера b и c . Нека M е броят на красивите номерирания, а N е броят на наредените двойки (x, y) от естествени числа, за които $x + y \leq n$ и $\text{НОД}(x, y) = 1$. Да се докаже, че $M = N + 1$.

Български математически състезания 2013-14

Есенен Математически Турнир 8–10 ноември 2013, София

Задача 8.1. (*Иван Тонов*) Да се докаже, че ако a, b, c, d са положителни числа, такива че

$$\frac{abc}{a+b+c} = \frac{abd}{a+b+d} = \frac{acd}{a+c+d} = \frac{bcd}{b+c+d},$$

то $a = b = c = d$.

Задача 8.2 (*Ивайло Кортезов*) Отсечката BH е височина за равнобедрения $\triangle ABC$, $AC = BC$. Симетралата на страната BC пресича правата AC в точка D и $DH = HA + AB$. Намерете възможните стойности на $\angle BAC$.

Задача 8.3 (*Иван Тонов*) Да се намерят всички естествени числа n , такива че $11^n + 2^n + 1$ е делител на $11^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Задача 8.4 (*Ивайло Кортезов*) В редица са записани числата от 1 до 9, така че сборът на всяко число на нечетна позиция със съседите (съседа) му е S . Определете всички възможни стойности на S .

Задача 9.1 (*Петър Бойваленков*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравненията $x^2 + ax - 1 = 0$ и $y^2 + (a+1)y - 1 = 0$ имат съответно корени x_1, x_2 и y_1, y_2 , за които е изпълнено равенството

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} = \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1 + y_2}.$$

Задача 9.2 (*Петър Бойваленков*) Да се намери най-малкото естествено число k , за което съществува естествено число $n \geq 100$ такова, че числото $n(n+k)$ е точен квадрат.

Задача 9.3 (*Николай Белухов*) Петър покрил една шахматна дъска с размери 600×600 с правоъгълници с размери 2×3 по такъв начин, че всяко квадратче от дъската да бъде покрито от точно един правоъгълник. След това той разрязал всеки от тези правоъгълници на три по-малки правоъгълника с размери 1×1 , 1×2 и 1×3 по произволен начин и показал полученото покритие

на Николай. Винаги ли ще може Николай по показаното му покритие с по-малки правоъгълници да определи еднозначно какво е било първоначалното покритие с правоъгълници 2×3 ?

Задача 9.4 (*Николай Белухов*) Точката P лежи върху описаната около квадрат $ABCD$ окръжност. Нека P_1 , P_2 , P_3 и P_4 са симетричните точки на P относно правите AB , BC , CD и DA съответно. Да се докаже, че симетричните точки на P относно правите P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 и P_4P_1 лежат на една права, която минава през центъра на $ABCD$.

Задача 10.1 (*Стоян Боев*) Да се реши уравнението $x^2 + 3\sqrt{x+3} = 7$.

Задача 10.2 (*Стоян Боев*) Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с прав ъгъл при върха C . Нека M е средата на BC , а D и E са петите на перпендикулярите от върха C към AB и AM съответно. Ако $BE = 2DE$, то да се намери $\angle ABC$.

Задача 10.3 (*Иван Ланджеев*) Да се намерят всички естествени числа n , за които $\varphi(\varphi(n)) + \varphi(n) = n$, където $\varphi(n)$ е броят на естествените числа, ненадминаващи n и взаимно прости с n .

Задача 10.4 (*Иван Ланджеев*) Всеки от участващите ученици в едно математическо състезание има не повече от $d \geq 1$ познати. Нека d_1 и d_2 са неотрицателни цели числа, за които $d - 1 = d_1 + d_2$. Да се докаже, че учениците могат да бъдат разделени в две стаи по такъв начин, че всеки ученик в първата стая има не повече от d_1 познати в неговата стая и всеки ученик във втората стая има не повече от d_2 познати в неговата стая.

Задача 11.1 (*Емил Колев*) Да се намерят всички естествени числа d , за които съществува безкрайна аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots$ от естествени числа с разлика d със следното свойство: съществува естествено число k , за което за всяко n числата $a_{S_n+1}, (n+k)a_k, -a_{S_n}$ образуват (в този ред) аритметична прогресия. (S_n е сборът от първите n члена на прогресията, т.е. $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.)

Задача 11.2 (*Александър Иванов*) Даден е трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с перпендикулярни диагонали и пресечна точка на диагоналите O . Върху основата AB е избрана точка M . Описаните окръжности около $\triangle AMO$ и $\triangle BMO$ пресичат отсечките AD и BC съответно в точки P и Q . Да се докаже, че центърът на описаната окръжност около $\triangle MPQ$ лежи на средната отсечка на трапеца.

Задача 11.3 (*Емил Колев*) Да се докаже, че за всяко съставно естествено число $n \geq 6$ съществува множество A от n различни естествени числа, притежаващо следното свойство: за всеки делител d на n , елементите на

A могат да се разделят по два различни начина на $\frac{n}{d}$ непресичащи се подмножества всяко с по d елемента така, че сборът на елементите на кое да е множество от едното разделяне да е равен на сбора на елементите на някое множество от другото разделяне.

Задача 11.4 (*Александър Иванов*) Да се намерят всички естествени числа n , за които съществуват полиноми с цели коефициенти $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), g(x)$ (не непременно различни) такива, че $x^{2013} + n$ дели $g(x)$ и

$$\prod_{i=1}^n (f_i(x)^2 - 1) = g(x)^2 - 1.$$

Задача 12.1 (*Николай Николов*) Нека $a_1, a_2, \dots$ е редица от положителни числа, за които $a_2 = 3a_1 - 1, a_3 = 2a_2 - 1, a_4 = 3a_3 - 1, a_5 = 2a_4 - 1$ и т.н. Да се намери най-малката възможна стойност на a_1 .

Задача 12.2 (*Олег Мушкаров*) Нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е функция, за която

$$|f(x)| - |f(x) + x - 1| = |x + 1| - 2|x|$$

за всяко $x \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че множеството

$$A = \{(x, y) : 0 < y < f(x), x \in \mathbb{R}\}$$

съдържа вътрешността на триъгълник с лице 1.

Задача 12.3 (*Николай Николов*) Нека M е средата на ъглополовящата AL в $\triangle ABC$ ($L \in BC$). Описаната окръжност около $\triangle CLM$ пресича отсечката BM в точка K . Да се докаже, че ако $\angle ACB = 180^\circ - \angle AKC$, то $\angle ACB = 90^\circ$.

Задача 12.4 (*Александър Иванов*) Дадени са взаимно прости естествени числа $a < b$. Да се намери броят на начините, по които можем да оцветим числата $1, 2, 3, \dots, 2013ab$ в два цвята така, че за всяко $t = 1, 2, \dots, 2013a$ числата t и bt са разноцветни и числата at и bt също са разноцветни.

**Зимен математически турнир „Атанас Радев“
31 януари – 02 февруари 2014, Бургас**

Задача 9.1. (*Динко Раднев*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които системата

$$\begin{cases} x^2 - 2y - 2z = a \\ y^2 - 2z - 2x = a \\ z^2 - 2x - 2y = a \end{cases}$$

има поне едно реално решение.

Задача 9.2. (*Ангел Гушев*) Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Върху страните му AB и CD вътрешно за четириъгълника са построени равностранный триъгълници ABP и DCM , а върху страните му AD и BC външно за четириъгълника са построени равностранный триъгълници ADN и BCQ . Да се докаже, че точките M , N , P и Q са върхове на успоредник.

Задача 9.3. (*Петър Бойваленов*) Да се намерят всички прости числа p и q и всички естествени числа $k > 1$, за които числата $p^k q + 1$ и $p q^k + 1$ са точни квадрати.

Задача 9.4. (*Николай Белухов*) Лабиринт се състои от 10000 квадратни стаи, разположени във формата на квадрат 100×100 . Всеки две стаи, които имат обща страна, са свързани с врата. Тезей се лута из лабиринта, като на всеки свой ход влиза в някоя стая през една от нейните врати и излиза през друга. При това Тезей не може да използва една и съща двойка врати за две последователни посещения на една и съща стая (така например, ако при първото си посещение Тезей е влязъл в стаята през врата A и е излязъл през врата B , то при второто си посещение той не може да влезе през врата B и да излезе през врата A). Възможно ли е Тезей да се лута в лабиринта в продължение на повече от 4^{100} хода?

Задача 10.1. (*Иван Ланджеев*) Да се реши системата

$$\begin{cases} x^2 + y + z = 1 \\ x + y^2 + z = 1 \\ x + y + z^2 = 1. \end{cases}$$

Задача 10.2. (*Стоян Боев*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които неравенството $\sqrt{1+4x} \geq x^2 - x + a$ няма целочислени решения.

Задача 10.3. (*Иван Ланджеев*) Нека $p \equiv 3 \pmod{4}$ е просто число. Нека N е броят на правоъгълниците с лице $2p^2$, чиито върхове имат целочислени координати (x, y) , удовлетворяващи неравенствата $0 \leq x, y \leq 2p^2$. Да се намери остатъкът, който числото N дава при делене на p .

Задача 10.4. (*Стоян Боев*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, вписан в окръжност k . Правите през върха C , перпендикулярни на страните AC и BC , пресичат допирателните към k във върховете A и B съответно в точките E и F . Нека M е средата на AB , а N е средата на височината CH , $H \in AB$. Да се докаже, че правите MN и EF са перпендикулярни.

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Дадена е безкрайната редица $a_1, a_2, \dots$, за която $a_2 = 2015$ и $xa_{n+1} = a_n + y$, $n \geq 1$ за някакви реални числа x и y . Да се намери y , ако е известно, че редицата $b_1, b_2, \dots$, зададена с $b_n = a_n - 2014$, $n = 1, 2, \dots$, е безкрайна геометрична прогресия със сбор на елементите 4.

Задача 11.2. (*Александър Иванов*) Точка M е медицентър на $\triangle ABC$, като $\angle AMB = 2\angle ACB$. Да се докаже, че $9AM \cdot BM = AB^2 + BC^2 + CA^2$.

Задача 11.3. (*Пламен Пенчев*) Даден е полином $f(x)$ със следните свойства:

- (1) коефициентите на $f(x)$ са естествени числа;
- (2) уравнението $f(x) = 0$ има поне един рационален корен;
- (3) ако k е степента на $f(x)$, то стойностите на $f(x)$ за $k + 1$ различни естествени числа са прости числа.

Да се докаже, че $f(x) = ax + b$ за някои две взаимно прости естествени числа a и b .

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) Дадена е квадратна таблица с n реда и n стълба, където $n \geq 3$ е естествено число. Във всяка клетка от главния диагонал (всички клетки от горния ляв ъгъл до долния десен ъгъл) без първата и последната е поставен по един пул. Разрешена е следната операция: ако в дадена клетка има пул, а в двете клетки отдясно и отгоре на дадената няма пулове, можем да премахнем този пул и да поставим по един пул в тези две празни клетки. След прилагането на краен брой операции от горния вид се оказало, че в клетките по главния диагонал няма пулове. Да се намерят всички възможни стойности на броя на пуловете върху дъската в този момент.

Задача 12.1. (*Николай Николов*) Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k с център I се допира до страните BC , CA и AB съответно в точки A_1 , B_1 и C_1 . Отсечката BI пресича k в точка D , а правата през D и средата на B_1C_1 пресича за втори път k в точка E . Да се докаже, че точките A , D , I и E лежат на една окръжност.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Окръжност k се допира до параболата $y = x^2$ в две точки. Да се докаже, че:

- а) центърът на k лежи на ординатната ос;
- б) радиусът на k е по-голям от $\frac{1}{2}$.

Задача 12.3. (*Николай Николов, Петър Попиванов*) Нека $k \in (0, 1)$ е реален параметър. Да се намери най-голямата стойност на израза

$$\frac{x + k^2y + (1 - k)^2xy}{(1 + x + y)^2}$$

при $x, y \geq 0$.

Задача 12.4. Виж Задача 11.4.

Пролетни математически състезания
31 март – 02 април 2014, Плевен

Задача 9.1. (*Динко Раднев*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $x^2 + 8 = |x + a| + |x - a|$ има нечетен брой различни реални корени.

Задача 9.2. (*Ангел Гушев*) Нека $ABCD$ е вписан в окръжност k четириъгълник и продълженията на страните AB и CD се пресичат в точка M . Нека MT е допирателна към k ($T \in k$) и правата BD пресича отсечката MT в точка E . Ако MT е успоредна на диагонала AC , то да се намери отношението $EM : ET$.

Задача 9.3. (*Николай Белухов*) Фигурата, получена от квадрат 2×2 след премахването на една негова клетка се нарича *триклетъчен ъгъл*. Възможно ли е клетките на една шахматна дъска с размери 3000×3000 да бъдат оцветени в бяло и черно по такъв начин, че както и да се разреже тази дъска на 3 000 000 триклетъчни ъгъла, всеки от тях да съдържа точно по една черна клетка?

Задача 9.4. (*Петър Бойваленков*) Да се реши в естествени числа уравнението $x^3 - 5x + 28 = 2^y(2^y + 1)$.

Задача 10.1. (*Стоян Боев*) Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$, $AC \leq BC$). Ако M е средата на височината CH ($H \in AB$) и $\angle AMB = 120^\circ$, то да се намери $AC : BC$.

Задача 10.2. (*Стоян Боев*) Да се намерят стойностите на параметъра a , при които уравненията $a \cdot 5^{2x-1} + |a - 5| \cdot 5^{x-1} = 1$ и $9^x + 3^{x+1} = 4$ са еквивалентни.

Задача 10.3. (*Александър Макелов*) Даден е четириъгълник $ABCD$, вписан в окръжност с диаметър 1. Да се намери най-голямата възможна стойност на сумата от радиусите на окръжностите, вписани в $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$.

Задача 10.4. (*Петър Бойваленков*) Да се реши в цели числа уравнението $x^3 - 5x + 28 = 2^y(2^y + 1)$.

Задача 11.1. (*Динко Раднев*) Дадено е уравнението

$$5 - 4 \sin^2 x - 8 \cos^2 \frac{x}{2} = 3m,$$

където m е реален параметър.

а) Да се реши уравнението при $m = 0$;

б) Да се намерят всички цели стойности на параметъра m , при които уравнението има решение.

Задача 11.2. (*Борислав Мирчев*) Даден е $\triangle ABC$. През средите F и E на височините AA_1 и BB_1 е построена права, която пресича правите AC и BC съответно в M и N . Да се докаже, че правата през върха C и центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност разполовява отсечката MN .

Задача 11.3. (*Емил Колев*) Даден е набор A от 2014 естествени числа в интервала $[1, 6]$ и естествено число $t \leq 2014$. За един ход можем да изберем произволни t числа от A и да увеличим с 1 всяко от тях, което е по-малко от 6, а всяко число, което е равно на 6, да заменим с 1. Да се намерят всички стойности на t , за които при всяко множество A след краен брой ходове можем да получим само шестцици.

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) Дадено е естествено число k . Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такива, че за всеки две естествени числа m и n е изпълнено равенството

$$f(m + f_k(n)) = n + f(m + 2014),$$

където $f_k(n) = \underbrace{f(f(\dots(f(n)\dots)))}_{k \text{ пъти}}$.

Задача 12.1. (*Николай Николов*) Синусите на три различни ъгъла от интервала $[0, 2\pi]$ образуват аритметична прогресия. Да се докаже, че техните косинуси не могат да образуват аритметична прогресия в същия ред.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Нека CC_1 е височина в $\triangle ABC$, където C_1 е точка от правата AB . Известно е, че сумата от квадратите на периметрите на $\triangle ACC_1$ и $\triangle BCC_1$ е равна на квадрата на периметъра на $\triangle ABC$. Да се докаже, че $\angle ACB = 90^\circ$.

Задача 12.3. (*Николай Николов*) Да се докаже, че ако a , b , c и d са положителни числа със сума 1, то

$$\frac{a^3}{4a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^3}{4b^2 + (c+d)^2} + \frac{c^3}{4c^2 + (d+a)^2} + \frac{d^3}{4d^2 + (a+b)^2} \geq \frac{1}{8}.$$

Задача 12.4. Вж. Задача 11.4.

63. Национална олимпиада по математика
Областен кръг, 30 март 2014

Задача 9.1. (*Петър Бойваленков*) Да се реши уравнението $\sqrt{6-x} = 6-x^2$.

Задача 9.2. (*Петър Бойваленков*) Даден е $\triangle ABC$ с център на вписаната окръжност I . Окръжност с център I минава през върха C и пресича страната AB във вътрешни точки M и N . Да се докаже, че $\angle MCN < 60^\circ$.

Задача 9.3. (*Петър Бойваленков*) Да се намерят всички естествени числа n , за които числото $A = n(n+2)(n+3)(n+5)$ има точно три различни прости делителя. (Някои от простите делители на A могат да делят A и с по-висока от първа степен.)

Задача 9.4. (*Александър Макелов*) За дадено множество S от 2014 точки в равнината нека ℓ е минималното естествено число, за което съществуват ℓ прави, такива, че всяка точка от S лежи върху някоя от тях. Нека c е минималното естествено число, за което съществуват c окръжности, такива, че всяка точка от S лежи върху някоя от тях. Съществува ли множество S , за което:

- а) $\ell = 15$ и $c = 67$; б) $\ell = 19$ и $c = 53$?

Задача 10.1. (*Стоян Боев*) Да се намерят стойностите на параметъра a , при които системата

$$\begin{cases} 4^x + 9^y \leq a, \\ 2^x - 3^y \geq 1 \end{cases} \quad \text{има решение.}$$

Задача 10.2. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$. Да се построи с линейка и пергел окръжност, която минава през върховете A и B и се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 10.3. (*Стоян Боев*) Върху дадена окръжност k са избрани точки A , B и C . Построена е окръжност ω , която се допира до хордите AB , AC и вътрешно до окръжността k в точки P , Q и R съответно. Нека правите PR и QR пресичат за втори път k в точки M и N съответно, а точката T е такава, че $AMTN$ е успоредник. Да се докаже, че точките P , Q и T лежат на една права.

Задача 10.4. Виж задача 9.4.

Задача 11.1. (*Динко Раднев*) Да се намерят всички стойности на параметъра a , при които уравнението $2^{2x+1} - (a+8)2^x + a^2 + 4 = 0$ има един положителен и един отрицателен корен.

Задача 11.2. (*Емил Колев*) Даден е $\triangle ABC$, за който $BC^2 + AC^2 = AC \cdot AB$. Да се докаже, че допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност със страната BC , средата на страната AB и средата на ъглополовящата през върха C лежат на една права.

Задача 11.3. (*Александър Иванов*) Съществува ли просто число $p \geq 5$, за което уравнението $2(p+1)x^3 - 2(p-1)x^2 - (p+3)x + 3p - 1 = 0$ има рационален корен?

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) Някои от градовете на една държава са свързани с пътища, като от всеки град излизат точно три пътя и във всеки два града, свързани с път, живеят различен брой жители. На всеки път е записано най-малкото общо кратно на броя на жителите на двата града, които са свързани с този път. Известно е, че сборът на числата върху всички пътища е два пъти по-голям от броя на жителите в държавата. Да се докаже, че градовете в държавата могат да се разделят на две групи така, че няма път, който да свързва два града от една и съща група.

Задача 12.1. (*Емил Колев*) За кои стойности на параметъра a системата

$$\begin{cases} y \geq x^2 + ay + 1 \\ x \geq y^2 + ax + 1 \end{cases}$$

има единствено решение?

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Да се намери най-малката възможна стойност на страната на равнобедрен триъгълник с върхове върху параболата $y = x^2$.

Задача 12.3. (*Николай Николов*) Даден е $\triangle ABC$. За точка X от равнината на триъгълника, различна от върховете му, с A_X и B_X са означени пресечните точки на ъглополовящите на $\angle AXC$ и $\angle BXC$ съответно със страните AC и BC . За кои точки X изразът $\frac{1}{A_X C} + \frac{1}{B_X C}$ приема минимална стойност?

Задача 12.4. Виж задача 11.4.

63. Национална олимпиада по математика
Национален кръг, 17-18 май 2014, София

Задача 1. (*Теодоси Витанов, Емил Колев*) Дадени са окръжност k и фиксирана точка A извън нея. Отсечката BC е диаметър на k . Да се намери геометричното място на ортоцентъра на $\triangle ABC$, когато BC се мени.

Задача 2. (*Николай Белухов*) Дадена е шахматна дъска с размери $m \times n$, където $m \geq 2$ и $n \geq 2$ са естествени числа. Едно оцветяване на клетките на дъската в бяло, зелено, червено и синьо (при което всяка клетка е оцветена в точно един цвят) наричаме *шарено*, ако четирите клетки на всяко квадратче 2×2 са оцветени в четирите различни цвята. Да се намери броят на шарените оцветявания.

Задача 3. (*Александър Иванов*) Във всяка точка от пространството е записано по едно ненулево реално число. Известно е, че за всеки тетраедър числото в центъра на вписаната му сфера съвпада с произведението на числата във върховете му. Да се докаже, че всички записани числа са равни на 1.

Задача 4. (*Петър Бойваленов*) Да се намерят всички двойки прости числа p и q , за които $p^2 | q^3 + 1$ и $q^2 | p^6 - 1$.

Задача 5. (*Николай Николов*) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, за които $f(xy) = f(x+y)(f(x) + f(y))$ за произволни $x, y \in \mathbb{Q}^+$. (С $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{R}^+$ означаваме съответно множествата на положителните рационални и реални числа.)

Задача 6. (*Николай Белухов*) Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k . Отсечките AC и BD се пресичат в точка E , а лъчите $CB^{\rightarrow}$ и $DA^{\rightarrow}$ се пресичат в точка F . Докажете, че правата през центровете на вписаните окръжности на $\triangle ABE$ и $\triangle ABF$ и правата през центровете на вписаните окръжности на $\triangle CDE$ и $\triangle CDF$ се пресичат върху k .

Контролно за определяне на отбора за БОМ 2014
6–7 април 2014, София (ИМИ-БАН)

Задача 1. (*Александър Иванов*) Нека $d, a_1, a_2, \dots, a_{2014}$ са реални числа, такива че

$$|a_1 - 1| = |a_2 - 2| = |a_3 - 3| = \dots = |a_{2014} - 2014| = d$$

и $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{2014}$ са числата $a_1, a_2, \dots, a_{2014}$, подредени по големина. Да се докаже, че $|a_k - b_k| \leq 2d$ за всяко $k = 1, 2, \dots, 2014$.

Задача 2. (*Петър Бойваленов*) Нека естественото число n е такова, че d_1 и d_2 са естествени делители на n^2 и $d_1 < n < d_2$. Да се докаже, че

$$d_2 - d_1 \geq \sqrt{4n + 1}.$$

Задача 3. (*Александър Иванов*) Четириъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност с център O и описан около окръжност с център I . Да се докаже, че четириъгълникът, образуван от правите през върховете A, B, C и D , перпендикулярни на AI, BI, CI и DI съответно, е вписан в окръжност, центърът на която лежи на правата IO .

Задача 4. (*Емил Колев*) Таблица $n \times 2^n$ е запълнена с нули и единици по такъв начин, че няма два еднакви стълба. Нека означим с a_{ij} числото записано в i -тия ред и j -тия стълб. Ако сумата $\sum_{j=1}^{2^n} ja_{ij}$ е една и съща за всяко $i = 1, 2, \dots, n$, то да се намери нейната минимална възможна стойност при:

- а) $n = 3$; б) $n = 4$.

Задача 5. (*Стоян Боев*) Нека k е фиксирано естествено число. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такива, че $m^2 + f(n^k) \mid mf(m) + n^k$ за всеки $m, n \in \mathbb{N}$.

Задача 6. (*Стоян Боев*) Даден е неравнобедрен остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H и височини AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$). Симетралите на AA_1 и BB_1 пресичат правата A_1B_1 в точки P и Q съответно, а правите AP и BQ се пресичат в точка R .

- а) Да се докаже, че RH разполовява отсечката A_1B_1 ;
б) Да се намери $\angle ACB$, ако HA_1RB_1 е успоредник.

Задача 7. (*Александър Иванов*) Квадрат със страна естествено число N е разрязан на два вида квадрати със страни a и b , където a и b са взаимно прости естествени числа. Да се докаже, че поне едно от числата a и b дели N .

Задача 8. (***) Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n , такива, че най-големият прост делител на $n^4 + n^2 + 1$ е равен на най-големия прост делител на $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$.

Контролно за определяне на отбора за МОМ 2014
28–29 май 2014, София (ИМИ-БАН)

Задача 1. (*Николай Белухов*) Да се намери най-малкото положително реално число α , за което е вярно следното твърдение: ако общото тегло на краен брой тикви е един тон и всяка от тиквите тежи не повече от α тона, то тогава тиквите могат да бъдат разпределени в 50 чувала (някои от чувалите могат да останат и празни) по такъв начин, че всеки чувал да съдържа не повече от α тона тикви.

Задача 2. (*Стоян Боев*) Даден е $\triangle ABC$ и нека вписаната в него окръжност k се допира до страните BC и CA в точките P и Q съответно. Нека означим с J центъра на външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ към страната AB , а с T – втората пресечна точка на окръжностите описани около $\triangle JBP$ и $\triangle JAQ$. Да се докаже, че описаната окръжност около $\triangle ABT$ се допира до k .

Задача 3. (*Александър Иванов*) Да се намерят всички естествени числа n , за които съществуват полином f от степен n с цели коефициенти и положителен старши коефициент и полином g с цели коефициенти, такива, че

$$xf^2(x) + f(x) = (x^3 - x)g^2(x).$$

Задача 4. (*Пламен Пенчев*) Да се докаже, че за произволни положителни реални числа a , b , c и d е изпълнено неравенството

$$\frac{a^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} + \frac{b^4}{b^3 + b^2c + bc^2 + c^3} + \frac{c^4}{c^3 + c^2d + cd^2 + d^3} + \frac{d^4}{d^3 + d^2a + da^2 + a^3} \geq \frac{a + b + c + d}{4}.$$

Задача 5. (*Емил Колев*) В един град живеят $2k$ на брой човека, всеки двама от които са или приятели, или врагове, като при това всеки има не повече от t врагове. Казваме, че една група от хора е *задружна*, ако всеки двама от тях са приятели. Известно е, че в града няма задружна група, която да съдържа повече от k човека, както и че всички жители на града могат да бъдат разделени на две задружни групи от по k човека всяка. Да се докаже, че броят на възможните задружни групи от k човека не надвишава $2^{k-1} + 2^{k-t}$.

Задача 6. (*Николай Белухов*) Нека p и $4p + 1$ са прости числа, такива, че $p > 10^9$. Да се докаже, че в представянето на числото $\frac{1}{4p+1}$ като десетична дроб се срещат всички цифри от 0 до 9.

31. Балканска олимпиада по математика
2–7 май 2014, България (Плевен)

Задача 1. (*Великобритания*) Нека x , y и z са положителни реални числа, такива че $xy + yz + zx = 3xyz$. Да се докаже неравенството

$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$$

и да се определи кога се достига равенство.

Задача 2. (*Румъния*) Естественото число n ще наричаме *специално*, ако съществуват естествени числа a , b , c и d , такива че $n = \frac{a^3 + 2b^3}{c^3 + 2d^3}$. Да се докаже, че

- (а) съществуват безбройно много специални числа;
- (б) числото 2014 не е специално.

Задача 3. (*Гърция*) Трапецът $ABCD$ е вписан в окръжност Γ с диаметър AB . Нека E е пресечната точка на диагоналите AC и BD . Окръжността с център B и радиус BE пресича Γ в точки K и L , като K и C са от една и съща страна на AB . Правата през E , перпендикулярна на BD , пресича CD в точка M . Да се докаже, че правата KM е перпендикулярна на DL .

Задача 4. (*Великобритания*) Числото n е естествено. Правилен шестоъгълник със страна n е разделен на равностранни триъгълници със страна 1 чрез прави, успоредни на страните му. Да се намери броят на всички правилни шестоъгълници, чиито върхове са сред върховете на равностранните триъгълници.

55. Международна олимпиада по математика
3–13 юли 2014, Южна Африка (Кейптаун)

Задача 1. (Австрия) Нека $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ е безкрайна редица от естествени числа. Да се докаже, че съществува единствено естествено число $n \geq 1$, за което $a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$.

Задача 2. (Хърватия) Шахматна дъска $n \times n$, където $n \geq 2$ е естествено число, е разделена на n^2 единични квадратчета. Конфигурация от n шахматни топа се нарича *мирна*, ако всеки ред и всеки стълб на дъската съдържа точно по един топ. Да се намери най-голямото естествено число k , за което за всяка мирна конфигурация от топове съществува $k \times k$ квадрат, такъв, че на никое от неговите k^2 единични квадратчета няма топ.

Задача 3. (Иран) Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. Нека H е петата на перпендикуляра от A към BD . Точките S и T съответно от страните AB и AD са такива, че H е вътрешна за триъгълника SCT и $\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ$, $\angle THC - \angle DTC = 90^\circ$. Да се докаже, че правата BD се допира до описаната около $\triangle TSH$ окръжност.

Задача 4. (Грузия) Върху страната BC на остроъгълен $\triangle ABC$ са избрани точки P и Q така, че $\angle PAB = \angle ACB$ и $\angle QAC = \angle CBA$. Точките M и N съответно върху лъчите AP и AQ са такива, че $AP = PM$ и $AQ = QN$. Да се докаже, че правите BM и CN се пресичат върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 5. (Люксембург) Една монета се нарича *Кейптауновска*, ако номиналът ѝ е равен на $1/n$ за някое естествено число n . Да се докаже, че всяка крайна колекция от Кейптауновски монети с обща стойност най-много $99 + \frac{1}{2}$ може да се разбие на не повече от 100 групи, всяка от които на обща стойност най-много 1.

Задача 6. (Австрия, със съществена редакция от журито) Множество от прави в равнината е в *общо положение*, ако никои две от правите не са успоредни и никои три от тях не се пресичат в една точка. Множество от прави в общо положение разделя равнината на области, някои от които имат крайно лице; тези области се наричат крайни. Да се докаже, че за всяко достатъчно голямо n във всяко множество от n прави в общо положение е възможно да се оцветят поне $\sqrt{n}$ от правите в синьо така, че нито една от крайните области да няма изцяло синя граница.

Забележка: Доказване на граница $c\sqrt{n}$, където c е реална константа, вместо $\sqrt{n}$, се точкува в зависимост от стойността на константата c .

Български математически състезания 2014-15

Есенен Математически Турнир 14–16 ноември 2014, София

Задача 8.1. (*Иван Тонов*) Нека CL ($L \in AB$) е ъглополовяща в $\triangle ABC$, като $AC = CL$. Точка K лежи на лъча CL така, че $\angle CAL + \angle CAK = 180^\circ$. Да се докаже, че $BC = CK$.

Задача 8.2. (*Ивайло Кортезов*) а) Да се докаже, че ако a, b са числа от интервала $[0; 1]$ и $a + b \leq 1$, то $a^2 + b^2 \leq 1$.

б) Сред числата x, y, z всеки две не се различават с повече от единица и $xy + yz + zx = 96$. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на израза $A = x^2 + y^2 + z^2$.

Задача 8.3. (*Иван Тонов*) За всяка двойка естествени числа $(m; n)$ полагаме $m @ n = |37^m - 29^n|$.

а) Съществува ли двойка естествени числа $(m; n)$, такава че $m @ n = 2014$?

б) Да се намери най-малката стойност на израза $m @ n$.

Задача 8.4. (*Ивайло Кортезов*) Ани начертала на бял лист 88 отсечки. Колко най-много равнострани триъгълници може да има на листа? Отговорът да се обоснове.

Задача 9.1. (*Станислав Чобанов*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $x^2 + 2(a + 1)x + a^2 = 0$ има два различни реални корена x_1 и x_2 , такива, че $|4x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2| \leq 1$.

Задача 9.2. (*Петър Бойваленов*) Да се намерят всички цели числа n , за които съществува цяло число m , такова, че $n^2 + n - 1$ дели както $14m + 5$, така и $20m - 3$.

Задача 9.3. (*Николай Белухов*) Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с радиус r , а точките M и N са среди на AB и CD . Да се докаже, че $MN \geq 2r$.

Задача 9.4. (*Николай Белухов*) Във всеки от върховете на един правилен 360-ъгълник F с център O е записано по едно естествено число, не по-голямо от 180, като при това сумата на всички записани числа е нечетна. Да се докаже, че могат да се намерят два върха A и B на F , такива, че разликата на записаните в тях числа е равна на градусната мярка на $\angle AOB$.

Задача 10.1. (*Станислав Чобанов*) Нека x е реално число от интервала $[0, 1]$. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{x}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} + \cdots + \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{x}}}}_{2014 \text{ корена}} = 2014x.$$

Задача 10.2. (*Станислав Чобанов*) Построени са графиките на две квадратни функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ със старши коефициенти $\frac{1}{2}$ и -3 съответно, като $f_1(x)$ има корени 2 и 5, а $f_2(x)$ има корени -2 и 1. Една мравка стартира от точка P , която лежи върху точно една от тези графики, и се движи по тях, без да се връща назад. Всеки път, когато достигне пресечна точка на двете графики, мравката сменя графиката, по която върви, като избира посоката си върху новата графика произволно. Какви трябва да бъдат координатите на началната точка P , за да може мравката да се върне обратно в нея?

Задача 10.3. (*Йордан Йорданов*) Да се докаже, че за всяко нечетно просто число p числата $2^p - 2$ и

$$p(p-1)! \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} \right)$$

дават един и същи остатък при деление на p^2 .

Задача 10.4. (*Станислав Чобанов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H , център I на вписаната окръжност и център I_c на външновписаната окръжност ω_c срещу C . Нека $HI \cap AB = D$, $CD \cap I_cH = E$, CC_1 е височина в $\triangle ABC$, точката F е проекцията на I върху правата AB , и $EC_1 \cap CF = M$. Да се докаже, че M лежи на ω_c .

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Дадена е окръжност k с център O и точка A извън окръжността. От A са построени допирателни AX и AY ($X, Y \in k$), а точките P и Q от правите AX и AY (P е между A и X , а Y е между A и Q) са такива, че $OP = OQ$. Да се докаже, че средата на отсечката PQ е върху отсечката XY .

Задача 11.2. (*Александър Иванов*) Нека a е реален параметър. Какъв е минималният брой цели решения на неравенството

$$\frac{2x^2 + (3a^2 + 1)x - 2a^2 + 4a - 6}{x^2 + (a^2 + a - 3)x - a^2 + 2a - 3} < 1?$$

Задача 11.3. (*Пламен Пенчев*) Дадени са n безкрайни аритметични прогресии $A_1, A_2, \dots, A_n$ от естествени числа с разлики съответно $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Ако $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \mathbb{N}$, да се докаже, че някое от числата $b_1, b_2, \dots, b_n$ дели най-малкото общо кратно на останалите числа.

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) В изпъкнал 2014-ъгълник са прекарани 1007 диагонала така, че всеки връх е край на точно един диагонал, всеки два диагонала се пресичат във вътрешна точка и никои три диагонала не се пресичат в една точка. Тези диагонали разделят вътрешността на 2014-ъгълника на изпъкнали многоъгълници. Колко най-малко от тези многоъгълници могат да са триъгълници?

Задача 12.1. (*Николай Николов*) Нека $a_n = \frac{4(2n)^4 + 1}{4(2n - 1)^4 + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Да се намери

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{n^2}.$$

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Точки M и N лежат на страната AB на $\triangle ABC$. Допирателните през M и N към описаните окръжности около $\triangle ACM$ и $\triangle BCN$ пресичат отсечките CN и CM съответно в точки P и Q . Ако $ABPQ$ е равнобедрен трапец, да се докаже, че $AC = BC$.

Задача 12.3. (*Олег Мушкаров*) Да се намери най-малкото естествено число n , за което уравнението

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{n}{4z^2 + 1}$$

няма решение в естествени числа x, y, z .

Задача 12.4. Виж задача 11.4.

**Зимен математически турнир „Атанас Радев“
23–25 януари 2015, Ямбол**

Задача 9.1. (*Ангел Гушев*) Отсечките AD и BE са височини в $\triangle ABC$. Права през D , успоредна на AC , пресича правата AB в точка P . Права през E , успоредна на BC , пресича правата AB в точка Q . Да се докаже, че точките D, E, P, Q лежат на една окръжност.

Задача 9.2. (*Ивайло Кортезов*) Намерете всички стойности на реалните параметри p и q , за които уравнението $(p+3)x^2 + 2px + p - 1 = 0$ има реално решение и всяко от решенията му е три пъти по-малко от някое решение на уравнението $z^2 + pz = q$.

Задача 9.3. (*Ивайло Кортезов*) Да се реши в естествени числа уравнението $n^3 - 3^m = 2015$.

Задача 9.4. (*Ивайло Кортезов*) Във върха A на куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стои мравка. Тя предприема 2015-минутно пътешествие, като всяка минута пропълзява по ръб до съседен връх. Нека m е броят маршрути, при които в края на пътешествието мравката е в B , а n – броят маршрути, при които е в C_1 . Да се пресметне $m - n$.

Задача 10.1. (*Петър Бойваленов*) Да се реши системата

$$\begin{cases} xy - \frac{1}{yz} = \frac{2}{3} \\ yz - \frac{1}{zx} = \frac{5}{2} \\ zx - \frac{1}{xy} = 1. \end{cases}$$

Задача 10.2. (*Станислав Чобанов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ ($AC > BC$) с описана окръжност k с център точка O . Точка N е средата на AB , а точка P е петата на височината от C към AB . Нека правите CP и CO пресичат k за втори път съответно в точки E и K . Точка F е проекцията на E върху CK , а точка M е проекцията на P върху FE . Нека T е средата на KF . Да се докаже, че $\angle MTF = \angle PNC$.

Задача 10.3. (*Петър Бойваленов*) Нека k и n са естествени числа, за които $k < 2^{n+1}$. Да се докаже, че числото $1^{2^n} + 2^{2^n} + \dots + k^{2^n}$ се дели на 2^n тогава и само тогава, когато $k = 2^{n+1} - 1$.

Задача 10.4. (*Николай Белухов*) В квадратчетата на една шахматна дъска с размери 10×10 са написани числата от 1 до 100, всяко точно по веднъж. За

всеки две числа, свързани с хода на коня, пресмятаме тяхната разлика като от по-голямото вадим по-малкото. Колко най-малко различни числа може да има измежду получените разлики?

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Дадена е растяща аритметична прогресия $a_1, a_2, \dots, a_n$ от естествени числа, за която $a_n \leq 2015$. Известно е, че членовете на редицата с номера, равни на простите делители на 2015, образуват геометрична прогресия. Да се намери най-голямата възможна стойност на a_n .

Задача 11.2. (*Станислав Чобанов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с център на описаната окръжност точка O . Точка $H \in AB$ е такава, че $CH \perp AB$. Точка P лежи на правата CH и е такава, че $\frac{CH}{HP} = \frac{1}{3}$, като H е между P и C . Точка $Q \in PB$ е такава, че четириъгълникът $PACQ$ е вписан. Да се докаже, че AQ разполовява отсечката CO .

Задача 11.3. (*Александър Иванов*) Всеки два града в една държава са свързани с еднопосочен път така, че не съществува затворен маршрут. Винаги ли е възможно за преминаването по всеки път да се постави някаква положителна такса (за различни пътища таксите могат да бъдат различни) така, че за всеки два града A и B таксата, която се заплаща за всеки маршрут, започващ в A и завършващ в B , е една и съща?

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) Да се намерят всички естествени числа n , за които $\left[\frac{n}{k} + k\right] = [2\sqrt{n}] + 1$, където $k = \left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]$ (със $[x]$ означаваме цялата част на числото x).

Задача 12.1. (*Николай Николов*) Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник с лице, равно на $\frac{AB^2 - CD^2}{4}$. Да се докаже, че ако $AD = BC$, то $AD \perp BC$.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Да се намери най-малката стойност на $|AB|$, където A и B са точки съответно от графиките на функциите $y = (x-6)^2$ и $y = -x^2$.

Задача 12.3. (*Николай Николов*) Полиномът $x^8 + x + 1$ да се представи като произведение на неразложими полиноми над $\mathbb{Z}$.

Задача 12.4. Виж Задача 11.4.

Пролетни математически състезания
27 – 29 март 2015, Варна

Задача 9.1. (*Ивайло Кортезов*) Да се определи броят на (различните) реални решения на уравнението $x^6 - 4x^5 + rx^4 + (8 - 3r)x^3 - rx^2 - 4x - 1 = 0$ в зависимост от реалния параметър r .

Задача 9.2. (*Станислав Чобанов*) Фиксирани са ъгъл $\gamma \in (0; 180^\circ)$ и права AB , разделяща равнината на две полуравнини ψ и $\bar{\psi}$. Подвижната точка C от ψ е такава, че $\angle ACB = \gamma$. Вписаната окръжност за $\triangle ABC$ с център точка I се допира до AC и BC в точки F и E съответно. Точка P лежи върху лъча IE след E и е такава, че $PE \perp BC$ и $PE = AF$. Точка Q лежи върху лъча IF след F и е такава, че $QF \perp AC$ и $QF = BE$. Да се докаже, че симетралата на PQ минава през постоянна точка.

Задача 9.3. (*Ивайло Кортезов*) Кое е най-малкото естествено число n , за което уравнението $2x^2 + 2xy + 5y^2 = 2015n$ има решение в цели числа? Решете уравнението за тази стойност на n .

Задача 9.4. (*Ивайло Кортезов*) В равнината са дадени 109 точки, никои три от които не лежат на една права. Всяка точка е оцветена в един от седем възможни цвята и от всеки цвят има поне по осем точки. Ще наричаме триъгълник едноцветен, ако трите му върха са в един цвят. Да се докаже, че има поне 2015 едноцветни разностранни триъгълника.

Задача 10.1. (*Петър Бойваленов*) Дадени са квадратните функции $f(x) = x^2 + (a + 1)x - 2$ и $g(x) = -x^2 + (a + 6)x + 1$, където a е реален параметър. Пресечните точки на графиката на $f(x)$ с координатните оси определят триъгълник с лице S_f , а пресечните точки на графиката на $g(x)$ с координатните оси определят триъгълник с лице S_g . Да се намерят всички стойности на a , за които $S_f \geq S_g$.

Задача 10.2. (*Станислав Чобанов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с височина CD , имаща среда E . Нека $BE \cap AC = L$. Точка P е избрана така, че $EDBP$ е правоъгълник. Да се докаже, че AP разполовява отсечката BL .

Задача 10.3. (*Николай Белухов*) Съществува ли естествено число n , което има точно 49 естествени делителя и тези делители могат да бъдат подредени в таблица 7×7 по такъв начин, че сумата на числата във всеки ред и всеки стълб да е една и съща?

Задача 10.4. (*Йордан Йорданов*) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за които равенството $f(f(m + n)) = f(m) + f(n)$ е изпълнено за всички естествени числа m, n .

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Да се намери броят на аритметичните прогресии, за всяка от които са изпълнени следните свойства:

1. Първият член и разликата на прогресията са естествени числа.
2. Последният член е 2015.
3. Броят на членовете е степен на числото 10 със степенен показател естествено число.

Задача 11.2. (*Емил Колев*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ и точки M , N и P съответно от отсечките AB , CM и BN . Ако $AM = BM$, $CN = BN$ и $\angle APC = \angle BPC$, да се докаже, че $\angle PAC = \angle MCA$.

Задача 11.3. (*Емил Колев*) Дадени са три купчинки съответно с a , b и c бонбона. Иван и Петър, редувайки се (първи е Иван), играят следната игра. Който е на ход, изважда бонбоните от една от купчинките (по негов избор), а бонбоните от другите две купчинки преразпределя във вид на три нови купчинки, всяка от които съдържа поне по един бонбон. Който получи три купчинки с по един бонбон всяка, губи играта. Да се намерят всички тройки (a, b, c) , за които Петър има печеливша стратегия.

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) Дадено е нечетно естествено число $n \geq 3$. Да се докаже, че съществува естествено число m от интервала $\left(\sqrt[4]{5n}, \frac{n^4 + 4}{2}\right)$, за което $n^4 + 4$ дели $m^4 + 4$.

Задача 12.1. (*Пламен Пенчев*) а) Да се докаже, че функцията $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x$ е строго растяща в множеството на реалните числа.

б) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението $x^3 + 5x = (a - 4)x^2 - a + 4\sqrt[3]{(ax^2 + x - a)^2} + 6\sqrt[3]{ax^2 + x - a}$ има точно две решения.

Задача 12.2. (*Пламен Пенчев*) Дадена е безкрайна растяща редица от естествени числа $x_1, x_2, \dots$. За всяко естествено число s е изпълнено неравенството $x_{s+1} - x_s \leq 3$. Да се докаже, че съществуват безбройно много двойки различни естествени числа m и n , за които x_m дели x_n .

Задача 12.3. (*Александър Иванов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с височини AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$). Окръжността с диаметър A_1B_1 пресича отсечката AB в точки M и N (M е между A и N). Ако $2AB_1 - AM = 2BA_1 - BN$, да се докаже, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Задача 12.4. Вж. задача 11.4.

64. Национална олимпиада по математика
Областен кръг, 3 февруари 2015

Задача 9.1. (*Ивайло Кортезов*) Нека x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 5x = 3$. Да се намерят всички реални числа z , за които е изпълнено равенството $(2z^2 - 4z - \sqrt{z^2 - 2z - 10})(x_1^2 + x_2^2) = 2015$.

Задача 9.2. (*Ивайло Кортезов*) Върху страните BC , CA и AB на равнобедрения $\triangle ABC$ ($AB = BC$) са взети съответно точките A_1 , B_1 и C_1 , така че $\angle BC_1A_1 = \angle CA_1B_1 = \angle BAC$. Отсечките BB_1 и CC_1 се пресичат в точка P . Да се докаже, че четириъгълниците ABA_1B_1 и AB_1PC_1 са вписани.

Задача 9.3. (*Ивайло Кортезов*) Ще наричаме едно естествено число *мощно*, ако се дели на квадрата на всеки свой прост делител (числото 1 също е мощно). Ще наричаме *мощ* на едно число броя на мощните му делители. Колко най-много поредни естествени числа можем да изберем, така че никое от тях да няма мощ, кратна на:

а) 2; б) 3; в) 2015?

Задача 9.4. (*Ивайло Кортезов*) Мравка се намира в координатното начало O . Всяка секунда тя изминава 1см в някоя от посоките изток, запад, север или юг. След t секунди мравката била пак в O . Ако броят на всевъзможните маршрути на мравката се дели на 2015, намерете най-малката възможна стойност на t .

Задача 10.1. (*Динко Раднев*) Да се намерят всички квадратни тричлени $f(x) = ax^2 + bx + c$ с реални корени x_1 и x_2 , за които $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ и $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_2^2 = 15$.

Задача 10.2. (*Станислав Чобанов*) Даден е $\triangle ABC$ и произволна точка D от вътрешността му. Точките M , E и F са средите съответно на страните AB , AC и BC . Точките N , P и Q са средите съответно на отсечките DM , DE и DF . Да се докаже, че правите AQ , BP и CN се пресичат в една точка.

Задача 10.3. (*Петър Бойваленков*) Да се намери най-малкото естествено число a със следното свойство: съществува естествено число n , за което $17^n + 87^n a$ се дели на 455.

Задача 10.4. (*Йордан Йорданов*) Дадено е естествено число $n \leq 2015$, което не се дели на 5. Да се намери броят на различните n -елементни подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, 2015\}$ със сума от елементите, кратна на 5.

Задача 11.1. (*Емил Колев*) Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението

$$2^{3x} - a2^{2x+1} + (a^2 + a - 1)2^x - a^2 + a = 0$$

има точно две реални решения.

Задача 11.2. (*Александър Иванов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с център на вписаната окръжност точка I и център на описаната окръжност точка O . Ъглополовящата CL , ($L \in AB$) пресича описаната окръжност в точка D . Нека P е симетричната точка на D спрямо правата AB . Да се докаже, че:

- а) точките C , L , P и O лежат на една окръжност;
- б) $\angle CPI = \angle LOI$.

Задача 11.3. (*Александър Иванов*) Дадени са положителни числа $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ с произведение 1. Да се докаже, че ако $\alpha > \beta > 0$ са рационални числа, то

$$\sum_{i=1}^{2015} a_i^\alpha \geq \sum_{i=1}^{2015} a_i^\beta.$$

Задача 11.4. (*Александър Иванов*) Дадено е множество M от 2^{2015} естествени числа, всяко от които има 2014 цифри. Всеки две от тези числа дават различни остатъци при деление на 2^{2015} . Колко най-малко различни цифри участват в десетичния запис на числата от M ?

Задача 12.1. (*Емил Колев*) Да се намерят всички двойки от реални числа (x, y) , за които $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x + \cos y - \sin(x-y) = \cos x - \sin y + \sin(x-y) = 1$.

Задача 12.2. (*Николай Николов*) Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $AD = BC$, $AB = \sqrt{3}CD$ и $\angle C - \angle D = 2(\angle A - \angle B) > 0$. Да се намери $\angle A - \angle B$.

Задача 12.3. Виж Задача 11.3.

Задача 12.4. Виж Задача 11.4.

64. Национална олимпиада по математика
Национален кръг, 17-18 април 2015, София

Задача 1. (*Александър Иванов*) Шестоъгълникът $ABLC DK$ е вписан в окръжност. Правата LK пресича отсечките AD , BC , AC , BD съответно в точки M , N , P , Q . Да се докаже, че $NL.KP.MQ = KM.PN.LQ$.

Задача 2. (*Николай Белухов*) Сто и едно от квадратчетата на таблица с размери $n \times n$ са оцветени в синьо. Известно е, че съществува единствен начин таблицата да се разреже по границите на квадратчетата си на правоъгълници така, че всеки от получените правоъгълници да съдържа точно едно синьо квадратче. Да се намери най-малката възможна стойност на n .

Задача 3. (*Александър Иванов*) Редицата $a_1, a_2, \dots$ е зададена с равенствата $a_1 = 2$, $a_2 = 12$ и $a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$ за всяко естествено число $n \geq 2$. Да се докаже, че нито един член на тази редица не е точна (по-голяма от първа) степен на естествено число.

Задача 4. (*Йордан Йорданов*) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, за които неравенствата

- (i) $f(x + y) \geq f(x) + y$
- (ii) $f(f(x)) \leq x$

са в сила за всички положителни числа x и y .

Задача 5. (*Александър Иванов, Йордан Йорданов*) Даден е $\triangle ABC$. Точката L лежи върху отсечката AB , а точките P и Q лежат съответно върху отсечките AC и BC по такъв начин, че четириъгълникът $PCQL$ е успоредник. Окръжността с център средата M на AB и радиус CM и окръжността с диаметър CL се пресичат за втори път в точката T . Да се докаже, че правите AQ , BP и LT се пресичат в една точка.

Задача 6. (*Николай Белухов*) Учениците, участващи в олимпиада по математика, получили рейтинг по четирите основни олимпийски тематики: алгебра, геометрия, теория на числата и комбинаторика. Известно е, че всеки двама ученици имат различен рейтинг по всяка от тематиките. Ще казваме, че една група от ученици е *хубава*, ако учениците в нея могат да бъдат подредени в нарастващ ред едновременно по поне два от четирите рейтинга. Кое е най-малкото естествено число N , такова, че измежду всеки N ученици има десет, които могат да се подредят в хубава редица?

Контролно за определяне на отбора за БОМ 2015
30–31 март 2015, София (ИМИ-БАН)

Задача 1. (*Ивайло Кортезов*) За кои реални x, y, z от интервала $[1; 7]$ изразът $\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{z^2 + x^2}$ достига минимална стойност?

Задача 2. (***) Центърът на описаната окръжност на $\triangle ABC$ е O , D е средата на дъгата $\widehat{BC}$, несъдържаща A , а AH е височина на $\triangle ABC$ (H е на правата BC). На лъча AH е избрана точка X и M е среда на DH . Точка N от правата DH е такава, че $ON \parallel AD$. Да се докаже, че $\angle BAM = \angle CAN$.

Задача 3. (*Пламен Пенчев*) Върху окръжност са отбелязани n точки. Какъв е най-големият възможен брой остроъгълни триъгълници с върхове в тези точки?

Задача 4. (***) Дадено е просто число $p > 3$. Винаги ли можем да разбием числата $1, 2, \dots, p-1$ на две непразни множества, така че сборът на числата в едното да има същия остатък при деление на p като произведението на числата в другото?

Задача 5. (*Пламен Пенчев*) Да се намерят всички полиноми f от вида

$$f(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \dots + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + 1$$

за които $|a_n| \leq 2$ и които имат $2n$ реални корена.

Задача 6. (*Нгуен Чи Зунг*) Да се намерят всички естествени числа n , за които уравнението $2^n + 1 = x^2 + y^2$ има решение в цели числа x и y .

Задача 7. (*Ивайло Кортезов*) а) В едно царство има 10 града, някои от които са свързани с директни авиолинии. Царят заповядал всяка от тези линии да стане безплатна поне в едната посока. Авиокомпанията иска да изпълни заповедта така, че при всяко „кръгово“ пътешествие пътникът да е принуден да заплати поне $x\%$ от пътуванията. Коя е най-голямата възможна стойност на x , която компанията може да си гарантира независимо от разположението на линиите?

б) Може ли да компанията да подобри отговора от а), ако има право да затвори една линия?

Задача 8. (***) Даден е $\triangle ABC$. Точка A' е център на окръжността през средата на BC и през петите на перпендикулярите от B и C съответно към правите на ъглополовящите на $\angle ACB$ и $\angle ABC$. Точки B' и C' са дефинирани аналогично. Докажете, че ортоцентърът на $\triangle A'B'C'$ е център на вписаната окръжност за $\triangle ABC$.

**Контролно за определяне на отбора за МОМ 2015
13–17 май 2015, София (ИМИ-БАН)**

Задача 1. (***) Съществуват ли функции $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, за които

$$(x + y)f(2yf(x) + f(y)) = x^3 f(yf(x))$$

за всички реални положителни числа x и y ?

Задача 2. (*Емил Стоянов*) Даден е четириъгълник $ABCD$, за който $AB \nparallel CD$. Средите на AD и BC са означени съответно с M и N . Правата MN пресича диагоналите AC и BD съответно в точки K и L . Да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците AKM и BNL , се пресичат върху правата AB .

Задача 3. (*Емил Колев*) Всяко от числата от множеството $A = \{1, 2, \dots, 2015\}$ е оцветено в червено или зелено. За две естествени числа a и b за един ход имаме право да променяме цвета на произволни a или b последователни числа от A . Двойката (a, b) се нарича *добра*, ако за няколко хода можем да сменим цветовете на всички числа. Естественото число $t \leq 2015$ се нарича *хубаво*, ако всяка двойка (a, b) , за която $a + b = t$, е добра. Да се намерят всички хубави числа.

Задача 4. (*Александър Иванов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Нека M е произволна точка от страната AB , а N е средата на AC . Да означим с P и Q петите на перпендикулярите от A съответно към правите MC и MN . Да се докаже, че когато M се мени, центърът на описаната около $\triangle PQN$ окръжност лежи върху постоянна права.

Задача 5. (*Пламен Пенчев*) Дадени са естествено число n и функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ със следните свойства:

- (1) $f(1) \leq f(2) \leq \dots \leq f(n) \leq f(1) + n$;
- (2) $f(n + i) = f(i)$ за всяко естествено число i ;
- (3) $f(f(i)) \leq n + i - 1$ за всяко естествено число i .

Да се докаже, че $f(1) + f(2) + \dots + f(n) \leq n^2$.

Задача 6. (*Александър Иванов*) Дадена е дъска 19×2015 . Фигурата, съставена от квадрат 10×10 и долепено към него горе вдясно единично квадратче, се нарича *блок*. Блоковете не могат да се ротират. Да се намери броят на начините, по които върху дъската могат да се разположат максимален брой блокове (без припокриване; квадратчетата на блоковете съвпадат с квадратчетата на дъската).

Задача 7. (Пламен Пенчев) Да се намерят всички точни квадрати в редицата с общ член $a_n = 2^n + 2021n$.

Задача 8. (Александър Иванов) Нека $p_1, p_2, \dots, p_{2015}$ са различни прости числа и A е безкрайно множество от естествени числа, чиито прости делители са измежду горните. Да се докаже, че съществува крайно подмножество B на множеството A , такова, че за всяко число $a \in A$ съществува $b \in B$, такова, че $b|a$.

Задача 9. (***) Даден е разностранен $\triangle ABC$ с ортоцентър H и описана около него окръжност Γ . Правата AH пресича Γ в точка D , $D \neq A$, правите BH и CH пресичат съответно CA и AB в точки E , $E \in CA$, и F , $F \in AB$, а правата EF пресича BC в точка P . Допирателните към Γ в точките B и C се пресичат в точка T . Да се докаже, че правите AP и DT се пресичат върху окръжността, описана около $\triangle AFE$.

Задача 10. (Иля Богданов) За един полином от четвърта степен $P(x)$ е известно, уравнението $P(x) = x$ има четири различни реални корена, на всяко уравнение от вида $P(x) = c$, където c е реална константа, има не повече от два реални различни корена. Да се докаже, че уравнението $P(x) = -x$ има не повече от два реални различни корена.

Задача 11. (Александър Иванов) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за които неравенствата $f(g(n)) < f(n+1)$, $g(h(n)) < g(n+1)$ и $h(f(n)) < h(n+1)$ са изпълнени за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Задача 12. (Николай Белухов) Две естествени числа m и n се наричат анаграмни едно на друго, ако всяка десетична цифра се появява в десетичното представяне на m толкова пъти, колкото и в десетичното представяне на n . Съществуват ли четири различни естествени числа със следното свойство: всяко от тях е анаграмно на сумата на трите останали?

32. Балканска олимпиада по математика
3–8 май 2015, Гърция (Атина)

Задача 1. (Черна гора) Нека a , b и c са положителни реални числа. Да се докаже, че

$$a^3b^6 + b^3c^6 + c^3a^6 + 3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + a^2b^2c^2(a^3 + b^3 + c^3).$$

Задача 2. (Кипър) Нека ABC е разностранен триъгълник с център I на вписаната окръжност и описана окръжност (ω) . Правите AI , BI , CI пресичат (ω) повторно съответно в точки D , E , F . Правите през I , успоредни на BC , AC , AB пресичат съответно правите EF , DF , DE в точки K , L , M . Да се докаже, че точките K , L , M лежат на една права.

Задача 3. (Кипър) Всеки от 3366 кинокритици гласува с 1 вот за най-добър актьор и с 1 вот за най-добра актриса. За всяко цяло число $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ има актьор или актриса с точно n получени вота. Да се докаже, че има двама кинокритици, гласували за един и същ актьор и една и съща актриса.

Задача 4. (Сърбия) Да се докаже, че измежду всеки 20 последователни естествени числа има число d , такова че за всяко естествено число n е в сила неравенството

$$n\sqrt{d}\{n\sqrt{d}\} > \frac{5}{2},$$

където $\{x\}$ означава дробната част на реалното число x .

56. Международна олимпиада по математика
4–16 юли 2015, Тайланд (Чианг Май)

Задача 1. (Холандия) Ще казваме, че едно крайно множество $\mathcal{S}$ от точки в равнината е балансирано, ако за всеки две различни точки A и B от $\mathcal{S}$ съществува точка C от $\mathcal{S}$, за която $AC = BC$. Ще казваме, че $\mathcal{S}$ е свободно от центрове, ако за никои три различни точки A , B и C от $\mathcal{S}$ не съществува точка P от $\mathcal{S}$, за която $PA = PB = PC$.

а) Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq 3$ съществува балансирано множество от n точки.

б) Да се намерят всички естествени числа $n \geq 3$, за които съществува балансирано свободно от центрове множество от n точки.

Задача 2. (Сърбия) Да се намерят всички естествени числа a , b и c , за които числата $ab - c$, $bc - a$ и $ca - b$ са степени на 2 ($1 = 2^0$ също е степен на 2).

Задача 3. (Украйна) Нека ABC е остроъгълен триъгълник с $AB > AC$, описана окръжност Γ и ортоцентър H . Нека F е петата на височината от върха A , а M е средата на BC . Нека Q е точка от Γ , за която $\angle HQA = 90^\circ$ и K е точка от Γ , за която $\angle HKQ = 90^\circ$. Точките A , B , C , K и Q са две по две различни и лежат върху Γ в този ред. Да се докаже, че описаните около триъгълниците KQH и FKM окръжности се допират.

Задача 4. (Гърция) Триъгълник ABC е вписан в окръжност Ω с център O . Окръжност Γ с център A пресича отсечката BC в точки D и E , такива, че B , D , E и C са две по две различни и лежат на правата BC в този ред. Нека F и G са пресечните точки на Γ и Ω и са такива, че A , F , B , C и G лежат върху Ω в този ред. Нека K е втората пресечна точка на описаната около триъгълник BDF окръжност и отсечката AB . Нека L е втората пресечна точка на описаната около триъгълник CGE окръжност и отсечката CA . Нека правите FK и GL са различни и се пресичат в точка X . Да се докаже, че X лежи на правата AO .

Задача 5. (Албания) Нека $\mathbb{R}$ е множеството от реалните числа. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяващи

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

за всички реални числа x и y .

Задача 6. (Австралия) Редицата от цели числа $a_1, a_2, \dots$ удовлетворява следните условия:

- (i) $1 \leq a_j \leq 2015$ за всички $j \geq 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ за всички $1 \leq k < \ell$.

Да се докаже, че съществуват естествени числа b и N , такива, че

$$\left| \sum_{j=m+1}^n (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

за всички цели числа m и n , удовлетворяващи $n > m \geq N$.

Български математически състезания 2011–2012

Решения

Есенен Математически Турнир

8.1. Модулното уравнение е еквивалентно на $(2x + 3)^2 = (5 - 2x)^2$, което се опростява до $x = 0, 5$. Двете уравнения ще са еквивалентни, ако параметричното уравнение има единствен корен $x = 0, 5$. Заместваме последното и след опростяване достигаме до квадратното уравнение $p^2 + 2p - 15 = 0$. Последното има корени $p = 3$ и $p = -5$. При $p = 3$ първото уравнение има единствен корен $x = 0, 5$, а при $p = -5$ то добива вида $0 \cdot x = 0$ и всяко x е негово решение. Окончателно само $p = 3$ е решение на задачата.

8.2. От свойството на симетралите имаме $BO = AO = CO$. Да означим $\angle OAB = \angle OBA = x$, $\angle OCB = \angle OBC = y$; тогава $\angle OAC = \angle OCA = 45^\circ - y$. От сбора на ъглите в $\triangle ABC$ получаваме $2x = 90^\circ$, така че $x = 45^\circ$ и $\angle AOB = 90^\circ$. Сега $\angle OBK = 90^\circ - \angle OKB = \angle LAO$, така че $\triangle AOL \cong \triangle BOK$ по втори признак и значи $BK = AL = 2CK$.

Нека M е средата на BK . Имаме $BM = MK = KC$ и $BO = OC$, така че $\triangle BOM \cong \triangle COK$ по първи признак. Значи $OK = OM = MK = BM$; следователно $\triangle KOM$ е равностранен, $\angle BMO = 120^\circ$, $\angle MOB = \angle MBO = 30^\circ$ и $\angle ABC = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.

8.3. Нека $p(p+1)(p+3) = n(n+1)$. Тъй като p е просто, то p ще дели n или $n+1$.

Нека p дели n , т.е. $n = pq$, където $q \geq 2$. Тогава $(p+1)(p+3) = q(pq+1)$, откъдето $p^2 + (4-q^2)p + 3 - q = 0$. Оттук $p|q-3$, т.е. $q = pk+3$, $k \geq 0$ е цяло. След заместване и съкращаване на p получаваме $p = p^2k^2 + 6pk + 5 + k$, което е възможно само при $k = 0$ и съответно $p = 5$, откъдето $n = 15$.

Нека сега p дели $n+1$, т.е. $n+1 = pq$, където $q \geq 2$. Тогава $(p+1)(p+3) = q(pq-1)$, откъдето $p^2 + (4-q^2)p + 3 + q = 0$. Сега имаме $p|q+3$, т.е. $q = pk-3$, $k \geq 1$ е цяло, и достигаме до $p = p^2k^2 - 6pk + 5 - k = k(p^2k - 6p - 1) + 5$. Тъй като $p^2k - 6p - 1 > p$ при $k \geq 4$, имаме $1 \leq k \leq 3$. Директна проверка дава решенията $p = 2, n = 5$ и $p = 3, n = 8$.

Забележка. Уравненията $p^2 + (4-q^2)p + 3 - q = 0$ и $p^2 + (4-q^2)p + 3 + q = 0$ могат да се решат и с анализ на дискриминантата (заклучване между два точни квадрата).

Нека сега $n \geq 4$. Ако минираме полетата, за които $x+y$ се дели на 3, то във всеки квадрат 2×2 има поне едно минирано поле, а във всеки квадрат 3×3 има три минирани полета (по едно на всеки ред), така че $M = 3$. Да допуснем, че е възможно $M \leq 2$. Тогава във всички клетки числата са не по-големи от 2. Да разгледаме произволен квадрат 4×4 . В централния му квадрат 2×2 , който ще означим с К, има неминирано поле П. Понеже в квадратите 2×2 , съдържащи П, има поне по едно минирано поле, а числото в П е не по-голямо от 2, то П се намира между две минирани полета, съседни по страна с него, а останалите съседни полета на П не са минирани. В К съществува поле С, съседно по страна на П, което не е минирано. Да разгледаме квадрата 3×3 с център в С. В него има поне три минирани полета: двете съседни на П и поне още едно в квадрата 2×2 , съдържащ С и несъдържащ П. Така в С трябва да бъде записано поне 3, което противоречи на допускането $M \leq 2$. И така, най-малката възможна стойност на M е 3.

9.1. Тъй като $f(f(x)) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$, от условието получаваме системата $a^2 = |a| + |b| + 2$, $(a+1)b = b^2 - 6b$. При $b = 0$ имаме $a^2 = |a| + 2$ с решения $a = \pm 2$.

При $b \neq 0$ във второто уравнение съкращаваме на b и изразяваме $b = a + 7$. Тогава $a^2 = |a| + |a + 7| + 2$, чиито решения са $a = -3$ (съответно $b = 4$) и $a = 1 + \sqrt{10}$ (съответно $b = 8 + \sqrt{10}$).

68

на дъгата $\widehat{AC}$), то $\triangle AON$ е равнобедрен и тогава $OA = NA = 1$. От правоъгълния $\triangle ABA_1$ имаме $BA_1 = \frac{AB}{2} = AM$ като катет срещу ъгъл от 30° . Освен това $\angle A_1BH = 90^\circ - \angle ACB = \angle OAM$. Следователно $\triangle BA_1H \cong \triangle AMO$ и оттук $BH = OA = 1$.

9.3. Отговор – не! Нека x (съответно y) е броят на редовете (съответно стълбовете), с които са направени нечетен брой ходове. Да забравим за момент за минуса и да го считаме за плюс. Тогава в края минусите са $x(100-y) + y(100-x)$, което е четно число. Следователно 2011 минуса могат да се получат само ако горното число е 2010 или 2012 и отчитането на минуса доведе съответно до увеличение или намаление с 1. Ще докажем, че $x(100-y) + y(100-x) \neq 2010, 2012$.

Ако $x(100-y) + y(100-x) = 2010$, получаваме $(x-50)(y-50) = 1495$. Тъй като $0 \leq x, y \leq 100$, множителите отляво не надминават 50 по абсолютна стойност. Но $1495 = 5 \cdot 13 \cdot 23$ не може да се представи като такова произведение.

Аналогично, от $x(100-y) + y(100-x) = 2012$ получаваме $(x-50)(y-50) = 1494 = 2 \cdot 9 \cdot 83$ и остава да отбележим, че няма как да получим отляво множител 83.

9.4. Очевидно а) следва от б), но ще дадем доказателства и на двете. Ако $p|a$, работа върши всяко n , което се дели на p^2 . Затова ще считаме, че $(a, p) = 1$.

а) Малката теорема на Ферма подсказва идеята да търсим n така, че да са в сила сравненията $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ (защото тогава $a^n \equiv 1 \pmod{p}$) и $n \equiv -1 \pmod{p}$. Безбройно много такива n съществуват съгласно китайската теорема за остатъците. В явен вид имаме $n = s(p-1)$ от първото сравнение и тогава $s \equiv 1 \pmod{p}$, т.е. $s = kp + 1$ от второто. Следователно $n = (p-1)(kp+1)$, $k \geq 0$ е цяло число.

б) За намерените в а) стойности на n имаме

$$a^n + n = a^{kp(p-1)} a^{p-1} + kp^2 - kp + p - 1 \equiv a^{p-1} - kp + p - 1 \pmod{p^2}.$$

(използвахме теоремата на Ойлер за $a^{\varphi(p^2)} \equiv 1 \pmod{p^2}$, $\varphi(p^2) = p(p-1)$). Следователно е достатъчно да изберем k така, че $k \equiv \frac{a^{p-1}-1}{p} + 1 \pmod{p}$, за да получим $a^n + n \equiv 0 \pmod{p^2}$.

10.1. Повдигайки двете страни на квадрат получаваме

$$8x^2 + (8a-6)x + 4a^2 - 6a + 2 = 9x^2 + (6a-6)x + a^2 - 2a + 1,$$

откъдето $x^2 - 2ax + (-3a^2 + 4a - 1) = 0$. Това уравнение е еквивалентно на $(x-3a+1)(x+a-1) = 0$ с корени $x_1 = 3a-1$ и $x_2 = 1-a$. От условието

корените да са положителни и различни имаме условията

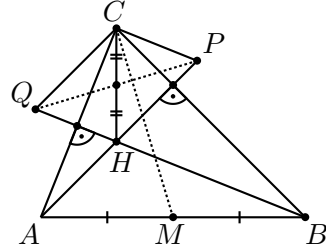
$$\begin{cases} 3a - 1 > 0 \\ 1 - a > 0 \\ 3a - 1 \neq 1 - a \end{cases},$$

откъдето $a \in \left(\frac{1}{3}, 1\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Тъй като дясната страна на уравнението от условието трябва да бъде положителна и за двата корена, за a трябва да са изпълнени условията

$$\begin{cases} 3(3a - 1) + a - 1 > 0 \\ 3(1 - a) + a - 1 > 0 \end{cases}.$$

Оттук $a > \frac{2}{5}$ и $a < 1$. Окончателно $a \in \left(\frac{2}{5}, 1\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

10.2. Нека H е ортоцентър на $\triangle ABC$. Тъй като $CP \parallel QH$ ($\perp AC$) и $CQ \parallel PH$ ($\perp BC$), то $HPCQ$ е успоредник и в частност PQ разполовява CH . От друга страна, $CH \perp AB$, $HP \perp BC$, $CP \perp AC$ и следователно $\triangle CHP \sim ABC$. Така получаваме, че PQ и CM са съответни медиани в подобни триъгълници с перпендикулярни страни и следователно те също са перпендикулярни.



Забележка. Задачата може да се реши и метрично като се използва неколккратно критерият за перпендикулярност на диагоналите в четириъгълник, формулата за медиана в триъгълник и Питагоровата теорема.

10.3. Да означим $A(p) = (2^{p-2} - 1)^p(2^p - 1) - 2^{p(p-2)} + 1$. Тъй като $A(2) = 0$, то $A(2)$ се дели на $2^3 = 8$. Нека $p > 3$ е просто число. Ще докажем, че $2^p A(p)$ се дели на p^3 , което ще означава, че $A(p)$ се дели на p^3 . От теоремата на Ферма имаме $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, което означава, че $2^{p-1} = pk + 1$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Тогава

$$2^p A(p) = (2^{p-1} - 2)^p(2^p - 1) - 2^{p(p-1)} + 2^p = (pk - 1)^p(2pk + 1) - (pk + 1)^p + 2^p.$$

Като използваме бинома на Нютон за $(pk - 1)^p$ и $(pk + 1)^p$ и това, че $\binom{p}{2}$ се дели на p , намираме

$$\begin{aligned} 2^p A(p) &\equiv (p^2 k - 1)(2pk + 1) - (p^2 k + 1) + 2^p \equiv \\ &\equiv p^2 k - 2pk - 1 - p^2 k - 1 + 2^p = 2^p - 2pk - 2 \equiv 0 \pmod{p^3}, \end{aligned}$$

с което доказателството е завършено.

10.4. Дефинираме граф G , в който всеки град е връх и два върха са свързани с ребро, ако между съответните градове има директен път. По условие минималната степен на връх от G е 1. Трябва да докажем, че можем да изберем множество T от (не повече от) $\lfloor n/2 \rfloor$ върха, така че всеки връх да е в T или да е съседен на връх от T .

Нека M е максимална антиклика в G , а N е множеството от останалите върхове в G . Тогава всеки връх от N е свързан с поне един връх от M и, обратно, всеки връх от M е свързан с поне един връх от N . Следователно за всяко от множествата M и N е вярно, че ако построим болници в това множество, то във всеки град има болница или този град е съседен на град с болница. Очевидно поне едно от множествата M и N съдържа не повече от $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ върха.

11.1. а) От условието получаваме

$$a_{2011}^2 = a_1(S_{2010} + S_{2011}) = \frac{a_1((2a_1 + 2009d)2010 + (2a_1 + 2010d)2011)}{2},$$

което след опростяване дава $a_1^2 + 1004a_1d - 1005d^2 = 0$. След разделяне на $d \neq 0$ и решаване на съответното квадратно уравнение, намираме $\frac{a_1}{d} = 1$ или $\frac{a_1}{d} = -1005$. Ако $\frac{a_1}{d} = -1005$, то или $a_1 < 0$ или $d < 0$, което е невъзможно, понеже всички членове на прогресията са положителни числа. Следователно $\frac{a_1}{d} = 1$.

б) От а) имаме, че $a_1 = d$. Тогава $a_n = a_1n$, а от формулите за S_{n-1} и S_n пресмятаме $S_{n-1} = \frac{a_1n(n-1)}{2}$ и $S_n = \frac{a_1n(n+1)}{2}$, откъдето $S_{n-1} + S_n = a_1n^2$. Следователно

$$a_1(S_{n-1} + S_n) = a_1^2n^2 = a_n^2,$$

т.е. a_1 , a_n и $S_{n-1} + S_n$ са последователни членове на геометрична прогресия.

11.2. Нека O_1 и O_2 са центровете на описаните окръжности съответно около $\triangle ABM$ и $\triangle CDM$.

Първи начин. Да означим $\varphi = \angle ABM = \angle CDM$. Тогава

$$\angle O_1MA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AO_1M = 90^\circ - \varphi$$

и аналогично $\angle O_2MC = 90^\circ - \varphi$. Тогава $\angle O_1MO_2 = \angle AMC$.

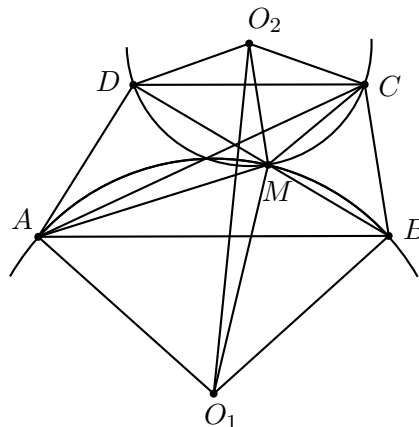
От синусовата теорема получаваме

$$\frac{AM}{CM} = \frac{2O_1M \sin \varphi}{2O_2M \sin \varphi} = \frac{O_1M}{O_2M}.$$

Следователно $\triangle AMC \sim \triangle O_1MO_2$ с коефициент на подобие $2 \sin \varphi$. Оттук получаваме $AC = 2O_1O_2 \sin \angle ABD$, т.е.

$$O_1O_2 = \frac{AC}{2 \sin \varphi}$$

не зависи от избора на точка M .



Втори начин. Нека N е пресечната точка на описаната около $\triangle ABM$ окръжност с AC . Тогава $\angle MDC = \angle ABM = \angle MNC$, което означава, че точките N , M , C и D лежат на една окръжност. Следователно MN е общата хорда на двете окръжности, откъдето $O_1O_2 \perp MN$.

При движение на точка M правата MN сключва постоянен ъгъл (равен на $\angle ABD$) с правата AC , т.е. MN се движи успоредно на себе си. Тъй като $O_1O_2 \perp MN$, правата O_1O_2 също остава успоредна на себе си. Остава да забележим, че точките O_1 и O_2 се движат по симетралите съответно на AB и CD . Това означава, че отсечката O_1O_2 е равна на частта от права, която се движи успоредно на себе, заключена между две постоянни успоредни прави. Следователно дължината на O_1O_2 не зависи от избора на точка M .

11.3. Виж зад. 10.3.

11.4. Да забележим, че ако X и Y са съседни и $|X| = k$, ($k = 1, 2, \dots, n$), то $|Y| = 2n + 1 - k$. Ще докажем, че за всяко $k = 1, 2, \dots, n$ от всички множества с k и $2n + 1 - k$ могат да бъдат избрани най-много $\binom{2n}{k}$ множества между които няма съседни.

Нека p и q са съответно броят на множества с k и $2n + 1 - k$ елемента. Тъй като всяко множество с k елемента има точно k съседни множества с $2n + 1 - k$ (и следователно „забранява“ тези множества) елемента и всяко множество с $2n + 1 - k$ елемента има точно $2n + 1 - k$ съседни множества с k елемента (и следователно може да бъде забранено от всяко от тези множества), то

$$\left\lceil \frac{kp}{2n + 1 - k} \right\rceil + q \leq \binom{2n}{2n - k + 1}.$$

Аналогично

$$\left\lceil \frac{(2n+1-k)q}{k} \right\rceil + p \leq \binom{2n}{k}.$$

Ако допуснем, че $\binom{2n}{k} < p + q$ след събиране на последните три неравенства, намираме

$$\frac{kp}{2n+1-k} + \frac{(2n+1-k)q}{k} \leq \binom{2n}{2n-k+1}.$$

Последното неравенство е невъзможно поради

$$\begin{aligned} \binom{2n}{2n-k+1} &\geq \frac{kp}{2n+1-k} + \frac{(2n+1-k)q}{k} = \\ &= (p+q) \left(\frac{k}{2n+1-k} \right) + q \left(\frac{2n+1-k}{k} - \frac{k}{2n+1-k} \right) > \\ &> \binom{2n}{k} \frac{k}{2n+1-k} = \binom{2n}{2n-k+1} \end{aligned}$$

(използвахме, че $2n+k-1 > k$ и $p+q > \binom{2n}{k}$).

Следователно $p+q \leq \binom{2n}{k}$. Сумираме полученото за $k = 1, 2, \dots, n$ и получаваме, че множествата могат да бъдат най-много

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{n} = 2^{2n-1} + \frac{\binom{2n}{n}}{2} - 1.$$

12.1. Даденото уравнение е еквивалентно на

$$(1) \quad \sin x \pm a \cos x = \pi/2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лявата страна описва интервала $[-\sqrt{1+a^2}, \sqrt{1+a^2}]$ и значи търсените a са тези, за които $\sqrt{1+a^2} \geq \pi/2$, т.е. $|a| \geq \sqrt{\pi^2/4 - 1}$.

12.2. Можем да считаме, че правата пресича страните AC и BC на $\triangle ABC$ в точки D и E . Имаме, че

$$S_{CDE} = S_{CDI} + S_{CEI} = r_{ABC}(CD + CE)/2$$

и следователно $S_{CDE}/S_{ABC} = (CD + CE)/P_{ABC}$. Тогава

$$P_{CDE}/P_{ABED} = S_{CDE}/S_{ABED} = (P_{CDE} - DE)/(P_{ABED} - DE),$$

откъдето $P_{CDE} = P_{ABED}$.

Забележка. Може да се докаже, че за права l и $\triangle ABC$ всеки две от следните условия влекат третото: (1) l разполовява лицето на $\triangle ABC$; (2) l разполовява периметъра на $\triangle ABC$; (3) l минава през центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

12.3. а) Ще докажем, че $k = 3$. Да допуснем, че съществува n , за което има 4 последователни стойности на M (нека това са $t, t+1, t+2, t+3$), за всяка от които печели A . Това означава, че при $M = t+2$ играч A трябва да замени M с $M-n$ (защото в противен случай числото ще стане t или $t+1$ и ще спечели B), като при $M-n = t+2-n$ печели играчът, който не е на ход. Аналогично, за да спечели A , когато $M = t+3$, той трябва да замени M с $M-n$, като при $M-n = t+3-n$ печели играчът, който не е на ход. Получихме две последователни стойности $t+2-n$ и $t+3-n$, за които печели играчът, който не е на ход. Но това е невъзможно тъй като при $t+3-n$ играчът, който е на ход може да замени числото с $t+2-n$ (като извади 1) и да спечели. Полученото противоречие показва, че $k \leq 3$. Остава да забележим, че при $n = 3$ стойностите $M = 1, 2, 3$ са печеливши за A .

б) Ще докажем, че търсените стойности са онези n , които се делят на 3. Лесно се вижда, че при игра, в която е разрешено изваждане само на 1 и 2, първият печели когато M не се дели на три и губи, когато M се дели на три.

Ако n се дели на 3, то $M = n-2$, $M = n-1$ и $M = n$ са печеливши за A ($M = n-2$, $M = n-1$ са печеливши за A тъй като там можем да вадим само 1 или 2).

Ако n не се дели на 3, ще покажем, че когато M се дели на 3 печели вторият играч. Наистина, нека $M = 3t$ е най-малкото M , за което печели A . Тогава $3t-n$ трябва да е печелившо за играча, който не е на ход, което не е вярно, защото $3t-n$ не се дели на 3.

Следователно търсеният брой е $\left\lfloor \frac{2011}{3} \right\rfloor = 670$.

12.4. Да отбележим, че за $m = \inf f \geq 2/3$ имаме

$$0 \geq g(m) = m^4 + m^2 + 4 - 6m = (m-1)^2(m^2 + 2m + 4),$$

откъдето $m = 1$. С (двустранна) индукция по $n \in \mathbb{Z}$ следва, че $\sqrt{6}f(x) > f(x+n)$. Да допуснем, че $f^2(x+1) - f^2(x) = a_x > 0$ за някое x . Тогава

$$f^2(x) - f^2(x-1) = g(f(x)) + 2a_x f^2(x) + a_x^2 > 2a_x$$

и по индукция

$$36f^2(x) - 1 > f^2(x-n+1) - f^2(x-n) > 2^n a_x$$

за всяко $n \in \mathbb{N}$, което е противоречие. И така, $f(x+1) \leq f(x)$ за всяко x , откъдето

$$6f(x) \geq f^4(x+1) + f^2(x+1) + 4.$$

Тогава за $M_x = \sup_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \leq \sqrt{6}f(x)$ следва, че $0 \geq g(M_x)$, т.е. $M_x = 1$. Понеже и $m = 1$, то $f(x) = 1$ за всяко x .

Зимен Математически Турнир “Атанас Радев“

9.1. Равенството от условието е еквивалентно на $ax_1x_2(x_1+x_2) = 18(x_1+x_2)$. При $x_1+x_2 = 0$ получаваме $a = 2$ или $a = 3$. При $x_1+x_2 \neq 0$ имаме $a(a^3-4a+9) = 18 \iff a^4-4a^2+9a-18 = 0 \iff (a-2)(a+3)(a^2-a+3) = 0$. От последното намираме само $a = -3$ като нов кандидат за решение.

При $a = 2$ и $a = 3$ получаваме съответно уравненията $x^2 + 9 = 0$ и $x^2 + 24 = 0$, които нямат реални корени, а при $a = -3$ имаме уравнението $x^2 + 30x - 6 = 0$, което има два различни реални (ненулеви) корена. Следователно единственото решение е $a = -3$.

9.2. а) Тъй като A_1M и B_1M са медиани към хипотенузата AB в правоъгълните $\triangle AA_1B$ и $\triangle BB_1A$, то $A_1M = \frac{AB}{2} = B_1M$. Сега от условието следва, че $\angle A_1MB_1 = 90^\circ$. Освен това $\angle AB_1M = \angle B_1AM = \alpha$ и $\angle BA_1M = \angle A_1BM = \beta$.

Имаме $2 = S_{A_1B_1M} = \frac{A_1M \cdot B_1M}{2} = \frac{AB^2}{8}$ и следователно $AB^2 = 16$, т.е. $AB = 4$. Освен това $\angle AMB_1 = 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle BMA_1 = 180^\circ - 2\beta$, откъдето $90^\circ = \angle A_1MB_1 = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ$, т.е. $\alpha + \beta = 135^\circ$ и следователно $\angle ACB = \gamma = 45^\circ$.

б) Нека O и R са съответно центърът и радиусът на описаната около $\triangle A_1B_1C$ окръжност. Тогава $\angle A_1OB_1 = 2\angle A_1CB_1 = 90^\circ$. Така $\triangle A_1OB_1$ и $\triangle A_1MB_1$ са равнобедрени правоъгълни с обща хипотенуза A_1B_1 . Следователно тези триъгълници са еднакви и оттук $R = OA_1 = A_1M = \frac{AB}{2} = 2$.

9.3. Очевидно $n \neq 1$ и нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ е каноничното разлагане на n . Тогава можем да запишем даденото равенство във вида

$$\frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1} \cdot \frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1} \dots \frac{2\alpha_r+1}{\alpha_r+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3. \quad (1)$$

Да отбележим, че $\frac{3}{2} \leq \frac{2\alpha_i+1}{\alpha_i+1} < 2$ за всяко α_i , като равенство отляво се достига само при $\alpha_i = 1$. Тогава от (1) следва, че $2^r > \left(\frac{3}{2}\right)^3 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^r$, откъдето заключаваме, че $2 \leq r \leq 3$.

При $r = 3$ имаме $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, което дава решенията $n = p_1 p_2 p_3$, където p_1, p_2 и p_3 са различни прости числа.

Нека $r = 2$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Тогава от (1) получаваме

$$\frac{2(2\alpha_2 + 1)}{\alpha_2 + 1} > \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 + 1} \cdot \frac{2\alpha_2 + 1}{\alpha_2 + 1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{2\alpha_1 + 1}{\alpha_1 + 1} \cdot \frac{2\alpha_2 + 1}{\alpha_2 + 1} \geq \left(\frac{2\alpha_2 + 1}{\alpha_2 + 1}\right)^2$$

(използвахме, че $\frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1} \geq \frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1}$ при $\alpha_1 \geq \alpha_2$). От тези неравенства лесно следва, че $3 \leq \alpha_2 \leq 5$. Във всеки от случаите $\alpha_2 = 3, 4, 5$ достигахме до линейно уравнение за α_1 , като получаваме решенията $(\alpha_1, \alpha_2) = (13, 3)$ и $(7, 4)$, т.е. $n = p_1^{13} p_2^3$ и $n = p_1^7 p_2^4$, където p_1 и p_2 са различни прости числа.

9.4. Нека A е подмножество на $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$. Ще означаваме с $S(A)$ сумата на числата от множеството A , а с $S(\overline{A})$ сумата на числата x_i , несъдържащи се в A .

Първи начин. Да построим редица $C_0, C_1, \dots, C_{n^2}$ от n -елементни подмножества на $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$, в която $C_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$, $C_{n^2} = \{x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$, всеки две последователни n -орки имат точно $n-1$ общи елемента и се различават в елементи със съседни индекси. Ясно е, че за всяко $i \in \{0, \dots, n^2-1\}$ е изпълнено равенството $S(C_{i+1}) - S(C_i) = |x_{k+1} - x_k|$ за някакъв индекс k .

Без ограничение на общността можем да приемем, че $S(C_0) - S(\overline{C_0}) < 0$. Тогава $S(C_{n^2}) - S(\overline{C_{n^2}}) > 0$ и следователно съществува индекс j , за който

$$S(C_j) - S(\overline{C_j}) < 0 < S(C_{j+1}) - S(\overline{C_{j+1}}).$$

Отчитайки, че $|S(C_{j+1}) - S(C_j)| = |x_{k+1} - x_k|$ за някакъв индекс k и $S(C_{j+1}) - S(C_j) = S(\overline{C_j}) - S(\overline{C_{j+1}})$, получаваме

$$\begin{aligned} 2|x_{k+1} - x_k| &= |S(C_{j+1}) - S(\overline{C_{j+1}}) - S(C_j) + S(\overline{C_j})| \\ &= |S(C_{j+1}) - S(\overline{C_{j+1}})| + |S(\overline{C_j}) - S(C_j)|. \end{aligned}$$

Следователно едно от двете последни събираеми не надхвърля

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \max_{1 \leq i < 2n} |x_{i+1} - x_i|.$$

Втори начин. Ще докажем твърдението с индукция по n . При $n = 1$ твърдението е очевидно. Да разгледаме $2n+2$ числа $x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}$. Тогава, ако $M = \max_{1 \leq k < 2n+2} |x_{k+1} - x_k|$, то $|x_1 - x_2| \leq M$ и $\max_{3 \leq k < 2n+2} |x_{k+1} - x_k| \leq M$.

Съгласно индукционната хипотеза числата $x_3, x_4, \dots, x_{2n+2}$ могат да бъдат разделени на две групи A и B от по n числа, за които

$$|S(A) - S(B)| \leq \max_{3 \leq k < 2n+2} |x_{k+1} - x_k| \leq M.$$

Без ограничение можем да приемем, че $S(A) \geq S(B)$ и $x_1 \geq x_2$. Да разгледаме множествата $A \cup \{x_2\}$ и $B \cup \{x_1\}$. За съответните суми имаме

$$\begin{aligned} |S(A) + x_2 - S(B) - x_1| &= |(S(A) - S(B)) - (x_1 - x_2)| \\ &\leq \max\{S(A) - S(B), x_1 - x_2\} \leq M. \end{aligned}$$

(Използвахме, че за положителни числа x и y имаме $|x - y| \leq \max\{x, y\}$.)

10.1. Полагаме $t = 2^x > 0$ и получаваме неравенството $\sqrt{3-t} \leq 3-t^2$. Оттук следва, че $t \in (0, \sqrt{3}]$ и след повдигане на квадрат достигахме до еквивалентното неравенство

$$t^4 - 6t^2 + t + 6 \geq 0.$$

По схемата на Хорнер представяме последното във вида $(t+1)(t-2)(t^2+t-3) \geq 0$. Тъй като $t \in (0, \sqrt{3}]$, достигахме до $t \in \left(0, \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$ и следователно

$$x \in \left(-\infty, \log_2 \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right].$$

10.2. *Първи начин.* Ако $f(x) = 0$ има корени $\alpha_1 < \alpha_2$, то корените на $f(f(x)) = 0$ съвпадат с корените на $f(x) = \alpha_1$ и $f(x) = \alpha_2$. При това е ясно, че за да съществуват точно три различни корена е необходимо и достатъчно $f(x) = \alpha_1$ да има точно един двоен корен.

Минимумът на $f(x)$ се достига за $x = -1$ и е равен на $b-1$. Следователно $\alpha_1 = b-1$ и $f(b-1) = 0$, откъдето $b^2 + b - 1 = 0$. Това уравнение има за корени числата $(-1 \pm \sqrt{5})/2$.

При $b = (-1 + \sqrt{5})/2$ имаме

$$\alpha_1 = b - 1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} > \alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

и тази стойност на b не е решение на задачата.

При $b = (-1 - \sqrt{5})/2$ имаме

$$\alpha_1 = b - 1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2},$$

и от $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ следва, че α_1 наистина е по-малкият корен на $f(x) = 0$. Окончателно $b = (-1 - \sqrt{5})/2$.

Втори начин. Записваме $f(x)$ във вида $f(x) = (x+1)^2 + c$, $c = b-1$, откъдето

$$f(f(x)) = (x+1)^4 + 2(c+1)(x+1)^2 + c^2 + 3c + 1 = 0.$$

Единият корен на това уравнение трябва да е нула, а другият – положителен. Оттук получаваме $c = (-3 - \sqrt{5})/2$ и $b = c+1 = (-1 - \sqrt{5})/2$.

10.3. а) Очевидно $\triangle ABC$ е остроъгълен, H е вътрешна точка и ще разгледаме нетривиалния случай, когато $G \neq H$. Ако $CG \cap AB = M$ и $AH \cap BC = P$, то M е среда на AB и P лежи на окръжността с диаметър CH както G . Така получаваме

$$\angle PGC = \angle PHC = 180^\circ - \angle AHC = \angle ABC$$

и следователно четириъгълникът $MBPG$ е вписан в окръжност. Тогава $\angle BGM = \angle BPM = \angle ABC$ и $\angle BAH + \angle BGH = \angle BAH + 90^\circ + \angle ABC = 180^\circ$, което доказва твърдението.

б) *Първи начин.* Ако $G \equiv H$, то $\angle ACB = 60^\circ$. Нека $G \neq H$ и O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Известно е, че H , G и O лежат на една права (т.нар. *права на Ойлер*) и G дели отсечката HO в отношение $2:1$. В частност, O е външна за отсечката HG , т.е. O е външна за окръжността, минаваща през A , B , G и H . Тогава

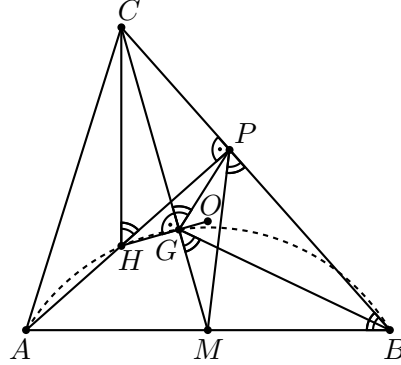
$$\angle AOB < \angle AHB \Rightarrow 2\angle ACB < 180^\circ - \angle ACB \Rightarrow \angle ACB < 60^\circ.$$

Така търсената максимална стойност на $\angle ACB$ е 60° и се достига единствено при равностранен триъгълник.

Втори начин. От $\angle BGM = \angle ABC$ следва, че $\triangle MBG \sim \triangle MCB$. Тогава $MB^2 = MG \cdot MC = \frac{MC^2}{3}$ и от формулата за медиана в триъгълник при стандартни означения достигахме до равенството $a^2 + b^2 = 2c^2$. Така получаваме, че

$$\cos \angle ACB = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2}{4ab} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ACB \leq 60^\circ.$$

10.4. Виж Задача 9.3.



11.1. След разделяне на 9^x и полагане $t = (2/3)^x$ получаваме уравнението

$$at^2 - (2a - 1)t + a - 1 = 0. \quad (1)$$

При $a = 0$ получаваме $t = 1$, откъдето $x = 0$. При $a \neq 0$ корените на уравнението (1) са $t_1 = 1$ и $t_2 = \frac{a-1}{2}$. При $(2/3)^x = 1$ получаваме $x = 0$.

Нека $(2/3)^x = \frac{a-1}{2}$. Директно се проверява, че при $a \geq 4$ и при $a \leq -3$ са изпълнени неравенствата

$$\frac{2}{3} < \frac{a-1}{2} < \frac{3}{2}. \quad (2)$$

Тъй като при $x \notin (-1, 1)$ стойностите на $(2/3)^x$ са извън интервала $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ неравенствата (2) показват, че решение можем да имаме само при $-2 \leq a \leq 3$. Директна проверка дава цели решения само при $a = -2$ и $a = 3$ (съответно $x = -1$ и $x = 1$).

11.2. а) Да означим с N пресечната точка на продължението на BM и правата CD . Тъй като $\angle BNC = \angle ABM = \angle NBC$, то $NC = BC$. Следователно $DN = NC - DC = 12 - 3 = 9$ и от подобие на $\triangle DNM$ и $\triangle ABM$ намираме $\frac{AB}{DN} = \frac{AM}{DM} = \frac{5}{3}$, т.е. $AB = 15$. Понеже $AB + CD = AD + BC = 18$, то в $ABCD$ може да се впише окръжност.

б) Ако P е пресечната точка на AD и BC , от подобие на $\triangle DCP$ и $\triangle ABP$, намираме $\frac{PC}{PC + CB} = \frac{DC}{AB} = \frac{1}{5}$. От това равенство получаваме $PC = 3$, т.е. $AB = PB$. Следователно $BO \perp AP$, което означава, че OM е радиусът на вписаната в $ABCD$ окръжност.

Тъй като $AM = \frac{15}{4}$, от правоъгълния $\triangle AMB$ пресмятаме $BM = \frac{15}{4}\sqrt{15}$ и понеже AO е ъглополовяща на $\angle BAM$, имаме $\frac{OM}{BM - OM} = \frac{AM}{AB}$. От това равенство пресмятаме $OM = \frac{3}{4}\sqrt{15}$.

11.3. Да разделим градовете на две групи P и Q по следния начин. В P влизат всички градове, от които излизат четен брой пътища, а в Q влизат всички градове, от които излизат нечетен брой пътища. Нека $|P| = p$ и $|Q| = q$, като $p + q = 2012$. Според условието на задачата няма път, който да свързва два града от P или два града от Q . Това означава, че всеки път свързва град от P с град от Q . Тъй като от всеки град от P излизат четен брой пътища, то общият брой пътища е четно число. Оттук и от условието,

че от всеки град от Q излизат нечетен брой пътища, следва че q е четно число.

Понеже $p + q = 2012$, то p също е четно число. Това означава, че от всеки град от Q излизат най-много $p - 1$ пътя. Следователно, ако $p = 2p_0$ и $q = 2q_0$, пътищата са най-много $2q_0(2p_0 - 1)$. Тъй като $2q_0 + (2p_0 - 1) = 2011$, то най-голямата стойност на $2q_0(2p_0 - 1)$ се достига когато $2q_0$ и $2p_0 - 1$ са почти равни, т.е. $2q_0 = 1006$ и $2p_0 - 1 = 1005$. Тогава пътищата са $1005 \cdot 1006 = 1011030$.

Ще построим пример, за който пътищата са точно $1005 \cdot 1006$. Нека $A_1, A_2, \dots, A_{1006}$ и $B_1, B_2, \dots, B_{1006}$ са съответно градовете в P и Q . Свързваме всеки от градовете $B_1, B_2, \dots, B_{1004}$ с всеки от градовете $A_1, A_2, \dots, A_{1005}$. Свързваме B_{1005} и B_{1006} с всеки от $A_2, A_3, \dots, A_{1006}$. Директно се проверява, че пътищата са $1006 \cdot 1005$ и от всеки град може да се стигне до всеки друг.

11.4. Да означим с k най-голямата степен на двойката, която дели някое от числата $m, m + 1, \dots, n$. Да допуснем, че има две числа, които се делят на 2^k . Тези числа се представят във вида $2^k t_1$ и $2^k t_2$, където $t_1 < t_2$ са нечетни числа. Числото $2^k(t_1 + 1) < 2^k t_2$ се дели на 2^{k+1} , което е противоречие с избора на k .

Следователно съществува число r , $m \leq r \leq n$, което се дели на 2^k и всяко друго число не се дели на 2^k . Ще докажем, че числото $a^r + 1$ е взаимно просто с всяко от останалите числа. Нека p е прост делител на $a^r + 1$. Тъй като a е четно, то p е нечетно число и тогава p не дели $a^r - 1$. Ако l е показателят на a по модул p , то l дели $2r$ (защото $a^{2r} - 1$ се дели на p), но не дели r (защото $a^r - 1$ не се дели на p). Следователно l се дели на 2^{k+1} .

Да допуснем, че p дели $a^s + 1$ за $s \neq r$. Това означава, че l дели $2s$, т.е. 2^k дели s , което е противоречие.

Покажем, че всеки прост делител на $a^r + 1$ не дели нито едно от останалите числа, т.е. $a^r + 1$ има исканото свойство.

12.1. Тъй като $\sin \pi x \leq 1$ и $n > 1$, то $\log_n(\sin \pi x) \leq 0 \leq \sin^2(\log_n x^\pi)$. Следователно разглежданото равенство е в сила точно когато $\sin \pi x = 1$, т.е. $x = 2k + 1/2$ и $\log_n x^\pi = m\pi$ където $k, m \in \mathbb{Z}$. Оттук получаваме $2k + 1/2 = n^m$ и тогава лесно следва, че $k = 0$, $n = 2$ и $m = -1$.

12.2. Следните твърдения се получават по индукция:

- ако $c \in [0, 1/4]$, то $a_n \leq 1/2$;
- ако $c \in [-2, 0]$, то $c \leq a_n \leq -c$;
- ако $c > 1/4$, то $a_{n+1} > a_n$;
- ако $c < -2$, то $a_{n+1} > a_n > -c$ при $n \geq 2$.

В третия случай уравнението $x = x^2 + c$ няма реални корени и значи редицата (a_n) не е сходяща, откъдето $a_n \rightarrow +\infty$. Същото следва и в четвъртия случай, понеже тогава корените на уравнението са по-малки от $-c$.

И така, отговорът е $c \in [-2, 1/4]$.

Забележки. 1. В първия случай редицата е монотонно растяща и значи сходяща. Може да се докаже, че тя сходяща и при $c \in [-3/4, 0)$ (за повече подробности вж. т. нар. логистична функция).

2. Множеството на Малденброт се състои от всички комплексни числа c такива, че редицата от условието на задачата е ограничена. Това множество се съдържа в затворения кръг с център началото и радиус 2.

12.3. Нека $BC = x$, $CD = y$ и $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$. От косинусовата теорема следва, че $2^2 + 3^2 - 12 \cos \alpha = BD^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha$, откъдето

$$(*) \quad x^2 + y^2 - 13 = 2(xy - 6) \cos \alpha.$$

Случай 1. $xy = 6$. От $x^2 + y^2 = 13$ получаваме, че $x = 2, y = 3$ или $x = 3, y = 2$. В първия случай $ABCD$ е делтоид, а във втория – успоредник.

Случай 2. $xy > 6$. Ако $x \neq y$, то

$$x^2 + y^2 > 2xy + 1 = 2(xy - 6) + 13 > 2(xy - 6) \cos \alpha + 13,$$

което е противоречие със $(*)$.

Следователно $x = y \geq 3$. Нека $\angle CBD = \beta$, $\angle ABD = \gamma$ и $\angle ADB = \delta$. От синусовата теорема следва, че

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin \gamma}.$$

Понеже $x \geq 3$, то $\sin \beta \geq \sin \gamma$. Сега от $\beta + \gamma < \pi$, получаваме, че $\beta \geq \gamma$. От друга страна, от $AB = 2 < 3 = AD$ следва, че $\delta < \gamma$ и значи $\pi - \alpha = \delta + \gamma < 2\gamma \leq 2\beta = \pi - \alpha$, което отново е противоречие.

Случай 3. $xy < 6$. От $(*)$ следва, че

$$-1 < \frac{x^2 + y^2 - 13}{2(6 - xy)} < 1,$$

т.е. $|x - y| > 1$ и $x + y < 5$. Понеже x и y са естествени числа, то $x = 1, y = 3$ или $x = 3, y = 1$. И в двата случая от $(*)$ следва $\cos \alpha = 1/2$.

Ако $y = 3$, то $\angle CAD = \angle ACD$. Понеже $\angle BAD = \angle BCD$, получаваме, че $\angle BAC = \angle BCA$, т.е. $AB = BC$ – противоречие.

В случая $x = 3$, $y = 1$ полученият четириъгълник $ABCD$ е изпъкнал. Имаме да проверим, че $\angle ADC < 180^\circ$ и $\angle ABC < 180^\circ$. От косинусовата теорема намираме, че $BD = \sqrt{7}$. Следователно $\triangle ABD$ е остроъгълен, а $\angle BDC > 90^\circ$. Оттук $\angle ABC < 180^\circ$. Също така $\frac{2}{\sin \angle ADB} = \frac{3}{\sin \angle BDC}$ и значи $\sin \angle ADB < \sin \angle BDC$. Понеже първият ъгъл е остър, а вторият – тъп, следва, че тяхната сума, т.е. мярката на $\angle ADC$, е по-малка от 180° .

12.4. Виж Задача 11.4.

Пролетни математически състезания

9.1. а) Тъй като $\angle ABD = \angle BDE = 60^\circ$, имаме $DE \parallel AB$ (и $\triangle ABM \sim \triangle EDM$). Тогава $\frac{DM}{MB} = \frac{DE}{AB}$. Аналогично получаваме $\frac{CN}{NB} = \frac{CF}{AB}$. Следователно

$$\frac{DM}{MB} + \frac{CN}{NB} = \frac{DE}{AB} + \frac{CF}{AB} = \frac{BD + CD}{AB} = 1.$$

б) Без ограничение на общостта можем да считаме, че $AB = 1$ и $BD = \frac{1}{3}$. Да означим $DM = x$ и $CN = y$. Тогава както в а) имаме $\frac{x}{1/3 - x} = \frac{1}{3}$, откъдето $x = \frac{1}{12}$ и аналогично $\frac{y}{1 - y} = \frac{2}{3}$, откъдето $y = \frac{2}{5}$. Следователно $MN = x + \frac{2}{3} - y = \frac{7}{20}$, т.е. $\frac{MN}{BC} = \frac{7}{20}$.

9.2. Тъй като $x = 0$, $y = 0$ е решение за всяко a , задачата се свежда до това системата да няма друго решение. След почленно изваждане и събиране на двете уравнения получаваме еквивалентната система

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (a - 1)(x - y) \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (a + 1)(x + y) \end{cases} \quad (1)$$

Ако $y = x$, (1) се свежда до $2x^3 = 2(a + 1)x$. Оттук $x = 0$ (и $y = 0$) или $x^2 = a + 1$. Последното уравнение няма ненулево реално решение само при $a \leq -1$.

Ако $y = -x$, (1) се свежда до $2x^3 = 2(a - 1)x$. Оттук $x = 0$ (и $y = 0$) или $x^2 = a - 1$. Това уравнение няма решение, понеже $a - 1 < 0$ при $a \leq -1$.

При $y \neq \pm x$, (1) е еквивалентна на системата

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a - 1 \\ x^2 - xy + y^2 = a + 1 \end{cases} \quad (2)$$

Събираме почленно двете уравнения на (2) и получаваме $x^2 + y^2 = a$, което е невъзможно при $a \leq -1$. Следователно (2) няма решение.

Окончателно, дадената система има единствено решение ($x = 0, y = 0$) точно когато $a \leq -1$.

9.3. Нека $p > 5$ е просто число, $n = p - 2$ и да означим $N = n! - 1 = (p - 2)! - 1$. По теоремата на Уилсън имаме $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ и, тъй като $(p - 1)! = (p - 1)(p - 2)! \equiv -(p - 2)! \pmod{p}$, следва, че $(p - 2)! \equiv 1 \pmod{p}$. С други думи, N се дели на p . Да допуснем, че N няма друг прост делител, т.е. $N = p^m, m \in \mathbb{N}$. Тогава $N \equiv 1 \pmod{p - 1}$. От друга страна, $2 < \frac{p-1}{2} < p - 2$ поради $p > 5$, което означава, че 2 и $\frac{p-1}{2}$ са различни множители в $(p - 2)!$ и тогава $2 \cdot \frac{p-1}{2} = p - 1$ дели $(p - 2)!$. Оттук $N \equiv -1 \pmod{p - 1}$, което противоречи на $N \equiv 1 \pmod{p - 1}$. Следователно N има и прост делител, различен от p , т.е. N се дели на поне две различни прости числа.

Накрая, да изберем p от вида $3k + 2, k > 1$. Както е известно, съществуват безбройно много прости числа от този вид. Тогава $n = 3k$ е съставно число и твърдението е доказано.

9.4. Да разгледаме произволни две полета с обща страна. Тъй като в началото тези полета са оцветени различно, а накрая – еднакво, то при някой от ходовете тяхната обща страна е трябвало да бъде част от границата на съответния правоъгълник за този ход (Защо?).

Полетата, които граничат с ръба на дъската, са $4(n - 1)$ на брой, и имат помежду си $4(n - 1)$ общи страни. Лесно се вижда, че границата на всеки правоъгълник със страни, успоредни на страните на дъската, може да съдържа най-много четири от тези общи страни (по две в двата крайни реда или по две в двата крайни стълба). Следователно са ни необходими поне $4(n - 1)/4 = n - 1$ хода.

Дъската може да стане едноцветна при следните $n - 1$ хода: преоцветяваме последователно 2, 4, ..., $(n - 1)$ -ви ред, после 2, 4, ..., $(n - 1)$ -ви стълб. В този момент всички полета са с началния цвят на ъгловите полета. Сега с един ход върху цялата дъска достигахме до другия цвят.

Следователно отговорът е $n - 1$ хода за черна дъска (цветът, в който отначало са били ъгловите полета) и n хода за бяла дъска.

10.1. Първи начин. Нека $x \geq -1$. Тогава уравнението приема вида $a^{x+1} - 1 = |a^{x+1} - 1|$. При $a > 1$ уравнението има безбройно много решения, а при $0 < a < 1$ – единствено решение $x = -1$.

Нека $x < -1$. Тогава уравнението приема вида

$$\frac{1}{a^{x+1}} - |a^{x+1} - 1| = 1.$$

Полагайки $y = a^{x+1}$ получаваме $y|y - 1| + y - 1 = 0$. Можем да приемем, че $0 < a < 1$, откъдето следва, че $y > 1$. Сега уравнението приема вида $y^2 = 1$, противоречие с $y > 1$. Окончателно търсените стойности за a са $0 < a < 1$.

Втори начин. Ако $0 < a < 1$, то $a^{|x+1|} \leq a^0 = 1$. От друга страна $a^{|x+1|} = |a^{x+1} - 1| + 1 \geq 1$ и следователно $a^{|x+1|} = 1$, т.е. уравнението има единствено решение $x = -1$.

Ако $a \geq 1$, то всяко $x \geq -1$ е решение, защото

$$a^{|x+1|} - |a^{x+1} - 1| = a^{x+1} - (a^{x+1} - 1) = 1.$$

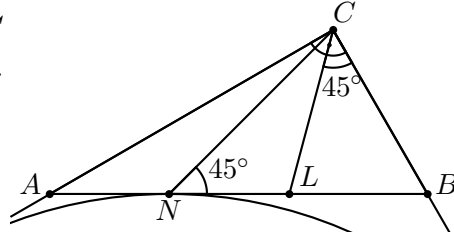
Така окончателно, търсените стойности за a са $0 < a < 1$.

10.2. Първи начин. Нека CL е ъглополовящата на $\angle ACB$ ($L \in AB$). Тогава $\angle BCL = 45^\circ = \angle BNC$, т.е. $\triangle BNC \sim \triangle BCL$, $\frac{BC}{BN} = \frac{BL}{BC}$ и следователно $BC^2 = BN \cdot BL$.

При стандартните означения за $\triangle ABC$ имаме $BN = p - a$ и $BL = \frac{ac}{a+b}$.

Получаваме

$$a^2 = (p - a) \cdot \frac{ac}{a+b} \Leftrightarrow ab = (b - a)p.$$



От друга страна $ab = 2S_{ABC} = 2pr = 2p(p - c)$ и след заместване в горното равенство достигаме до $b - a = 2(p - c)$, т.е. $c = 2a$ и следователно $\angle BAC = 30^\circ$.

Втори начин. Нека вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k се допира до страната AB в точка P . Ако означим с Q диаметрално противоположната точка на P в k , то добре известен факт е, че точките C , Q и N са колинеарни. (Стандартното доказателство е с хомотетия с център C , която изпраща k във външнописаната окръжност.) От $\angle BNC = 45^\circ$ следва, че $NP = PQ$, т.е. $b - a = 2r = 2(p - c)$, $c = 2a$ и $\angle BAC = 30^\circ$.

10.3. Да запишем в клетката в ред i и стълб j числото

$$n \cdot ((i + j) \pmod{n}) + (i - j) \pmod{n}.$$

Ясно е, че всяко частно и всеки остатък се срещат точно веднъж в ред и стълб. Да допуснем, че в клетки (i, j) и (k, l) , $(i, j) \neq (k, l)$, има записано едно и също число. Тогава

$$\begin{aligned}i + j &\equiv k + l \pmod{n}, \\i - j &\equiv k - l \pmod{n}.\end{aligned}$$

откъдето $i = k$, $j = l$, противоречие.

10.4. Нека 2012 е представено като сума от кубовете на M цели числа. Лесно се проверява, че за произволно цяло число x ,

$$x^3 \equiv 0, 1, \text{ или } -1 \pmod{9}$$

и тъй като $2012 \equiv 5 \pmod{9}$, следва, че $M \geq 4$. От друга страна, едно възможно представяне на 2012 като сума на четири куба е

$$2012 = (-4)^3 + 5^3 + (-25)^3 + 26^3$$

и следователно $M = 4$.

11.1. От равенствата $a + c = 2b$ и $\sin a + \sin c = 2 \sin b$ получаваме

$$\sin a + \sin c = 2 \sin \frac{a+c}{2} \cos \frac{a-c}{2} = 2 \sin b \cos \frac{a-c}{2} = 2 \sin b.$$

Ако $\sin b \neq 0$, то $\cos \frac{a-c}{2} = 1$, което е невъзможно при $a, c \in (0, 2\pi)$ и $a \neq c$.

Следователно $\sin b = 0$, т.е. $b = \pi$. Тогава $\sin \left(\frac{a+b+c}{2} \right) = \sin \left(\frac{3b}{2} \right) =$

$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, което означава, че разликата на аритметичната прогресия

$\sin a, \sin b, \sin c, \sin \left(\frac{a+b+c}{2} \right)$ е $-\frac{1}{2}$. Тогава $\sin a = \frac{1}{2}$ и $\sin c = -\frac{1}{2}$. Оттук

получаваме решенията $a = \frac{\pi}{6}, b = \pi, c = \frac{11\pi}{6}$ и $a = \frac{5\pi}{6}, b = \pi, c = \frac{7\pi}{6}$.

11.2. Първи начин. Да означим $CP = x$ и $BP = y$. Тогава $S_{CPQ} = \frac{CQ \cdot PQ}{2} =$

$\frac{x^2 \sin \gamma \cos \gamma}{2}$ и аналогично $S_{BPR} = \frac{y^2 \sin \beta \cos \beta}{2}$. Освен това

$$S_{PQR} = \frac{PQ \cdot PR \sin \angle QPR}{2} = \frac{xy \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha}{2},$$

откъдето намираме

$$x^2 \sin \gamma \cos \gamma = y^2 \sin \beta \cos \beta = xy \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha.$$

Следователно $(xy \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha)^2 = (x^2 \sin \gamma \cos \gamma) \cdot (y^2 \sin \beta \cos \beta)$, което означава, че

$$\sin \gamma \sin \beta \sin^2 \alpha = \cos \gamma \cos \beta.$$

Сега от $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ и $\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma = \cos(\beta + \gamma) = -\cos \alpha$ получаваме $\cos \alpha(1 - \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta) = 0$. Тъй като вторият множител е винаги положителен, получаваме $\cos \alpha = 0$, т.е. $\alpha = 90^\circ$.

Втори начин. Нека QX , ($X \in PR$) е височина в $\triangle PQR$. От $S_{PQR} = S_{PBR}$ следва, че $QX = BR$. Тогава $RBXQ$ е успоредник и следователно $BX \parallel RQ$. Аналогично, ако RY , ($Y \in QP$, то $CY \parallel RQ$. Тогава $BX \parallel CY$. Остава да съобразим, че X и Y са от една и съща полуравнина относно BC и единствената възможност е X , Y и P да съвпадат. Това означава, че $\angle QPR = 90^\circ$, откъдето $\angle BAC = 90^\circ$.

11.3. Да забележим, че всички елементи на множеството Y са нечетни числа. Това означава, че в множеството X няма нечетни числа, т.е. елементите на B са четни числа.

Ако M е най-големият елемент на B , то $9+2M$ и $2.9+M$ са най-големите елементи съответно на Y и на X . От условието следва, че тези два елемента се различават с 1, откъдето намираме $M = 8$ или $M = 10$. Аналогично, за най-малкия елемент m на B имаме $m = 2$ или $m = 4$. Следователно елементите на B са четни числа, като най-голямото от тях е 8 или 10, а най-малкото е 2 или 4.

Множествата с това свойство са 18: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\{2, 6, 8, 10\}$, $\{2, 4, 8, 10\}$, $\{2, 4, 6, 10\}$, $\{2, 8, 10\}$, $\{2, 6, 10\}$, $\{2, 4, 10\}$, $\{2, 10\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$, $\{2, 6, 8\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 6, 8, 10\}$, $\{4, 8, 10\}$, $\{4, 6, 10\}$, $\{4, 10\}$, $\{4, 6, 8\}$ и $\{4, 8\}$.

Директна проверка показва, че само 5 от тези множества не удовлетворяват условието на задачата: $\{2, 8, 10\}$, $\{2, 4, 10\}$, $\{2, 10\}$, $\{2, 8\}$ и $\{4, 10\}$. Следователно търсените множества са 13.

11.4. Ще докажем твърдението за произволно естествено число n . За целта ще ни е нужна следната лема.

Лема. Ако $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ са естествени числа, които не се делят на p , то за всяко r , $1 \leq r \leq p-2$, можем да изберем няколко от тях, чиято сума дава остатък r при деление с p .

Доказателство. Да положим $S_0 = 0$ и да допуснем, че сме получили k , $0 \leq k \leq p-2$ суми $S_0, S_1, \dots, S_k$, във всяка от които участват само числа от

$x_1, x_2, \dots, x_k$ и които дават различни остатъци при деление на p . Да добавим числото x_{k+1} и да разгледаме сумите $S_0 + x_{k+1}, S_1 + x_{k+1}, \dots, S_k + x_{k+1}$, които явно дават различни остатъци при деление с p . Ако допуснем, че тези остатъци са пермутация на $S_0, S_1, \dots, S_k$ и съберем почленно, ще получим $(k+1)x_{k+1} \equiv 0 \pmod{p}$, което е невъзможно. Следователно получаваме поне един нов остатък и така по индукция ще получим всички възможни ненулеви остатъци. С това лемата е доказана.

Сега твърдението следва по индукция. Тъй като сумата на дадените числа се дели на p , имаме база на индукцията.

Да допуснем, че съществуват числа $b_1, b_2, \dots, b_{2p-1}$, които удовлетворяват условието и такива, че $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{2p-1}b_{2p-1} = p^n A$, където $n \geq 1$, p не дели A . Понеже в интервала $[1, p^2]$ има точно p числа, които се делят на p , то измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_{2p-1}$ има поне $p-1$, които не се делят на p . Нека без ограничение това са $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$.

Съгласно лемата без ограничение на общността можем да приемем, че за числата $a_1, a_2, \dots, a_k$ е вярно, че сумата $a_1 + a_2 + \dots + a_k + A$ се дели на p . Сега, ако положим $b'_i = b_i + p^n$ за $i = 1, 2, \dots, k$ и $b'_i = b_i$ за $i = k+1, \dots, 2p-1$, то новите числа удовлетворяват условието и сумата $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{2p-1}b_{2p-1}$ се дели на p^{n+1} .

12.1. Можем да считаме, че $AB = 1$. Нека $BM = x$, $CM = y$ и k е търсеното отношение.

Първи начин. Имаме, че $2r_{\triangle ACM} = (2 - x - y)\text{tg}30^\circ$ и $2r_{\triangle BCM} = (1 + x - y)\text{tg}30^\circ$ и следователно

$$\frac{2 - x - y}{1 + x - y} = \frac{y}{x} - 1 \Leftrightarrow (y - 1)(y - 3x) = 0 \Leftrightarrow k = 2 \quad (\text{понеже } y < 1).$$

Втори начин. От формулата $S = pr$ следва, че

$$\frac{1 - x}{x} = k \frac{2 - x + y}{1 + x + y}, \quad \text{т.е. } ((k + 1)x - 1)y = (k - 1)x^2 - 2kx + 1.$$

От друга страна, $y^2 = x^2 - x + 1$ съгласно косинусовата теорема и $y = (k + 1)x$ по условие. Тогава

$$y(y - 1) = (k - 1)(x^2 - x + 1) - (k + 1)x + 2 - k = (k - 1)y^2 - y + 2 - k$$

откъдето $(k - 2)(y^2 - 1) = 0$, т.е. $k = 2$.

Забележка. От първия начин за решение следва, че $r_{\triangle AMC} = 2r_{\triangle BMC}$ точно когато $CM = 3BM$.

12.2. Дефиниционното множество на функцията $f(x) = \lg(\sin x) - \sin(\lg x)$ са интервалите от вида $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, и там тя е непрекъсната. Понеже f клони към $-\infty$ в краищата на тези интервали, достатъчно е да покажем, че $f(2k\pi + \pi/2) = -\sin(\lg(2k\pi + \pi/2)) \geq 0$ за безбройно много $k \in \mathbb{Z}^+$. Това означава, че $(2m-1)\pi \leq \lg(2k\pi + \pi/2) \leq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, т.е.

$$k \in \left[\frac{2 \cdot 10^{(2m-1)\pi} - \pi}{4\pi}, \frac{2 \cdot 10^{2m\pi} - \pi}{4\pi} \right].$$

Остава да съобразим, че дължината на всеки от тези интервали е по-голяма от 1 и левият му край е положителен при $m \in \mathbb{N}$; значи той съдържа естествено число.

12.3. Първо ще отбележим, че ако $x, y \leq 1 \leq c, d$, то (*) $x + y \leq 1 + \frac{xc+yd-1}{c+d-1}$, защото след привеждане под общ знаменател получаваме очевидното неравенство $(x-1)(d-1) + (y-1)(c-1) \leq 0$.

Да предположим сега, че в две кутии имаме c и d топки, от които съответно e и f са бели. Като положим $x = e/c$ и $y = f/d$, от (*) следва, че ако в едната кутия оставим само една топка, и то бяла, а останалите топки прехвърлим във втората кутия, то разглежданата вероятност не намалява.

И така, при даден брой $k \leq a$ на кутиите най-голяма вероятност $P(k)$ се реализира, ако в $k-1$ от кутиите сложим по една бяла топка, а в останалата кутия всички други топки; значи

$$P(k) = \frac{k-1}{k} + \frac{a+1-k}{k(a+b+1-k)} = 1 - \frac{b}{k(a+b+1-k)}.$$

При $k > a$ в a от кутиите трябва да сложим по една бяла топка, а в останалите кутии по произволен начин черните топки; значи $P(k) = \frac{a}{k}$. Имаме, че $\max_{k>a} P(k) = \frac{a}{a+1}$ и $\max_{k \leq a} P(k) = 1 - \frac{b}{k_0(a+b+1-k_0)}$, където k_0 е цялата част на $\frac{a+b+1}{2}$ при $a > b$ и $k_0 = a$ при $a \leq b$.

Следователно

$$\max P = \begin{cases} 1 - \frac{1}{a+1}, & a \leq b \\ 1 - \frac{4b}{(a+b+1)^2}, & a > b, \ a+b - \text{нечетно} \\ 1 - \frac{4b}{(a+b+1)^2-1}, & a > b, \ a+b - \text{четно}. \end{cases}$$

12.4. Отговор: Не. Да допуснем противното. Тогава съществува отворен кръг с радиус, по-голям от 1, който съдържа ортоцентъра H на $\triangle ABC$ и не съдържа A , B и C . Следователно отсечките AH , BH и CH пресичат

границата на кръга (която е окръжност), например съответно в точки A_1 , B_1 и C_1 . Понеже

$$\angle B_1AC_1 \leq \angle B_1A_1C_1 < \angle B_1HC_1 = 180^\circ - \angle BAC \leq 180^\circ - \angle B_1AC_1,$$

то $\sin \angle B_1AC_1 \leq \sin \angle B_1A_1C_1$ и значи

$$2R_{\triangle A_1B_1C_1} = B_1C_1 / \sin \angle B_1A_1C_1 \leq B_1C_1 / \sin \angle B_1AC_1 = 2R_{\triangle AB_1C_1}.$$

Аналогично $R_{\triangle AB_1C_1} \leq R_{\triangle ABC_1} \leq R_{\triangle ABC}$ и получаваме противоречието $R_{\triangle A_1B_1C_1} \leq 1$.

Забележка. Може да се докаже, че:

а) ако $\triangle ABC$ е остроъгълен с радиус на описаната окръжност 1, то обединението на отворените кръгове с радиус, по-голям от 1, които не съдържат A , B и C , е $\mathbb{R}^2 \setminus \{A, B, C, H\}$;

б) ако S е затворено подмножество на единичната окръжност Γ , то $\Gamma \setminus S$ е обединение на отворени кръгове с радиус, по-голям от 1, тогава и само тогава, когато S лежи от едната страна на диаметър на Γ .

Ще отбележим, че всяко обединение на отворени кръгове с радиус, по-голям от 1, може да се представи като обединение на изброимо много такива кръгове.

61. Национална олимпиада по математика, Областен кръг

9.1. Ако допуснем, че x е целочислено решение на уравнението, то $x \geq |a|$ и след повдигане на квадрат достигахме до еквивалентното уравнение

$$2\sqrt{x^2 - a^2} = x^2 - 2x.$$

Следователно $x \in [2, \infty) \cup \{0\}$ и след повторно повдигане на квадрат достигахме до $4x^3 - x^4 = 4a^2$. Но $4a^2 \geq 0$, т.е. $x \in [2, 4] \cup \{0\}$ и понеже x е цяло число, то $x = 0, 2, 3$ или 4 . Така окончателно получаваме $a = 0, \pm 2$ или $\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

9.2. Нека $\angle BAC = \alpha$. Тогава

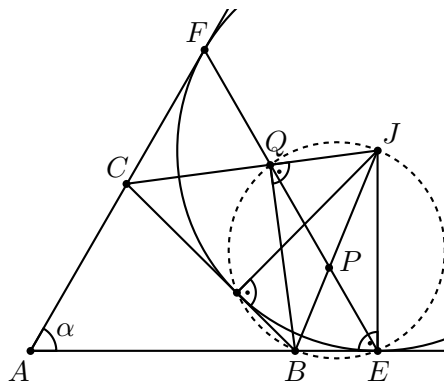
$$\angle BJC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle BEF$$

и следователно четириъгълникът $BEJQ$ е вписан в окръжност. Тъй като $\angle BEJ = 90^\circ$, то тази окръжност е с диаметър BJ . В същото време $\angle JQP = \angle EBP = \angle CBP$ и следователно четириъгълникът $CBPQ$ е вписан в окръжност (с диаметър BC). Тогава

$$\triangle JQP \sim \triangle JBC \Rightarrow \frac{JQ}{JB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{1}{2},$$

т.е. $\angle JBQ = 30^\circ$. Но $\angle JQB = 90^\circ$ и следователно

$$\angle BAC = \alpha = 180^\circ - 2\angle BJC = 2\angle JBQ = 60^\circ.$$



9.3. Ако $p|a$, имаме $a^{p^n} + p^n = p^n(pA + 1)$, където A е естествено число, и твърдението очевидно е вярно. Оттук нататък ще считаме, че $(a, p) = 1$.

Нека p е нечетно, $n = pk$ и $a^{p^{n-1}} = x$ и $p^k = y$. Тогава

$$a^{p^n} + p^n = x^p + y^p = (x + y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + \dots - xy^{p-2} + y^{p-1})$$

и да допуснем, че това число има не повече от един прост делител, т.е. е равно на q^t за някое просто q и някое естествено t . Очевидно $q \neq p$. От $q|x + y$ следва, че $x \equiv -y \pmod{q}$ и тогава

$$x^{p-1} - x^{p-2}y + \dots - xy^{p-2} + y^{p-1} \equiv py^{p-1} \pmod{q}$$

не се дели на q , противоречие.

Нека $p = 2$ и $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, $a^{2^{n-2}} = u$, $2^k = v$ за краткост. Тогава

$$a^{2^n} + 2^n = u^4 + 4v^4 = (u^2 + 2uv + 2v^2)(u^2 - 2uv + 2v^2),$$

като лесно се доказва, че двата множителя отдясно са взаимнопрости и поголеми от 1 и значи имат различни прости делители.

9.4. Тъй като $g(1) = 1 + a^2 + b^2 > 0$, общият корен не може да бъде 1. Да допуснем, че -2 е общ корен на $f(x)$ и $g(x)$. Тогава $f(-2) = -8 - 2a + b = 0$ и $g(2) = -8 + 4a^2 + b^2 = 0$, откъдето последователно получаваме $b = 2(a + 4)$,

$4a^2 + 4(a+4)^2 = 8 \iff a^2 + 4a + 7 = 0$. Тъй като последното уравнение няма реални решения, и -2 не може да бъде общ корен на $f(x)$ и $g(x)$.

Ако -1 е общия корен, имаме $f(-1) = -1 - a + b = 0$ и $g(-1) = -1 + a^2 + b^2 = 0$, откъдето $b = a + 1$, $a^2 + (a+1)^2 = 1 \iff 2a^2 + 2a = 0$, т.е. $a = 0$ или $a = -1$, като съответно $b = 1$ или $b = 0$.

9.5. Ако използваме стандартните означения за $\triangle ABC$, то:

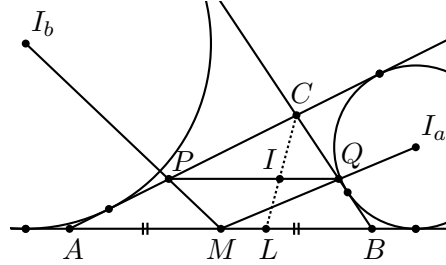
$$\frac{CP}{PA} = \frac{S_{CMI_b}}{S_{AMI_b}} = \frac{\frac{1}{2}S_{CBI_b} + \frac{1}{2}S_{CAI_b}}{\frac{1}{2}S_{ABI_b}} = \frac{r_b a + r_b b}{r_b c} = \frac{a+b}{c}.$$

Аналогично $\frac{CQ}{QB} = \frac{a+b}{c}$, т.е. $\frac{CP}{PA} = \frac{CQ}{QB}$ и следователно $PQ \parallel AB$. От друга страна, ако $CI \rightarrow$ пресича страната AB в точка L , то

$$\frac{CI}{IL} = \frac{CB}{BL} = \frac{a}{\frac{ac}{a+b}} = \frac{a+b}{c}$$

и следователно $I \in PQ$.

Забележка. От теоремата на Пап, приложена за тройките точки A, M, B и I_b, C, I_a , лесно следва, че $I \in PQ$ независимо от избора на точката M върху страната AB . Но само когато M е среда на AB имаме, че $PQ \parallel AB$.



9.6. На езика на графите тази задача се формулира така: Даден е регулярен граф G с n върха (n е нечетно), различен от пълния граф. Каква е максималната възможна мощност на клика в G ?

Да допуснем, че в G съществува клика C с мощност $(n+1)/2$. Допълнителният граф $\overline{G}$ е също регулярен като C е антиклика. Ако от всеки връх на $\overline{G}$ излизат $\overline{d} = n-1-d$ ребра, то общият брой на ребрата, излизащи от C е $(n+1)\overline{d}/2$. Този брой трябва да е равен на броя на ребрата, влизащи във $G-C$. Това е невъзможно, тъй като сумата от степените на върховете в $G-C$ е $\overline{d}(n-1)/2$. Следователно мощността на максимална клика не надхвърля $(n-1)/2$.

Да конструираме пример на регулярен граф с клика с мощност $(n-1)/2$. Нека $n = 4k+1$. Да означим върховете с $\{x_1, \dots, x_{2k}, y_1, \dots, y_{2k}, z\}$. Върху върховете $x_1, \dots, x_{2k}$ от една страна и върху $y_1, \dots, y_{2k}$ от друга, са построени $2k$ -кликите. Добавени са и ребрата $zy_1, \dots, zy_k, zx_1, \dots, zx_k$, както и $x_{k+1}y_{k+1}, \dots, x_{2k}y_{2k}$.

Нека $n = 4k + 3$. G се получава като обединение на $(2k + 1)$ -клика и $(2k + 2)$ -клика, от която е изтрит 1-фактор (множество от ребра, съдържащо всеки връх точно веднъж).

10.1 Даденото уравнение има смисъл за всяко x . Да положим $u = \sqrt[3]{1 + 3^x}$ и $v = \sqrt[3]{1 - 3^x}$, като u и v са реални числа и $u > 1 > v$. Имаме $u + v = a$ и

$$2 = u^3 + v^3 = (u + v)((u + v)^2 - 3uv) = a(a^2 - 3uv),$$

откъдето $a \neq 0$ и тогава $uv = \frac{a^3 - 2}{3a}$.

Следователно u и v са корените на уравнението $f(t) = t^2 - at + \frac{a^3 - 2}{3a} = 0$. Необходимо и достатъчно условие u и v да са реални числа и $u > 1 > v$ е $f(1) < 0$, т.е.

$$1 - a + \frac{a^3 - 2}{3a} < 0 \Leftrightarrow a(a - 2)(a^2 - a + 1) < 0.$$

Следователно търсените стойности на параметъра са $a \in (0, 2)$. (Друго възможно решение е да не се отбележи, че $u > 1 > v$, а само $u > v$, $D > 0$, откъдето отново достигахме до $a \in (0, 2)$.)

10.2. Виж Задача 9.2.

10.3. Виж задача 9.3.

10.4. Виж задача 9.4.

10.5. Виж задача 9.5.

10.6. Виж задача 9.6.

11.1. Имаме

$$2|a| = |\sin x + a \sin 2x + \sin 5x| \leq |\sin x| + |a| |\sin 2x| + |\sin 5x| \leq 2 + |a|, \quad (1)$$

откъдето $|a| \leq 2$. Директно проверяваме, че $x = 0$ е решение при $a = 0$ и $x = \pm 90^\circ$ е решение при $a = \pm 1$.

При $a = 2$ уравнението става $\sin x + 2 \sin 2x + \sin 5x = 4$ и (1) показва, че $\sin x = \sin 2x = 1$. Това е невъзможно, защото при $\sin x = 1$ имаме $\cos x = 0$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$. При $a = -2$ уравнението става $\sin x - 2 \sin 2x + \sin 5x = -4$ и (1) показва, че $\sin x = -1$, $\sin 2x = 1$. Това е невъзможно, защото при $\sin x = -1$ имаме $\cos x = 0$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$.

11.2. а) Нека K е средата на дъгата $\widehat{AB}$, не съдържаща точка C . Тогава $KM \perp AB$ и $\triangle CHT \sim \triangle KMT$. Следователно

$$\frac{HT}{TM} = \frac{CH}{KM} = \frac{2R \cos \gamma}{R - R \cos \gamma} = \frac{2 \cos \gamma}{1 - \cos \gamma}.$$

в) Ако Q е петата на перпендикуляра от M към BC , то Q е среда на BA_1 ($AA_1 \perp BC$). Тогава $\frac{PQ}{PA_1} = \frac{MT}{TH}$, откъдето $PA_1 = \frac{2BA_1 \cos \gamma}{1 + \cos \gamma}$. Тъй като $HA_1 = BA_1 \cot \gamma$, от $\triangle PHA_1$ намираме $\operatorname{tg} \angle HPA_1 = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ и следователно $\angle HPC = \frac{\gamma}{2}$.

б) Ако R е петата на перпендикуляра от T към AC , както в а) намираме $\angle HRC = \frac{\gamma}{2}$. Тогава от четириъгълника $RHPC$ намираме $\angle PHR = 180^\circ$.

11.3. Търсеният максимум е 16092. Да разгледаме ъглите, сочещи нагоре и надясно. Ще докажем, че има най-много 4023 такива ъгъла, всеки два от които имат поне едно общо квадратче. Да въведем стандартни координати на единичните квадратчета в равнината и да разгледаме върховете на всички ъгли. Ако за координатите (a, b) и (c, d) на върховете на два ъгъла е изпълнено $a < c$ и $b < d$ (или съответно $a > c$ и $b > d$), то двата ъгъла не се пресичат.

Нека най-горният и най-ляв връх е с координати (i, j) и съответно най-долният и най-десен връх е (p, q) . За да се пресичат съответните ъгли е необходимо $p - i \leq 2011$ и $j - q \leq 2011$.

Да забележим, че всеки друг връх е с координати (a, b) , където $i \leq a \leq p$ и $j \leq b \leq q$. От всички такива върхове да изберем връх с най-голяма втора координата. Да забележим, че ако преместим този връх едно квадратче наляво, условието за пресичане на ъглите е изпълнено. Това означава, че можем да приемем, че всички върхове с най-голяма втора координата са разположени един до друг, започвайки от квадратчето (i, b) . Аналогично, можем да считаме, че всички върхове с най-голяма първа координата са разположени един до друг, започвайки от квадратчето с координати (c, q) .

Сега разглеждаме върховете, ограничени от квадратчетата с координати (i, b) за най-голямото b и (c, q) за най-голямото c . Повтаряме горната процедура и т.н. Ще получим, че всички върхове се съдържат в начупена линия, започваща от квадратчето (i, j) и завършваща в квадратчето (p, q) , която се движи само на дясно и надолу. Понеже такава начупена линия съдържа 4021 върха, получаваме, че можем да разположим най-много 4023 ъгли.

Аналогично за всяко от другите три разположения на ъглите имаме най-много 4023 ъгли, изпълняващи условието на задачата.

Следователно има най-много $4 \cdot 4023 = 16092$ ъгли. Ако изберем едно квадратче и разгледаме всички ъгли, които го съдържат, ще получим точно 16092 ъгли с исканото свойство.

11.4. Уравнението е еквивалентно на $x^3 + ax + 1 = 2x^3 + a > 1$. Тогава $0 = x^3 - ax + a - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1 - a)$. Значи $x = 1$ е решение на даденото уравнение, когато $2 + a > 1$, т.е. $a > -1$.

Уравнението $x^2 + x + 1 - a = 0$ има реални корени при $1 - 4(1 - a) \geq 0$, т.е. $a \geq 3/4$. Ако някой от тези корени е 1, то $a = 3$. Тогава другият корен е -2 и той не е решение на началното уравнение, защото $2(-2)^3 + 3 \leq 1$. Ако и двата корена са различни от 1, за тях трябва

$$2x^3 \leq 1 - a = -x^2 - x, \quad \text{т.е.} \quad x(2x^2 + x + 1) \leq 0.$$

Понеже $2x^2 + x + 1 > 0$, тези корени трябва да не са положителни. Тъй като тяхната сума е -1 , а произведението им е $1 - a$, това означава, че $a \leq 1$. Окончателно, $a \in (-1, 1] \cup \{3\}$.

11.5. От малката теорема на Ферма получаваме, че $p|12^{q+1} - 1$ и $q|12^{p+1} - 1$. Тъй като $q + 1 = p - 1$, то $p|12^{q+1} - 1$.

От $q|12^{p+1} - 1$ следва, че показателят k на 12 по модул q дели $p + 1$ и тъй като k дели и $q - 1 = p - 3$, то k е делител на 4. Следователно $k = 1, 2, 4$.

При $k = 1$ намираме $q = 11$ и $p = 13$. При $k = 2$ намираме $q = 13$, което не дава решение, понеже 15 не е просто. При $k = 4$ намираме $q = 5$ и $p = 7$, $q = 29$ и $p = 31$.

11.6. От $P^2(x) = P^2(-x)$ следва, че P е или четна, или нечетна функция.

Ако P е четна функция, то $P(x) = Q(x^2)$. Тогава $Q((x^2 + a)^2) = Q^2(x^2)$ и следователно $Q((x + a)^2) = Q^2(x)$ за всяко x . Оттук $Q(x^2) = Q^2(x - a)$, т.е. полиномът $Q(x - a)$ също изпълнява даденото условие, като $\deg P = 2 \deg Q$.

Продължавайки по същия начин, ще стигнем до полином от нечетна степен, изпълняващ даденото условие. Той не може да е четна функция.

И така, остана да разгледаме случая, когато P е нечетна функция. Тогава $P(x) = xR(x^2)$ и следователно $(x^2 + a)R((x^2 + a)^2) = x^2R^2(x^2)$. Оттук $(x + a)R((x + a)^2) = xR^2(x)$, т.е. $P(x) = (x - a)R^2(x - a)$ за всяко x . Нека $R(x - a) = x^k S(x)$, където $S(0) \neq 0$. Лесно се вижда, че $(x - a)R^2(x - a) = x^{2k+1}T(x) - aS(0)x^{2k}$. Понеже P е нечетна функция, следва, че $a = 0$.

Забележки. а) Лесно се доказва, че ако $P(x^2) = P^2(x) \neq \text{const}$ за всяко x , то $P(x) = x^n$.

б) Задачата е много частен случай на теорема на Дж. Ф. Рит, която описва комутиращите (относно композиция) полиноми.

12.1. Виж задача 11.1.

12.2. Виж задача 11.2.

12.3. а) За всяко естествено число $x > 1$ е изпълнено равенството $(2x+1)^2 - (2x^2-2) + (2x+2)^2 - (2x^2-2) = (2x+3)^2$. Ако $(2x+1)^2 - (2x^2-2)$ или $(2x+2)^2 - (2x^2-2)$ е в цвета на $2x^2-2$, то имаме необходимото представяне. В противен случай $(2x+1)^2 - (2x^2-2)$ и $(2x+2)^2 - (2x^2-2)$ са в един и същи цвят и отново имаме нужното представяне.

б) Не! Да оцветим всички числа от вида $2^m(4t+3)$ в цвят A , а всички числа от вида $2^n(4k+1)$ в цвят B . Да допуснем, че сборът на две различни числа с цвят A е степен на двойката. Тогава $2^{n_1}(4k_1+3) + 2^{n_2}(4k_2+3) = 2^l$. Ако $n_1 \neq n_2$, получаваме противоречие по модул 2, а ако $n_1 = n_2$, имаме $4(k_1+k_2+1) + 2$ е степен на двойката, което е невъзможно. По същия начин доказваме, че сборът на две различни числа с цвят B не е степен на двойката.

12.4. Виж Задача 11.4.

12.5. а) За $f(x) = x - \cos x$ имаме, че $f'(x) = 1 + \sin x > 0$ при $x \neq -\pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) и значи f е строго растяща функция. Понеже $f(0) < 0 < f(1)$, следва, че f има точно една нула.

б) Нека x_0 е нулата на f . Тъй като $x_0 \in (0, 1)$ и $a_n \in [-1; 1]$ при $n \geq 2$, то

$$|a_{n+1} - x_0| = |\cos a_n - \cos x_0| = 2 \left| \sin \frac{x_0 + a_n}{2} \sin \frac{x_0 - a_n}{2} \right| \leq k |a_n - x_0|,$$

където $k = \sin 1 \in (0, 1)$. Следователно $|a_n - x_0| \leq k^{n-2} |a_2 - x_0|$ при $n \geq 2$ и значи $a_n \rightarrow x_0$.

12.6. Виж задача 11.6.

61. Национална олимпиада по математика, Национален кръг

1. Отговор – Не! Очевидно редицата е строго растяща. Да допуснем, че $a_n = x^2$ и $a_{n+1} = y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$. Тогава x и y са с еднаква четност и

$$2\tau(n) = a_{n+1} - a_n = y^2 - x^2 \geq (x+2)^2 - x^2 = 4x + 4.$$

Тъй като $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$ (това следва лесно от факта, че естествените делители на n , евентуално без $\sqrt{n}$, се разбиват на двойки с точно един от двойката,

по-малък от $\sqrt{n}$), получаваме $\sqrt{n} > x = \sqrt{a_n}$, т.е. $n > a_n$, което очевидно е невъзможно.

2. Първо ще оцветим всички естествени числа и нулата в два цвята (зелен и червен) така, че да не съществува безкрайна едноцветна аритметична прогресия и да няма три последователни едноцветни числа.

Разделяме естествените числа и нулата на групи, като i -та група за $i = 0, 1, 2, \dots$ започва с числото $2^i - 1$ и завършва с $2^{i+1} - 2$. Във всяка група числата се оцветяват алтернативно в двата цвята, като при четно i първото число в групата се оцветява в зелено, а при нечетно i първото число се оцветява в червено.

Очевидно при това оцветяване няма три последователни едноцветни числа. Ако допуснем, че има безкрайна едноцветна аритметична прогресия с разлика d , то за достатъчно голямо i дължината на i -та група ще бъде по-голяма от d . Това означава, че d е четно число, но тогава два последователно члена на прогресията, лежащи в различни групи са разноцветни. Следователно не съществува безкрайна аритметична прогресия от едноцветни числа. Това оцветяване ще наричаме оцветяване A .

Ще построим оцветяване B , което удовлетворява условието на задачата. Да оцветим всяко естествено число $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ в цвета на числото $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ от оцветяване A . Тъй като в A няма три последователни едноцветни числа, то за всяко просто число p и всяко естествено число n числата p^n , p^{n+1} и p^{n+2} не са едноцветни.

Тъй като в A няма безкрайна едноцветна аритметична прогресия, то при оцветяване B няма безкрайна едноцветна геометрична прогресия.

3. Отговор – Сашо има печеливша стратегия при $a > 0$ и $a = -1$, а Дени – при $a < 0$, $a \neq -1$.

Нека уравнението е $f(x) := a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$.

Случай 1. $a = -1$. На първия ход Сашо попълва a_2 . Когато Дени попълни a_1 или a_3 , то Сашо попълва a_3 или a_1 с противоположното число, а когато тя попълни a_0 или a_4 , той попълва a_4 или a_0 със същото число. Сменяйки x с $1/x$ и/или умножавайки $f(x)$ с -1 (ако е нужно), можем да считаме, че $f(x) = x^4 + x^3 \pm x^2 - x + 1$. Остава да съобразим, че

$$2f(x) \geq 2(x^4 + x^3 - x^2 - x + 1) = (x^2 + x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 + x^2 > 0.$$

Случай 2. $a > 0$. На първия ход Сашо попълва a_1 (с произволна степен на a), а на третия – a_3 , ако този коефициент не е попълнен, и някой друг коефициент в противен случай.

Ако последният непопълнен коефициент е a_0 или a_4 , то Сашо го попълва с достатъчно голямо число (което е степен на a – положителна при $a > 1$ и отрицателна при $0 < a < 1$). Тогава $f(x) > 0$ за всяко x .

Ако последният непопълнен коефициент е a_2 , то Сашо го попълва с достатъчно голямо число и печели. Наистина, за $g(x) = a_0x^2 + a_1x + a_3/x + a_4/x^2$ ($x \neq 0$) имаме, че $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$. В частност, g е ограничена отдолу функция и значи ако a_2 е достатъчно голямо число, то $f(x) > 0$ за всяко x .

Случай 3. $a < 0$, $a \neq -1$. Сменяйки x с $1/x$ (ако е нужно), можем да считаме, че отначало Сашо е попълнил a_2 , a_3 или a_4 . Тогава Дени попълва a_0 – в третия случай с противоположно по знак число на a_4 и печели, а иначе с положително число. Сега Сашо трябва да попълни a_4 с положително число. Нека

$$p_1(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_4/x, \quad p_2(x) = a_0x + a_2/x + a_3/x^2 + a_4/x^3 \quad (x \neq 0).$$

Накрая Дени попълва съответно a_1 или a_2 (съответно при вече попълнено a_2 или a_3) така, че $p_i(1) < p_i(-2)$ ($i = 1, 2$). Понеже

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p_i(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} p_i(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p_i(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} p_i(x) = -\infty,$$

следва, че p_i приема всяка стойност. Значи уравненията $-a_3 = p_1(x)$ и $-a_1 = p_2(x)$ имат решения, т.е. каквото и да попълни Сашо накрая уравнението $f(x) = 0$ ще има реален корен.

4. Ще докажем твърдението с индукция по n . За $n = 2$ имаме $A = \{11, 10, 01\}$ и твърдението е очевидно. Допускаме, че то е вярно за някое четно k . При $n = k + 2$ разглеждаме тройка $(a_1a_2 \dots a_n, b_1b_2 \dots b_n, c_1c_2 \dots c_n)$ с исканото свойство. Тогава тройките $(00a_1 \dots a_n, 00b_1 \dots b_n, 00c_1 \dots c_n)$, $(01a_1 \dots a_n, 10b_1 \dots b_n, 11c_1 \dots c_n)$, $(10a_1 \dots a_n, 11b_1 \dots b_n, 01c_1 \dots c_n)$, $(11a_1 \dots a_n, 01b_1 \dots b_n, 10c_1 \dots c_n)$ също имат исканото свойство. Директно се вижда, че по този начин получаваме всички ненулеви редици с дължина $k + 2$.

5. Ако $x, y, z > 0$ неравенството е очевидно, защото $P(t) > P(0) = 0$ при $t > 0$. Без ограничение можем да предполагаме, че $x, y < 0$ и $z > 0$. Тогава $P(z) > P(-x-y)$ и е достатъчно да докажем, че $P(x+y) + P(-x) + P(-y) > 0$ за произволни $x, y > 0$. Нека $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Тъй като $P(x)$ е растяща функция в интервала $(0, \infty)$, лесно следва, че $a > 0$ и $c \geq 0$ (докажете!). От

друга страна,

$$\begin{aligned} P(x+y) + P(-x) + P(-y) &= 2a(x^4 + y^4 - x^2y^2) + 2c(x^2 + y^2) \\ &\quad + xy(4a(x+y)^2 + 3b(x+y) + 2c) \end{aligned}$$

и тъй като $x^4 + y^4 - x^2y^2 > 0$, $x^2 + y^2 > 0$ и $xy > 0$, достатъчно е да докажем, че $4a(x+y)^2 + 3b(x+y) + 2c > 0$ за $x, y > 0$. Това неравенство следва от факта, че функцията $P(x)$ е растяща, откъдето

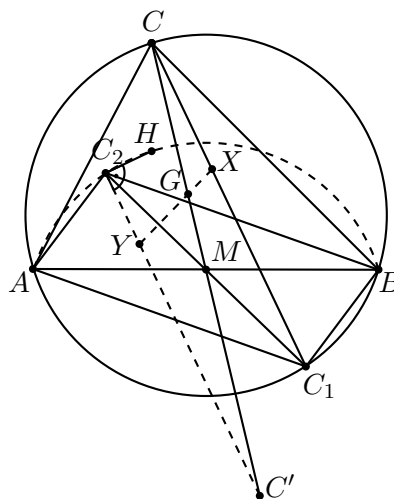
$$4a(x+y)^3 + 3b(x+y)^2 + 2c(x+y) = P'(x+y) > 0.$$

6. Първи начин. Ще докажем, че търсената постоянна точка е ортоцентърът H на $\triangle ABC$ (в случая, когато X съвпада с центъра на k , точките A_2 , B_2 и C_2 съвпадат именно с H). Нека M средата на AB , G е медицентърът на $\triangle ABC$ ($G \in CM$), C' е симетричната точка на C относно M и правата XG пресича C_2C' в точката Y . Тъй като четириъгълникът $C_2C'C_1C$ е успоредник, то $XG : GY = CG : GC_1 = 1 : 2$, т.е. точката Y се определя еднозначно от X .

От $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$ следва, че точките A , C' , B , H и C_2 лежат на една окръжност (симетрична на k относно M). При това тази окръжност е с диаметър HC' , защото

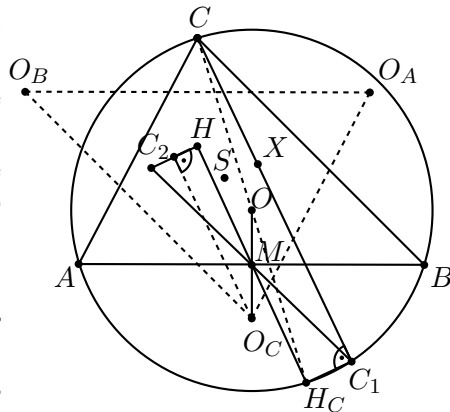
$$\angle HBC' = \angle HBA + \angle ABC' = \angle HBA + \angle BAC = 90^\circ.$$

Следователно $\angle HC_2Y = 90^\circ$, т.е. C_2 лежи на окръжността с диаметър HY . Аналогично A_2 и B_2 лежат на тази окръжност, с което доказателството е завършено.



Втори начин. Нека O е центърът на k , а O_A , O_B и O_C са симетричните точки на O относно страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$. Тъй като отсечките AO_A , BO_B и CO_C взаимно се разполовяват в точка S , то $\triangle ABC$ и $\triangle O_AO_BO_C$ са централно симетрични относно S . Ще докажем, че при тази централна симетрия правата CC_1 се изобразява в симетралата на отсечката HC_2 .

Нека M средата на AB и H_C е симетричната точка на H относно M . От $H_CA \parallel BH$ и $H_CB \parallel AH$ следва, че $\angle H_CA C = \angle H_CB C = 90^\circ$, т.е. H_C е диаметрално противоположната точка на C в окръжността k и $\angle H_C C_1 C = 90^\circ$. Следователно симетралата на $H_C C_1$ минава през O и е успоредна на правата CC_1 . От друга страна, симетралата на HC_2 е централно симетричен образ на $H_C C_1$ относно M , т.е. тя минава през O_C и е успоредна на CC_1 .

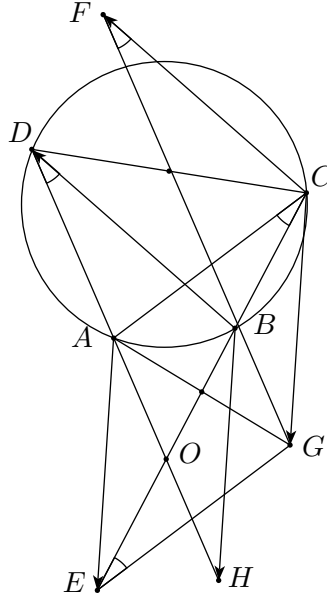


Така достигаме до извода, че симетралите на HA_2 , HB_2 и HC_2 се пресичат в централно симетричния образ на точката X относно S , която се явява център на описаната окръжност около точките A_2 , B_2 , C_2 и H .

Забележка. Твърдението в задачата остава в сила и когато $\triangle ABC$ не е остроъгълен.

Контролно за определяне на отбора за БОМ 2012

1. Нека H е симетричната точка на A спрямо пресечната точка на AD и BC . Тогава $\vec{CF} = \vec{BD}$ и $\vec{CG} = \vec{AE} = \vec{BH}$. Оттук следва, че триъгълниците FCG и DBH са еднакви. Получаваме, че $\angle CFG = \angle BDH = \angle ACB = \angle CEG$ ($AEGC$ е успоредник), т.е. точките E, F, G и C лежат на една окръжност.



Забележка. Задачата има изчислително решение с използване на синусови теореми. Тя може да се реши и като се построи средната отсечка през O в $\triangle DBE$ и се използва подобие.

2. Да заменим 2012 с произволно $n \geq 2$ и $x_{12} = 1$ с $x_k = 1$, $1 \leq k < n$. С индукция по n следва, че

$$(*) \quad S_n := \sum_{i,j=1}^n \min(i,j) x_i x_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n x_j \right)^2.$$

При $n = 1$ това е очевидно. Нека $(*)$ е вярно за някое n . Тогава лесно се вижда, че

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)x_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^n 2ix_i x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{j=i}^{n+1} x_j \right)^2.$$

Ако $s_{n,k} = \sum_{i=k+1}^n x_i$, то $S_n \geq (1 + s_{n,k})^2 + s_{n,k}^2 \geq 1/2$. Не е трудно да се съобрази, че $S_n = 1/2$ само при $x_{k+1} = x_{k-1} = -1/2$ и $x_i = 0$ при $|i - k| > 1$.

Забележка. Равенството (*) може да се докаже и така: ако $f_i(x) = 1$ при $x \in [0, i]$ и $f_i(x) = 0$ иначе ($1 \leq i \leq n$), то

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n x_j \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i \left(\sum_{j=i}^n x_j f_j(x) \right)^2 dx = \int_0^n \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(x) \right)^2 dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \int_0^n f_i(x) f_j(x) dx = \sum_{i,j=1}^n \min(i, j) x_i x_j. \end{aligned}$$

3. Да допуснем противното. Ако $a_i = 1$ за някое i , получаваме $a|(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \dots (a + a_n - 1)|a^{n+1} + a - 1$, което очевидно е невъзможно. Оттук нататък ще считаме, че $a_i \geq 2$.

Нека $a = ba_1 a_2 \dots a_n$ и $a^{n+1} + a - 1 = c(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \dots (a + a_n - 1)$. Очевидно $(b, c) = 1$, $1 \leq b \leq a - 1$, а лесно се вижда, че

$$c \leq \frac{a^{n+1} + a - 1}{(a + 1)^n} < a.$$

Освен това $ba_1 a_2 \dots a_n \equiv ca_1 a_2 \dots a_n \pmod{a - 1}$, което, заедно с горните и $(b, c) = 1$, дава $b = c = 1$.

Сега имаме

$$\begin{aligned} a^{n+1} + a - 1 &= (a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \dots (a + a_n - 1) \\ &< (a + a_1)(a + a_2) \dots (a + a_n) \\ &= a \left(\frac{a}{a_1} + 1 \right) \dots \left(\frac{a}{a_n} + 1 \right) \leq a \left(\frac{a}{2} + 1 \right)^n \leq a^{n+1}, \end{aligned}$$

противоречие.

4. Отговор – 56. Да допълним нашата дъска до дъска 13×13 , добавяйки нулев ред и нулев стълб. В новата дъска да асоциираме царя на поле (i, j) , $i, j \in \{1, 2, \dots, 12\}$, с четворката полета (i, j) , $(i - 1, j)$, $(i, j - 1)$, $(i - 1, j - 1)$.

Лесно се вижда, че два царя, които се атакуват, са асоциирани най-много с 6 полета общо (т.е. поне две полета са асоциирани и с двата царя). Нещо повече, никое поле не е асоциирано с две двойки атакуващи се царе. Следователно търсеният максимален брой не надминава $2 \left\lceil \frac{13^2}{6} \right\rceil = 56$.

Предоставяме на читателя да покаже конструкция с 56 царя, всеки от които да атакува точно един друг цар.

Забележка. Горният подход лесно решава задачата и в общия случай – отговорът за дъска $n \times n$ е $2 \left\lceil \frac{(n+1)^2}{6} \right\rceil$.

5. Нека $f(x, y) = k \in [2000, 2012]$ за някои цели x и y . Ако $5|x$, то $5|k$ и ако $7|y$, то $7|k$. Ако $(5, x) = (7, y) = 1$, то $k \equiv 7x^2 \equiv \pm 2 \pmod{5}$ и $k \equiv 5y^3 \equiv \pm 2 \pmod{7}$. Последното дава (например с Китайската теорема за остатъците) 4 възможности за k по модул 35, но само една от тях, 2007, е в разглеждания интервал.

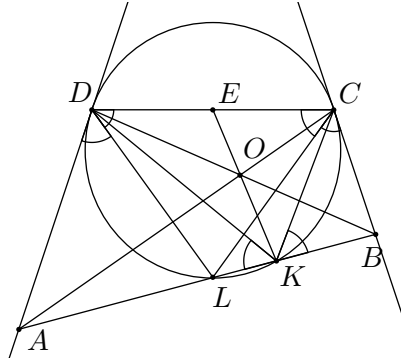
Сега имаме 6 възможности за k : 2000, 2002, 2005, 2009, 2010 и 2007. Последната се реализира от $7 \cdot 21^2 + 5(-6)^3 = 2007$. Ще докажем, че останалите не се реализират.

Ако $7x^2 + 5y^3 = 2000$, то $5|x$, оттук $5|y$ и тогава $5^3|7x^2$, което води до противоречие по модул 5^4 . Ако $7x^2 + 5y^3 = 2005$ или 2010, то $x = 5x_1$, $x_1 \in \mathbb{Z}$, и получаваме $35x_1^2 + y^3 = 401$ или 402, които са невъзможни по модул 7.

Ако $7x^2 + 5y^3 = 2009$, то $7|y$, оттук $7|x$ и тогава имаме противоречие по модул 7^3 . Ако $7x^2 + 5y^3 = 2002$, то $y = 7y_1$, $y_1 \in \mathbb{Z}$, и получаваме $x^2 + 5 \cdot 49y_1^3 = 286$, което е невъзможно по модул 7.

6. Да означим с E средата на CD и с O пресечната точка на AC и BD . Нека $X = AC \cap DK$ и $Y = BD \cap CK$. От теоремата на Чева за $\triangle DKC$ следва, че е достатъчно да докажем равенството $\frac{DX}{XK} \cdot \frac{KY}{YC} \cdot \frac{CE}{ED} = 1$. То е еквивалентно на

$$\frac{DX}{XK} = \frac{YC}{KY} \iff \frac{S_{ACD}}{S_{AKC}} = \frac{S_{DCB}}{S_{DKB}} \iff \frac{S_{AKC}}{S_{DKB}} = \frac{S_{ACD}}{S_{DCB}}.$$



Като използваме, че $\angle ADC = \angle BCD$ и $\angle AKD = \angle BKC$, свеждаме последното равенство до

$$(1) \quad \frac{AK \cdot KC}{DK \cdot KB} = \frac{AD}{BC}.$$

От $\triangle ALD \sim \triangle AKD$ следва, че

$$(2) \quad \frac{DL}{DK} = \frac{AD}{AK}.$$

От $\triangle BKC \sim \triangle BLC$ следва, че

$$(3) \quad \frac{KC}{CL} = \frac{BK}{BC}.$$

Като умножим (2) и (3) и използваме, че $DL = CL$, получаваме $\frac{KC}{DK} = \frac{AD \cdot BK}{AK \cdot BC}$, което е еквивалентно на (1).

7. Първи начин. Ще използваме неравенството на Бернули (НБ): ако $-1 < t \neq 0$, то $(1+t)^r > 1+rt$ при $r > 1$ и $(1+t)^r < 1+rt$ при $0 < r < 1$.

Полагаме $y = -x$. Можем да считаме, че $y > 1$.

При $y \geq 2$ записваме неравенството във вида (*) $(1-2^x)^y \geq 1/2$. От НБ следва, че $(1-2^x)^y > 1-y2^x$ и $2^{y-1} \geq y$, т.е. $1-y2^x \geq 1/2$, с което (*) е доказано.

При $1 < y < 2$ записваме неравенството във вида

$$z := \frac{(1 + (2^{1-1/y} - 1))^y - 1}{2^{1-1/y} - 1} \geq 2^{y-1}$$

и остава да съобразим, че $z > y > 2^{y-1}$ пак съгласно НБ.

Втори начин. Можем да считаме, че $x < -1$. Полагаме $2^x = t \in (0, 1/2)$ и записваме неравенството във вида $f(t) \leq f(1/2)$, където $f(t) = \ln t \cdot \ln(1-t)$. Имаме, че

$$t(1-t)f'(t) = (1-t)\ln(1-t) - t\ln t =: g(t) \quad \text{и} \quad g''(t) = \frac{2t-1}{t(1-t)} < 0.$$

Понеже $g(0+) = g(1/2) = 0$, то $g > 0$. Значи f е строго растяща функция, откъдето следва исканото.

8. (Оценка) Да наречем *добри* числата от S , които не са лоши. Да отбележим, че всяко добро число може да бъде записано като сума на поне две и най-много девет (не непременно различни) лоши числа. Тъй като имаме $\binom{10+j}{9}$, $j = 2, 3, \dots, 9$, суми с по j числа, мощността на S не надминава $\sum_{j=1}^9 \binom{10+j}{9} = \binom{19}{10}$ (събираемостта от $j = 1$ добавя и лошите числа).

(Конструкция) Нека сме избрали нашите 10 лоши числа от интервала $[10^{100}, \frac{10^{101}-1}{9}]$. Да отбележим, че в този интервал има $(10^{100} - 1)/9$ числа,

от които можем да избираме. Освен това е ясно, че сумите на поне две и най-много девет (не непременно различни) числа от този интервал са 100-цифрени числа и можем да ги разглеждаме за включване в S . Остава да прецизираме избора така, че да не се получават еднакви суми.

Да предположим, че вече сме избрали j лоши числа и всички суми на най-много девет (не непременно различни) от тях са различни. Следващото лошо число не трябва да дели никое от вече избраните и не трябва да е равно на разлика на вече избрани лоши числа. Това забранява не повече от

$$\frac{10^{10}(10^{10} - 1)}{2} + 10^{10} \cdot 9 < 10^{21}$$

(използвахме неравенството $\binom{19}{10} < 10^{10}$) възможности и вече е очевидно, че можем да направим избора на следващото $(j+1)$ -во, $j+1 \leq 10$, лошо число.

Контролно за определяне на отбора за МОМ 2012

1. Ще използваме стандартните означения за ъглите и радиуса на $\triangle ABC$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\alpha \geq \beta$. Ако $OH \parallel AD$ (H е ортоцентърът на $\triangle ABC$), в $\triangle OHC$ имаме $\angle HOC = \beta + 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (имаме $\beta < 90^\circ$) и $\angle OCH = (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \alpha) = \alpha - \beta$, откъдето $\angle OHC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тогава $\frac{OC}{CH} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos(\beta - \frac{\alpha}{2})}$.

От друга страна, имаме $CH = 2R \cos \gamma$ и следователно $\cos(\beta - \frac{\alpha}{2}) = 2 \cos \gamma \cos \frac{\alpha}{2} = -2 \cos(\alpha + \beta) \cos \frac{\alpha}{2}$, откъдето получаваме $\cos(\beta - \frac{\alpha}{2}) = -\cos(\beta + \frac{\alpha}{2}) - \cos(\beta + \frac{3\alpha}{2})$, $-\cos(\beta + \frac{\alpha}{2}) = 2 \cos(\beta + \frac{\alpha}{2}) \cos \alpha$. От последното имаме $\cos(\beta + \frac{\alpha}{2}) = 0$, което дава $\beta = \gamma$, или $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, откъдето $\alpha = 120^\circ$.

Оставяме на читателя да проследи разсъжденията в обратната посока.

2. Ясно е, че числото $\frac{M}{X^2}$ е свободно от квадрати (ако $p^2 \mid \frac{M}{X^2}$ за някое просто p , то $(pX)^2 \mid M$, което противоречи на максималността на X). Следователно $\frac{M}{X^2} = p_1 p_2 \dots p_k$ за някои две по две различни прости числа p_i , $i = 1, 2, \dots, k$. От записа на това равенство във вида $X^2 = \frac{M}{p_1 p_2 \dots p_k}$ става ясно, че всяко възможно премахване на три делителя отговаря на редица с елементи 1, 2 и 3 и дължина k (делителите се получават, като умножим числата p_i отговарящи на 1 за първия, тези на 2 за втория и тези на 3 за третия). Трите редици от еднакви числа отговарят на един и същи делител, а всяка от останалите се брои по 6 пъти. Следователно търсеният брой е $\frac{3^k - 3}{6} = \frac{3^{k-1} - 1}{2}$.

3. Да разгледаме първоначално фигурите като частта от равнината, определена от неравенството $y \geq f(x)$. Всяка такава фигура може да бъде покрита

от ъгъл с предварително зададена големина и връх върху ординатната ос. Действително, неравенството $f(x) \geq ax$ е изпълнено за всяко достатъчно голямо и за всяко достатъчно малко x , а за останалия краен интервал можем да се погрижим с трансляция на ъгъла по направление на отрицателната посока на ординатната ос.

Да допуснем, че исканото покритие на равнината е възможно. Тогава е възможно и покритие с ъгли с предварително зададени големина. Нека тези големина са зададени така, че сумата им да не надвишава 360° . Да транслираме ъглите така, че върхът им да е общ. Тогава съществува права през този връх, която няма други общи точки (освен върха) с нито един от ъглите. Това води до противоречие – тази права няма как да е била покрита преди трансляцията, тъй като всеки ъгъл е покривал най-много крайна отсечка от нея.

4. Нека P е произведението на осемте прости числа, по-малки от 20 и $N = P^s + \max\{|d_i| : i = 1, 2, \dots, 9\}$. Да предположим, че за някое $x \geq N$ всички прости делители на числото $f(x)$ са по-малки от 20. Нека p_i е просто число с максимална степен в каноничното разлагане на $x + d_i$. Ясно е, че тази степен е поне s . Освен това две от числата p_i , $i = 1, 2, \dots, 9$, съвпадат. Следователно $p_i^s | d_i - d_j$ за някои i и j , което дава противоречие при достатъчно голямо s .

5. Нека H е ортоцентърът на $\triangle A_1 B_1 C_1$ и $A_1 H_a$, $B_1 H_b$ и $C_1 H_c$ са височините на този триъгълник. Окръжността k с диаметър $A_1 H$ съдържа точките A_1 , H_b , P , H , H_c и Q . Нека AA_1 да пресича вписаната в $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точка T . Ще използваме означението $\widehat{XY}$ за ъгъла на съответната дъга. Имаме $\widehat{H_b P} = \angle H_b A_1 P = \angle C_1 A_1 T = \widehat{C_1 T}$. Освен това $\widehat{Q H_c} = \angle Q A_1 H_c = \angle A_1 C_1 B_1 = \widehat{A_1 B_1}$ (използвахме, че QA_1 е допирателна). Аналогично $\widehat{P H_c} = \widehat{T B_1}$ и $\widehat{H_b Q} = \widehat{C_1 A_1}$. Всички тези равенства дават, че четириъгълниците $P H_b Q H_c$ и $T C_1 A_1 B_1$ са подобни.

Нека M и N са средите съответно на $B_1 C_1$ и $A_1 H$. Да отбележим, че $\angle M H_b N = 180^\circ - \angle C_1 H_b M - \angle N H_b A_1 = 180^\circ - \angle M C_1 H_b - \angle N A_1 H_b = 180^\circ - (\angle H_a C_1 A_1 - \angle C_1 A_1 H_c) = 90^\circ$ (изполвахме съответни медиани в правоъгълни триъгълници). Следователно $M H_b$ и, по подобен начин, $M H_c$, са допирателни към k . Тогава фигурите $P H_b Q H_c M$ и $T C_1 A_1 B_1 A$ са подобни. Оттук и от факта, че точките A_1 , T и A лежат на една права, следва, че съответните им точки Q , P и M също лежат на една права, което и трябваше да се докаже.

Забележка. Друго решение на тази задача може да се намери в работата на Стоян Боев в Олимпийски теми 2012 (задача 2 от раздел 6).

6. Нека $k, p \in \mathbb{N}$. Да разгледаме естествените числа, които имат k цифри в $(p+1)$ -ична бройна система (като нулите са значещи цифри). Понеже сумата от квадратите на цифрите на всяко число не надминава kp^2 , то има поне $q = \frac{(p+1)^k - 1}{kp^2}$ числа с една и съща сума r .

От друга страна, ясно е, че числата със същите цифри, но в $(2p+1)$ -ична система, са различни. Освен това, ако три от тях образуват аритметична прогресия (например $a + b = 2c$) то цифрите им на всяка позиция образуват аритметична прогресия. Това обаче е невъзможно, защото, разглеждани като точки в $\mathbb{R}^k$ (с координати съответните цифри), a , b и c лежат на k -мерната сфера с радиус $\sqrt{r}$ и същевременно са колинеарни (c е среда на отсечката с краища a и b).

И така, има поне q естествени числа, по-малки от $(2p+1)^k$, никои три от които не образуват аритметична прогресия. При $p+1 = 2^k$ следва, че има повече от $\frac{2^{k(k-2)}}{k}$ числа, по-малки от $2^{k(k+1)}$, никои три от които не образуват аритметична прогресия. Тогава за всяко достатъчно голямо число k можем да изберем n да бъде най-малкото цяло число така, че $n^{10} \geq 2^{k(k+1)}$.

Забележка. Изложената конструкция е предложена от Ф. А. Беренд през 1946 г.

29. Балканска олимпиада по математика

1. Нека $\ell \cap AO = K$ и AG е диаметър в дадената окръжност. Тогава $\angle ACG = 90^\circ$, т.е. точките D , C и G лежат на една права, а E е ортоцентърът на $\triangle ADG$. Оттук $GE \perp AD$ и точките G , E и B лежат на една права. Тъй като $\angle CDF = \angle GDK = \angle GAC = \angle GFC$, правата FG се допира до окръжността, описана около $\triangle CFD$ в точка F . Аналогично се вижда, че FG се допира до окръжността, описана около $\triangle BFE$ в точка F . Следователно окръжностите, описани около триъгълниците BFE и CFD , се допират в точката F .

2. Първи начин. Неравенството очевидно следва от сумирането на трите циклични версии на

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 2xy + yz + zx.$$

След повдигане на квадрат и елементарни алгебрични преобразувания се вижда, че последното е еквивалентно на $(xy + yz + zx)(x - y)^2 \geq 0$.

Втори начин. Неравенството $(z+x)(z+y) \geq z + \sqrt{xy}$ следва от директно повдигане на квадрат или от неравенството на Коши-Буняковски. Замествайки трите му циклични версии, достигаем до неравенството

$$(x+z)\sqrt{xz} + (x+y)\sqrt{xy} + (y+z)\sqrt{yz} \geq 2(xy + yz + zx),$$

което следва от прилагане на неравенството между средното аритметично и следното геометрично $x + z \geq 2\sqrt{xz}$ и аналогичните му.

3. Да отбележим, че $S_{P_n} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, а разделянето на всички елементи на P_n на 2^n води до следната еквивалентна задача:

Нека n е естествено число, $a = \frac{3}{2}$ и $Q_n = \{1, a, a^2, \dots, a^n\}$. Да се докаже, че за всяко реално число $x \in [0, 1 + a + a^2 + \dots + a^n]$ съществува множество X на Q_n , за което $0 \leq y - S_X < 1$.

Ще проведем индукция по n . При $n = 1$ имаме $S_\emptyset = 0$, $S_{\{1\}} = 1$, $S_{\{a\}} = \frac{3}{2}$ и $S_{\{1,a\}} = \frac{5}{2}$, като твърдението очевидно е вярно.

Нека твърдението е вярно за n и нека $x \in [0, 1 + a + a^2 + \dots + a^{n+1}]$ е произволно. Ако $x \in [0, 1 + a + a^2 + \dots + a^n]$, от индукционното предположение имаме $X \subset Q_n \subset Q_{n+1}$, за което $0 \leq x - S_X < 1$.

Нека $x > 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Тъй като последното е по-голямо от a^{n+1} (докажете!), заключаваме, че $x_1 = x - a^{n+1} \in (0, 1 + a + a^2 + \dots + a^n]$. От индукционното предположение съществува $X_1 \subset Q_n$, за което $0 \leq x_1 - S_{X_1} < 1$ и е достатъчно да вземем $X = X_1 \cup \{a^{n+1}\}$.

4. Да отбележим, че от $f(n_0) = n_0$ за някое $n_0 \geq 3$ следва $f(n_k) = n_k$ за всяко цяло $k \geq 0$, където $n_k = n_{k-1}!$. От друга страна, $m - n_k | f(m) - f(n_k) = f(m) - n_k = f(m) - m + m - n_k$, откъдето $m - n_k | f(m) - m$. Следователно $f(m) - m$ има безбройно много делители, т.е. $f(m) = m$ за всяко m .

От $f(1) = f(1!) = f(1)!$ и $f(2) = f(2!) = f(2)!$ следва, че $f(1), f(2) \in \{1, 2\}$. Оттук и от $4 = 3! - 2 | f(3!) - f(2) = f(3!) - f(2)$ следва, че $f(3) \leq 3$.

Ако $f(3) = 3$, то $f(m) = m$ за всяко m .

Нека $f(3) \in \{1, 2\}$ и $n > 3$ е произволно. Тогава от $n! - 3 | f(n!) - f(3) = f(n!) - f(3)$ следва, че $f(n)!$ не се дели на 3, т.е. $f(n) \in \{1, 2\}$.

Ако f не е константа, съществуват естествени числа m и n , за които $f(n) = 1$ и $f(m) = 2$. Тогава за $k = 2 + \max\{m, n\}$ от $k - m | f(k) - f(m) \in \{-1, 0, 1\}$ следва, че $f(k) = f(m) = 2$ и аналогично $f(k) = 1$, противоречие.

Окончателно, всички решения на задачата са $f \equiv 1$, $f \equiv 2$ и $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.

53. Международна олимпиада по математика

1. Тъй като $\angle ALJ = 90^\circ$, то L лежи на окръжността ω с диаметър AJ . От друга страна,

$$\angle LFJ = \angle MBJ - \angle BMF = \angle MBJ - \angle CML$$

$$= 90^\circ - \angle ABC/2 - \angle BCA/2 = \angle CAB/2 = \angle LAJ$$

и значи $F \in \omega$. Следователно BF е височина и ъглополовяща в $\triangle ABS$, откъдето $SB = AB$. Тогава $SM = SB + BM = AB + BK = AK$. Аналогично $TM = AL$ и понеже $AK = AL$, то $SM = TM$.

2. От неравенството между средното аритметично и средното геометрично следва, че

$$(1 + a_k)^k = \left((k-1) \frac{1}{k-1} + a_k \right)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k.$$

Като умножим тези равенства при $k = 2, 3, \dots, n$, получаваме, че

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n \geq n^n a_2 a_3 \dots a_n = n^n.$$

За да имаме равенство, трябва $1 = a_2 = 2a_3 = \dots = (n-1)a_n$. Тогава $1 = (n-1)! a_2 a_3 \dots a_n = (n-1)!$, което е невъзможно при $n \geq 3$.

3. Ако $\alpha \in \{da, ne\}$ е отговор на въпроса "Принадлежи ли числото x на множеството S ?", ще казваме, че този въпрос е *несъвместим* с дадено число i , ако $\alpha = da$, но $i \notin S$, или ако $\alpha = ne$, но $i \in S$. Да отбележим, че отговор, несъвместим с x , е лъжа. Следователно, ако получим $k+1$ последователни отговора, несъвместими с едно и също число y , то това число не е избраното.

а) Нека B е определил множество T от m числа, което съдържа x (в началото $m = N$ и $T = \{1, 2, \dots, N\}$). Без ограничение на общността можем да считаме, че $m > 2^k$ и $T = \{0, 1, \dots, 2^k, \dots, m-1\}$. Ще покажем стратегия, която отхвърля едно от числата от T .

B започва с последователни въпроси дали $x = 2^k$. Ако първите $k+1$ отговора са *не*, то поне един от тях е верен, и числото 2^k е отхвърлено. Следователно можем да считаме, че в даден момент имаме отговор *да*. Сега B продължава със серия от k въпроса, реализиращи двоично търсене в множеството $T_1 = \{0, 1, \dots, 2^k - 1\} \subset T$; например за всяко $i = 1, 2, \dots, k$ той пита дали x принадлежи на множеството от числата в T_1 , които имат 0 в позиция i на двоичното си представяне. След тази серия от въпроси той разполага с число $y \in T_1$ (резултат от двоичното търсене, при което всички отговори се приемат за лъжа), което е несъвместимо с всичките k отговора на въпросите от серията. Тъй като y е несъвместимо и с последния отговор преди серията, заключаваме, че $x \neq y$.

б) Ще докажем, че за $\lambda \in (1.99, 2)$ и $n = \lceil (2 - \lambda)\lambda^{k+1} \rceil - 1$ съществува стратегия на A , при която B не може да си победи. Това ще е достатъчно, защото при достатъчно голямо k ще имаме $n > 1.99^k$.

A фиксира λ по горния начин и $N = n + 1$ и избира тайното число $x \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ по произволен начин. След всеки отговор A преброява за всяко $i = 1, 2, \dots, n + 1$ броя m_i на последните последователни отговори, които са несъвместими с i , и пресмята стойността на следната оценъчна функция

$$F = F(\lambda; m_1, m_2, \dots, m_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i}.$$

За следващия си ход A избира, независимо от въпроса на B , този вариант за отговор, който минимизира стойността на F .

Ще докажем, че при тази стратегия на A , стойността на оценъчната функция винаги е по-малка от λ^{k+1} . В началото $m_i = 0$ за всяко i и $F < \lambda^{k+1}$ следва от избора на λ и n (проверете!). Да предположим, че $F < \lambda^{k+1}$ в даден момент и да видим какво става на следващия. Нека B е задал въпроса "Принадлежи ли числото x на множеството S ". Тогава новата стойност на оценъчната функция е $\min\{F_1, F_2\}$, където

$$F_1 = |S| + \sum_{i \notin S} \lambda^{m_i+1}, \quad F_2 = \sum_{i \in S} \lambda^{m_i+1} + N - |S|,$$

са кандидатите за нови стойности съответно при отговори *да* и *не*. Имаме

$$\min\{F_1, F_2\} \leq \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{\lambda F + n + 1}{2} < \frac{\lambda^{k+2} + (2 - \lambda)\lambda^{k+1}}{2} = \lambda^{k+1},$$

с което твърдението е доказано.

От $F < \lambda^{k+1}$ следва, че нито един степенен показател в оценъчната функция не става $k + 1$ в който и да е момент от играта. Това означава две неща: първо, A няма да излъже $k + 1$ пъти подред за x , което и да е то, и второ, B никога няма да може да получи число, несъвместимо с $k + 1$ последователни отговора, и да го изключи. Остава да напомним, че стратегията на A не зависи от избраното число x .

4. При $a = b = c = 0$ следва, че $f(0) = 0$. Тогава при $c = 0$ и $b = -a$ получаваме, че $f(a) = f(-a)$. Тогава даденото уравнение може да бъде записано във вида

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(a+b)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(a+b)(f(a) + f(b)), \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Нека $f(1) = k$. Ако $k = 0$, като положим $b = 1$, следва, че $f(a+1) = f(a)$, т.е. $f \equiv 0$.

Нека $k \neq 0$. При $a = b$ получаваме, че $f(2a) = 0$ или $f(2a) = 4f(a)$. В частност, $f(2) = 0$ или $f(2) = 4k$.

Ако $f(2) = 0$, при $b = 2$ следва, че $f(a) = f(a + 2)$. Значи

$$f(a) = \begin{cases} 0, & a - \text{четно} \\ k, & a - \text{нечетно.} \end{cases}$$

Нека $f(2) = 4k$. Ако $f(4) = 0$, то при $b = 4$ получаваме, че $f(a + 4) = f(a)$. В частност, $f(3) = f(-1) = f(1) = k$. Значи

$$f(a) = \begin{cases} 0, & a = 4a_1 \\ k, & a - \text{нечетно} \\ 4k & a = 4a_1 + 2 \end{cases}$$

Накрая, нека $f(4) = 4f(2) = 16k$. При $a = 1, b = 2$ и $a = 1, b = 3$ следва, че $f(3) \in \{k, 9k\} \cap \{9k, 25k\} = 9k$ (понеже $k \neq 0$). Значи $f(n) = kn^2$ за $n = 1, 2, 3$. Да предположим, че $f(n) = kn^2$ за някое цяло число $n \geq 3$. При $a = 1, b = n$ и $a = 2, b = n - 1$ получаваме, че $f(n + 1) \in \{k(n + 1)^2, k(n - 1)^2\} \cap \{k(n + 1)^2, k(n - 3)^2\} = k(n + 1)^2$ (тъй като $k \neq 0$ и $n \neq 2$). По индукция и четност следва, че $f(a) = ka^2$ за всяко $a \in \mathbb{Z}$.

Непосредствена проверка, която оставяме на читателите, показва, че всички намерени функции изпълняват даденото условие.

5. Първи начин. Нека C_1 е симетричната точка на C относно AB и ω_1 и ω_2 са съответно окръжностите (A, AL) и (B, BK) . Лесно се вижда, че ω_1 и ω_2 се пресичат в C и C_1 и се допират съответно до BC и AC в точка C .

Нека K_1 и L_1 са вторите пресечни точки на съответно на AK с ω_2 и на BL с ω_1 . Тогава от степените на X относно ω_1 и ω_2 имаме равенствата

$$XK \cdot XK_1 = XC \cdot XC_1 = XL \cdot XL_1,$$

което означава, че K, L, K_1 и L_1 лежат на една окръжност ω_3 . Сега от степенята на A относно ω_2 и ω_3 имаме $AL^2 = AC^2 = AK \cdot AK_1$, откъдето следва, че AL се допира до ω_3 в точка L . Аналогично BK се допира до ω_3 в точка K . Тогава $MK = ML$ като допирателни от M към ω_3 .

Втори начин. Да построим права $\ell \perp BK$ през точка K и нека ℓ пресича CD в точка P . Да означим $E = AX \cap BP$, $\angle ABK = \alpha$ и $\angle BAL = \beta$. Тогава точките P, K, E и D лежат на една окръжност и $\angle KPD = \alpha$. Освен това от $BK^2 = BC^2 = BD \cdot BA$ следва $\triangle ABK \sim \triangle KBD$, откъдето $\angle BKD = \beta$. Сега имаме и $\angle DPB = \beta$, което дава $\angle EAD = \angle EPD = \beta$. Следователно

точките P , E , D и A лежат на една окръжност и значи $\angle AEB = 90^\circ$, т.е. BE е височина в $\triangle ABX$ и P е ортоцентърът на този триъгълник.

Аналогично се вижда, че правата $\ell' \perp AL$ през точка L пресича CD в точка P . Тъй като CD е радикалната ос на окръжностите ω_1 и ω_2 от предходното решение, точката P има еднакви степени относно тези окръжности, т.е. $PK = PL$. Тогава $\triangle MLP \cong MKP$ и $MK = ML$.

6. От второто равенство следва, че $1.b_1 + 2.b_2 + \dots + n.b_n = 3^{b_0}$, където b_i -тата са степени на 3. Дясната страна е нечетна, а лявата има четността на $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Следователно $n = 4k + 1$ или $n = 4k + 2$.

Обратно, за такива n съществуват съответни a_i . Например, по индукция следва, че

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{3}{3^2} + \left(\frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^4} + \frac{7}{3^4} \right) + \dots + \\ & \left(\frac{4k-4}{3^{k+2}} + \frac{4k-3}{3^{k+2}} + \frac{4k-2}{3^{k+2}} + \frac{4k-1}{3^{k+2}} \right) + \frac{4k}{3^{k+2}} + \frac{4k+1}{3^{k+2}} = 1, \\ & \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^3} + \left(\frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^4} + \frac{7}{3^4} + \frac{8}{3^4} \right) + \dots + \\ & \left(\frac{4k-3}{3^{k+2}} + \frac{4k-2}{3^{k+2}} + \frac{4k-1}{3^{k+2}} + \frac{4k}{3^{k+2}} \right) + \frac{4k+1}{3^{k+2}} + \frac{4k+2}{3^{k+2}} = 1, \end{aligned}$$

като съответните равенства за степените на 2 също са в сила.

Български математически състезания 2012–2013

Решения

Есенен Математически Турнир

8.1. Отговор: $a = 0$ и $a = -2$. Имаме $0 \leq 3a^2x + 6ax - 3a$, т.е. $a((a+2)x - 1) \geq 0$. При $a = 0$ това е вярно за всяко x , а при $a > 0$ получаваме $(a+2)x \geq 1$, което не е вярно например за $x = -1$. При $a < 0$ получаваме $(a+2)x \leq 1$, е вярно за всяко x само при $a = -2$.

8.2. Нека $AM = m$, $BN = n$, $CQ = q$, $D \in AN \cap BQ$, $E \in CM \cap BQ$, $F \in AN \cap CM$. Ако F е между A и D , то D е между B и E и E е между C и F . Имаме $S_{ABC} = S_{ANB} + S_{CMA} + S_{BQC} - S_{AFM} - S_{BDN} - S_{CEQ} + S_{DEF} = (m+n+p)S_{ABC}$, понеже синята и жълтата площ са равни. Оттук $m+n+q = 1$. Случаят, когато D е между A и F , се разглежда аналогично.

8.3. Ще използваме факта, че числото 11111 се дели на 41. Нека числото $A = \overline{a111\dots1b}$ се дели на 41 и броят на единиците е по-голям или равен на 5. Тогава

$$A = \overline{a111\dots1} \cdot 10^6 + 111110 + b \equiv \overline{a111\dots1b} \pmod{41},$$

като броят на единиците в последното число е $n - 5$. Остава да проверим съществуването на примери за $n = 0, 1, 2, 3, 4$: това са съответно числата 41, 410, 3116, 11111 и 111110.

8.4. За всеки нечетен делител q на n получаваме различно представяне на n като сбор на едно или повече поредни естествени числа по следния начин. Нека $d = n/q$. Да разположим q поредни цели числа така, че средното от тях да е d . Ако всички тези цели числа са естествени, имаме представяне на n като сбор на нечетен брой естествени числа. Ако сред тези числа има неположителни, то техните противоположни също присъстват в сбора (0 е противоположно на себе си). В този случай съкращаваме противоположните числа и получаваме представяне на n като сбор на четен брой естествени числа.

Обратно, ако n е сбор на нечетен брой (q) естествени числа и средното от тях е d , то $n = dq$. Ако n е сбор на четен брой естествени числа, да добавим към сбора всички по-малки естествени числа, техните противоположни и нулата. Получаваме представяне на n като сбор на нечетен брой (q) поредни цели числа. Ако средното от тях е d , то $n = dq$. Получените по този начин делители q на n за всяко представяне на n като сбор на едно или повече поредни естествени числа са различни.

Следователно броят различни начини за представяне на n като сбор на едно или повече поредни естествени числа е равен на броя на нечетните делители на n . Като изключим представянето на n като „сбор“ на едно число, разбираме, че търсените в задачата числа са тези с четен брой нечетни делители. По-лесно е да преброим останалите числа – те имат нечетен брой нечетни делители, което се случва точно когато най-големият им нечетен делител r е точен квадрат (понеже делителите се групират по двойки с произведение r , броят им е нечетен точно когато някой е в двойка със себе си). И така, числата, които не са обикновени, са точните квадрати (тук $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 44^2$) и удвоените точни квадрати (тук $2 \cdot 1^2, 2 \cdot 2^2, 2 \cdot 3^2, \dots, 2 \cdot 31^2$). Следователно броят на обикновените числа, по-малки от 2012, е $2011 - 31 - 44 = 1936$.

9.1. Отговор: $a = -2 \pm \sqrt{3}$. Да означим за краткост $f = a^2 - 2a + 5$ и $g = 2a^2 - a - 7$. Тогава корените на даденото уравнение се получават от $3x - f = 2x - g$ и $3x - f = g - 2x$, откъдето $x_1 = f - g$ и $x_2 = \frac{f+g}{5}$. Условието за равноотдалеченост на корените от 6 е еквивалентно на

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 6 \iff 3f - 2g = 30 \iff a^2 + 4a + 1 = 0 \iff a_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

9.2. Да означим с M центъра на дадената в условието окръжност. Тъй като $MA = MB$, то M лежи на симетралата на отсечката AB . Тъглополовящата на $\angle ACB$ и симетралата на отсечката AB се пресичат в средата на дъгата $\widehat{AB}$, несъдържаща точка C . От условието $AC > BC$ следва, че P е вътрешна за AC , а Q е външна за BC , като $\angle MAP = \angle MBQ$. Следователно $\triangle MAP \cong \triangle MBQ$.

Първи начин. От $\triangle MAP$ имаме $\angle AMP = 180^\circ - 2\angle MAP = 180^\circ - 2(\alpha + \frac{\gamma}{2}) = \beta - \alpha$. Освен това $\angle PMB = 2\angle PAB = 2\alpha$ и $\angle PQB = \angle PAB = \alpha$. Сега от $\triangle QBL$ намираме $\angle BLQ = \beta - \alpha$. Тогава $\triangle QBL$ е вписан и $\angle BML = \angle BQL = \alpha$. Но $\angle BMC = \angle BAC = \alpha$ и следователно точките C , L и M лежат на една права.

Втори начин. Точките Q и B са съответно симетрични на A и P спрямо CM . Това означава, че $AQBP$ е равнобедрен трапец и диагоналите AB и PQ се пресичат върху общата симетрала CM на двете основи.

9.3. Отговор – три въпроса.

Ще покажем първо, че два въпроса са недостатъчни. Да предположим, че Петър отговори на първия въпрос на Николай с „Един“. Тогава (независимо кое е било първото избрано поле) измежду допустимите положения на на-

мисленото поле задължително ще има три, a , b и c , които образуват „ъгълче“ (a и c имат общ връх, и всяко от тях има обща страна с b).

Лесно се проверява, че което и поле да избере Николай за втория въпрос, Петър винаги може да отговори така, че или a и b , или b и c , или c и a да останат допустими положения на намисленото поле и Николай да не може да определи еднозначно неговото местоположение.

За да отгатне намисленото поле с три въпроса, Николай може просто да посочи три от ъглите на дъската. Множеството на полетата, равноотдалечени (с хода на царя) от ъглово поле е Γ -образна ивица. Сечението на двете ивици от този вид, съответни на два срещулежащи ъгъла, се състои от не повече от две полета. При това тези две полета винаги са на различни разстояния от третия ъгъл и поради това след третия въпрос местоположението на намисленото поле е определено напълно.

9.4. Нека $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редицата на простите числа. Да означим $Q_n = 2^{q_n} - 1$.

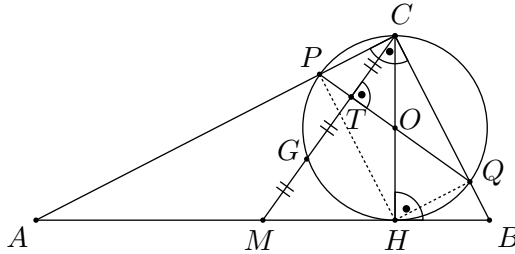
Да отбележим, че $(Q_m, Q_n) = 1$ при $m \neq n$. Действително, ако $d \in \mathbb{N}$ дели Q_m и Q_n , то (докажете!) d дели числото $2^{(q_m, q_n)} - 1 = 2^1 - 1 = 1$ и следователно $d = 1$.

Не е възможно всички прости делители на Q_n да са сравними с 1 по модул 4, защото в такъв случай ще имаме $Q_n \equiv 1 \pmod{4}$, което очевидно не е вярно. Следователно Q_n има поне един прост делител p_n от вида $p_n = 4k_n - 1$, $k_n \in \mathbb{N}$. Освен това при $m \neq n$ от $(Q_m, Q_n) = 1$ следва $p_m \neq p_n$. Така получаваме безкрайната редица $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ от различни прости числа, удовлетворяващи условието на задачата.

10.1. а) Нека M е средата на AB , а O е центърът на k . Тъй като $\angle ACB = 90^\circ$, то PQ е диаметър в k . Нещо повече,

$$\angle CQP = \angle CHP = \angle BAC = \alpha,$$

следователно $\triangle QPC \sim \triangle ABC$.



Тогава CO и CM са съответни медиани в подобни триъгълници, а CT и CH са съответни височини, където T е пресечната точка на CM и PQ . Следователно $PQ \perp CG$. Но по условие PQ разполовява CG , т.е. PQ е симетрала на CG и $G \in k$.

б) *Първи начин.* От свойствата на подобните триъгълници получаваме:

$$\frac{CT}{CH} = \frac{PQ}{AB} \Leftrightarrow \frac{c}{6h} = \frac{h}{c} \Leftrightarrow c = \sqrt{6}h \Leftrightarrow a^2 - \sqrt{6}ab + b^2 = 0.$$

Накрая пресмятаме $\frac{AH}{BH} = \frac{AC^2}{BC^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \sqrt{3} + 2$.

Втори начин. От свойството на секущите $MH^2 = MG \cdot MC$ и следователно

$$MH^2 = \frac{1}{3}MC^2 \Leftrightarrow AH - AM = \frac{1}{\sqrt{3}}MC \Leftrightarrow AH = \frac{\sqrt{3}+3}{6}AB \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \sqrt{3}+2.$$

10.2. При $a = 0$ уравнението има единствен корен $x = 0$ и следователно тази стойност на параметъра удовлетворява условието на задачата.

Нека $a \neq 0$. Полагайки $y = ax - 1$, достигахме до уравнението

$$a|y| = y^2 - (2a - 3)y + (2 - a) \quad (*)$$

Ще разгледаме два случая.

Случай 1. Нека $y < 0$. Тогава $(*)$ приема вида $y^2 - (a - 3)y + (2 - a) = 0$, което има два реални корена $y = -1$ и $y = a - 2$, вторият от които е необходимо или да съвпада с първия или да е неотрицателен, т.е. $a = 1$ или $a \geq 2$.

Случай 2. Нека $y \geq 0$. Тогава $(*)$ приема вида $y^2 - 3(a - 1)y + (2 - a) = 0$. При $a = 1$ последното уравнение няма реални решения, при $a = 2$ то има две решения $y = 0$ и $y = 3$, а при $a > 2$ от формулите на Виет следва, че има точно едно неотрицателно решение, което очевидно е различно от вече намереното $y = -1$.

Окончателно търсените стойности са $a = 0$ и $a = 1$.

10.3. Ще намерим търсената максимална мощност за всички цели числа N от вида $N = p^\alpha q^\beta$, където α е четно, а β – нечетно число. Да разгледаме множествата

$$X_0 = \{m \mid m = p^\lambda q^\mu r, \lambda < \frac{\alpha}{2}, \mu \leq \frac{\beta - 1}{2}, (r, p) = (r, q) = 1\},$$

$$X_1 = \{m \mid m = p^\lambda q^\mu r, \lambda < \frac{\alpha}{2}, \mu \geq \frac{\beta + 1}{2}, (r, p) = (r, q) = 1\},$$

$$X_2 = \{m \mid m = p^\lambda q^\mu r, \lambda \geq \frac{\alpha}{2}, \mu \leq \frac{\beta - 1}{2}, (r, p) = (r, q) = 1\},$$

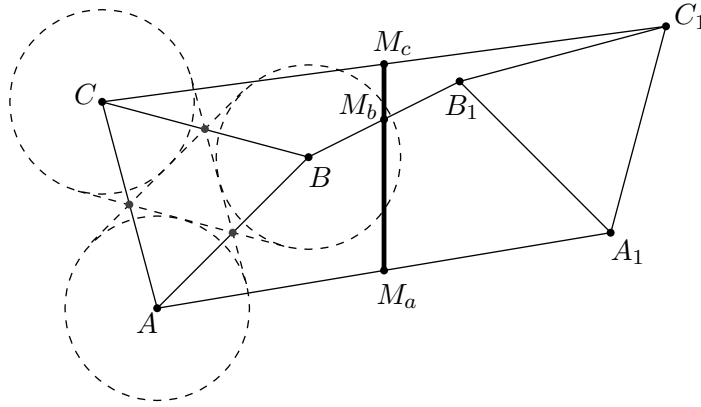
$$X_3 = \{m \mid m = p^\lambda q^\mu r, \lambda \geq \frac{\alpha}{2}, \mu \geq \frac{\beta + 1}{2}, (r, p) = (r, q) = 1\}.$$

Очевидно е, че $X_0 \cup X_1$ и $X_0 \cup X_2$ съдържат най-много по един елемент от A . Следователно $|A| \leq |X_3| + 2$. Да допуснем, че A съдържа както елемент от X_1 , така и елемент от X_2 . Тогава съществува поне едно число от X_3 , което не се съдържа в A . Следователно, $|A| \leq |X_3| + 1$.

Множество с такава мощност може да бъде конструирано – такава е например $A = X_3 \cup \{p^\alpha q^{\frac{\beta-1}{2}}\}$. Остава да забележим, че $|X_3| = p^\alpha q^{\frac{\beta-1}{2}}$.

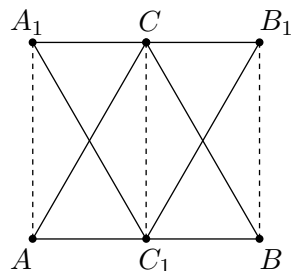
За конкретното N от условието на задачата търсената мощност е $2^{2013}503^{1006} + 1$.

10.4. Първи начин. Да забележим първо, че средите M_a , M_b и M_c на отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 лежат на една права. Наистина, векторът $\overrightarrow{M_a M_b}$ е полусума на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1 B_1}$ и, понеже те имат равни дължини, е успореден на ъглополовящата на ъгъла между тях. Същото твърдение е вярно и за $\overrightarrow{M_a M_c}$ и ъглополовящата между $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{A_1 C_1}$. Но понеже $\triangle ABC$ и $\triangle A_1 B_1 C_1$ са равностранни и противоположно ориентирани, т.е. единият се получава от другия посредством подходяща трансляция и осева симетрия, то тези две ъглополовящи са успоредни (именно на въпросната ос на симетрия). Следователно векторите $\overrightarrow{M_a M_b}$ и $\overrightarrow{M_a M_c}$ също са успоредни, и точките M_a , M_b и M_c лежат на една права l .



Нека l е правата, определена от точките M_a , M_b и M_c , а h е височината на $\triangle ABC$. Да разгледаме трите кръга k_a , k_b и k_c с центрове точките A , B и C и радиуси, равни на $\frac{1}{2}h$. Тъй като трите средни линии на $\triangle ABC$, които се явяват и допирателни за k_a , k_b и k_c , отделят кръговете един от друг, то правата l не може да пресича всеки от кръговете k_a , k_b и k_c във вътрешна точка. С други думи, разстоянието от поне един от върховете на $\triangle ABC$ до l е не по-малко от $\frac{1}{2}h$.

Без загуба на общност, нека A бъде един такъв връх. Тогава $AA_1 = 2AM_a \geq 2d(A, l) \geq 2 \cdot \frac{1}{2}h = h$ и следвателно най-дългата измежду отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 има дължина поне $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Лесно се вижда, че този минимум се достига – при това точно тогава, когато $\triangle A_1B_1C_1$ е симетричен на $\triangle ABC$ спрямо една от неговите средни линии.



Втори начин. Ще докажем, че при всяко разположение на двата триъгълника, поне един от ъглите $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1A_1})$, $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1})$ и $\angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B_1C_1})$ е по-голям или равен на 120° . Да допуснем противното и да транслираме двата триъгълника така, че точките C и C_1 да съвпадат с дадена точка O . Тогава точките A, B, A_1 и B_1 лежат на окръжност с център O и радиус 1. Тъй като двата триъгълника са обратно ориентирани, разположението на точките върху окръжността (по посока обратна на часовниковата стрелка) е A, A_1, B_1, B ; A, B_1, B, A_1 или A, A_1, B, B_1 .

В първия случай, ако $\angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1}) \leq 60^\circ$, то $\angle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB_1}) \geq 120^\circ$, а ако $\angle 60^\circ < \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA_1}) < 120^\circ$, то $\angle(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB_1}) \geq 120^\circ$.

Във втория случай ъгълът на ротацията с център O , която преобразува $\triangle OAB$ в $\triangle OB_1A_1$ е $\angle AOB_1 < 60^\circ$. Тогава острият ъгъл между AB и A_1B_1 е по-малък от 60° и следователно $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) \geq 120^\circ$. Третият случай е аналогичен на втория, като отново $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) \geq 120^\circ$.

Да допуснем, че $\angle(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C_1A_1}) \geq 120^\circ$. Нека точка P е такава, че $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CC_1}$. Тогава от косинусовата теорема за $\triangle PC_1A_1$ следва, че $A_1P \geq \sqrt{3}$. Тъй като $CC_1 + AA_1 = AP + AA_1 \geq A_1P \geq \sqrt{3}$, то поне една от отсечките CC_1 и AA_1 е поне $\sqrt{3}/2$. Примерът е както в първото решение.

11.1. Отговор: 10. Тъй като $a_1 \neq 0$, то от $a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0$ следва, че $2q^2 - 3q + 1 = 0$, където q е частното на прогресията. Оттук $q = 1$ или $q = \frac{1}{2}$, като при $q = 1$ сборът $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ е неограничен. Остава $q = \frac{1}{2}$, като тогава

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \frac{a_1}{1 - q} = 2a_1,$$

откъдето $0 < a_1 \leq 1006$. Най-голямата степен на двойката, която дели число $0 < a_1 \leq 1006$ е $512 = 2^9$. Следователно в прогресията може да има най-много 10 естествени числа.

11.2. Тъй като $AM \perp BO$, то $AO^2 + BM^2 = AB^2 + OM^2$, откъдето $AN^2 + ON^2 + BM^2 = AB^2 + OM^2$ и понеже $ON = OM$, то $AB^2 = AN^2 + BM^2$.

От косинусовата теорема имаме $AB^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 13$ и ако $CN = CM = x$, то $AN = 3 - x$, $BM = 4 - x$, откъдето

$$13 = (3 - x)^2 + (4 - x)^2 \iff x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Корените на това уравнение са 1 и 6. При $x = 6$ точката O е външна за отсечката CL и следователно $x = 1$. Тогава $CO = \frac{x}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11.3. Да разгледаме множество B , съставено от всички редици

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_{1006}, y_{1006},$$

където $x_i y_i = 00, 11$ или 22 . Тъй като имаме 1006 двойки $x_i y_i$ и всяка двойка приема 3 стойности, то броят на тези редици е 3^{1006} , т.е. $|B| = 3^{1006}$. От друга страна, понеже за всяка двойка ab , $a, b \in \{0, 1, 2\}$ съществува $xy = 00, 11$ или 22 , за което $a \neq x, b \neq y$, то B има свойството от условието на задачата. Следователно $|T| \leq |B| = 3^{1006}$.

Нека A_n е множеството от всички редици с дължина n , съставени от 0, 1 и 2, а T_n е множество с минимален брой елементи, имащо свойството от условието на задачата. Ще докажем неравенството $|T_n| \geq \frac{3}{2}|T_{n-1}|$. Да означим с t_i , $i = 0, 1, 2$ броят на редиците от T_n с първи елемент, равен на i . Лесно се съобразява, че $t_0 + t_1 \geq |T_{n-1}|$ (понеже редиците от A_n с първи елемент 2 се „покриват“ от редиците от T_n с първи елемент 0 или 1) и аналогично $t_0 + t_2 \geq |T_{n-1}|$ и $t_1 + t_2 \geq |T_{n-1}|$. Събираме горните три неравенства и получаваме

$$|T_n| = t_0 + t_1 + t_2 \geq \frac{3}{2}|T_{n-1}|.$$

От това неравенство, като използваме, че $T_1 = 2$, намираме

$$T_{2012} \geq \frac{3}{2}T_{2011} \geq \dots \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{2011} T_1 = \frac{3^{2011}}{2^{2010}}.$$

11.4. Ясно е, че целите ненулеви константи са решения на задачата. Да представим $f(x)$ във вида

$$f(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_k)^{\alpha_k} g(x),$$

където $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k$ са неотрицателни цели числа, α_i са естествени числа, а полиномът $g(x)$ няма неотрицателни цели корени. Да допуснем, че

$g(x)$ не е константа. Понеже простите делители на стойности на $g(x)$ в цели числа са безбройно много (лема на Шур), можем да изберем достатъчно голямо просто число p , за което съществува N , такова че p дели $g(N)$ и нека r е остатъкът на N при деление на p . Можем да считаме, че $r \neq a_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ и $r > c$.

Ясно е, че p дели $g(r)$, откъдето p дели и $f(r)$, т.е. p дели $r!$, което противоречи на $0 < r < p$. Следователно $g(x)$ е константа, т.е.

$$f(x) = c(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2} \dots (x - a_k)^{\alpha_k},$$

където c е константа. Ако допуснем, че $\alpha_i \geq 2$ за някое i , то след като положим $x = p + a_i$ за достатъчно голямо просто число p , ще получим, че p^2 дели $(p + a_i)!$, което при $a_i < p$ е невъзможно. Следователно $f(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)$. Лесно се вижда, че полиномите от този вид удовлетворяват условието на задачата.

12.1. От условието следва, че $4a_{n+1}b_{n+1} = 2 + a_nb_n + \frac{1}{a_nb_n} \geq 4$. Тогава $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1 - a_{n+1}b_{n+1}}{2b_{n+1}} \leq 0$. Аналогично $b_{n+2} \leq b_{n+1}$, т.е. от втория член нататък редиците са намаляващи. Понеже те са ограничени отдолу (от 0), следва, че са сходящи.

12.2. Нека $\theta = \angle ADC$. При стандартните означения за ъглите на $\triangle ABC$ от синусовата теорема имаме, че

$$\frac{AE}{AD} = \frac{\sin \theta}{\sin \gamma}, \quad \frac{BE}{BD} = \frac{\sin \theta}{\sin \beta/2} \quad \text{и значи} \quad (1) \quad \frac{AE}{BE} = 2 \frac{\sin \beta/2}{\sin \gamma}.$$

Върху лъча $ED^{\rightarrow}$ съществува (единствена) точка F такава, че $\angle EAF = \alpha$. Тогава $\angle AFE = \beta$, т.е. около четириъгълника $AFBE$ може да се опише окръжност. Пак от синусовата теорема следва, че

$$\frac{AE}{FE} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \frac{BE}{FE} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\gamma + \beta/2)} \quad \text{и значи} \quad \frac{AE}{BE} = \frac{\sin \beta \sin(\gamma + \beta/2)}{\sin^2 \alpha}.$$

Оттук и (1) следва, че

$$\sin^2 \alpha = \sin \gamma \cdot \cos \beta/2 \cdot \sin(\gamma + \beta/2).$$

Дясната страна е равна на $\sin \gamma (\sin \alpha + \sin \gamma)/2$ и значи за $x = \sin \alpha / \sin \gamma$ имаме, че $2x^2 = x + 1$, т.е. $x = 1$ или $x = -1/2$. Понеже $x > 0$, то $\alpha = \gamma$.

Забележка. Ако $2\angle BED = \gamma$ (вместо β), то може да се докаже, че $\alpha = \beta$ (вместо $\alpha = \gamma$).

12.3. Понеже $\frac{1}{t^2+t+1} \geq \frac{1}{t^2+|t|+1}$, може да считаме, че $a \geq b \geq c > 0$.
Първо ще докажем, че

$$\frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} \geq \frac{2}{ab+\sqrt{ab}+1}.$$

Полагайки $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, след привеждане под общ знаменател и разкриване на скобите достигахме до неравенството

$$(x-y)^2[(x+y)^2(xy)^2 - 1 + (xy-1)(x^2+xy+y^2)] \geq 0,$$

което е вярно, защото $xy \geq 1$ (и значи $x+y \geq 2$). Следователно е достатъчно да докажем даденото неравенство при $a = b$. Тогава $c = 1/a^2$ и след привеждане под общ знаменател и разкриване на скобите получаваме

$$a^4 - a^3 - a + 1 \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad (a-1)^2(a^2+a+1) \geq 0,$$

което очевидно е в сила. Равенство се достига при $a = b = c = 1$.

12.4 Виж зад. 11.4.

Зимен Математически Турнир

9.1. Ако D е средата на AC , то LD е медиана и височина в $\triangle ALC$ и следователно $\angle ACL = \angle CAL$. От друга страна,

$$\angle CAL = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{180^\circ - \angle ACL}{2}$$

и лесно получаваме, че $\angle ACB = 36^\circ$ и $\angle ABC = \angle BAC = 72^\circ$. Сега от $\triangle ABL$ намираме $\angle ALB = 72^\circ$, т.е. $\triangle ABL$ е равнобедрен и AE е височина и медиана в този триъгълник, т.е. E е средата на BL . Другата посока се доказва аналогично.

9.2. От формулите на Виет получаваме

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} \iff \frac{p^3}{q^2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2} \iff \frac{p^3}{q^2} = \frac{3pq - p^3}{p^2 - 2q}.$$

Последното равенство очевидно е изпълнено при $p = 0$, като тогава корените са реални точно когато $q < 0$.

При $p \neq 0$ получаваме $p^2(p^2 - 2q) = q^2(3q - p^2) \iff p^4 + q(q - 2)p^2 - 3q^3 = 0$, което разглеждаме като биквадратно уравнение относно p . Имаме

$$p^2 = \frac{-q(q - 2) \pm \sqrt{D}}{2},$$

където $D = q^2[(q - 2)^2 + 12q] = q^2(q^2 + 8q + 4)$. Тъй като $q \neq 0$, числото $q^2 + 8q + 4$ трябва да е точен квадрат на цяло число t . Получаваме $(q + 4)^2 - t^2 = 12 \iff (q + 4 + t)(q + 4 - t) = 12$. Тъй като $q + 4 - t$ и $q + 4 + t$ са с еднаква четност, имаме само две възможности: $q + 4 - t = 2$, $q + 4 + t = 6$ или $q + 4 - t = -6$, $q + 4 + t = -2$. В първия случай получаваме $q = 0$, което е невъзможно, а във втория $q = -8$, което дава $p^2 = (-80 \pm 16)/2 < 0$, противоречие.

Окончателно, решенията на задачата са двойките $(0, q)$, където q е произволно цяло отрицателно число.

9.3. Без ограничение на общността можем да считаме, че $y \geq x$. При $y = x$ получаваме $x^2 \cdot x! = z!$, като очевидно $z \geq x$. Това уравнение няма решение при $z \geq x + 2$, защото тогава лявата страна е по-малка от дясната, а случаите $z = x$ и $z = x + 1$ лесно водят до решението $x = y = z = 1$.

Нека $y > x$, в частност $y \geq 2$. Умножаваме двете страни на уравнението с $y!$ и получаваме

$$\frac{y!(x^2 + y^2)}{z!} = 1 + y(y - 1) \dots (x + 1).$$

Ако $y > z$, получаваме, че лявата страна се дели на y и оттам $y|1$, противоречие. Следователно $y \leq z$.

Случай 1. При $y = z$ имаме $x^2 + y^2 = 1 + y(y - 1) \dots (x + 1)$. Ако $y \geq x + 3$, то $y \geq 4$ и

$$(y - 3)^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 \geq 1 + y(y - 1)(y - 2),$$

откъдето $y^3 - 5y^2 + 8y - 8 \leq 0 \iff y^2(y - 5) + 8(y - 1) \leq 0$. Лесно се вижда, че последното не е изпълнено при $y \geq 5$, а $y = 4$ не дава решение. Следователно $x + 1 \leq y \leq x + 2$. При тези две възможности получаваме съответно уравненията $2x^2 + x - 1 = 0$ и $2(x^2 + 2x + 2) = 1 + (x + 1)(x + 2)$, които очевидно нямат решения в естествени числа.

Случай 2. При $y < z$ имаме $\frac{x^2 + y^2}{z(z - 1) \dots (y + 1)} = 1 + y(y - 1) \dots (x + 1)$.

Ясно е, че при $y \geq x + 3$ горните оценки са даже усилены, което означава, че отново $x + 1 \leq y \leq x + 2$. При $y = x + 2 \geq 3$ получаваме $z \geq 4$ и значи

$$\frac{x^2 + (x + 2)^2}{4} \geq \frac{x^2 + y^2}{z(z - 1) \dots (y + 1)} = 1 + (x + 1)(x + 2).$$

Оттук $2x^2 + 4x + 4 \geq 4x^2 + 12x + 12$, което е невъзможно. Остава да разгледаме $y = x + 1$, като сега $\frac{x^2 + (x + 1)^2}{z(z - 1) \dots (x + 2)} = x + 2 \geq 3$. Ако в знаменателя отляво

има поне два множителя, той не надминава $\frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5x + 6} < 2$. Следователно $z = x + 2$ и $2x^2 + 2x + 1 = (x + 2)^2$, откъдето $x = 3$, съответно $y = 4$ и $z = 5$.

Окончателно, решенията са $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(3, 4, 5)$ и $(4, 3, 5)$.

9.4. Група от играчи, които могат да седнат около кръгла маса така, че всеки да е победил стоящия отдясно, ще наричаме *цикъл*, а редица от играчи, в която всеки е победил стоящия отдясно, ще наричаме *пътека*.

Нека A, B, C и D образуват (в този ред) един *цикъл* от четирима играчи; тях ще наричаме “средни”.

Нека X бъде произволен друг играч, който е победил A . Ако D е победил X , то $X - A - B - C - D$ би бил *цикъл*, съдържащ повече от четирима играчи, което е противоречие. Следователно X е победил D . По същия начин последователно установяваме, че X е победил и C и B . Всеки такъв играч ще наричаме “силен”.

Аналогично се вижда, че всеки играч, който е победен от A , е победен и от B, C и D . Всеки такъв играч ще наричаме “слаб”.

Да допуснем, че някой слаб играч X е победил някой силен играч Y . Тогава $X - Y - A - B - C - D$ би бил *цикъл*, съдържащ повече от четирима играчи, което е противоречие.

Получихме, че всеки силен играч е победил всички средни и всички слаби играчи, и всеки среден играч е победил всички слаби играчи. Оттук следва, че във всяка *пътека* трябва да стоят първо силните играчи, след това средните, и най-накрая – слабите.

Нека P, Q и R бъдат съответно броят на начините, по които силните, средните и слабите играчи могат да бъдат подредени в *пътека* (възможно е изобщо да няма силни или слаби играчи – тогава полагаме съответно $P = 1$ или $R = 1$). Тогава броят на начините, по които всички играчи могат да бъдат строени в *пътека*, е равен на PQR . Но $Q = 5$ винаги, независимо от изходите на срещите $A - C$ и $B - D$ и с това задачата е решена.

10.1. Тъй като $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, разглеждаме два случая:

Случай 1. Нека $x \in [-2, 1]$. Тогава уравнението е еквивалентно на $x^2 + (1 + a)x = 0$, което в разглеждания интервал има два различни корена $x = 0$ и $-(a + 1)$ при $a \in [-2, -1) \cup (-1, 1]$ и един корен $x = 0$ в противен случай.

Случай 2. Нека $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$. Тогава уравнението е еквивалентно

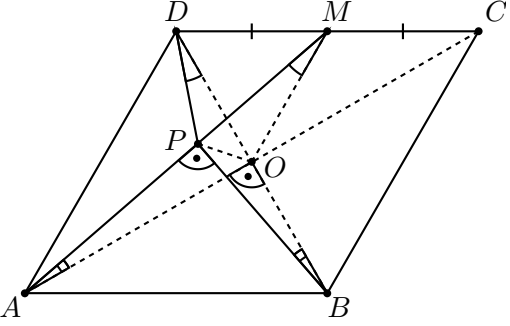
на $x^2 + (1 - a)x - 4 = 0$, което в разглеждания интервал има два различни корена при $a \in (-2, 1)$ и един корен в противен случай.

Така необходимото и достатъчно условие даденото уравнение да има точно три реални решения е $a = -2$, $a = 1$ или $a = -1$. Съответните решения са $x = 0, 1, -4$; $0, -2, 2$ и $0, 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}$.

10.2. Нека O е пресечната точка на диагоналите AC и BD . От $\angle APB = 90^\circ = \angle AOB$ следва, че четириъгълникът $ABOP$ е вписан. Тогава

$$\angle POD = 180^\circ - \angle POB = \angle PAB = \angle PMD$$

и следва, че четириъгълникът $DPOM$ е вписан. От $\angle PDO = \angle PMO$ и $\angle PBO = \angle PAO$ следва, че $\triangle BDP \sim \triangle AMO$. Освен това OM е средна отсечка в $\triangle ACD$ и получаваме



$$\angle BPD = \angle AOM = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ и } BP : PD = AO : OM = AC : AD = 2 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

10.3. Дефиниционната област включва всички точки (x, y) , лежащи между и върху графиките на $y = ax^2$ и $y = \sqrt{x/a}$ за $x \in [0, 1/a]$. Неравенството от условието се опростява до $(x - y)(1 + a(x + y)) > 0$, откъдето $x > y$. Числото N е равно на броя на точките с цели координати, заключени между графиките на $y = ax^2$ и $y = x$, $x \in [0, 1/a]$, но нележащи на втората от тях.

Очевидно $N = 0$ при $a \leq 1$. Когато a намалява от 1 към 0, N расте скокообразно, като големините на скоковете са равни на броя на точките с цели координати, лежащи върху графиката на $y = ax^2$ в момента на скока (т.е. за съответно a).

Да намерим най-голямото $a \in (0, 1)$, за което графиката на $y = ax^2$, $x \in [0, 1/a]$, съдържа две различни точки с цели координати. Очевидно това е еквивалентно на намирането на най-малката цяла стойност на $\frac{1}{a}$, за която a се среща в две от множествата $A_n = \{\frac{k}{n^2} \mid k = 1, \dots, n - 1\}$. Директно се проверява, че при $a = \frac{1}{9}$ имаме първи скок с големина 2 и че за тази стойност на a имаме $N = 10$. Следователно за всяко $a \geq \frac{1}{9}$ имаме $N \geq 10$, а за $a < \frac{1}{9}$

имаме $N \leq 8$, т.е. не съществуват стойности на a , за които $N = 9$. Лесно се проверява, че за всяко $\frac{7}{64} < a \leq \frac{1}{9}$ имаме $N = 10$.

10.4. Трябва да докажем, че в граф G с n върха и повече от $3(n-1)/2$ ребра съществуват два върха, между които има поне три независими пътя.

Ще използваме индукция по n . За $n = 4$ твърдението е очевидно. Без ограничение на общността можем да считаме, че графът е свързан, както и че всеки връх е от степен поне 2. Нека C е цикъл в G . Ако съществува път, свързващ два върха в цикъла задачата е решена. Следователно всички ребра, излизащи от върхове на C имат в другия си край различни върхове от G .

Разглеждаме граф G' с множество от върхове $(G \setminus C) \cup \{C\}$ и с ребра – ребрата от G , имащи поне един край в $G \setminus C$. Извън $G \setminus C$ има поне три върха и броят на ребрата в G' е по-голям от $3(n'-1)/2$, където $n' = n - |C| + 1$ е броят на върховете в G' . Съгласно индукционното допускане в G' съществуват два върха, свързани с поне три независими пътя. Оттук лесно конструираме двойка върхове в G , между които съществуват три независими пътя.

11.1. Ако 1 е средният член на прогресията, то

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = 1,$$

което е невъзможно поради $\sin x + \cos x > \sin x \cos x$ (последното е еквивалентно на $(\sin x - 1)(\cos x - 1) < 1$).

Ако $\sin x \cos x$ е средният член на прогресията, то

$$\frac{1}{\sin x + \cos x} = \sin^2 x \cos^2 x,$$

което е невъзможно поради $\frac{1}{\sin x + \cos x} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (използваме известното неравенство $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$) и $\sin x \cos x \leq \frac{1}{2}$, т.е. $\sin^2 x \cos^2 x \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ако $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ е средният член на прогресията, то

$$\sin x \cos x = \left(\frac{1}{\sin x + \cos x} \right)^2.$$

Тъй като $\sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}$, то горното равенство е еквивалентно на $\frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - 1}{2}$ при $a = \sin x + \cos x$. Единственото решение е $a^2 = 2$, т.е.

$a = \sqrt{2}$. Тогава $x = 45^\circ$.

11.2. При стандартните означения за $\triangle ABC$ имаме $AC_1 = p - a$ и $BC_1 = p - b$. Нека X и Y са допирните точки съответно на вписаните окръжности в $\triangle AC_1C$ и $\triangle BC_1C$ със страната CC_1 . Пресмятаме

$$CX = \frac{CC_1 + CA - AC_1}{2} = \frac{CC_1 + b - (p - a)}{2} = \frac{CC_1 + a + b - p}{2}$$

и аналогично

$$CY = \frac{CC_1 + CB - BC_1}{2} = \frac{CC_1 + a - (p - b)}{2} = \frac{CC_1 + a + b - p}{2}.$$

Следователно $CX = CY$, т.е. двете окръжности допират страната CC_1 в една и съща точка. Тогава $O_1O_2 \perp CC_1$.

Нека $\angle ACO_1 = \angle C_1CO_1 = \varphi$ и $\angle BCO_2 = \angle C_1CO_2 = \psi$. Тогава $\angle QPC = \angle PCB = 2\psi$ и понеже PO_1 е ъглополовяща на $\angle QPC_1$, намираме $\angle QPO_1 = 90^\circ - \psi$. Сега от $\triangle CPO_1$ получаваме

$$\angle CO_1P = 180^\circ - \varphi - 2\psi - (90^\circ - \psi) = 90^\circ - \varphi - \psi.$$

Следователно $O_1P \perp CO_2$, т.е. P е ортоцентърът на $\triangle CO_1O_2$. Тъй като $\angle O_1CO_2 = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ$, то

$$CP = 2R \cos \angle O_1CO_2 = O_1O_2 \cotg \angle O_1CO_2 = O_1O_2.$$

11.3. Да разгледаме сборовете $\angle A_1AB + \angle B_1BA$, $\angle B_1BC + \angle C_1CB$, $\angle C_1CD + \angle D_1DC$, $\angle D_1DE + \angle E_1ED$, $\angle E_1EF + \angle F_1FE$ и $\angle F_1FA + \angle A_1AF$. Тъй като сборът на ъглите на шестоъгълника е 720° , то поне един от тези сборове не надминава 120° . Без ограничение нека това е $\angle A_1AB + \angle B_1BA$, т.е. $\angle A_1AB + \angle B_1BA \leq 120^\circ$. Тогава правите AA_1 и BB_1 се пресичат в точка X , която е в една и съща полуравнина с шестоъгълника $ABCDEF$ спрямо правата AB и $\angle AXB \geq 60^\circ$. Тъй като AA_1 и BB_1 нямат обща вътрешна точка, то поне една от отсечките AX и BX има дължина поне a . От друга страна, всяка от тези отсечки е най-много равна на диаметъра на окръжността, от която отсечката AB се вижда под ъгъл 60° . Понеже този диаметър е равен на $\frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Да разгледаме правилен шестоъгълник $ABCDEF$ със страна 1. Нека $A_1 = AE \cap FD$, $B_1 = BF \cap AE$, $C_1 = CA \cap BF$, $D_1 = DB \cap AC$, $E_1 = EC \cap DB$ и $F_1 = FD \cap EC$. Отсечките AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , EE_1 и FF_1 са с равни дължини и всеки две от тях нямат обща вътрешна точка. Понеже

$\angle FAA_1 = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$, то от $\triangle FAA_1$ намираме $AA_1 = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Следователно търсената най-голяма стойност е $a = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

11.4. Първо ще докажем следната

Лема. Даден е граф G с n върха със следното свойство: за всеки k , $1 \leq k \leq n-1$ върха на G съществува връх, който е свързан с всеки от тези k върха. Тогава минималният брой ребра на G е $\left\lceil \frac{(2k-1)n - k^2 + 1}{2} \right\rceil$.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по k . При $k=1$ от всеки връх трябва да излиза поне едно ребро и следователно са необходими поне $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ ребра. Следователно твърдението е вярно при $k=1$ и произволно n .

Нека $2 \leq k+1 < n$ и да допуснем, че твърдението е вярно за всички стойности по-малки от $k+1$. Нека A е произволен връх, който не е свързан с s от дадените върхове (да означим множеството от тези върхове с M) и съответно е свързан с $n-s-1$ върха (да означим множеството от тези върхове с N). Лесно се забелязват следните свойства.

1. Всеки връх е от степен поне $k+1$, защото в противен случай множеството от връх и свързаните с него най-много k върха не изпълнява условието на задачата.

2. Множеството N удовлетворява условието на задачата за k върха. За целта е достатъчно да разгледаме произволни k върха от N и върха A .

3. За всеки два върха свързаните едновременно с тях върхове са поне k . Следователно от всеки връх в M излизат поне k ребра към върховете в N . Понеже всеки връх в M е от степен поне $k+1$, то имаме още поне $\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$ ребра.

Използвайки индукционната хипотеза за N и неравенството $\lceil a \rceil + \lceil b \rceil \geq \lceil a+b \rceil$, получаваме, че общият брой ребра е поне

$$n-s-1+ks+\left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{(2k-1)(n-s-1)-k^2+1}{2} \right\rceil \geq$$

$$\left\lceil \frac{(2k+1)n-2k-k^2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{(2k+1)n-(k+1)^2+1}{2} \right\rceil.$$

За решаване на задачата трябва да заместим в получената формула n с $2n$, а k с n . Получаваме, че ребрата в графа са поне

$$\left\lceil \frac{3n^2-2n+1}{2} \right\rceil.$$

Ще построим граф с $2n$ върха и $\left\lceil \frac{3n^2 - 2n + 1}{2} \right\rceil$ ребра, който има исканото свойство. Разделяме върховете на две групи от съответно $n - 1$ и $n + 1$ върха. Всеки връх от първата група свързваме с всички върхове на графа. Във втората група прекарваме $\left\lceil \frac{n + 1}{2} \right\rceil$ ребра така, че от всеки връх да излиза поне едно ребро. Директно се вижда, че за всеки n върха съществува връх, който е свързан с всеки един от тях. Ребрата на този граф са

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1)(n+1) + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n^2 - 2n + 1}{2} \right\rceil.$$

12.1. Да означим с $f(x)$ функцията в лявата част на уравнението. Лесно се вижда, че

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq 1 \\ 1/|x|, & |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Следователно уравнението има 4 различни решения при $0 < a < 1$ и те са $x = \frac{1}{a}, a, -a, -\frac{1}{a}$. Тези числа образуват аритметична прогресия, когато $\frac{1}{a} - a = a + a = -a + \frac{1}{a}$, т.е. при $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

12.2. Ще използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$. Нека $GI \perp AB$, C_1 е средата на AB , а C_2 и C_3 са проекциите съответно на I и C върху AB . Тогава $GC_2 \parallel CC_3$ и значи

$$\frac{C_1C_3}{C_1C_2} = \frac{C_1C}{C_1G} = 3.$$

Можем да считаме, че $a > b$. Тогава

$$C_1C_2 = BC_2 - BC_1 = \frac{a - b + c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a - b}{2},$$

а от косинусовата теорема следва, че

$$C_1C_3 = BC_3 - BC_1 = a \cos \beta - \frac{c}{2} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c} - \frac{c}{2} = \frac{(a - b)(a + b)}{2c}$$

Оттук $3c = a + b$. От друга страна, a, b, c образуват (в някакъв ред) аритметична прогресия, откъдето $2b = a + c$. Получаваме, че $a : b : c = 5 : 4 : 3$ и значи $\alpha = 90^\circ$.

Забележка. Ако страните на правоъгълен триъгълник образуват аритметична прогресия, то те са в отношение 3 : 4 : 5 и правата MI е перпендикулярна на по-големия катет.

12.3. Имаме, че

$$\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^2 \geq \frac{1+x^2}{2}, \quad \left(\frac{1+x^3}{1+x}\right)^2 = (1-x+x^2)^2 \geq \frac{1+x^4}{2},$$

(след привеждане под общ знаменател и разкриване на скобите второто неравенство приема вида $(x-1)^4 \geq 0$). Ще използваме още, че

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (1+xy)^2.$$

Тогава

$$\begin{aligned} \frac{1+a^2}{1+a} \cdot \frac{1+b^2}{1+b} &\geq \sqrt{\frac{1+a^2}{2} \cdot \frac{1+b^2}{2}} \geq \frac{1+ab}{2}, \\ \frac{1+a^6}{1+a^2} \cdot \frac{1+b^6}{1+b^2} &\geq \sqrt{\frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1+b^8}{2}} \geq \frac{1+a^4b^4}{2} \end{aligned}$$

и остава да умножим тези неравенства. Равенство се достига само при $a = b = 1$.

Забележка. Неравенството

$$\left(\frac{1+x^6}{1+x}\right)^2 \geq \frac{1+x^2}{2} \cdot \frac{1+x^8}{2},$$

което всъщност е нужно, може да се докаже и директно. Наистина, след привеждане под общ знаменател и разкриване на скобите то приема вида

$$3x^{12} - 2x^{11} - 2x^{10} - 2x^9 - x^8 + 8x^6 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3 \geq 0,$$

което може да се запише като

$$(x-1)^2[2(x+1)^2(x^4-1)^2 + (x^2+1)(x^8+1)] \geq 0.$$

12.4. Всеки полином P от трета степен с реални коефициенти има поне една реална нула. Ако тази нула е трикратна, то твърдението е очевидно. Иначе P има еднократна реална нула α . Тогава $P(x+\alpha) = a(x^3+3bx^2+3cx)$ ($ac \neq 0$) и трябва да докажем твърдението за полинома в скобите. Достатъчно е да намерим реални числа $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ така, че

$$x^3 + 3bx^2 + 3cx = \lambda_1(x+\alpha_1)^3 + \lambda_2(x+\alpha_2)^3 + \lambda_3x^3.$$

Имаме, че $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, където λ_1 и λ_2 са решения на преопределената линейна система

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 = b \\ \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 = c \\ \alpha_1^3 \lambda_1 + \alpha_2^3 \lambda_2 = 0 \end{cases}.$$

При $0 \neq \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$ системата от първите две уравнения има (единствено) решение. Ако умножим първото уравнение по $\alpha_1 \alpha_2$ и от него извадим второто умножено по $\alpha_1 + \alpha_2$, ще получим третото уравнение при условие, че $b \alpha_1 \alpha_2 = c(\alpha_1 + \alpha_2)$. Понеже $c \neq 0$, можем да намерим различни ненулеви реални числа β_1 и β_2 така, че $b/c = \beta_1 + \beta_2$. Остава да положим $\alpha_1 = 1/\beta_1$ и $\alpha_2 = 1/\beta_2$.

Забележки. а) С помощта на стандартни методи от линейната алгебра може да се докаже, че ако P е даден полином от първа, втора или трета степен с реални коефициенти, то за почти всички двойки от (различни) реални числа α_1 и α_2 съществуват единствени реални числа α_3 ($\neq \alpha_1, \alpha_2$), $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ така, че

$$P(x) = \lambda_1(x + \alpha_1)^3 + \lambda_2(x + \alpha_2)^3 + \lambda_3(x + \alpha_3)^3.$$

Броят (три) на полиномите в горното представяне не може да се намали.

б) Всеки полином от втора или трета степен с реални коефициенти може да се представи и като сума от кубовете на един константен и два неконстантни полинома с реални коефициенти. Това не е вярно за полином от първа степен.

Пролетни Математически Състезания

9.1. От второто уравнение изразяваме $x = \frac{y^2}{2m}$ (лесно се вижда, че $m = 0$ не е решение) и заместваме в първото. Полученото биквадратно уравнение трябва да има 4 реални различни корена, което означава, че съответното му квадратно уравнение $\left(\frac{t}{2m} + m + 2\right)^2 + t - 1 = 0$ (положили сме $y^2 = t$) трябва да има два реални различни положителни корена.

Получаваме уравнението $t^2 + 8m(m+1)t + 4m^2(m+1)(m+3) = 0$ с дискриминанта от съкратената формула $D = 16m^2(m+1)^2 - 4m^2(m+1)(m+3) = 4m^2(m+1)(3m+1)$. Имаме $D > 0 \iff m \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$. Двата корена са положителни точно когато $4m^2(m+1)(m+3) > 0 \iff m \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ и $8m(m+1) < 0 \iff m \in (-1, 0)$. Следователно търсените стойности на m са $m \in (-\frac{1}{3}, 0)$.

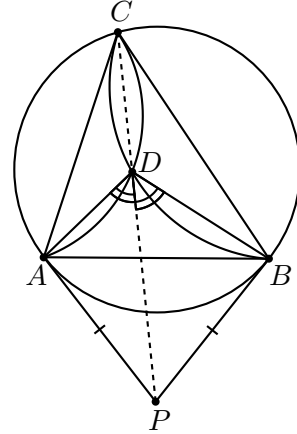
9.2. Ако $\angle ACB = \gamma$, то от условието следва, че

$$\angle ADC = \angle BDC = 180^\circ - \gamma, \text{ т.е. } \angle ADB = 2\gamma.$$

Тогава

$$\angle ADB + \angle APB = 2\gamma + (180^\circ - 2\gamma) = 180^\circ,$$

т.е. четириъгълникът $APBD$ е вписан в окръжност. Остава да съобразим, че $PA = PB$, т.е. $\angle PDB = \angle PDA = \gamma$ и следователно $\angle PDB + \angle BDC = \gamma + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ$, т.е. точките C , D и P лежат на една права.



9.3. Да въведем координатна система по такъв начин, че долната лява клетка на дъската да има координати $(1, 1)$, а горната дясна – $(300, 300)$. Нека клетката $(1, 1)$ е покрита с вертикална плочка.

Да допуснем, че $(2, 1)$ е покрита с хоризонтална плочка. За да избегнем образуването на буква Т, $(2, 2)$ трябва да бъде покрита с вертикална плочка, $(3, 2)$ – с хоризонтална, и т.н. Образуването на тази стълбичка ще продължи най-много докато достигнем десния или горния ръб на дъската, след което буква Т все пак ще се получи – противоречие.

И така, $(2, 1)$ също е покрита с вертикална плочка. Аналогично, $(3, 1)$ е покрита с вертикална плочка, $(4, 1)$ – също и т.н.: всички клетки $(i, 1)$ за $1 \leq i \leq 300$ трябва да бъдат покривани с вертикални плочки.

След това, ако някоя клетка от вида $(i, 4)$ бъде покрита с хоризонтална плочка, то отново би се образувала буква Т. Следователно, всички клетки от този вид са покрити от вертикални плочки. Аналогично, всички клетки от вида $(i, 7)$, всички клетки от вида $(i, 10)$ и т.н. са покрити с вертикални плочки и всички плочки в покритието са вертикални.

По същия начин, ако $(1, 1)$ е покрита с хоризонтална плочка, то всички плочки в покритието са хоризонтални. Следователно броят на добрите покрития е 2.

9.4. Ще използваме следното помощно твърдение.

Лема. За всяко просто число p и за всяко $k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$ е в сила сравнението

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod{p}.$$

Доказателство. Тъй като $(p, k!) = 1$, разглежданото сравнение

$$\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k)}{k!} \equiv (-1)^k \pmod{p}$$

е еквивалентно на $(p-1)(p-2)\dots(p-k) \equiv (-1)^k k! \pmod{p}$, което очевидно е вярно (разкриваме скобите!).

Да предположим, че числа с исканите свойства съществуват. Да отбележим, че $a = p - 2$ не дава решение (Защо?). Тогава от лемата следва, че лявата страна на даденото равенство е сравнима с $(-1)^a(-1)^{a+1} = 1$, а дясната с $(-1)^{2b_1} + (-1)^{2b_2} + \dots + (-1)^{2b_6} = 6$. Оттук $-1 \equiv 6 \pmod{p}$, което означава, че $p = 7$.

При $p = 7$ от свойствата на биномните коефициенти следва, че лявата страна може да приема само две различни стойности, които се получават при $a = 1$ и $a = 2$, и са съответно $\binom{6}{1}\binom{6}{2} = 90$ и $\binom{6}{2}\binom{6}{3} = 300$. Най-малката стойност на дясната страна е $6\binom{6}{1}^2 = 216$, а следващата по големина е $5\binom{6}{1}^2 + \binom{6}{2}^2 = 405$. Следователно исканото равенство е невъзможно.

10.1. След полагането $2^{x-2} = t$ свеждаме задачата до намиране тези стойности на реалния параметър a , за които уравнението $t^2 - 2^{2-a}t + a = 0$ има точно едно положително решение. Нека $f(t) = t^2 - 2^{2-a}t + a$.

Случай 1. Ако уравнението $f(t) = 0$ има двоен положителен корен, то необходимо и достатъчно условие е $D = 4^{2-a} - 4a = 0$, т.е. $4^{1-a} = a$ и $2^{1-a} > 0$. При $a > 1$ имаме $4^{1-a} < 1 < a$, а при $0 < a < 1$ имаме $4^{1-a} > 1 > a$. При $a = 1$ получаваме единствен корен $t = 1$.

Случай 2. Ако уравнението $f(t) = 0$ има два реални корена $t_1 \leq 0 < t_2$, то необходимо и достатъчно условие е $f(0) \leq 0$ и $2^{1-a} > 0$, т.е. $a \leq 0$.

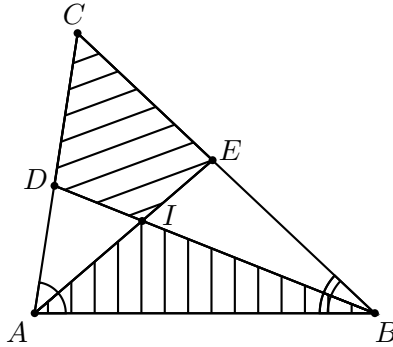
10.2. Ще използваме стандартните означения за $\triangle ABC$. От условието следва, че $S_{ABD} = S_{AEC}$, т.е.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{c}{a+c} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow ab = c^2$$

и от косинусова теорема за $\triangle ABC$ получаваме

$$\cos \angle ACB = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - ab}{2ab} \geq \frac{1}{2}.$$

Следователно, $\angle ACB \leq 60^\circ$ и равенство се достига, когато $\triangle ABC$ е равнобедрен.



10.3. Съобразяваме, че записаното в ред i и стълб j число е $2ij + i + j$. Тогава, ако едно число M се появява в таблицата, то $2M + 1 = (2i + 1)(2j + 1)$ за някои $i, j \in \mathbb{N}$. Обратно, ако $2M + 1 = ab$ и $a \neq 1, b \neq 1$, то a и b са нечетни числа и M се появява в ред $i = \frac{a-1}{2}$ и стълб $j = \frac{b-1}{2}$. Следователно, броят на появяванията на N в таблицата е равен на броя на наредените двойки (a, b) , за които $2N + 1 = ab$, $a \neq 1, b \neq 1$. Този брой е с две по-малък от броя на делителите на N . Така за $N = \frac{2013^{2013} - 1}{2}$ имаме $2N + 1 = 2013^{2013} = 3^{2013} \cdot 11^{2013} \cdot 61^{2013}$ и търсеният брой появявания е $(2014)^3 - 2$.

10.4. Нека върху дъската са разположени n пула. Очевидно никои два пула не са в линия. (Защо?) С всяка конфигурация можем да свържем пермутация на числата $\{1, 2, \dots, n\}$ по следния начин: ако пуловете заемат позиции

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \dots, (n, a_n),$$

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, то свързаната с конфигурацията пермутация е

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Лесно се проверява (индукция по n), че тази пермутация е цикъл

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_n \rightarrow i_1,$$

$\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Да забележим, че клетката (i, j) е черна тогава и само тогава, когато $i + j$ е нечетно. Следователно в горния цикъл имаме

$$i_1 + i_2 \equiv i_2 + i_3 \equiv \dots \equiv i_{n-1} + i_n \equiv i_n + i_1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Остава да съобразим, че за нечетно n не съществува цикъл с това свойство, а за четно n търсеният брой конфигурации е

$$\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n-2}{2}\right)!.$$

11.1. Имаме

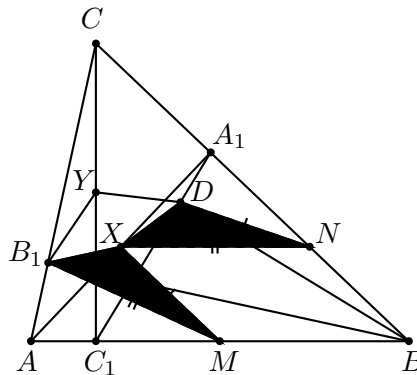
$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \end{aligned}$$

откъдето след полагане $y = \sin x \cos x$ даденото уравнение става

$$3y^2 + ay - 1 = 0.$$

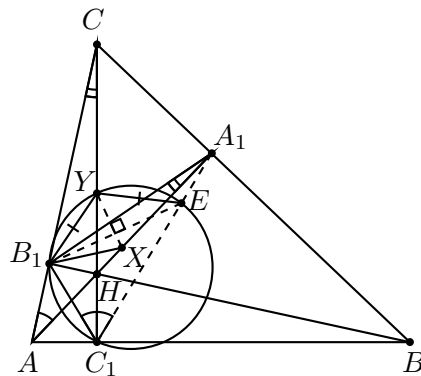
Тъй като $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2y$, то y също е рационално число. Това означава, че дискриминантата на уравнението $3y^2 + ay - 1 = 0$ е точен квадрат. Следователно $a^2 + 12 = t^2$, откъдето $(t - a)(t + a) = 12$. Понеже $t - a$ и $t + a$ са с еднаква четност, лесно намираме решенията $t = \pm 4$ и $a = \pm 2$. Търсените стойности са $a = \pm 2$.

11.2. Първи начин. Да означим с D петата на перпендикуляра от B към A_1C_1 . Ако X е средата на AA_1 , ще докажем, че $XB_1 = XD$. Нека M и N са среди съответно на AB и A_1B . Тогава $MX = \frac{1}{2}A_1B = DN$ и $MB_1 = \frac{1}{2}AB = XN$. Освен това $|\angle XMB_1| = |\angle AMB_1 - \angle AMX|$ и $|\angle XND| = |\angle A_1ND - \angle A_1NX|$, като $\angle AMB_1 = 180^\circ - 2\alpha = \angle A_1ND$ и $\angle AMX = \beta = \angle A_1NX$. Следователно, $\triangle XMB_1 \cong \triangle DNX$, откъдето $XB_1 = XD$. Аналогично доказваме, че $YB_1 = YD$, където Y е средата на AA_1 .



Следователно, XY е симетрала на BD , което означава, че D е симетрична на B_1 спрямо XY .

Втори начин. Нека X и Y са средите на AA_1 и BB_1 съответно, а E симетричната точка на B_1 относно правата XY . Лесно се съобразява, че $\triangle AA_1B_1 \sim \triangle C_1CB_1$. Тогава B_1X и B_1Y са съответни медиани в подобни триъгълници и $\angle B_1XA = \angle B_1YC_1$. Следователно, четириъгълникът B_1HXY е вписан в окръжност и $\angle B_1EY = 90^\circ - \angle B_1YX = 90^\circ - \angle B_1HA = \angle B_1AH = \angle B_1C_1Y$, т.е. четириъгълникът B_1C_1EY е вписан в окръжност. Но $YE = YB_1$, т.е. $\angle EC_1Y = \angle YC_1B_1 = \angle XAB_1 = \angle A_1C_1C$ и следователно, $E \in A_1C_1$.



11.3. На всяка двойка (p, q) от различни прости числа от даденото множество съпоставяме дробта $\frac{p}{q}$. Да наредим така получените дроби в нарастващ ред.

Отговорът на Иван показва кое от следните условия е изпълнено $\frac{b}{a} < \frac{p}{q}$,
 $\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$ или $\frac{b}{a} > \frac{p}{q}$.

Да допуснем, че в даден момент възможните двойки на Иван са t . Да разгледаме следната стратегия на Петър. При t четно число той задава въпрос (a, b) , където дробта $\frac{b}{a}$ е по-голяма от точно половината от възможните числа на Иван (той като множеството на рационалните числа е гъсто, това винаги е възможно), а при нечетно t дробта $\frac{b}{a}$ трябва да е равна на средната дроб. При всеки отговор на Иван за описаната стратегия възможните двойки на Иван остават $\frac{t}{2}$ при t четно число и $\frac{t-1}{2}$ при t нечетно число.

От друга страна е ясно, че при всеки въпрос на Петър съществува отговор, за който възможните двойки на Иван намаляват най-много с $\frac{t}{2}$ при t четно и с $\frac{t+1}{2}$ при t нечетно.

При описаната стратегия на Петър, ако броят на възможните двойки на Иван е t и $t = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \dots + 2^{\alpha_k}$, където $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k$ е двоичното представяне на t , то след всеки въпрос на Петър най-високата степен на двойката в това представяне намалява с 1. Следователно за да остане едно число са ни необходими точно α_1 въпроса.

Тъй като броят на дробите е 2013.2012 и $2^{21} < 2013.2012 < 2^{22}$, то отговорът е 21.

11.4. Ако $x \in [-2, 2]$, то x еднозначно се представя във вида $x = 2 \cos \alpha$ за някое $\alpha \in [0, \pi]$. Ако $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, то съществува единствено реално число $t < -1$ или $t > 1$, такова че $x = t + \frac{1}{t}$. По индукция лесно се доказва, че в първия случай $f_n(x) = 2 \cos 3^n \alpha$, а във втория $f_n(x) = t^{3^n} + \frac{1}{t^{3^n}}$.

а) Ясно е, че корените са в интервала $[-2, 2]$. Имаме

$$2 \cos 3^{2013} \alpha = 2 \iff 3^{2013} \alpha = 2k\pi \iff \alpha = \frac{2k\pi}{3^{2013}}.$$

Условието $\alpha \in [0, \pi]$ дава $k = 0, 1, \dots, \frac{3^{2013} - 1}{2}$, т.е. в този случай имаме $\frac{3^{2013} + 1}{2}$ реални корена.

б) Сега е ясно, че $x \in (2, +\infty)$. При $x = t + \frac{1}{t}$, $t > 1$ имаме $t^{3^{2013}} + \frac{1}{t^{3^{2013}}} = 3$.

Уравнението $y + \frac{1}{y} = 3$ има единствен корен, който е по-голям от 1 и този корен е $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. Следователно, уравнението $f_{2013}(x) = 3$ има единствен корен

$$x = {}^{3^{2013}}\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} + {}^{3^{2013}}\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

12.1. Нека $\alpha = \angle BAO$, $\beta = \angle ABO$, $\gamma = \angle DCO$ и $\delta = \angle CDO$. Ако M е средата на AB , от първото условие следва, че $\gamma, \delta < 90^\circ$, $\angle AOM = 90^\circ - \delta$ и $\angle BOM = 90^\circ - \gamma$. Тогава от синусовата теорема получаваме, че

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{AO}{BO} = \frac{AO/AM}{BO/BM} = \frac{\sin \theta / \cos \delta}{\sin \theta / \cos \gamma},$$

където $\theta = \angle AMO$. Следователно (1) $\sin \alpha \cos \gamma = \sin \beta \cos \delta$. Аналогично от второто условие намираме, че (2) $\cos \alpha \sin \gamma = \cos \beta \sin \delta$.

Като извадим почленно (1) и (2), получаваме, че

$$\sin(\alpha - \gamma) = \sin(\beta - \delta).$$

Понеже $-\pi < \alpha - \gamma + \beta - \delta < \pi$, следва, че $\alpha - \gamma = \beta - \delta$. Сега от $\alpha + \beta = \gamma - \delta$ заключаваме, че $\alpha = \gamma$, т.е. $AB \parallel CD$.

Да отбележим, че тогава $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, откъдето $\alpha = \beta$ или $\alpha + \beta = \pi/2$. Това означава, че $ABCD$ е равнобедрен трапец или трапец с перпендикулярни диагонали, като и в двата случая условията са изпълнени.

12.2. Нека числата са x_1, x_2, x_3, x_4 , като x_4 е нула на

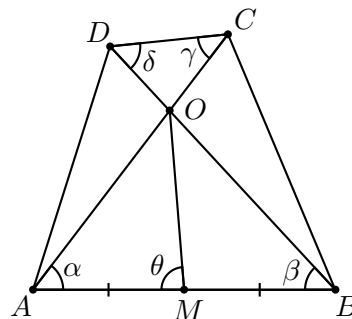
$$((x - x_1)(x - x_2)(x - x_3))' = 3x^2 + 3(x_1 + x_2 + x_3)x + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

Тогава $3x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1}$.

Можем да считаме, че $1 = x_1 < x_2 < x_3$. При знак $-$ имаме $x_1 < x_4 < x_2$ и значи $x_4 = q$, $x_2 = q^2$, $x_3 = q^3$, а при знак $+$ следва, че $x_2 < x_4 < x_3$, откъдето $x_2 = q$, $x_4 = q^2$, $x_3 = q^3$. И така, $q > 1$ и

$$3q = 1 + q^2 + q^3 - \sqrt{1 - q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6} \quad \text{или}$$

$$3q^2 = 1 + q + q^3 + \sqrt{1 - q + q^2 - q^3 - q^4 + q^6}.$$



В първия случай получаваме, че

$$(q-1)\sqrt{q^4 + q^3 + 2q^2 + 2q + 1} = (q-1)(q^2 + 2q - 1) \text{ и значи}$$

$$q^4 + q^3 + 2q^2 + 2q + 1 = q^4 + 4q^3 + 2q^2 - 4q + 1, \text{ т.е. } q(q^2 - 2) = 0.$$

Във втория случай намираме, че

$$(1-q)\sqrt{q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q + 1} = (q-1)(q^2 - 2q - 1), \text{ откъдето}$$

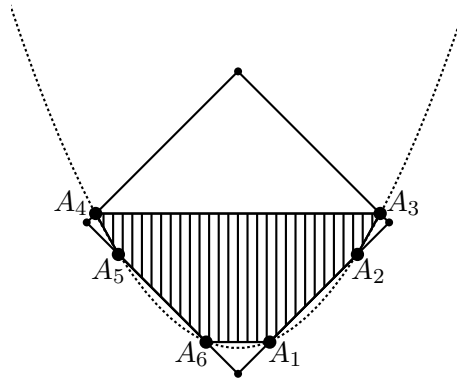
$$q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q + 1 = q^4 - 4q^3 + 2q^2 + 4q + 1, \text{ т.е. } q(2q^2 - 1) = 0.$$

(Всъщност този случай се свежда до първия при смяната на q с $1/q$, т.е. обратна наредба на числата.)

Следователно $q = \sqrt{2}$.

12.3. Лесно се проверява, че броят на пресечните точки на графиката и квадрата е равен на 0 при $|a| > 1$, на 1 при $a = -1$, на 3 при $a = 1$, на 2 при $a \in (-1, 3/4)$, на 4 при $a = 3/4$ и на 6 при $a \in (3/4, 1)$.

При $a \in (3/4, 1)$ имаме две пресечни точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ в четвърти квадрант и една пресечна точка $A_3(x_3, y_3)$ в първи квадрант, където $0 < x_1 < x_2 < 1$ са корените на уравнението $x^2 - x + 1 - a = 0$, $x_3 \in (0, 1)$ е по-големият корен на уравнението $x^2 + x - 1 - a = 0$ и $y_i = x_i^2 - a$, $i = 1, 2, 3$. Останалите пресечни точки A_4, A_5 и A_6 са симетрични съответно на A_3, A_2 и A_1 спрямо ординатната ос.



Тогава лицето S на $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ е равно на сумата от лицата на четириъгълниците $A_1A_2A_5A_6$ и $A_2A_3A_4A_5$, т.е.

$$S = (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) = u + \frac{(u+v)^2(v-u-2)}{8},$$

където $u = \sqrt{4a-3}$ и $v = \sqrt{4a+5}$.

Понеже $v^2 - u^2 = 8$, то $S = 2u + v - \frac{(u+v)^2}{4}$. Тъй като $u < 1$, то $u + v < 4$ и значи S е растяща квадратна функция спрямо u . Имаме, че $u + 8 < 3v$ ($\Leftrightarrow (u-1)^2 > 0$) и следователно

$$S < 2(3v-8) + v - \frac{(3v-8+v)^2}{4} = \frac{17 - (8v-23)^2}{16}.$$

Забележка. В действителност, $S_{\max} \approx 1,049$.

12.4. Нека $0 < \psi < \theta$. Тогава $\psi \leq \sqrt{2} - 1$ или съществуват естествени числа $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n-1$ така, че

$$k - (n-k)\sqrt{2} \leq -\psi < \psi \leq k+1 - (n-k-1)\sqrt{2},$$

$$\text{т.е. } \frac{n\sqrt{2} + \psi}{\sqrt{2} + 1} - 1 \leq k \leq \frac{n\sqrt{2} - \psi}{\sqrt{2} + 1}$$

и значи $\psi \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. При $\psi = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ имаме, че $k = 2n - 1/2 - n\sqrt{2}$, което не е цяло число. Следователно $\theta \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

От друга страна, ако $\theta < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, то интервалът

$$\Delta_n = \left[\frac{n\sqrt{2} + \theta}{\sqrt{2} + 1} - 1, \frac{n\sqrt{2} - \theta}{\sqrt{2} + 1} \right]$$

има дължина, по-голяма от 1. Както е добре известно, за всяко $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ редицата с общ член $\{n\alpha\}$ е гъсто подмножество на $(0,1)$. При $\alpha = 2 - \sqrt{2}$ следва, че безбройно много от интервалите Δ_n съдържат естествени числа k_n ($< n$). Полученото противоречие показва, че $\theta = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

62. Национална олимпиада по математика, Областен кръг

9.1. Ще използваме стандартните означения в $\triangle ABC$. Без ограничение на общността може да считаме, че $a < b < c$. Нека C_0 е средата на AB , A_0 е средата на BC , I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, $IT_1 \perp BC$, $T_1 \in BC$, и $IT_3 \perp AB$, $T_3 \in AB$. Тъй като T_1 и T_3 са допирните точки на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност съответно със страните BC и AB , то $BT_1 = BT_3 = p - b = \frac{a+c-b}{2} = \frac{b}{2}$. Тогава $A_0T_1 = BT_1 - BA_0 = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$ и аналогично $C_0T_3 = BC_0 - BT_3 = \frac{c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c-b}{2}$.

Тъй като $\frac{b-a}{2} = \frac{c-b}{2}$, имаме $\triangle IT_1A_0 \cong \triangle IT_3C_0$ по първи признак и следователно $\angle A_0IT_1 = \angle C_0IT_3$.

От $\angle BT_1I = \angle BT_3I = 90^\circ$ следва, че четириъгълникът IT_1BT_3 е вписан. Тогава $\angle T_1BT_3 + \angle T_1IT_3 = 180^\circ$, което заедно с полученото по-горе $\angle A_0IT_1 = \angle C_0IT_3$ дава $\angle A_0C_0 + \angle A_0BC_0 = 180^\circ$. Последното означава, че точките B , I , A_0 и C_0 лежат на една окръжност.

9.2. Условието $f(a-1) = f(a+1)$ е еквивалентно (след съответните пресмятания) на $2ab = a^2 + 4$, а от $f(b) = -2a$ получаваме $a + 3b = a^2b$. От тези две равенства изразяваме $b = \frac{a^2+4}{2a} = \frac{a}{a^2-3}$ (лесно се вижда, че $a = 0$ и $a^2 = 3$ не водят до решение). Следователно $\frac{a^2+4}{2a} = \frac{a}{a^2-3}$, откъдето получаваме биквадратното уравнение $a^4 - a^2 - 12 = 0$. Тогава $a^2 = 4$, т.е. $a = \pm 2$ и съответно $b = \pm 2$. Двойките $(a, b) = (2, 2)$ и $(-2, -2)$ наистина са решения на задачата.

9.3. Да положим $2x + y = A$ и $x + y = B$. Получаваме равенството $A^3 = p^2B^2(A - B)$, от което следва, че $p|A$. Нека $A = pA_1$, където A_1 е цяло число. Тогава $pA_1^3 = B^2(pA_1 - B)$, откъдето следва, че $p|B$ (в противен случай дясната страна не се дели на p). Нека $B = pB_1$, където B_1 е цяло число. Получаваме $A_1^3 = p^2B_1^2(A_1 - B_1)$, което е от същия вид, както полученото по-горе уравнение $A^3 = p^2B^2(A - B)$, и следователно можем да продължим с аналогични разсъждения. Ясно е, че при $A \neq 0$ този процес ще продължи безкрайно, т.е. A ще се дели на произволно висока степен на p , което е абсурдно. Следователно $A = B = 0$, откъдето веднага получаваме $x = y = 0$.

9.4. Отговор: 9. Нека $m, n \in A$ и без ограничение на общността $m > n$. Тогава даденото неравенство се записва във вида $mn + 10n - 10m \leq 50 \iff (m+10)(n-10) \leq -50$. Последното означава, че е невъзможно да имаме $n \geq 10$. Следователно в A има най-много едно число, по-голямо от 9. Освен това лесно се вижда, че е невъзможно числата 8 и 9 едновременно да принадлежат

на A . Тогава $|A| \leq 9$.

Множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$ има исканото свойство и е с 9 елемента. Ясно е как са получени първите му 8 елемента, а 15 е минималното число, което отговаря на условието заедно с 8.

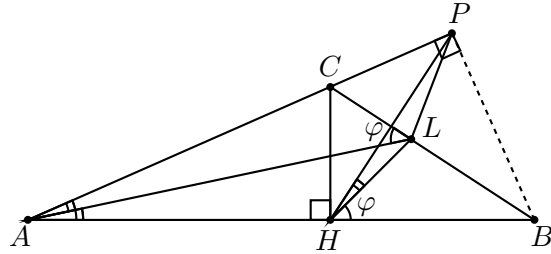
10.1. Имаме $x^3 + ax^2 - (1-a)^2 = (x - (1-a))(x^2 + x + (1-a)) = 0$. Ако D е дискриминантата на квадратния тричлен, то от $D > 0$ получаваме $a > 3/4$. Освен това $1-a$ не трябва да е корен на квадратния тричлен, откъдето $a \neq 1, 3$. Използвайки формулите на Виет за даденото условие, получаваме

$$\frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_3 x_1} + \frac{x_3}{x_1 x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{a^2}{(1-a)^2} > \frac{3}{2},$$

което е изпълнено точно тогава, когато $a \in (3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6})$. Така окончателно

$$a \in \left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup (1, 3) \cup (3, 3 + \sqrt{6}).$$

10.2. *Първи начин.* Нека $\angle ALC = \angle BHL = \varphi$ и P е петата на височината от върха B към правата AC ($P \in AC^\leftrightarrow$). Четириъгълникът $HBPC$ е вписан в окръжност с диаметър BC и следователно $\angle BHP = \angle BCP$. Тогава $\angle LAP = \angle BCP - \varphi = \angle BHP - \varphi = \angle LHP$, т.е.



$AHLP$ е вписан четириъгълник. От друга страна, AL е ъглополовяща на $\angle BAC$ и следователно $L \in s_{PH}$. Имаме две възможности:

Случай 1. Ако $s_{PH} \cap BC$, то L е център на описаната около $HBPC$ окръжност, т.е. $BL = LC$, $AB = AC$. Но $\angle ACB > 90^\circ$ и достигахме до противоречие.

Случай 2. Ако $s_{PH} \equiv BC$, то $HBPC$ е делтоид и $\angle CHL = \angle CPL = \angle BHL = \varphi$, т.е. $\varphi = 45^\circ$.

Втори начин. Ще използваме стандартните означения. Имаме

$$\frac{BL}{LC} = \frac{S_{BHL}}{S_{CHL}} = \frac{BH \cdot \sin \varphi}{CH \cdot \cos \varphi} = \cotg \beta \cdot \tg \varphi = \cotg \beta \cdot \tg \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right).$$

От друга страна, $\frac{BL}{LC} = \frac{BA}{AC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$ и следователно

$$\cos \beta \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) = \sin(\alpha + \beta) \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 90^\circ,$$

т.е. $\varphi = 45^\circ$.

Забележка. В произволен $\triangle ABC$ условието $\angle ALC = \angle BHL$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $\angle ACB = 90^\circ + \angle ABC$.

10.3. Нека $n! = 2^k \cdot m$, където m е нечетно, а k е цяло неотрицателно число. Тогава

$$7^{n!} - 3^{n!} = (7^m)^{2^k} - (3^m)^{2^k} = (7^m - 3^m)(7^m + 3^m)(7^{2m} + 3^{2m}) \dots (7^{2^{k-1}m} + 3^{2^{k-1}m}).$$

Тъй като $7^m + 3^m \equiv 7^{2m} + 3^{2m} \equiv \dots \equiv 7^{2^{k-1}m} + 3^{2^{k-1}m} \equiv 2 \pmod{4}$ и $7^m - 3^m \equiv 4 \pmod{8}$, то $2^{k+2} | (7^{n!} - 3^{n!})$, но $2^{k+3} \nmid (7^{n!} - 3^{n!})$ и следователно $n + 1 \leq k + 2$, т.е. $k \geq n - 1$.

От друга страна, ако $2^t \leq n < 2^{t+1}$ ($t \in \mathbb{N}_0$), то

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^t} \right\rfloor \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^t} = n \left(1 - \frac{1}{2^t} \right) \leq n - 1.$$

Следователно $k = n - 1$ и $n = 2^t$, където $t \in \mathbb{N}_0$.

10.4. Най-напред да пресметнем броя на k -орките $(a_1, \dots, a_k)$ от цели числа $1 \leq a_i \leq n$, за които $a_1 + \dots + a_k \leq n$. Очевидно тази сума може да приема стойностите $k, k + 1, \dots, n$ и следователно броят на тези k -орки е

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \dots + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Оттук получаваме, че броят на k -орките $(a_1, \dots, a_k)$, за които $a_1 + \dots + a_{k-1} \leq n$, $a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k > n$, $1 \leq a_i \leq n$, е

$$A(n, k) = n \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k} \left(\frac{nk}{n-k+1} - 1 \right).$$

Остава да определим, за кое k числото $A(12, k) = \binom{12}{k} \left(\frac{12k}{13-k} - 1 \right)$ е максимално. Тъй като за $1 \leq k \leq 6$ и двата множителя растат, то максимумът се достига за $6 \leq k \leq 12$. Имаме $\frac{A(12, k+1)}{A(12, k)} = \frac{k(13-k)}{k^2-1}$. Това

отношение е по-голямо от 1 за $k = 6$ и по-малко от 1 за $k = 7, \dots, 12$. Следователно търсеният максимум се достига за $k = 7$.

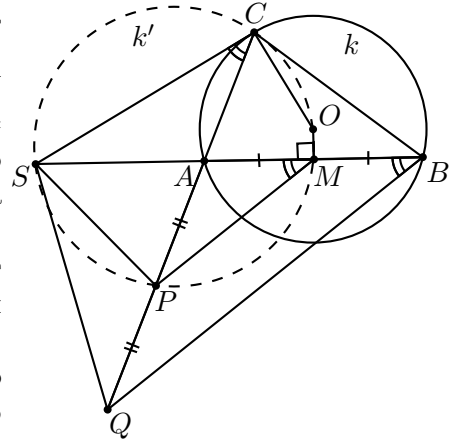
11.1. От условието $p + r = -q$ следва, че даденото уравнение има корен $x_1 = 1$. Тогава уравнението приема вида

$$(x - 1)(x^2 + (p + 1)x + p + q + 1) = 0,$$

като корените на квадратното уравнение $x^2 + (p + 1)x + p + q + 1 = 0$ са $x_1 = 2014$ и $x_2 = 4027$. От формулите на Виет сега намираме $p = -x_1 - x_2 - 1 = -6042$ и $q = x_1x_2 - p - 1 = x_1x_2 + x_1 + x_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) - 1 = 2015 \cdot 4028 - 1 = 8116419$.

11.2. ($\rightarrow$) Нека точките P, O, C и S лежат на една окръжност k' . Тъй като $OC \perp SC$, то OS е диаметър на k' и ако M е средата на AB , то $OM \perp AB$ и следователно $M \in k'$. Тогава $\angle SMP = \angle SCP$ и понеже PM е средна отсечка в $\triangle QBA$, то $\angle SMP = \angle SBQ$. Тогава $\angle SCQ = \angle SBQ$, което означава, че точките Q, B, C и S лежат на една окръжност.

($\leftarrow$) Обратно, ако точките Q, B, C и S лежат на една окръжност, то $\angle SCQ = \angle SBQ$ и понеже $\angle SBQ = \angle SMP$, то точките S, P, M и C лежат на една окръжност k' . Но $\angle OMS = \angle OCS = 90^\circ$, т.е. k' е с диаметър SO и следователно P, O, C и S лежат на една окръжност.



11.3. Ако $n = 1$, то $m = 2$. Нека $n > 1$. От условието $n = m^{\varphi(n)} - 1$ следва, че $(m, n) = 1$. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на n , като без ограничение $p_1^{\alpha_1} < p_2^{\alpha_2} < \dots < p_k^{\alpha_k}$.

Случай 1. Нека $k \geq 2$. За $t = p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ имаме

$$m^{\varphi(n)} - 1 = (m^{\varphi(t)} - 1)M,$$

където $M > m^{\varphi(t)}$. Тъй като t дели $m^{\varphi(t)} - 1$, то $M \leq p_1^{\alpha_1}$, което е противоречие поради $p_1^{\alpha_1} < t < m^{\varphi(t)} - 1 < M \leq p_1^{\alpha_1}$.

Случай 2. Нека $k = 1$, т.е. $n = p^\alpha$ като $\alpha \geq 2$. Тогава $\varphi(n) = p^{\alpha-1}(p - 1)$ и за $t = p^{\alpha-2}(p - 1)$ имаме

$$m^{\varphi(n)} - 1 = (m^t - 1)M,$$

където $M > m^t$. Понеже $p^{\alpha-1}$ дели $m^t - 1$, то $M \leq p$ и както в случай 1. получаваме противоречие.

Случай 3. Нека $n = p$ е просто число. Тогава $\varphi(n) = \varphi(p) = p - 1$. Ако $p = 2$, то $m = 3$. Ако $p > 2$, то $p - 1 = 2s$. Сега от равенството $p = (m^s - 1)(m^s + 1)$ следва, че $m^s - 1 = 1$, т.е. $s = 1$ и $m = 2$. Това означава, че $p = 3$.

Следователно търсените стойности са $n = 1, m = 2$, $n = 2, m = 3$ и $n = 3, m = 2$.

11.4. Нека M е множеството от всички естествени числа с 2013 цифри, като на първите 2012 позиции може да стои всяка от цифрите $1, 2, \dots, 9$, а на последната позиция може да стоят само цифрите $1, 2, 3, 4$. Тогава $|M| = 4 \cdot 9^{2012}$. От принципа на Дирихле следва, че измежду произволни 9 числа от M поне три имат една и съща последна цифра, което означава, че всеки две от тези три числа са *съседни*. Следователно $|M| \geq 4 \cdot 9^{2012}$.

Ще докажем, че ако M е множество, за което $|M| > 4 \cdot 9^{2012}$, то можем да изберем 9 числа, между които няма три, всеки две от които са съседни. Нека N е множеството от всички числа с 2013 ненулеви цифри, като $|N| = 9^{2013}$. Да подредим цифрите $1, 2, \dots, 9$ по окръжност по посока на часовниковата стрелка. Ще казваме, че 2 е *след* 1, 3 е *след* 2 и т.н. 1 е *след* 9. За две 2013 цифрени числа a и b казваме, че a е след b , ако всяка цифра на a е след съответната цифра на b . Множеството N може да се разбие на 9^{2012} подмножества $N_1, N_2, \dots, N_{9^{2012}}$ от по 9 елемента, като във всяко подмножество 9-те числа са едно след друго.

Тъй като $|M| > 4 \cdot 9^{2012}$, то можем да изберем 5 елемента от едно от множествата N_i . От останалите елементи на M можем да изберем 4 елемента от едно и също множество N_j . От всеки три от така избраните 9 елемента има два, които са в едно от множествата N_i или N_j . Това означава, че тези два елемента не са съседни.

Следователно $|M| \leq 4 \cdot 9^{2012}$, т.е. $|M| = 4 \cdot 9^{2012}$.

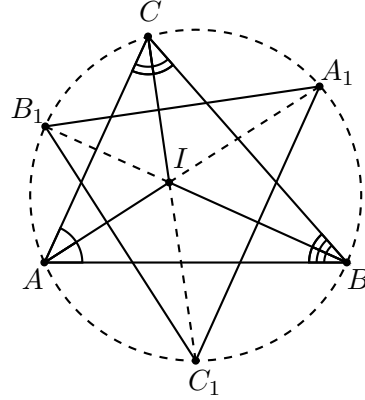
12.1. Първи начин. Полагаме $x = y + z$ и след заместване в уравнението получаваме (*) $z(z^2 - 1) = (-y)^3$. Ако $z > 1$, то $-y > 0$. Тъй като числата z и $z^2 - 1$ са взаимно прости, следва, че $z = a^3$ и $z^2 - 1 = b^3$, където $a, b \in \mathbb{N}$. Оттук $(a^2)^3 - b^2 = 1$, което е невъзможно (докажете). Ако $z < -1$, полагаме $t = -z > 1$ и (*) приема вида $t(t^2 - 1) = y^3$, което според доказаното по-горе няма решение. Следователно $z = 0, \pm 1, y = 0$ и получаваме, че решенията на даденото уравнение са $(x, y) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$.

Втори начин. Нека $x \neq 0, x \neq y$. Тъй като числата x и $3xy + 1$ са взаимно прости следва, че x дели $x - y$, т.е. x дели y . Полагаме $x = ky$, където $k \in \mathbb{Z}$. Заместваме в даденото уравнение и получаваме $(1 - k)(3ky^2 + 1) = x^2$.

Ако $k > 1$ или $k < 0$, дясната страна е отрицателна и горното равенство е невъзможно. При $k = 0, 1$ намираме решенията от по-горе.

12.2. а) Имаме $\angle BIC_1 = \frac{180^\circ - \angle BC_1I}{2} = \frac{180^\circ - 2\angle BAI}{2} = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = \angle IBC + \angle BCI$. Следователно точките C, I и C_1 лежат на една права. Аналогично и правите AA_1 и BB_1 минават през I .

б) Тъй като $\angle BC_1I = 2\angle BAI = \angle BAC$, то C_1 лежи върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност и е среда на дъгата $\widehat{AB}$; аналогично за A_1 и B_1 . Тогава



$$\angle A_1BC_1 = \angle ABC_1 + \angle CBA + \angle A_1BC = \frac{\angle C}{2} + \angle B + \frac{\angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$$

и от синусовата теорема получаваме, че $A_1C_1 = 2R \cos \frac{B}{2}$. Аналогично имаме $B_1C_1 = 2R \cos \frac{A}{2}$. Тъй като $\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ - \frac{\angle C}{2}$, следва, че

$$S_{A_1B_1C_1} = 2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Сега исканото равенство следва от известната формула $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ и аналогичните за другите ъгли, Хероновата формула и $abc = 4RS, S = pr$.

12.3. Нека $a_1 = b_1 = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ и $b_{n+1} = a_n b_n$ при $n \geq 1$. По индукция ще докажем, че $a_n < \frac{12}{25}$ и $b_n \leq \frac{1}{25 \cdot 2^{n-2}}$ при $n \geq 2$. За $n = 2$ това е вярно. Тогава

$$a_{n+1} = a_2 + b_2 + \dots + b_n \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{25} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \right) < \frac{2}{5} + \frac{2}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\text{и } b_{n+1} = a_n b_n < \frac{b_n}{2} = \frac{1}{25 \cdot 2^{n-1}}.$$

Забележка. Числото $\frac{12}{25} = 0,48$ е „близко“ до $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,469 \dots$

12.4. а) Нека $P(\alpha) = 0$ за някое $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава $3P(\alpha^3) = 3P^3(\alpha) = 0$ и по индукция следва, че $P(\alpha^{3^n}) = 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Понеже P има краен брой нули (най-много 2013), то $\alpha = 0$ или $|\alpha| = 1$, т.е. $\alpha = \pm 1$.

б) Тъй като P е от нечетна степен, то $P(\alpha) = 0$ за някое $\alpha \in \mathbb{R}$. От а) следва, че $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ и значи $\alpha^3 = \alpha$. За всяко $x \in \mathbb{R}$ можем да изберем $y \in \mathbb{R}$ така, че $P(x) = -P(y)$. При $z = \alpha$ следва, че $P(x^3) = -P(y^3)$. Пак по индукция получаваме $P(x^{3^n}) = -P(y^{3^n})$. При $x > 1$ имаме $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{3^n} = \infty$. В частност, $|y| > 1$. Понеже $\lim_{|t| \rightarrow \infty} P(t)/t^3 \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (x/y)^{3^n} = -1$. Значи $x = -y$, т.е. $P(x) = -P(-x)$ при $x > 1$, а оттам и за всяко x .

Забележка. Заменяйки 2013 с произволно нечетно число $2n - 1$, може да се докаже, че $P(x) = x^{2n-1}$ или $P(x) = -x^{2n-1}$.

62. Национална олимпиада по математика, Национален кръг

1. Лесно се вижда, че $p = q = 2$ е решение на задачата. Нека $p^{q+1} + q^{p+1} = x^2$, $x \in \mathbb{N}$ и p е нечетно. Тогава $p + 1$ е четно и

$$p^{q+1} = (x - q^{\frac{p+1}{2}})(x + q^{\frac{p+1}{2}}).$$

Ако най-големият общ делител на двата множителя отдясно е d , то d е степен на p и дели $2x$, откъдето при $d > 1$ лесно следва, че $p|q$, т.е. $p = q$, $2p^{p+1} = x^2$, което е невъзможно.

Следователно $d = 1$ и $x - q^{\frac{p+1}{2}} = 1$, $x + q^{\frac{p+1}{2}} = p^{q+1}$. Оттук $2q^{\frac{p+1}{2}} = p^{q+1} - 1$, което при нечетно q е невъзможно (по модул 4). Тогава $q = 2$ и $2^{\frac{p+3}{2}} = p^3 - 1 = (p-1)(p^2 + p + 1)$. Остава да отбележим, че $(p-1, p^2 + p + 1) = 1$ и следователно $p - 1 = 1$, противоречие.

2. Първи начин. При $y = -x$ имаме, че $f(x) - f(-x) = f(2x)$. Тогава $f(-x) - f(x) = f(-2x)$ и значи $-f(-2x) = f(2x) = 2f(x)$. Сега лесно следва, че f е ограничена върху всяко ограничено подмножество на $\mathbb{R}$.

Нека $x \neq 0$. При $y \rightarrow 0$ от ограничеността и даденото равенство следва, че $f(x + y) \rightarrow f(x)$, т.е. f е непрекъсната в точката x .

При $y = -x$ имаме, че $f(x) - f(-x) = f(2x)$. Тогава $f(-x) - f(x) = f(-2x)$ и значи $-f(-2x) = f(2x) = 2f(x)$. При $x = (n-1)y$ с индукция по $n \geq 3$ следва, че $f(ny) = nf(y)$. Оттук $f(r) = ar$, където $a = f(1)$ и $r \in \mathbb{Q}^+$. От непрекъснатостта и нечетността на f следва, че $f(x) = ax$ за всяко $x \neq 0$. При $x = y$ получаваме, че $f(0) = 0$. Значи $f(x) = ax$ за всяко x , като условието на задачата се изпълнява.

Друг подход е следният. Записваме началното равенство във вида

$$xf(x-y) + y(f(x+y) - f(y)) = x^2 \frac{f(x+y) - f(x)}{y}.$$

При $y \rightarrow 0$ лявата страна клони към $xf(x)$. Значи f има производна в x и $f(x) = xf'(x)$. От това равенство следва, че и f' има производна в x . Тогава $f'(x) = (xf(x))' = f'(x) + xf''(x)$ и значи $f''(x) = 0$. Следователно $f(x) = ax + b$ при $x > 0$. Като заместим в условието на задачата лесно получаваме, че $f(x) = ax$ за всяко x .

Втори начин. (без използване на ограничеността) От първото решение ще използваме, че $f(-x) = -f(x)$ и $f(2x) = 2f(x)$.

При $y = x + 1$ и $y = -x - 1$ имаме, че

$$x^2 f(x) - (x+1)^2 f(x+1) = (-2x-1)f(2x+1) + (x^2+x)f(1),$$

$$x^2 f(x) + (x+1)^2 f(x+1) = (2x+1)f(1) + (x^2+x)f(2x+1).$$

Като съберем тези две равенства, следва, че

$$\begin{aligned} (x^2 - x - 1)f(2x+1) &= 2x^2 f(x) - (x^2 + 3x + 1)f(1) \\ &= x^2 f(2x) - (x^2 + 3x + 1)f(1). \end{aligned}$$

Ако в последното равенство заменим x с $\frac{x}{2}$ и умножим по 4, ще получим, че

$$(x^2 - 2x - 4)f(x+1) = x^2 f(x) - (x^2 + 6x + 4)f(1).$$

Тогава за $g(x) = f(x) - f(1)x$ имаме, че

$$(x^2 - 2x - 4)g(x+1) = x^2 g(x).$$

Следователно

$$((x-1)^2 - 2(x-1) - 4)g(x) = (x-1)^2 g(x-1)$$

и значи

$$(*) \quad (x^2 - 2x - 4)(x^2 - 4x - 1)g(x+1) = x^2(x-1)^2 g(x-1).$$

От друга страна, при $y = 1$ и $y = -1$ следва, че

$$x^2 g(x) = (x^2 - 1)g(x+1) - xg(x-1),$$

$$x^2g(x) = (x^2 - 1)g(x - 1) + xg(x + 1),$$

откъдето

$$(x^2 - x - 1)g(x + 1) = (x^2 + x + 1)g(x - 1).$$

Оттук и (*) получаваме, че $p(x - 1)g(x - 1) = 0$, където

$$p(x - 1) = x^2(x - 1)^2(x^2 - x - 1) - (x^2 - 2x - 4)(x^2 - 4x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Понеже p е полином от пета степен, следва, че $g(x) = 0$ за всички x с изключение на най-много пет ($\neq 0$). При достатъчно голямо y и фиксирано $x \neq 0$ заключаваме, $g \equiv 0$. И така, $f(x) = ax$, като условието на задачата се изпълнява.

3. Да разгледаме следните две оцветявания:

- (1) Точката (x, y) оцветяваме в цвета i , $1 \leq i \leq 2$, такъв, че $x \equiv i \pmod{2}$,
- (2) Точката (x, y) оцветяваме в цвета i , $1 \leq i \leq 3$, такъв, че $x \equiv i \pmod{3}$.

Ясно е, че числото S (ако съществува) трябва да бъде естествено или половинка на естествено. Оцветяването (1) показва, че S може да е 1, 2, 3 или по-голямо, а оцветяването (2) дава, че S може да е $\frac{3}{2}$, 3 или по-голямо. Следователно, ако S съществува, то $S \geq 3$.

Ще докажем, че при произволно оцветяване винаги има едноцветен триъгълник с лице 3.

Да отбележим, че за някое $d \in \{1, 2, 3\}$ има едноцветна двойка точки от вида $A = (x, y)$, $B = (x + d, y)$. Наистина, достатъчно е да разгледаме точките $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$. Сега, ако $m \equiv AB$ и l е успоредна на m и на разстояние $\frac{6}{d}$ от m , то правата $l \parallel Ox$ е двуцветна или имаме триъгълник от нужния вид.

Ще казваме, че цветът c в правата l реализира разстоянието a , ако има две точки от цвят c върху правата l на разстояние a .

Ако има разстояние $a \in \{1, 2, 3, 6\}$, което се реализира и от двата цвята в l , то правата $p \parallel l$ на разстояние $\frac{6}{a}$ от l трябва да бъде едноцветна (в противен случай бихме получили триъгълник от нужния вид). Ако такова разстояние не съществува, то един от цветовете в l непременно реализира всички разстояния в множеството $\{2, 3, 6\}$. (Наистина, да предположим, че цветът c_1 не реализира разстоянието 1 и че поне една точка P_0 от l е оцветена в c_1 . Съседните на P_0 – точките P_{-1} и P_1 – трябва в такъв случай да бъдат оцветени в c_2 , така че c_2 реализира разстоянието 2. Оттук следва, че c_1 не реализира 2, и че точките P_{-2} и P_2 са оцветени в c_2 . Както и преди, c_2 реализира 3, c_1 не реализира 3, и P_{-3} и P_3 са оцветени в c_2 . Но c_2 вече

реализира всички разстояния в $\{2, 3, 6\}$!) И в двата случая има права $p \parallel Ox$ и цвят s от p , който реализира всички разстояния в множеството $\{2, 3, 6\}$ (или вече сме намерили триъгълник от нужния вид).

Да разгледаме правите u_1, u_2, u_3 , успоредни на p и такива, че $u_i, i = 1, 2, 3$, е разположена на разстояние i над p . Тогава от горното следва, че всички тези прави са двуцветни. Да разгледаме деветте точки, в които правите u_1, u_2, u_3 пресичат правите $x = 0, x = 3, x = 6$. Лесно се вижда, че три от тези девет точки са върхове на едноцветен триъгълник с лице 3.

4. Полагаме $x = \tan \alpha, y = \tan \beta$ и $z = \tan \gamma \leq 3$. Тогава $x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 3$ и трябва да докажем, че

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2} \geq 0.$$

Последното записваме във вида $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{3}{2}$, което следва от $\frac{1}{1+t^2} \geq 1 - \frac{t}{2} \Leftrightarrow t(t-1)^2 \geq 0$.

Забележка. По същество решението е еквивалентно на

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - \sin 2\theta \tan \theta \geq 1 - \tan \theta, \quad 0 \leq \theta < \pi/2.$$

5. Нека O е центърът на описаната окръжност около $\triangle ABC$, а S е симетричната му точка относно страната AB . Тогава $SOCH$ е успоредник, $SH \perp A_1B_1$ и $SH = R$ (1).

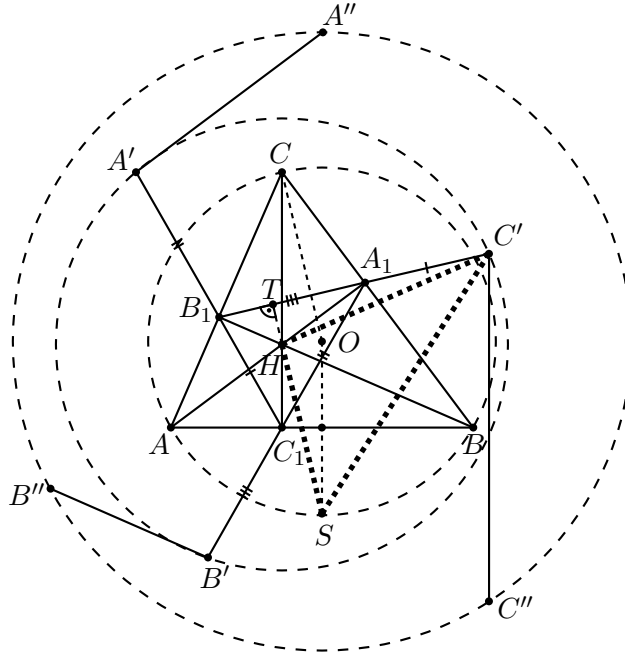
Да означим с ρ радиуса на вписаната окръжност в $\triangle A_1B_1C_1$, а с q – полупериметъра му. Тогава, ако T е петата на перпендикуляра от S към A_1B_1 , то $HT = \rho, ST = R + \rho$ и $TC' = q$.

Имаме $HC' = \sqrt{\rho^2 + q^2}$, което поради симетрията на получения израз означава, че H е центърът на описаната окръжност около $\triangle A'B'C'$ и $R' = HC'$ (2).

От друга страна, $OC'' = SC' = \sqrt{(R+\rho)^2 + q^2}$ и следователно O е центърът на описаната окръжност около $\triangle A''B''C''$ и $R'' = SC'$ (3).

От (1), (2) и (3) следва, че R, R' и R'' са дължините на страните на $\triangle HSC'$, като

$$S_{HSC'} = \frac{HS \cdot TC'}{2} = \frac{R \cdot q}{2} = \frac{1}{2}(S_{A_1OB_1C} + S_{B_1OC_1A} + S_{C_1OA_1B}) = \frac{S_{ABC}}{2}.$$



6. Нека $m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp - 2np = (m + n - p)^2 - 4mn$ е точен квадрат. Тогава квадратният тричлен $f(x) = mx^2 + (m + n - p)x + n$ има два рационални корена с еднакви знаци, което означава, че $f(x) = (d_1x - a)(d_2x - b)$, където $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, $d_1d_2 = m$, а a и b са цели числа с еднакви знаци, като $ab = n$ (в общия случай това следва от лемата на Гаус, а тук лесно се вижда с помощта на теоремата за разлагане на квадратен тричлен). Тъй като $p = f(-1) = (a + d_1)(b + d_2)$, възможността a и b да са положителни отпада.

Нека a и b са отрицателни. Тогава от $p = (a + d_1)(b + d_2)$ следва, че числата $a + d_1$ и $b + d_2$ са равни в някакъв ред на -1 и $-p$ или на 1 и p . Във втория случай лесно получаваме противоречие с условието $p > m$. При $a + d_1 = -1$, $b + d_2 = -p$ получаваме $n = ab = (1 + d_1)(p + d_2)$. Обратно, ако $n = (1 + d_1)(p + d_2)$, където $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, $d_1d_2 = m$, непосредствено се проверява, че $(m + n - p)^2 - 4mn = (d_1p - d_2)^2$.

Получихме, че всеки делител на m води до решение и сега ще докажем, че всички тези решения са различни. Да допуснем противното и нека $\ell|m$, $k|m$, $\ell \neq k$, водят до едно и също решение, т.е.

$$n = (\ell + 1) \left(\frac{m}{\ell} + p \right) = (k + 1) \left(\frac{m}{k} + p \right).$$

Получаваме $p\ell + \frac{m}{\ell} = pk + \frac{m}{k} \iff pk\ell = m$, т.е. $p|m$, което противоречи на условието $p > m$.

Окончателно, броят на числата n , за които $m^2 + n^2 + p^2 - 2mn - 2mp - 2np$ е точен квадрат, е равен на броя на естествените делители на m и не зависи от p .

Контролно за определяне на отбора за 30. БОМ

1. Нека I_a , I_b и I са съответно центровете на вписаните в $\triangle AB_1C_1$, $\triangle BA_1C_1$ и $\triangle ABC$ окръжности. Тогава е достатъчно да докажем, че $IA \cdot II_a = IB \cdot II_b$. Имаме $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ с коефициент на подобие $\cos \alpha$, откъдето $\frac{I_a A}{IA} = \cos \alpha$. Сега $\frac{I_a I}{IA} = 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. След аналогично изразяване на $I_b I$ исканото се свежда до $IA^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = IB^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$, което следва от синусова теорема за $\triangle ABI$.

2. Ще докажем, че единственото разбиване с исканите свойства е

$$A = \{3k | k \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{3k + 1 | k \in \mathbb{Z}\}, \quad C = \{3k + 2 | k \in \mathbb{Z}\}.$$

(т. точност до реда на множествата).

Нека $\mathbb{Z} = A \cup B \cup C$ е разбиване с непресичащи се две по две $A+B$, $B+C$ и $C+A$. Да отбележим, че от $a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$ следва, че $a+b-c \in C$, $b+c-a \in A$ и $c+a-b \in B$. Действително, ако например $a+b-c \in A$, то $a+b \in A+B \cup A+C = \phi$, противоречие.

Да фиксираме две последователни числа от различни множества, $b \in B$ и $c = b+1 \in C$. Тогава за всяко $a \in A$ имаме $a-1 = a+b-c \in C$ и $a+1 = a+c-b \in B$, т.е. всяко число от A се предхожда от число от C и се следва от число от B . В частност, съществуват двойки $(c, c+1)$, за които $c \in C$, $c+1 \in A$. С помощта на такава двойка както по-горе се вижда, че всяко число $b \in B$ се предхожда от число от A и се следва от число от C . Продължавайки по същия начин виждаме, че всяко $c \in C$ се предхожда от число от B и се следва от число от A . Вече е ясно, че A , B и C са всъщност трите класа от остатъци по модул 3.

3. Да допуснем, че твърдението не е вярно. Тогава съществуват поне $2013 - 40 = 1973$ върха от степен поне 1973. Да означим с X множеството от върховете от степен поне 1973. Всеки връх от X не е свързан с най-много $2013 - 1 - 1973 = 39$ от върховете на графа. Да изберем произволен връх $A_1 \in X$ и от свързаните с A_1 поне 1973 върха да изберем връх $A_2 \in X$. Върховете,

които не са свързани или с A_1 или с A_2 са най-много $2.39 = 78$. Следователно съществуват поне $2013 - 2 - 78 = 1933$ върха, свързани едновременно с A_1 и с A_2 . От тези върхове избираме $A_3 \in X$ и разглеждаме върховете, свързани едновременно с A_1, A_2 и A_3 . Те са поне $2013 - 3 - 3.39 = 1893$. Продължаваме да избираме върхове по описания начин. Когато изберем A_{49} ще получим, че има поне $2013 - 49 - 49.39 = 53$ върха, които са свързани с всеки от върховете $A_1, A_2, \dots, A_{49}$. Произволен връх от тези 53 заедно с върховете $A_1, A_2, \dots, A_{49}$ води до противоречие с условието.

4. Да запишем даденото уравнение във вида

$$(m^2 + n + n^2 + m)^2 - (m^2 + n - n^2 - m)^2 = 8(m - n)^3,$$

откъдето

$$(m^2 + n + n^2 + m)^2 = (m - n)^2[8(m - n) + (m + n - 1)^2].$$

Оттук следва, че $8(m - n) + (m + n - 1)^2$ е точен квадрат. Тъй като $m > n$ (Защо?), имаме $(m + n - 1 + 2s)^2 = 8(m - n) + (m + n - 1)^2$ за някое естествено число s . Тогава $s(m + n - 1 + s) = 2(m - n)$ и тъй като $m + n - 1 + s > m - n$, заключаваме, че $s < 2$. Следователно $s = 1$ и оттук $m = 3n$. Сега обаче лявата страна на даденото уравнение е по-голяма от $m^3 = 27n^3$, докато дясната е равна на $16n^3$, което е противоречие.

5. Ще работим в полето $\mathbb{Z}_p$ от остатъци по модул p и ще докажем, че множеството $S_1(p)$ е непразно и непресичащо се с $S_2(p)$. Нека $c \in \mathbb{Z}_p$ е такова, че $c^2 \notin \{0, 1\}$ (такова c съществува, защото $p > 3$).

Ще използваме известния факт, че от $x, y \in \mathbb{Z}_p, p \equiv 3 \pmod{4}$ и $x^2 + y^2 = 0$ следва $x = y = 0$. Оттук следва, че изображението

$$f : \{0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\} \rightarrow \mathbb{Z}_p, \quad f(a) = -\frac{a^2 c^2 + 1}{a^2 + c^2}$$

е коректно дефинирано. Ще докажем, че f е инективно. Ако $f(a_1) = f(a_2)$, то лесно се вижда, че $(a_1^2 - a_2^2)(c^4 - 1) = 0$, откъдето $a_1 = a_2$, понеже $c^2 \neq \pm 1$.

От инективността на f и от факта, че квадратичните остатъци по модул p са $(p+1)/2$ на брой, следва, че съществуват $a, b \in \{0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$, за които $f(a) = b^2$. Последното означава, че $(a, b, c) \in S_1(p)$, т.е. $S_1(p) \neq \emptyset$.

Да допуснем за момент, че $(a, b, c) \in S_1(p) \cap S_2(p)$. Ако някое от a, b и c е равно на 0, например $a = 0$, получаваме $b^2 c^2 + 1 = 0$, което е невъзможно. Следователно $abc \neq 0$, откъдето $a^2(b^2 c^2 + 1) + b^2 + c^2 = 0$ и $a^2(b^2 + c^2) + b^2 c^2 + 1 = 0$. От последните две равенства получаваме

$$0 = a^2(b^2 c^2 + 1) + b^2 + c^2 - a^4(b^2 + c^2) - a^2(b^2 c^2 + 1) = (1 - a^4)(b^2 + c^2),$$

откъдето $a^2 = 1$ и накрая $(1 + b^2)(1 + c^2) = 0$, което е невъзможно.

6. Нека A' и B' са петите на височините съответно от A и B в $\triangle ABC$. Първо да разгледаме случая, когато $E \equiv A'$. Тогава F е средата M на AB , $D \equiv B'$ и твърдението е очевидно.

Нека $E \in BA_1$ (иначе $D \in AB_1$ и разсъжденията са аналогични). Нека симетралата на BE пресича AB в F и D е симетричната на A относно перпендикуляра от D към AC . Тогава

$$\frac{B_1D}{A_1E} = \frac{B_1D}{MF} \cdot \frac{MF}{A_1E} = \frac{AB_1}{AM} \cdot \frac{MB}{BA_1} = \frac{AB_1}{BA_1} = \frac{B_1H}{HA_1}$$

(последното следва от $\triangle AB_1H \sim \triangle BA_1H$). Но тогава $\triangle B_1DH \sim \triangle A_1EH$, откъдето $\angle B_1DH = \angle A_1EH$ и следователно $DCEH$ е вписан, което трябваше да се докаже.

7. Да отбележим, че ако с копия на P можем да покрием правоъгълник $a \times b$, то можем да покрием и квадрат $ab \times ab$. Нека S е възможно най-малкият квадрат, който може да бъде покрит с копия на P и нека $(1, 1)$ и (s, s) са долната лява и горната дясна клетки на този квадрат.

Да допуснем, че никое копие на P не пресича правата $2x = s + 1$. Тогава s е четно и симетрията относно правата $x = y$ показва, че никое копие на P не пресича правата $2y = s + 1$. Но сега сме покрили с копия на P квадрат $(s/2) \times (s/2)$, което противоречи на избора на s .

Нека Q е копие на P , което пресича правата $2x = s + 1$. Тъй като симетрията относно тази права запазва покритието, Q (т.е. P) има вертикална ос на симетрия. Аналогично се вижда, че P има и хоризонтална ос на симетрия.

Нека R е копието на P , което покрива клетката $(1, 1)$. Тъй като симетрията относно правата $x = y$ запазва покритието, тя изобразява R в R . Следователно R е симетрично едновременно относно правите $2x = m + 1$ и $2y = m + 1$ за някое естествено число m . Тогава R съдържа клетките $(1, 1)$, $(m, 1)$, (m, m) и $(1, m)$. Тъй като целият квадрат S лежи отгоре и надясно спрямо $(1, 1)$, R също лежи отгоре и надясно спрямо $(1, 1)$, отдолу и надясно спрямо $(1, m)$ и т.н. Следователно R лежи изцяло в квадрата S' , определен от ъгловите си клетки $(1, 1)$, $(m, 1)$, (m, m) и $(1, m)$.

Да допуснем, че някоя клетка $(i, 1)$, където $1 < i < m$, не принадлежи на R . Тогава тя е покрита от някое друго копие T на P . Тъй като T и R са еднакви, най-долният ред, който съдържа клетки на T трябва да съдържа две такива клетки на разстояние $m - 1$ едне от друга, което е невъзможно. Следователно R съдържа всички клетки между $(1, 1)$ и $(m, 1)$ и тогава, от

симетрията, съдържа и цялата вътрешност на S' . Получихме, че $R \equiv S'$ и значи R , тогава и P , е квадрат.

8. Ще докажем, че единственото решение е функцията $f(x) = x - 1$. Да положим $g(x) = f(x) + 1$ и да запишем условията за новата функция:

$$g(1 + xy) - g(x + y) = (g(x) - 1)(g(y) - 1), \quad g(-) \neq 1. \quad (1)$$

Да означим $g(-1) - 1 = C \neq 0$. Полагаме $y = -1$ в (1) и получаваме

$$g(1 - x) - g(x - 1) = C(g(x) - 1). \quad (2)$$

При $x = 1$ в (2) получаваме $C(g(1) - 1) = 0$, откъдето $g(1) = 1$. Сега полаганията $x = 0$ и $x = 2$ дават съответно $g(0) = 0$ и $g(2) = 2$.

Ще докажем, че за всички реални числа x са в сила равенствата

$$g(x) + g(2 - x) = 2, \quad (3)$$

$$g(x + 2) - g(x) = 2. \quad (4)$$

Замяната на x с $1 - x$ в (2) и замяната на x с $-x$ в полученото уравнение дават съответно $g(x) - g(-x) = C(g(1 - x) - 1)$ и $g(-x) - g(x) = C(g(1 + x) - 1)$. Събираме последните две уравнения и получаваме $C(g(1 - x) + g(1 + x) - 2) = 0$, което поради $C \neq 0$ доказва (3).

Нека u и v са такива, че $u + v = 1$. Прилагаме (1) за двойките (u, v) и $(2 - u, 2 - v)$ и получаваме

$$g(1 + uv) - g(1) = (g(u) - 1)(g(v) - 1),$$

$$g(3 + uv) - g(3) = (g(2 - u) - 1)(g(2 - v) - 1).$$

Тъй като последните две уравнения имат равни десни страни (поради (3)), заключаваме, че $u + v = 1$ води до

$$g(uv + 3) - g(uv + 1) = g(3) - g(1).$$

Всяко реално число $x \leq 5/4$ се представя във вида $x = uv + 1$ за някои u и v със сума 1 (защото квадратният тричлен $t^2 - t + (x - 1)$ има реални корени за $x \leq 5/4$). Следователно $g(x + 2) - g(x) = g(3) - g(1)$ за всяко $x \leq 5/4$. В частност, при $x = 0$ получаваме $g(3) = 3$, което доказва (4) за $x \leq 5/4$. Ако $x > 5/4$, то $-x < 5/4$ и значи $g(2 - x) - g(-x) = 2$ поради горното. От друга страна (3) дава $g(x) = 2 - g(2 - x)$ и $g(x + 2) = 2 - g(-x)$, откъдето $g(x + 2) - g(x) = g(2 - x) - g(-x) = 2$. С това и (4) е доказано.

Сега замяната на x с $-x$ в (3) и комбинирането на полученото с (4) дава $g(x) = -g(-x)$ за всяко реално x . Имайки в предвид това, прилагаме (1) за двойките $(-x, y)$ и $(x, -y)$ и получаваме

$$\begin{aligned}g(1 - xy) - g(-x + y) &= (g(x) + 1)(1 - g(y)), \\g(1 - xy) - g(x - y) &= (1 - g(x))(g(y) + 1).\end{aligned}$$

Събираме последните две уравнения и получаваме $g(1 - xy) = 1 - g(x)g(y)$. Тогава $g(1 + xy) = 1 + g(x)g(y)$ поради (3). Сега даденото уравнение (1) придобива вида $g(x + y) = g(x) + g(y)$, т.е. функцията g е адитивна. Следователно $g(1 + xy) = g(1) + g(xy) = 1 + g(xy)$ и това, заедно с полученото по-горе $g(1 + xy) = 1 + g(x)g(y)$, дава $g(xy) = g(x)g(y)$, т.е. g е и мултипликативна. В частност, $g(x^2) = g(x)^2 \geq 0$ за всяко x , откъдето $g(x) \geq 0$ за всяко $x \geq 0$. Тъй като g е адитивна и ограничена отдолу за $x \in [0, +\infty)$, тя е линейна, по-точно $g(x) = g(1)x = x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Забележка. Съществуват функции, които удовлетворяват даденото уравнение, но се анулират в -1 . Такива са например константата 0 и функцията $f(x) = x^2 - 1$.

Контролно за определяне на отбора за 54. МОМ

1. Нека $Y \in BC$ е такава, че $AY \parallel XA_1$. Тогава $BY = a - b$ и от условието $\frac{a}{c} = \frac{c}{a - b}$ следва, че $\triangle ABC \sim \triangle YBA$. Следователно $\angle AXA_1 = \angle BAY = \gamma$, откъдето четириъгълникът $XA A_1 C$ е вписан. От $\angle XAC = \angle XA_1 C = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$ намираме $\alpha = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Освен това $\angle AA_1 C = 90^\circ$, т.е. AA_1 е височина и ъглополовяща. Тогава $\gamma = \beta$ и $90^\circ + \frac{\gamma}{2} + 2\gamma = 180^\circ$, т.е. $\gamma = 36^\circ$. Ъглите на $\triangle ABC$ са $36^\circ, 36^\circ$ и 108° .

2. Нека $n = p_1^k$ е степен на просто число. Очевидно $k = 1, 2$ и 3 дават решение. При $k \geq 4$ делителите $a = p_1^{k-2}$ и $b = p_1^{k-1}$ отговарят на условията, но $ab = p_1^{2k-3}$ не дели n . Следователно съществува просто число p , за което $\frac{a+b}{p} = \frac{p_1^{k-2}(p_1+1)}{p}$ дели n , т.е. $p_1 + 1 \mid p_1^2 p$. Оттук $p = p_1 + 1$, т.е. $p_1 = 2$ и $n = 2^k$. Сега непосредствено се проверява, че $k = 4$ и 5 дават решение, а при $k \geq 6$ делителите $a = 2^{k-1}$ и $b = 2^{k-4}$ отговарят на условията, но нито $ab = 2^{2k-5}$, нито $\frac{a+b}{p} = \frac{9 \cdot 2^{k-4}}{p}$ (p е произволно просто число) не дели n . Следователно в този случай решенията са числата от вида $n = p, p^2$ и p^3 за произволно просто $p, n = 16$ и 32 .

Нека сега n има поне два различни прости делителя и $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ е каноничното му разлагане. Да допуснем, че $s > 2$ да разгледаме делителите

$a = \frac{n}{p_2}$ и $b = \frac{n}{p_1}$. Очевидно $ab = \frac{n^2}{p_1 p_2}$ не дели n . Тогава съществува просто число p , за което $\frac{a+b}{p}$ дели n . Следователно $a+b = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2}$ дели np , откъдето получаваме $p_1 + p_2 | pp_1 p_2$. Последното означава, че $p = p_1 + p_2$, което е възможно само ако едното от числата p_1 и p_2 е равно на 2 (и, освен това, $s = 2$). Следователно $s = 2$ и $n = p_1 p_2$, което е решение, или $n = 2^\alpha q^\beta$, където q е нечетно просто число.

Нека $n = 2^\alpha q^\beta$ и да допуснем, че $\beta \geq 2$. Да разгледаме $a = 2^\alpha$ и $b = 2^\alpha q$. Очевидно $ab = 2^{2\alpha} q$ не дели n и значи съществува просто число p , за което $\frac{a+b}{p} = \frac{2^\alpha(q+1)}{p}$ дели n . Тъй като $q+1$ е четно, заключаваме, че $p = 2$ и $q+1 | 2q^\beta$, което е невъзможно. Следователно $\beta = 1$ и $n = 2^\alpha q$, $\alpha \geq 2$.

Лесно се вижда, че $n = 4q$ е решение точно когато $q+2$ е просто число. Да допуснем, че $\alpha \geq 3$ и да разгледаме $a = 2^\alpha$ и $b = 2^{\alpha-1}q$. Отново ab не дели n и трябва $\frac{a+b}{p} = \frac{2^{\alpha-1}(q+2)}{p}$ да дели $n = 2^\alpha q$. Оттук $p = q+2$. Аналогично с помощта на $a = 2^\alpha$ и $b = 2^{\alpha-2}q$ получаваме, че $q+4$ е просто число. Получихме, че q , $q+2$ и $q+4$ са прости числа, което е възможно само при $q = 3$. Сега имаме $n = 2^\alpha \cdot 3$, където $\alpha \geq 3$. Непосредствено се проверява, че $\alpha = 3$ дава решение, а при $\alpha \geq 4$ делителите $a = 2^{\alpha-4} \cdot 3$ и $b = 2^{\alpha-1} \cdot 3$ отговарят на условията, но нито $ab = 2^{2\alpha-5} \cdot 9$, нито $\frac{a+b}{p} = \frac{27 \cdot 2^{\alpha-4}}{p}$ (p е произволно просто число) не дели n .

Окончателно, в този случай решенията са $n = pq$, произволни прости p и q , $n = 4p$ за нечетно просто p , такова, че $p+2$ също е просто и $n = 24$.

3. Ще използваме следното помощно твърдение.

Лема. Ако полиномът $f(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n$ има n реални различни корена, то $(n-1)b_1^2 - 2nb_0 b_2 > 0$

Доказателство. Като диференцираме $n-2$ пъти $f(x)$, получаваме квадратен тричлен с два различни реални корена и следователно неговата дискриминанта е положителна.

Сега да разгледаме полинома $f(x) = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2n-1}) + (x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{2n})$. Не е трудно да се види, че този полином отговаря на условията на лемата и полученото там неравенство е точно исканото.

4. Лесно се вижда, че лявата страна се дели на 9 и това означава, че уравнението няма решение при $n = 1$.

Нека $n = 2$. Имаме $2013^2 = (3.11.61.)^2$, $3^2 = 2^3 + 1^3$ и $11.61 = 8^3 + 4^3 + 1^3 + 3.8.4.1$. Ще използваме още, че

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw,$$

където $u = ax + by + cz$, $v = ay + bz + cx$ и $w = az + bx + cy$. Прилагаме това тъждество първо за $(8, 4, -1)$ и $(4, 8, -1)$, а след това за получената тройка

(65,0,56) и (2,1,0). Получаваме, че $65^3 + 56^3 = (11.61)^2$ и $130^3 + 177^3 + 56^3 - 3.130.177.56 = 2013^2$.

Забележки. По подобен начин намираме, че $186^3 + 112^3 + 65^3 - 3.186.112.65 = 2013^2$. Да отбележим, че даденото равенство се изпълнява за $a = b - d$, b и $c = b + d$ точно когато $bd^2 = (11.61)^2$, но тогава b е точен квадрат.

5. Да означим с A_1 , B_1 и C_1 петите на перпендикулярите от A , B и C съответно към NP , PM и MN . От условието следва (теорема на Карно), че $(NC_1^2 - MC_1^2) + (MB_1^2 - PB_1^2) + (PA_1^2 - NA_1^2) = 0$. Оттук получаваме $0 = (CN^2 - CM^2) + (BM^2 - BP^2) + (AP^2 - AN^2) = (CN^2 - AN^2) + (AP^2 - BP^2) + (BM^2 - CM^2)$ и отново от теоремата на Карно следва, че перпендикулярите от M , N и P съответно към BC , AC и AB се пресичат в една точка O .

Тъй като четириъгълниците OMH_CN и OMH_BP са успоредници, заключаваме, че и RH_BH_CN също е успоредник. Тогава RH_C и NH_B се пресичат и разполювяват. През тяхната пресечна точка минава и MH_A .

6. Ще наричаме *лоши* клетките, покрити повече от един път.

(*Оценка*) Да фиксираме един ред и да разгледаме клетките му, които са в стълбовете с номера $r+1, r+n+1, \dots, r+(m-1)n+1$. Този ред е покрит от поне $m+1$ "ленти" от нашите квадрати $n \times n$, а разглежданите клетки са m на брой – т.е. поне една от тях е лоша.

Аналогично получаваме поне една лоша клетка в пресечните клетки на нашия ред със стълбовете с номера $r+2, r+n+2, \dots, r+(m-1)n+2$ и т.н. По този начин в избрания ред ще имаме поне $n-r$ лоши клетки. Същото разсъждение в останалите неизползвани стълбове дава поне по поне $n-r$ лоши клетки във всеки от тях. Следователно лошите клетки са поне

$$(mn+r)(n-r) + (m+1)r(n-r) = (mn+mr+2r)(n-r).$$

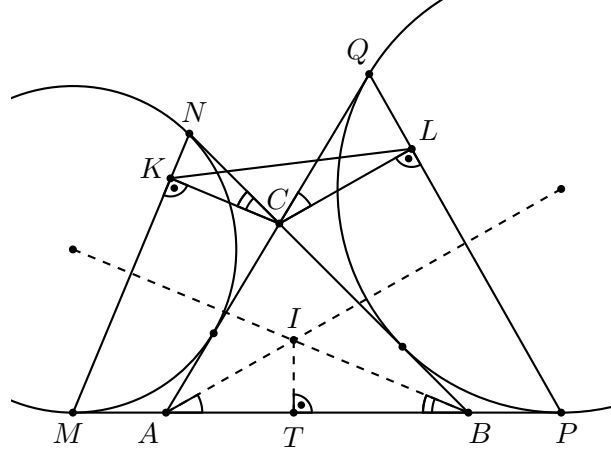
(*Конструкция*) В долния ляв ъгъл отделяме квадрат $(n+r) \times (n+r)$ и го покриваме, поставяйки квадрати в четирите му ъгъла. След това покриваме Г-образните фигури след този квадрат, дублирайки само клетките в квадрата $n \times n$ по диагонала, намиращи се извън горния десен ъгъл $r \times r$. По този начин получаваме точно

$$(n+r)^2 - 4r^2 + (m-1)(n^2 - r^2) = (mn+mr+2r)(n-r)$$

лоши клетки.

30. Балканска олимпиада по математика

1. Нека I е центърът на вписаната окръжност в $\triangle ABC$, а T е проекцията на I върху страната AB . Ще докажем, че $\triangle KCL \sim \triangle AIB$.



Тъй като $AI \perp PQ$ и $BI \perp MN$, то $AI \parallel CL$ и $BI \parallel CK$. Тогава

$$\angle KCL = \angle AIB, \angle QCL = \angle QAI = \angle IAT \text{ и } \angle NCK = \angle NBI = \angle IBT.$$

От последните две равенства следва, че $\triangle QCL \sim \triangle IAT$ и $\triangle NCK \sim \triangle IBT$, т.е. $\frac{CL}{CQ} = \frac{AT}{AI}$ и $\frac{CK}{CN} = \frac{BT}{BI}$. Но $CQ = BT = p - b$, $CN = AT = p - a$ и така получаваме

$$CL \cdot AI = (p - a)(p - b) = CK \cdot BI \Rightarrow \frac{CL}{CK} = \frac{BI}{IA}.$$

От друга страна, $\angle KCL = \angle AIB$ и следователно $\triangle KCL \sim \triangle AIB$. Тогава

$$\angle KLP + \angle PMK = (90^\circ + \angle ABI) + (90^\circ - \angle ABI) = 180^\circ$$

с което доказателството е завършено.

2. От $5 = (11 - 1)/2$ следва, че 11 е важен модул за разглежданото уравнение. Действително, имаме $4^y \equiv 4, 5, 9, 3, 1 \pmod{11}$ и $x^5 \equiv 0, 1, 10 \pmod{11}$, откъдето следва, че $4^y \equiv 1 \pmod{11}$ и значи $5|y$. Нека $y = 5t$, $t \in \mathbb{N}$, и да представим уравнението във вида $(x + 4^t)(x^4 - 4^t x^3 + 4^{2t} x^2 - 4^{3t} x + 4^{4t}) = (3.11.61)^z$.

Тъй като двата множителя отляво са взаимнопрости (докажете!) и 3 не дели втория (докажете!), имаме $3^z | x + 4^t$. Ако $(x + 4^t, 11.61) = 1$, то $x + 4^t = 3^z$ и $2013^z = x^5 + 4^{5t} < (x + 4^t)^5 = 243^z$, противоречие. Ако пък $(x + 4^t, 11.61) > 1$, то $x + 4^t \geq 33^z$ и $2013^z = x^5 + 4^{5t} \geq \frac{(x + 4^t)^5}{15} \geq \frac{33^{5z}}{16} > 2 \cdot (33^4)^z > 2013^z$, противоречие

3. От (b) и (c) имаме $f(1, tk, t^2(k+1)) = tf(1, k, k+1) = t(k+1)$. Да положим $tk = a$ и $t^2(k+1) = b$, като отбележим, че променливите a и b могат да приемат всички стойности в S . Тогава $t = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ и

$$f(1, a, b) = a + t = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Сега от (a) получаваме $f(b, a, 1) = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2b}$. Следователно

$$\begin{aligned} f(b, a, c) = f(b, \frac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{c}, \sqrt{c^2} \cdot 1) &= \sqrt{c} f(b, \frac{a}{\sqrt{c}}, 1) = \sqrt{c} \frac{\frac{a}{\sqrt{c}} + \sqrt{\frac{a^2}{c} + 4b}}{2b} = \\ &= \frac{a + \sqrt{a^2 + 4bc}}{2b}, \end{aligned}$$

където c е произволно число от S . Непосредствено се проверява, че функцията $f(x, y, z) = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4xz}}{2x}$ изпълнява условието.

4. Да разгледаме граф G , чиито върхове са участниците, а два върха са свързани с ребро тогава и само тогава, когато съответните им участници не са приятели. Достатъчно е да докажем, че върховете на G могат да бъдат разбити на три подмножества така, че да във всяко от тях да няма ребра.

Първо ще докажем, че в G има връх от степен най-много 2. Да допуснем противното и да разгледаме най-дългия индуциран път P в G (индуциран означава, че съседствата в този път са само между последователни върхове в пътя). Нека u и v са краищата на P . От допускането следва, че u е съседен на поне два върха u_1 и u_2 , които не са в P . От избора на P като максимален следва, че u_1 и u_2 имат поне по един съсед в P . Нека w_1 (съответно w_2) е съседът на u_1 (съответно на u_2) от P , който е най-близо до u . Без ограничение на общността можем да считаме, че w_1 е по-близо до u от w_2 (или $w_1 = w_2$). Тогава u_1 има поне два съседа (u и w_1) в слабо-приятелския цикъл, индуциран от върха u_2 и върховете на P от u до w_2 , което противоречи на условието.

Ще довършим решението с индукция по броя на върховете на G . Ако G има три върха, твърдението е тривиално. Нека твърдението е вярно за

всички графи с $n \geq 3$ върха, отговарящи на условието, и да разгледаме граф G с $n + 1$ върха. Нека u е връх на G от степен най-много 2 и да разгледаме графа G' , получен от G с премахването на u . Графът G' удовлетворява условието и по индукционно предположение неговите върхове могат да бъдат разпределени по искания начин в три множества. Тъй като степента на u е най-много 2, в поне едно от тези множества няма съседи на u – тогава разпределяме u в това множество и доказателството е завършено.

54. Международна олимпиада по математика

1. Първи начин. (стандартна индукция по k) Твърдението е тривиално за $k = 1$. Нека то е вярно за някое $k \geq 1$. Сега твърдението следва от индукционното предположение и равенствата

$$1 + \frac{2^k - 1}{2t} = \left(1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{2t + 2^k - 2}\right),$$

$$1 + \frac{2^k - 1}{2t - 1} = \left(1 + \frac{2^{k-1} - 1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

съответно при четно $n = 2t$ и нечетно $n = 2t - 1$. До идеята за тези равенства се достига лесно след преглед на малките случаи за n при $k = 2$.

Втори начин. (директно) Да отбележим, че

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n + 2^k - 2}\right),$$

като множителите отлясно са $2^k - 1$ на брой. Сега от равенството

$$\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right) = 1 + \frac{1}{x}$$

се вижда как съседните множители се групират по двойки, като всяка двойка дава един множител от същия вид и новите множители са от същия вид. Оставяме на читателя да съобрази как този процес води до равенство с точно k множителя отлясно.

2. Да разположим 2013 сини и 2013 червени точки върху окръжност така, че цветовете да се редуват (и да не се интересуваме от последната синя точка). Тогава всяка дъга между синя и червена точка трябва да бъде пресечена от права и, понеже имаме 4026 дъги и всяка права пресича най-много две от тях, са необходими поне 2013 прави.

Ще докажем, че 2013 прави са достатъчни за всяка колумбийска конфигурация. Първо да отбележим, че за произволни две точки от един и същи цвят е възможно да бъдат построени две успоредни прави така, че единствено тези две точки от конфигурацията да са в ивицата между двете прави.

Да разгледаме изпъкналата обвивка на колумбийската конфигурация. Ако тя има връх, който е червена точка, можем да отделим тази точка от всички останали с една права и след това да разбием оставащите 2012 червени точки на 1006 двойки, които да отделим с успоредни прави, общо 2012 на брой – получаваме добра конфигурация с 2013 прави. Ако всички върхове на изпъкналата обвивка са сини точки, можем да отделим две от тях с една права и след това да постъпим с оставащите 2012 сини точки както с червените по-горе. Отново получаваме добра конфигурация с 2013 прави.

3. Нека O_1 е центърът на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност. Ясно е, че O_1 е извън $\triangle A_1B_1C_1$ и без ограничение на общността можем да считаме, че $\angle B_1A_1C_1$ е тъп, т.е. O_1 и A_1 са от различни страни на B_1C_1 .

Нека O' е средата на дъгата BAC и да разгледаме триъгълниците $O'BC_1$ и $O'CB_1$. Имаме $BC_1 = B_1C = p - a$, $O'B = O'C$ и $\angle O'BC_1 = \angle ABC - \angle O'BC = \angle ABC - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC) = (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC) - \angle ACB = \angle O'CB - \angle ACB = \angle O'CB_1$, откъдето $O'BC_1 \cong O'CB_1$. Тогава $O'C_1 = O'B_1$, т.е. O' лежи на симетралата на B_1C_1 и на окръжността, описана около $\triangle ABC$. Следователно $O' \equiv O_1$.

Да означим с P и Q съответно допирните точки на AC и външно вписаната окръжност за $\triangle ABC$ срещу върха A и на AB и на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Тъй като $AQ = BC_1 = p - a$, точката O_1 лежи на симетралата на QC_1 , което означава, че Q лежи на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност.

Тъй като $\angle O_1B_1C = \angle O_1C_1C$, точките C , O_1 , C_1 и B_1 лежат на една окръжност. Тогава $\angle B_1O_1C_1 = \angle ACB$, откъдето $\angle A_1B_1C_1 = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB$. Оттук и от $\angle CPA_1 = \frac{1}{2}\angle ACB$ следва, че P лежи на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност.

Да разгледаме степента на точка A относно описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност. Имаме $AQ \cdot AC_1 = AB_1 \cdot AP \iff (p - a)(p - b) = (p - c)p \iff a^2 + b^2 = c^2$.

4. Нека Z е втората пресечна точка на правата AW и описаната окръжност ω около $\triangle AMN$. Понеже $H \in \omega$, то $HZ \perp AZ$, откъдето $\angle MZW = 90^\circ + \angle MAN = 180^\circ - \angle C$. Значи $Z \in \omega_2$ и аналогично $Z \in \omega_1$. Това означава AZ е радикалната ос на ω_1 и ω_2 . Тогава $XZ, YZ \perp AZ \perp HZ$, т.е. точките X , Y , H (и Z) лежат на една права.

Забележка. При $W = H$, $W \rightarrow B$ и $W \rightarrow C$ твърдението на задачата се проверява лесно. След това общото твърдение може да се получи и чрез равномерно движение.

5. Като положим $x = 1$, $y = a$ в (i) получаваме, че $f(1) \geq 1$. От (ii) по индукция следва, че

$$(1) \quad f(nx) \geq nf(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

В частност, имаме, че

$$(2) \quad f(n) \geq n.$$

Пак (i) показва, че $f(n/m)f(m) \geq f(n)$ ($m \in \mathbb{N}$) и значи $f > 0$ върху $\mathbb{Q}^+$. Сега от (ii) следва, че f е строго растяща функция. Тогава (2) води до

$$f(x) \geq f([x]) \geq [x] > x - 1, \quad x \geq 1.$$

Оттук и (i) по индукция получаваме, че

$$f(x)^n \geq f(x^n) \geq x^n - 1 \text{ и следователно } f(x) \geq \sqrt[n]{x^n - 1}, \quad x \geq 1.$$

При $n \rightarrow \infty$ следва, че

$$(3) \quad f(x) \geq x, \quad x \geq 1.$$

По-нататък, от (i) и (3) намираме, че $a^n = f(a)^n \geq f(a^n) \geq a^n$ и значи $f(a^n) = a^n$. За $x \geq 1$ избираме n така, че $a^n - x \geq 1$. Тогава от (ii) и (3) следва, че

$$a^n = f(a^n) \geq f(x) + f(a^n - x) \geq x + (a^n - x) = a^n,$$

откъдето $f(x) = x$ при $x \geq 1$. Накрая, от (i) и (1) имаме, че

$$nf(x) = f(n)f(x) \geq f(nx) \geq nf(x)$$

и значи $f(nx) = nf(x)$. Следователно $f(m/n) = f(m)/n = m/n$.

Забележка. Условието $f(a) = a > 1$ е съществено. Наистина, при $b \geq 1$ функцията $f(x) = bx^2$ изпълнява (i) и (ii), но има единствена неподвижна точка $1/b \leq 1$.

6. Твърдението е равносилно на $M = \sum_{m=1}^n \varphi(m)$, където φ е Ойлеровата функция. Да наречем едно номериране m -подредба, ако m е непосредствено след 0 по часовата стрелка. Достатъчно е да докажем, че за всяко $m \in$

$\{1, 2, \dots, n\}$ съществуват точно $\varphi(m)$ „чудесни“ m -подредби. Да фиксираме $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Да разделим числата $0, 1, 2, \dots, n$ на m блока в зависимост от техните остатъци по модул m , като във всеки блок числата са подредени в нарастващ ред. Да означим тези блокове с $c_0, c_1, \dots, c_{m-1}$, където c_i се състои от числата, които дават остатък i по модул m . Сега да изберем $1 \leq r \leq m$ такива, че $(r, m) = 1$. Ясно е, че тези r са $\varphi(m)$ на брой. Да подредим един след друг блоковете $c_0 c_r c_{2r} \dots c_{(m-1)r} = S_{m,r}$ и да наречем това подреждане „аритметично“. (Тук индексите на блоковете са редуцирани по модул m .)

Ще докажем, че всяко „аритметично“ подреждане е „чудесно“. Нека това подреждане е $S_{m,r}$ за някакви $1 \leq r \leq m \leq n$, $(r, m) = 1$. Да допуснем противното. Тогава съществуват четири различни цели числа a, b, c, d , разположени в този ред в $S_{m,r}$ и такива, че $a + c = b + d$. Съществуват индекси $0 \leq i \leq j \leq k \leq l < m$ такива, че тези числа принадлежат съответно на блоковете c_{ri}, c_{rj}, c_{ru} и c_{rl} . Ако разгледаме $a + c = b + d$, по модул m получаваме $ri + rk \equiv rj + rl$ или $i + k \equiv j + l \pmod{m}$, понеже $(r, m) = 1$. Да забележим обаче, че $i + k \leq j + l < k + m \leq i + k + m$. Следователно $i + k = j + l$, което означава, че $i = j$ и $k = l$. Тогава обаче $a < b$ и $c < d$, което е противоречие с $a + c = b + d$.

Сега ще покажем, че всяко „чудесно“ подреждане е „аритметично“. Нека T е произволно „чудесно“ подреждане. Да означим с m и x съседните на 0 числа съответно по и обратно на часовниковата стрелка. Имаме $m + x > n$, иначе хордата $m-x$ ще пресича хордата $0-(m+x)$.

Лема 1. Числата m и x са взаимнопрости.

Доказателство. Да допуснем противното и нека p е техен общ прост делител. Поради симетрията без ограничение на общността считаме $x > m$. Да разгледаме редицата $z_0, z_1, \dots$, дефинирана така: $z_0 = 1$ и

$$z_{k+1} = \begin{cases} z_k + m, & \text{ако } z_k \leq n - m \\ z_k + m - x, & \text{ако } z_k > n - m. \end{cases}$$

Лесно се вижда, че $0 < z_k \leq n$ и $z_k \neq z_{k+1}$, защото $0 < m < x \leq n$ и $x \neq m$. Освен това никое от тези числа не се дели на p , поради което m и x не са числа от тази редица. Сега ще докажем, че ако тръгнем от 0 и обходим окръжността по часовата стрелка, то първо ще срещнем z_k , а след това z_{k+1} за всяко k . Ако $z_{k+1} = z_k + m$, това е така, защото в противен случай хордата z_k-m ще пресича хордата $z_{k+1}-0$. Ако $z_{k+1} = z_k + m - x$ това е така, иначе хордата z_k-m ще пресича хордата $z_{k+1}-x$. Това означава обаче, че обхождайки окръжността, ние ще срещаме числата $z_0, z_1, \dots$ в този ред, което е абсурд, понеже между тях явно има безбройно много равни, понеже

са от интервала $[0, n]$.

Съгласно Лема 1, ако $1 \leq r \leq m$ е такава, че $x \equiv -r \pmod{m}$, то $(r, m) = 1$. Да отбележим, че съседът отляво на 0 в $S_{m,r}$ – x' удовлетворява $x' \equiv (m-1)r \equiv -r \equiv x \pmod{m}$ и $n-m < x' \leq n$. Ясно е тогава, че $x = x'$.

Ще докажем, че $T = S_{m,r}$ за така дефинираното r . Да разгледаме произволно цяло $a \in [0, n] \setminus \{0, x\}$ и неговият съсед b по часовата стрелка в $S_{m,r}$.

Лема 2. Ако тръгнем от 0 и обходим окръжността по часовата стрелка, първо ще срещнем a , а след това b .

Доказателство. Ако a и b са от един и същ блок на $S_{m,r}$, то $b = a + m$ и твърдението следва, защото иначе хордите $0-b$ и $a-m$ в T ще се пресичат. Нека сега a е най-голямото число в някой блок c_{ir} , а пък b е най-малкото в следващия блок $c_{(i+1)r}$ за някое i , $0 \leq i < m-1$. Да забележим, че $b - a + x \equiv (i+1)r - ir - r \equiv 0 \pmod{m}$. Освен това $|a - x| < m$ поради $n - m < a, x \leq n$ и също $0 < b < m$. Следователно $b - a + x \in (-m, 2m)$, което означава, че $b - a + x \in \{0, m\}$. Ако $b - a + x = a$ твърдението следва, иначе хордите $0-a$ и $x-b$ се пресичат. Ако пък $b - a + x = m$, твърдението следва, защото иначе хордите $a-m$ и $b-x$ се пресичат.

Лема 2 е доказана, откъдето поради това, че твърдението е вярно за произволни a и b , всъщност това е възможно само ако $T = S_{m,r}$ (съобразете внимателно този момент!) С това е доказано, че наистина произволно „чудесно“ подреждане е „аритметично“ и задачата е решена.

Български математически състезания 2013–2014

Решения

Есенен Математически Турнир

8.1. От дадените равенства получаваме

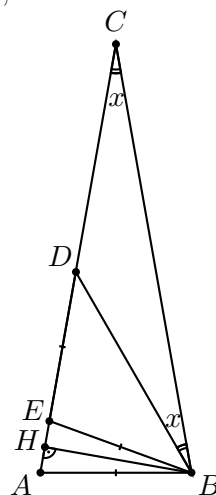
$$\frac{abcd}{(a+b+c)d} = \frac{abcd}{(a+b+d)c} = \frac{abcd}{(a+c+d)b} = \frac{abcd}{(b+c+d)a},$$

откъдето $(a+b+c)d = (a+b+d)c = (a+c+d)b = (b+c+d)a$. От първите две равенства получаваме $(a+b)d = (a+b)c$. Тъй като $a+b > 0$, заключаваме, че $c = d$. Останалите равенства следват аналогично.

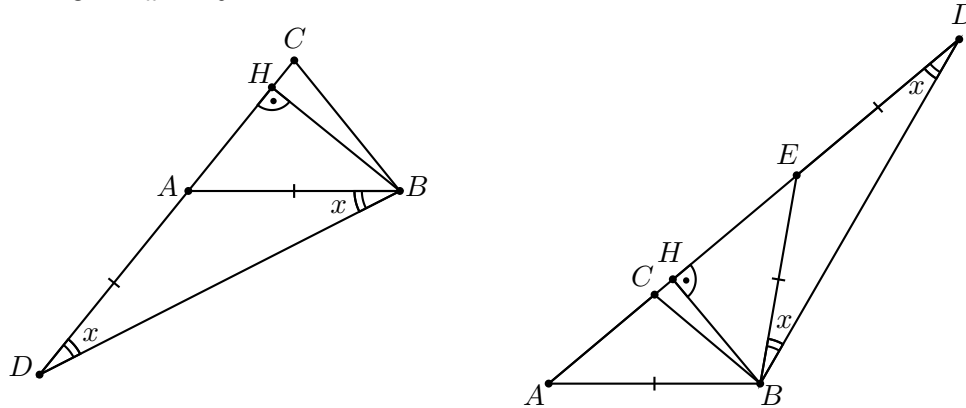
8.2. *Случай 1.* Ако D лежи на отсечката AC , то $\triangle ABC$ е остроъгълен и H лежи на отсечката AC . От условието следва, че H е между A и D . Да построим точка E на отсечката DH , за която $AH = HE$ (и значи $BA = DE$). Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, така че $BE = BA = DE$. От симетралата имаме $BD = CD$. Нека $\angle ACB = \angle DBC = x$. Тогава $\angle DBE = \angle BDE = 2x$ като външен за $\triangle BCD$ и $\angle BAH = \angle BEH = 4x$ като външен за $\triangle BDE$. За сбора на ъглите в $\triangle ABC$ получаваме $4x + 4x + x = 180^\circ$, $x = 20^\circ$, $\angle BAC = 4x = 80^\circ$.

Случай 2. Ако D лежи на лъча CA след A , то $\triangle ABC$ е остроъгълен и H лежи на отсечката AC . От условието следва, че $AD = AB$. Нека $\angle ADB = \angle ABD = x$. Тогава $\angle ABC = \angle BAC = 2x$ като външен за $\triangle ABD$ и $\angle DCB = \angle DBC = 3x$. За сбора на ъглите в $\triangle ABC$ получаваме $2x + 2x + 3x = 180^\circ$, $x = (180/7)^\circ$, $\angle BAC = 2x = (360/7)^\circ$.

Случай 3. Ако D лежи на лъча AC след C , то $\triangle ABC$ е тъпоъгълен и H лежи на същия лъч. От условието следва, че H е между A и D . Да построим точка E на отсечката DH , за която $AH = HE$ (и значи $BA = DE$). Имаме $\triangle AHB \cong \triangle EHB$, така че $BE = BA = DE$. Нека $\angle BDE = \angle DBE = x$. Тогава $\angle ABC = \angle BAC = \angle BEA = 2x$ като външен за $\triangle BDE$ и $\angle CBD = \angle BCD = 4x$ като външен за $\triangle ABC$ (имаме $BD = CD$ от симетралата). За



сбора на ъглите в $\triangle BCD$ получаваме $4x + 4x + x = 180^\circ$, откъдето $x = 20^\circ$ и $\angle BAC = 2x = 40^\circ$.



8.3. Нека n е от желания вид. Числото $a = 11^n + 2^n + 1$ е делител на числото $11a - (11^{n+1} + 2^{n+1} + 1) = 9 \cdot 2^n + 10$. При $n = 1$ получаваме $a = 14$, което е делител на $11^2 + 2^2 + 1 = 126$. Ще покажем, че при $n > 1$ е в сила неравенството $9 \cdot 2^n + 10 < 11^n + 2^n + 1$. Действително, последното е еквивалентно на $8 \cdot 2^n + 9 < 11^n$ и имаме

$$11^n = (8 + 3)11^{n-1} = 8 \cdot 11^{n-1} + 3 \cdot 11^{n-1} > 8 \cdot 8^{n-1} + 3 \cdot 11 > 8 \cdot 2^n + 9.$$

Следователно единственото решение на задачата е $n = 1$.

8.4. Ако числата са записани в реда $a, b, c, \dots, h, i$, то $5S = 45 + b + d + f + h$. Понеже $10 \leq b + d + f + h \leq 30$, получаваме, че S е сред числата 11, 12, 13, 14, 15. От друга страна, $3S = a + b + d + e + f + h + i = 45 - (c + g)$, което изключва $S = 15$.

Лесно се вижда, че имаме реализации за $S = 11, 13$ и 14 : $S = 11$ е възможно при наредбата 925461738, $S = 13$ при 941832567 и $S = 14$ при 592347168.

Да допуснем, че $S = 12$. Тогава $c + g = 9$. Тъй като редицата от числа $a, b, c, \dots, h, i$, записана в обратен ред, също притежава свойството от условието, то без ограничение на общността $c < g$.

Ако $c = 1$, $g = 8$, то $f + h = 4$, което е невъзможно. Ако $c = 2$, $g = 7$, то $f + h = 5$, т.е. $\{f, h\} = \{1, 4\}$. Ако $h = 1$, то $i = 11$, което е невъзможно. Ако $f = 1$, $h = 4$, то $i = 8$, $b + d = 10$, абсурд, понеже вече са използвани числа от всички подходящи двойки. Ако $c = 3$, $g = 6$, то $f + h = 6$, т.е. $\{f, h\} = \{1, 5\}$ или $\{2, 4\}$. Ако $h \leq 2$, то $i \geq 10$, противоречие. Ако $f = 1$, $h = 5$, то $i = 7$, $b + d = 9$, което е невъзможно, понеже вече са използвани числа от всички

подходящи двойки. Ако $f = 2$, $h = 4$, то $i = 8$, $b + d = 9$ – абсурд, понеже вече са използвани числа от всички подходящи двойки. Ако $c = 4$, $g = 5$, то $f + h = 7$, т.е. $\{f, h\} = \{1, 6\}$. Ако $h = 1$, то $i = 11$, абсурд. Ако $h = 6$, то $i = 6$, отново противоречие.

Окончателно, търсените стойности са $S = 11$, $S = 13$ или $S = 14$.

9.1. Отговор: $a_1 = 1$ и $a_2 = -2$. Лесно се вижда, че корените на двете уравнения са реални. С помощта на формулите на Виет получаваме, че

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{(y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2}{y_1 + y_2} \iff \frac{a^2 + 2}{a} = \frac{(a + 1)^2 + 2}{a + 1}.$$

От последното равенство следва, че $a^2 + a - 2 = 0$, откъдето $a_1 = 1$ и $a_2 = -2$.

9.2. *Първи начин.* От $100(100 + 21) = 110^2$ следва, че $k \leq 21$. Да допуснем, че $k \leq 20$ и да положим $d = (n, k)$, $n = n_1d$, $k = k_1d$, където $(n_1, k_1) = 1$. Да отбележим, че $n_1(n_1 + k_1)d^2 = n(n + k)$, което означава, че $n_1(n_1 + k_1)$ е точен квадрат. Тъй като $(n_1, n_1 + k_1) = 1$, заключаваме, че числата n_1 и $n_1 + k_1$ са точни квадрати.

От $k \leq 20$ следва, че $d \leq 20$ и отгук $n_1 = \frac{n}{d} \geq \frac{100}{20} = 5$. Тъй като n_1 е точен квадрат, имаме всъщност $n_1 \geq 9$. Тъй като k_1 е разликата от n_1 поне до следващия точен квадрат, имаме $k_1 \geq 7$. Сега от $k = k_1d \leq 20$ следва, че $d \leq 2$ и по същия начин, както по-горе, последователно получаваме $n_1 \geq 50$, т.е. $n_1 \geq 64$, откъдето $k_1 \geq 17$, $d = 1$, $n_1 \geq 100$ и накрая $k_1 \geq 21$, което е противоречие, защото $k_1 \leq k \leq 20$.

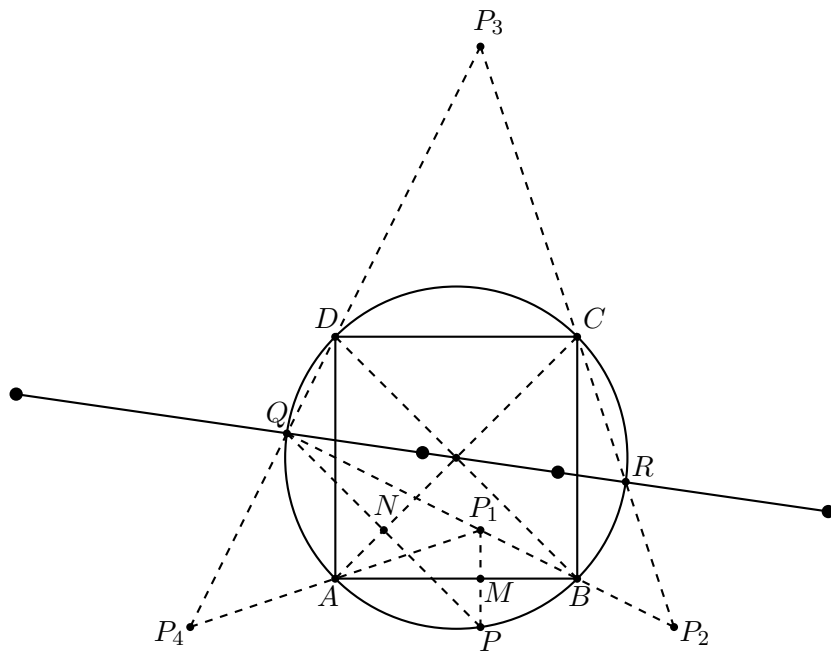
Втори начин. От $100(100 + 21) = 110^2$ следва, че $k \leq 21$. Ако допуснем, че $k \leq 20$, $n \geq 100$ и $n(n + k) = t^2$, то от квадратното уравнение $n^2 + kn - t^2 = 0$ следва, че неговата дискриминанта $k^2 + 4t^2$ е точен квадрат. Но от друга страна, $k^2 \leq 400 \leq 4n < 4t$ и следователно $(2t)^2 < k^2 + 4t^2 < (2t + 1)^2$, което е противоречие.

9.3. Да, винаги! Да допуснем, че съществуват две покрития A и B с правоъгълници 2×3 , които водят (при подходящи разрязвания) до едно и също покритие с по-малки правоъгълници. Тогава непременно има правоъгълник P_1 с размери 1×3 такъв, че правоъгълникът Q_1 с размери 2×3 , от който P_1 е част в A , е разположен по различен начин от правоъгълника R_1 с размери 2×3 , от който P_1 е част в B . Без загуба на общност, нека P_1 се съдържа в i -тия ред на дъската, Q_1 се съдържа в i -тия и $(i - 1)$ -вия, и R_1 се съдържа в i -тия и $(i + 1)$ -вия ред.

Нека P_2 е правоъгълникът 1×2 , получен от R_1 в B , и нека Q_2 е правоъгълникът 2×3 , от който P_2 е част в A . Тогава P_2 се съдържа в $(i + 1)$ -вия ред на дъската и Q_2 се съдържа в $(i + 1)$ -вия и $(i + 2)$ -рия ред.

Продължавайки по същия начин, в крайна сметка ще достигнем до правоъгълник P_n , който ще трябва да лежи извън дъската – противоречие.

9.4. Нека, без загуба на общност, P лежи върху дъгата AB . Нека Q и R са симетричните точки на P относно правите AC и BD , и нека M и N са проекциите на P върху правите AB и AC , съответно.

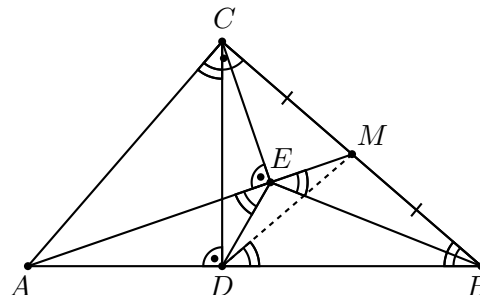

$$\angle P_1QP = \angle MNP = \angle MAP = \angle BAP = \frac{1}{2}\widehat{PB}.$$

Аналогично се установява и $\angle P_2QP = \frac{1}{2}\widehat{PB}$, откъдето следва, че точките P_1 , P_2 и Q лежат на една права. На тази права лежи и точката B , понеже P_1 и P_2 са симетрични относно B .

От $\angle RQP = 2\angle BQP = 2\angle P_1QP$ следва, че точката, симетрична на P относно правата P_1P_2 , лежи на QR . Аналогично, на QR лежат и точките, симетрични на P относно P_2P_3 , P_3P_4 и P_4P_1 . Понеже QR е диаметър в описаната окръжност на $ABCD$ и съдържа неговия център, то с това задачата е решена.

10.1. Отговор: $x = 1$ и $x = -2$. Да запишем даденото уравнение във вида $3\sqrt{x+3} = 7-x^2$, където $x \in [-3, +\infty)$. След повдигане на квадрат достигаме до еквивалентното уравнение $x^4 - 14x^2 - 9x + 22 = 0$, където $x \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$. Лесно се проверява, че последното уравнение има само два цели корена $x = 1$ и $x = -2$ и по схемата на Хорнер то добива вида $(x-1)(x+2)(x^2-x-11) = 0$. Но $x \in [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ и следователно $x^2 - x - 11 \leq 7 + \sqrt{7} - 11 = \sqrt{7} - 4 < 0$, което показва, че $x = 1$ и $x = -2$ са единствените решения на задачата.

10.2. Нека $\angle ABC = \beta$. Тъй като точките A , D , E и C лежат на окръжност с диаметър AC , то $\angle AED = \angle ACD = \angle ABC = \beta$ и следователно четириъгълникът $DBME$ е вписан в окръжност. Освен това, DM е медиана в правоъгълния $\triangle BDC$ и следователно



$$\angle BEM = \angle BDM = \angle DBM = \beta.$$

Така получаваме, че $\angle DEC = \angle CEB = 90^\circ + \beta$.

От друга страна, $\angle CDE = \angle CAE = \angle BCE$ и следователно $\triangle CDE \sim \triangle BCE$. Тогава

$$2 = \frac{BE}{DE} = \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CE}{DE} = \left(\frac{BC}{CD} \right)^2,$$

т.е. $BC = \sqrt{2}CD$ и $\beta = 45^\circ$.

10.3. Известно е, че функцията $\varphi(n)$ има следния явен вид:

$$\varphi(1) = 1 \text{ и } \varphi(n) = p_1^{s_1-1} p_2^{s_2-1} \cdots p_k^{s_k-1} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_k - 1) \text{ за } n > 1,$$

където $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ е каноничното разлагане на n на прости множители.

В частност, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ и $\varphi(n)$ е четно число при $n > 2$. Освен това,

$$\varphi(2n) = \begin{cases} 2\varphi(n), & \text{ако } n \text{ е четно;} \\ \varphi(n), & \text{ако } n \text{ е нечетно.} \end{cases}$$

Нека естественото число n е решение. Ще разгледаме два случая:

Случай 1. Ако n е нечетно число, то $\varphi(n) = 1$ или $\varphi(n) = 2$ и след заместване в условието достигахме до единствено решение $n = 3$.

Случай 2. Нека n е четно число. Тогава $n = 2^s m$, където $s, m \in \mathbb{N}$ и m е нечетно число. След заместване в условието получаваме

$$\varphi(\varphi(2^s m)) + \varphi(2^s m) = 2^s m \Leftrightarrow \varphi(2^{s-1} \varphi(m)) + 2^{s-1} \varphi(m) = 2^s m.$$

Ако $m = 1$, то последното равенство добива вида $\varphi(2^{s-1}) = 2^{s-1}$ и единствената възможност е $s = 1$, която ни води до второто решение $n = 2$. Ако $m > 1$, то $\varphi(m)$ е четно число и достигахме до равенството

$$2^{s-1} \varphi(\varphi(m)) + 2^{s-1} \varphi(m) = 2^s m \Leftrightarrow \varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) = 2m.$$

Но $\varphi(n) < n$ за всяко $n > 1$, т.е. $\varphi(\varphi(m)) + \varphi(m) < 2m$, което е противоречие.

Окончателно, $n = 2$ и $n = 3$ са единствените решения на задачата.

10.4. Разбиваме учениците на две групи V_1 и V_2 и означваме с e_i броя на двойките познати във V_i , $i = 1, 2$. Измежду всички възможни разбивания на учениците по стаи, които са краен брой, да разгледаме такова разбиване (то може и да не е единствено), при което числото $e_1(d_2 + 1) + e_2(d_1 + 1)$ е минимално.

Ще докажем, че това разбиване изпълнява условието на задачата. Да допуснем противното и нека в поне една от групите, да речем V_1 , има ученик x , който има $d'_x \geq d_1 + 1$ познати в групата. Означаваме с d''_x броя на познатите на x във V_2 . При преместването на x във V_2 броят на познанствата във V_1 и V_2 става съответно $e'_1 = e_1 - d'_x \leq e_1 - d_1 - 1$ и

$$e'_2 = e_2 + d''_x \leq e_2 + d - d'_x \leq e_2 + (d_1 + d_2 + 1) - (d_1 + 1) = e_2 + d_2.$$

Оттук

$$e'_1(d_2 + 1) + e'_2(d_1 + 1) - e_1(d_2 + 1) - e_2(d_1 + 1) = -d_1 - 1 < 0,$$

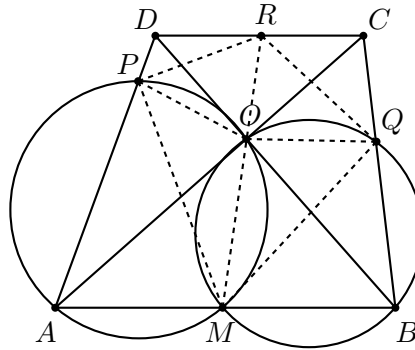
което е противоречие с минималността на $e_1(d_2 + 1) + e_2(d_1 + 1)$. С това и доказателството е завършено.

11.1. Отговор: всички нечетни естествени числа. От $a_{S_{n+1}} - a_{S_n} = 2(n+k)a_k$ получаваме $a_{n+1}d = (n+k)a_k$ или

$$(a_1 + nd)d = (n+k)a_k.$$

Понеже това равенство е изпълнено за всяко n , намираме $d^2 = a_k$ и $a_1d = ka_k$. Следователно $a_1d = ka_k = kd^2$, т.е. $a_1 = kd$. Сега от $a_k = a_1 + (k-1)d = d^2$ получаваме $d^2 = kd + (k-1)d$ или $d = 2k - 1$. Търсените числа са всички нечетни естествени числа.

11.2. Нека правата MO пресича отсечката CD в точка R .



От вписаните четириъгълници $AMOP$ и $MBQO$ имаме $\angle BMO = \angle APO$ и $\angle BMO = \angle CQO$. От $AB \parallel CD$ намираме $\angle BMO = \angle DRO$, откъдето получаваме

$$\angle BMO = \angle CQO = \angle APO = \angle DRO.$$

Следователно четириъгълниците $PORD$ и $OQCR$ са вписани. Имаме

$$\angle MQR = \angle MQO + \angle OQR = \angle MBO + \angle OCR = \angle MBO + \angle OAM = 90^\circ$$

и аналогично $\angle MPR = 90^\circ$.

Това означава, че четириъгълникът $MQRP$ е вписан и центърът на описаната окръжност е средата на отсечката MR . Оттук следва и твърдението на задачата.

11.3. Елементите на множеството $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ могат да се разделят по два начина (понеже $1+5 = 2+4$, $3+4 = 1+6$ и $6+2 = 3+5$) така че да е изпълнено свойството от условието. Следователно при $d = 2$ за получаване на множеството A към елементите на B прибавяме произволни $n-6$ различни естествени числа, по-големи от 6. В двете разделяния тези $n-6$ елемента групираме по един и същи начин на двueleментни подмножества.

Ще покажем, че ако в A имаме четири елемента a, b, c, d , за които $a + b = c + d$, то при всяко $d \geq 3$ търсените разделяния съществуват. Наистина нека първите две множества от първото разделяне да съдържат съответно $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ и още по $d-2$ произволни елемента. Останалите елементи групираме по произволен начин в останалите множества. При второто разделяне сменяме местата на $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ в първите две множества, а останалите запазваме. Лесно се вижда, че условието е изпълнено.

Следователно е достатъчно да изберем множество A от различни естествени числа, което съдържа $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

11.4. Отговор: всички нечетни естествени числа. Понеже $x^{2013} \equiv x \pmod{3}$, то съществува x_0 , за което $3 \mid x_0^{2013} + n$. Полагайки $x = x_0$ в даденото равенство, получаваме че по модул 3 то е възможно само при $3 \mid f_i(x_0)$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$. Тогава $(-1)^n \equiv -1 \pmod{3}$, което означава, че n е нечетно число.

Да дефинираме редицата $g_1(x), g_2(x), \dots$ като $g_1(x) = x^{2013} + n$ и $g_{i+1}(x) = 4g_i(x)^3 - 3g_i(x)$ при $i \geq 1$. Ясно е, че $x^{2013} + n$ дели всеки от полиномите в дадената редица, като освен това

$$g_{i+1}(x)^2 - 1 = (4g_i(x)^2 - 1)^2(g_i(x)^2 - 1).$$

Следователно

$$g_t(x)^2 - 1 = (4g_{t-1}(x)^2 - 1)^2 \dots (4g_1(x)^2 - 1)^2(g_1(x)^2 - 1) = \prod_{i=1}^{2t-1} (f_i(x)^2 - 1),$$

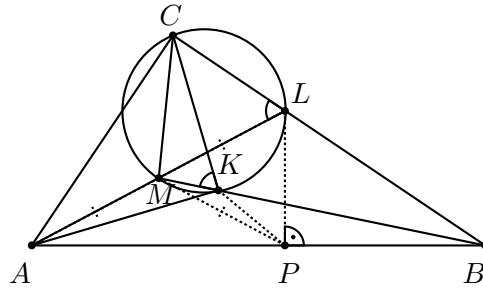
където $f_1(x) = g_1(x)^2 - 1$ и $f_{2i}(x) = f_{2i+1}(x) = 4g_i(x)^2 - 1$ за $i = 1, 2, \dots, t-1$.

12.1. Отговор: $a_1 \geq 3/5$. Ако $b_n = a_{2n-1}$ и $c_n = a_{2n}$, то $b_{n+1} = 6b_n - 3$ и $c_{n+1} = 6c_n - 4$. Следователно $b_{n+1} - 3/5 = 6(b_n - 3/5)$ и $c_{n+1} - 4/5 = 6(c_n - 4/5)$, откъдето $b_{n+1} = 3/5 + 6^n(a_1 - 3/5)$ и $c_{n+1} = 4/5 + 6^n(c_1 - 4/5) = 4/5 + 6^n 3(a_1 - 3/5)$. Значи $a_n > 0$ за всяко n точно когато $a_1 \geq 3/5$.

12.2. Нека $x \leq -1$ и $f(x) > 0$. Ако $f(x) + x - 1 \geq 0$, то от даденото равенство следва, че $x = 1$, противоречие. Ако $f(x) + x - 1 < 0$, то от даденото равенство следва, че $f(x) = 0$, което също е противоречие. Следователно $f(x) \leq 0$. Обратно, ако $x \leq -1$ и $f(x) \leq 0$ даденото равенство е изпълнено. Аналогично се проверява, че при $-1 < x < 0$ даденото равенство е изпълнено само ако $f(x) > 0$ и $f(x) + x - 1 \leq 0$. В този случай намираме, че $f(x) = x + 1$. Същите разсъждения показват, че при $0 \leq x < 1$ даденото равенство е еквивалентно на $f(x) \geq 1 - x$, а при $x \geq 1$ то е еквивалентно на $f(x) \geq 0$. Следователно

множеството A съдържа вътрешността на триъгълника с върхове $(-1, 0)$, $(1, 0)$ $(0, 1)$, който има лице 1.

12.3. Нека P е петата на перпендикуляра от L към AB . Тогава PM се явява медиана в правоъгълен триъгълник и получаваме $\angle APM = \angle PAM = \frac{\alpha}{2} = \angle AKM$. Следователно $APKM$ е вписан четириъгълник, откъдето $BP.BA = BK.BM = BL.BC$, т.е. $APLC$ също е вписан четириъгълник и $\angle ACB = 180^\circ - \angle APL = 90^\circ$.



12.4. Да разгледаме граф с върхове $1, 2, \dots, 2013ab$ и за всяко $t = 1, \dots, 2013a$ да свържем с ребро върховете t и bt и върховете at и bt . Ще докажем, че всички цикли в този граф са с четна дължина. Да разгледаме произволен цикъл и нека $a^m b^n t$ е най-малкият елемент в него. Тогава най-големият елемент ще има вида $a^p b^q t$. Всеки път между $a^m b^n t$ и $a^p b^q t$ ще се състои от няколко ребра, съответстващи на умножение с b и на няколко ребра, съответстващи на умножение с $\frac{b}{a}$. Това означава, че степента на b за всяко ново число се увеличава с 1 и следователно дължината на всеки път между $a^m b^n t$ и $a^p b^q t$ е $q - n$. Оттук следва, че всеки цикъл е с дължина $2(q - n)$, т.е. е четно число.

Тъй като всеки граф, в който всички цикли са с четна дължина е дву-делен, то върховете му могат да се оцветят в два цвята така, че свързани с ребро върхове да са разноцветни. Следователно, ако броят на свързаните компоненти в разглеждания граф е A , то различните оцветявания са 2^A . Ще намерим A , като разгледаме най-малкия елемент n на всяка компонента.

Ако b дели n , то $\frac{n}{b}$ е в същата компонента и тогава n не е най-малкият елемент. Ако a дели n и $\frac{n}{a} \cdot b \leq 2013ab$, то $\frac{n}{a}$ ще бъде елемент на същата компонента и отново n не е най-малкият елемент. Накрая, ако a дели n и $\frac{n}{a} \cdot b > 2013ab \iff n > 2013a^2$, то n е най-малкият елемент в съответната компонента. Броят на тези n е $2013(b - a)$. Освен това, ако n не се дели нито

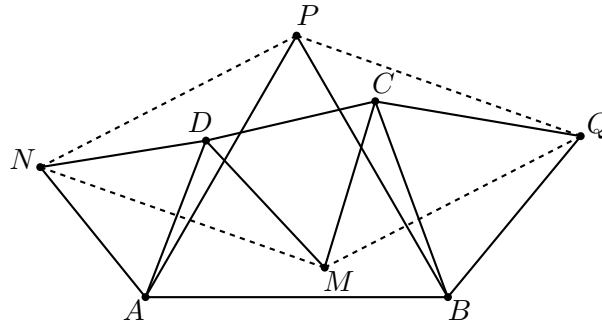
на a , нито на b , то n е най-малък елемент в своята компонента. Броят на тези n е $2013ab - 2013a - 2013b + 2013$.

Окончателно $A = 2013(ab - 2a + 1)$ и отговорът е $2^{2013(ab-2a+1)}$.

Зимен Математически Турнир „Атанас Радев“

9.1. Отговор: $a \in [-4, +\infty)$. Събираме трите уравнения на дадената система и представяме полученото равенство във вида $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 3a+12$. Следователно $3a+12 \geq 0 \iff a \geq -4$ е необходимо условие да имаме реално решение. Това условие е и достатъчно, защото при всяко $a \in [-4, +\infty)$ имаме решението, което се получава при $x-2 = y-2 = z-2 = \sqrt{a+4}$.

9.2. Ротацията на ъгъл 60° с център A изпраща B в P и D в N , откъдето $BD = PN$. Аналогично получаваме $MQ = BD$ и след това $MQ = NP$ по същия начин.



9.3. Нека $p^k q + 1 = x^2$ и $pq^k + 1 = y^2$, където $x, y \in \mathbb{N}$. Ако точно едно от числата p и q е равно на 2, например $p = 2$, а q е нечетно, то равенството $2q^k + 1 = y^2$ дава противоречие по модул 4. Ако $p = q = 2$, то от $2^{k-1} = (x-1)(x+1)$ следва, че $x-1$ и $x+1$ са степени на 2, което е възможно само при $x = 3$ и съответно $k = 2$.

Нека p и q са нечетни прости числа. Тогава x и y са четни и $(x-1, x+1) = (y-1, y+1) = 1$. От последното и от равенствата $p^k q = (x-1)(x+1)$ и $pq^k = (y-1)(y+1)$ следва, че имаме четири възможности.

При $p^k = x-1, q = x+1, q^k = y-1$ и $p = y+1$ получаваме $q-p^k = p-q^k = 2$, т.е. $p^k + p = q^k + q$ и значи $p = q$, което води до $p = 2$, противоречие. Същото се получава и при $p^k = x+1, q = x-1, q^k = y+1$ и $p = y-1$.

При $p^k = x-1, q = x+1, q^k = y+1$ и $p = y-1$ получаваме $q-p^k = q^k - p = 2$, т.е. $p+q = p^k + q^k$, което очевидно е невъзможно. Същото се получава и при $p^k = x+1, q = x-1, q^k = y-1$ и $p = y+1$.

Забележка. По-общата задача за произволна степен вместо квадрат се свежда до решаване на уравненията $p^{k+1} = 2^m - 1$ и $p^k q = 2^m - 1$, където m е просто число.

9.4. Да номерираме редовете и стълбовете от стаи в лабиринта с числата от 1 до 100 и да означим всяка стая с наредената двойка от номерата на нейните ред и стълб.

Нека S е множеството на стаите (i, j) , за които $1 \leq i \leq 50$ и $1 \leq j \leq 50$. Да разбием S на 99 по-малки множества $S_2, S_3, \dots, S_{100}$, така че S_k да се състои от тези стаи (i, j) в S , за които $i + j = k$ за $2 \leq k \leq 100$. Нека P_k е общият брой посещения на стаи от S_k , направени от Тезей.

Множеството S_2 се състои от една стая. Понеже тя има само две врати, имаме, че $P_2 \leq 1$. Нека a е една произволна стая от S_k , $k > 2$. Понеже a има само две врати, които не водят към стая от S_{k-1} , поне едно от всеки две последователни посещения на a трябва или да се предхожда, или да се следва от посещение на стая от S_{k-1} . Понеже всяко посещение на стая от S_{k-1} може да предхожда или да следва най-много две посещения на стаи от S_k , заключаваме, че P_k не надвишава $k - 1$ (броя на стаите в S_k) + $4P_{k-1}$.

Оттук по индукция леко следва, че $P_k \leq 2^{2k-3} - k + 1$. Следователно общият брой на посещенията на стаи от S не надвишава

$$S_2 + S_3 + \dots + S_{100} \leq 2^1 + 2^3 + \dots + 2^{197} = \frac{2^{198} - 2}{3}.$$

Същата оценка можем да направим и за всеки от останалите три квадранта на лабиринта, откъдето общият брой ходове не надвишава $4 \cdot \frac{2^{198} - 2}{3} < 4^{100}$.

Забележка. Оценката може съществено да се подобри.

10.1. Отговор: $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}), (-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$. Очевидно имаме $x(x-1) = y(y-1) = z(z-1)$, откъдето следва, че поне две от числата x, y и z са равни. Нека $y = z$. Системата се преобразува в

$$x^2 + 2y = 1, x + y^2 + y = 1,$$

т.е. $y = (1 - x^2)/2$. Замествайки във второто уравнение, получаваме $x^4 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$. Това уравнение може да се представи като $(x-1)^2(x^2 + 2x - 1) = 0$, откъдето $x = 1, -1 \pm \sqrt{2}$. Оттук получаваме петте решения.

10.2. Тъй като $1 + 4x \geq 0$, то достатъчно е да намерим тези стойности на a , за които даденото неравенство няма неотрицателни цели решения. При $x = 0$ и $x = 2$ получаваме $a \leq 1$, а при $x = 1$, $a \leq \sqrt{5}$. Следователно необходимо

условие е $a > \sqrt{5}$ и остава да докажем, че то е и достатъчно, т.е.

$$x^2 - x + a > \sqrt{1 + 4x} \text{ за всяко цяло } x > 2 \text{ при } a > \sqrt{5}.$$

Да разгледаме неравенството $x^2 - x + 1 > \sqrt{1 + 4x}$. След повдигане на втора степен достигахме до еквивалентното неравенство:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2+3) > 0,$$

което очевидно е изпълнено за всяко цяло $x > 2$. Следователно

$$x^2 - x + a > x^2 - x + \sqrt{5} > x^2 - x + 1 > \sqrt{1 + 4x}$$

за всяко цяло $x > 2$, с което задачата е решена.

10.3. Най-напред ще определим броя на правоъгълниците със страни, успоредни на координатните оси. Очевидно, че броят на правоъгълниците със страни с дължини a и b , които са успоредни на координатните оси, и с върхове с целочислени координати (x, y) , $0 \leq x, y \leq n$, е

$$(2p^2 - a + 1)(2p^2 - b + 1) \equiv (a - 1)(b - 1) \pmod{p}.$$

Правоъгълниците с лице $2p^2$ имат страни $2p^2 \times 1$, $p^2 \times 2$, $2p \times p$, $p \times 2p$, $2 \times p^2$, $1 \times 2p^2$. Следователно, ако броят на тези правоъгълници е K , то $K \equiv 0 \pmod{p}$.

Сега ще определим броя L на правоъгълниците, чиито страни не са успоредни на координатните оси. Да разгледаме три последователни върха на такъв правоъгълник, имащи координати $(0, a)$, $(b, 0)$, $(b + c, d)$. Очевидно имаме $c = ka$, $d = kb$ и $k(a^2 + b^2) = 2p^2$ за някакво цяло k . (Защо k е цяло?) Решенията на това уравнение са $k = 1$, $a = b = p$ и $k = p^2$, $a = b = 1$.

В първия случай имаме квадрат със страна $\sqrt{2}p$ и неговото положение се определя еднозначно от описания около него квадрат със страна $2p$. При второто решение имаме два правоъгълника с лице $2p^2$, вписани в квадрат със страна $p^2 + 1$. Така за L получаваме

$$L \equiv (2p - 1)^2 + 2p^4 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Окончателно получаваме $N = K + L \equiv 1 \pmod{p}$.

10.4. Нека P и Q са проекциите на върховете A и B върху правата EF . Тогава точките A, C, P и E лежат на окръжност с диаметър AE , а точките B, C, F и Q лежат на окръжност с диаметър BF . Следователно $\angle CPQ = \angle CAE = \angle CBA$ и $\angle CQP = \angle CBF = \angle CAB$, т.е. $\triangle CPQ \sim \triangle CBA$.

Нека правата през върха C , перпендикулярна на EF пресича EF в точка R и AB в точка T . От факта, че $AP \parallel MR \parallel BQ$ и $\triangle CPQ \sim \triangle CBA$ следва, че

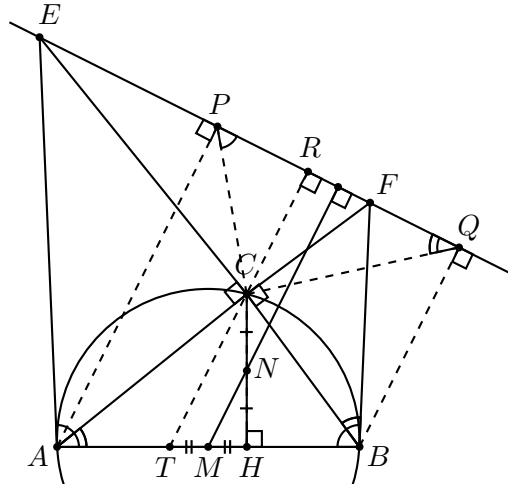
$$\frac{AT}{AB} = \frac{PR}{PQ} = \frac{BH}{BA},$$

т.е. $AT = BH$ и M е среда на TH . Тогава MN е средна отсечка в $\triangle THC$, $MN \parallel TC$ и следователно $MN \perp EF$.

11.1. Нека редицата $b_1, b_2, \dots$ е геометрична прогресия с частно r . Тогава $b_1 = \frac{b_2}{r} = \frac{a_2 - 2014}{r}$ и следователно $S = \frac{b_1}{1-r} = \frac{\frac{a_2-2014}{r}}{1-r} = \frac{\frac{1}{r}}{1-r} = 4$. Последното равенство е еквивалентно на $(2r-1)^2 = 0$, т.е. $r = \frac{1}{2}$. Сега от равенството $xa_{n+1} = a_n + y$ след заместване в $a_{n+1} = b_{n+1} + 2014 = \frac{b_n}{2} + 2014$ и $a_n = b_n + 2014$ получаваме

$$x \left(\frac{b_n}{2} + 2014 \right) = b_n + 2014 + y.$$

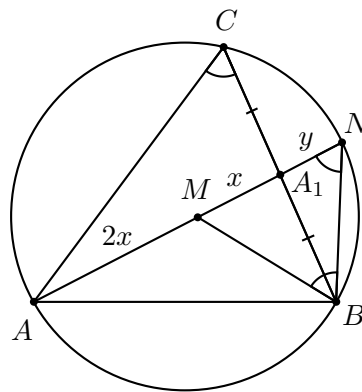
Оттук $b_n \left(\frac{x}{2} - 1 \right) = 2014 + y - 2014x$, откъдето $\frac{x}{2} - 1 = 2014 + y - 2014x = 0$ (в противен случай в редицата $b_1, b_2, \dots$ ще има равни членове). Следователно $x = 2$ и $y = 2014$.



11.2. Нека N е втората пресечна точка на правата AM с описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Тогава $\sphericalangle MNB = \sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle MBN = \sphericalangle AMB - \sphericalangle MNB = \sphericalangle ACB$, т.е. $MB = MN$. Ако A_1 е средата на BC , $x = MA_1$ и $y = A_1N$ имаме $AA_1 \cdot A_1N = 3xy = \frac{BC^2}{4}$, откъдето $xy = \frac{BC^2}{12}$. От формулата за медианата имаме $9x^2 = \frac{1}{4}(2AB^2 + 2AC^2 - BC^2)$, откъдето $x = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{36}$.

Следователно

$$\begin{aligned} AM \cdot BM &= 2x \cdot MN = 2x(x + y) = 2x^2 + 2xy = \\ &= \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{18} + \frac{BC^2}{6} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}. \end{aligned}$$



11.3. Тъй като коефициентите на $f(x)$ са естествени числа, то корените на уравнението $f(x) = 0$ са отрицателни. От условието (2) следва, че

$$f(x) = (qx + p)R(x),$$

където без ограничение $p > 0$ и $q > 0$ са естествени числа, а $R(x)$ е полином от степен $k - 1$ с цели коефициенти (горното разлагане следва от схемата на Хорнер). Нека x_i за $i = 1, 2, \dots, k + 1$ са такива различни естествени числа, че $f(x_i) = r_i$ и r_i са прости числа. Тъй като $qx_i + p > 1$ дели $f(x_i) = r_i$, то $qx_i + p = r_i$. Тогава $f(x_i) - (qx_i + p) = 0$ за всяко $i = 1, 2, \dots, k + 1$. Следователно $f(x) - (qx + p)$ е полином от степен k с поне $k + 1$ нули, т.е. $f(x) = qx + p$. Числата q и p са взаимнопрости, защото в противен случай $f(x_i)$ не може да е просто число.

11.4. Да запишем във всяка от клетките, в които първоначално има пулове числото 1. По-нататък, във всяка от клетките над главния диагонал да запишем $\frac{1}{2}$, във всяка от клетките над клетка с $\frac{1}{2}$ да запишем $\frac{1}{4}$ и т.н., като в последните две клетки, които са съседни на горната дясна клетка записваме $\frac{1}{2^{n-2}}$. Да забележим, че при прилагане на разрешената операция сборът от числата, съответни на клетките с пул, не се променя. В началото този сбор е $n - 2$.

От друга страна от тъждеството

$$n - 2 = \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{2^2} + \frac{n-3}{2^3} + \dots + \frac{2}{2^{n-2}},$$

(което лесно се доказва по индукция) следва, че сборът на числата във всички клетки над главния диагонал без най-горната дясна клетка е равен на $n - 2$. Понеже в най-горната дясна клетка не може да има пул, то ако в даден момент по главния диагонал няма пулове, то във всички клетки над главния диагонал, без клетката в горния десен ъгъл, трябва да има пулове.

Броят им е $\frac{n^2 - n}{2} - 1$.

Оставяме на читателя да покаже алгоритъм, с които исканото разположение се постига.

12.1. Да означим с M средата на B_1C_1 . Тогава $EM.MD = MB_1.MC_1 = MC_1^2$. От друга страна точката M лежи и на отсечката AI и $\angle AMC_1 = 90^\circ$ от равнобедрения $\triangle AC_1B_1$. Сега от правоъгълния $\triangle AC_1I$ с височина C_1M имаме $MC_1^2 = AM.MI$. Следователно $EM.MD = AM.MI$, откъдето следва исканото.

12.2. а) Нека $A_1 = (x_1, x_1^2)$, $A_2 = (x_2, x_2^2)$ са двете допирни точки, а $A = (x_0, y_0)$ е пресечната точка на допирателните към $y = x^2$ в тези точки. Понеже те са допирателни и към k , то $AA_1 = AA_2$. Имаме, че $y_0 - x_1^2 = 2x_1(x_0 - x_1)$ и $y_0 - x_2^2 = 2x_2(x_0 - x_2)$. Като извадим тези уравнения, получаваме, че $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_0) = 0$. Значи $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ и тогава $y_0 = x_1x_2$. Замествайки в равенството

$$(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - x_1^2)^2 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - x_2^2)^2,$$

намираме, че $(x_1 - x_2)^3(x_1 + x_2) = 0$. И така, $x_1 + x_2 = 0$, откъдето следва исканото.

б) От а) знаем, че $A = (0, -x_1^2)$ и $M = (0, x_1^2)$, където M е средата на A_1A_2 . Ако O е центърът на k , от подобие на правоъгълните триъгълници AA_1M и AOA_1 следва, че $\frac{A_1M}{AM} = \frac{OA_1}{AA_1}$, откъдето

$$r = \frac{x_1}{2x_1^2} \sqrt{x_1^2 + 4x_1^4} = \sqrt{\frac{1}{4} + x_1^2} > \frac{1}{2}.$$

12.3. Търсената стойност е $\frac{1}{4}$. Да означим израза с $f(x, y)$. Очевидно $f(x, 0) = \frac{x}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{4}$, като равенство се достига само при $x = 1$.

Сега е достатъчно е да покажем, че

$$f(ty, y) \leq m_t := \frac{1}{4} \left(\frac{t+k^2}{t+k} \right)^2 < \frac{1}{4}$$

при $t, y \geq 0$. Това е еквивалентно на

$$(t+k^2)y + (1-k)^2ty^2 \leq m_t(1+(t+1)y)^2, \quad \text{т.е.}$$

$$(m_t(t+1)^2 - (1-k)^2t)y^2 + (2m_t(t+1) - t - k^2)y + m_t \geq 0.$$

Предвид дефиницията на m_t , дискриминантата на лявата част е 0. Остава да използваме, че $m_t > 0$.

12.4. Виж Задача 11.4.

Пролетни Математически Състезания

9.1. Отговор: $a = \pm 4$. Ако x_0 е решение на даденото уравнение, лесно се вижда, че и $-x_0$ е негово решение. Следователно уравнението може да има нечетен брой решения само ако $x = 0$ е негово решение. Тогава $8 = 2|a|$, откъдето необходимо условие е $a = \pm 4$. Ще докажем, че това условие е и достатъчно. При $a = \pm 4$ получаваме уравнението $x^2 + 8 = |x+4| + |x-4|$, което е еквивалентно на

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 2x + 8 = 0 \\ x \leq -4 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x^2 = 0 \\ -4 < x < 4 \end{array} \right| \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 8 = 0 \\ x \geq 4 \end{array} \right|.$$

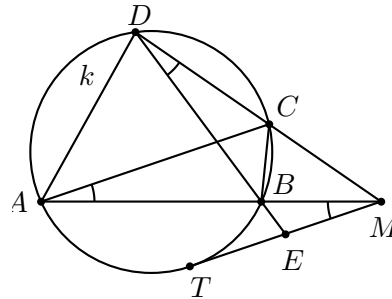
и има единствено решение $x = 0$ с което задачата е решена.

9.2 От $MT \parallel AC$ следва, че $\angle EMB = \angle BAC$. Но $\angle BAC = \angle BDC$ и следователно $\triangle EMB \sim \triangle EDM$, т.е.

$$\frac{EB}{EM} = \frac{EM}{ED} \Rightarrow EM^2 = EB \cdot ED.$$

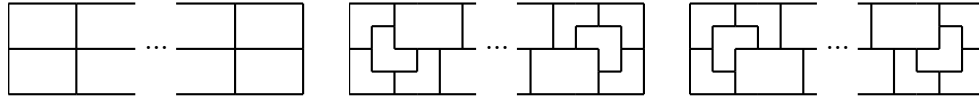
От друга страна, от свойството на секущите следва, че $ET^2 = EB \cdot ED$. Тогава $EM = ET$, което означава, че търсеното отношение е 1.

9.3. *Отговор.* Не! Да допуснем противното. Оцветяването трябва да съдържа точно три милиона черни клетки.



Да разрежем дъската на 1500^2 квадратчета 2×2 . Да допуснем, че всяко от тези квадратчета, което не граничи с ръба на дъската, съдържа най-много една черна клетка. Тогава имаме общо не повече от $1498^2 + 4 \times 1499 \times 4 < 3\,000\,000$ черни клетки: противоречие.

Да разгледаме едно вътрешно квадратче s , което съдържа поне две черни клетки. Нека S е правоъгълникът с размери 4×3000 , съставен от квадратчето s , всички други квадратчета 2×2 в същите два реда и всички квадратчета 2×2 в следващите два реда. Частта от дъската, която лежи извън S , можем да разрежем на хоризонтални правоъгълници 2×3 , а следователно и на триклетъчни ъгли. Правоъгълникът S , от друга страна, можем да разрежем на триклетъчни ъгли и правоъгълници 2×3 по следните три начина:



Лесно се вижда, че в поне един от тях разрязването ще може да се довърши по такъв начин, че двете черни клетки от s да попаднат в един и същ триклетъчен ъгъл; противоречие.

9.4. Да разгледаме уравнението по модул 7. Лявата страна може да дава остатъци 0, 2, 3, 4 и 5, а дясната 2 и 6. Следователно и двете страни дават остатък 2 при деление на 7, като това може да се случи само когато y се дели на 3. Нека $y = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, и да запишем уравнението във вида

$$x^3 - 4^{3k} = 2^{2k} + 5x - 28 \iff (x - 4^k)(x^2 + 4^k x + 4^{2k}) = 2^{3k} + 5x - 28.$$

Ако $x < 4^k$, лявата страна е отрицателна и значи $0 > 2^{3k} + 5x - 28 \geq 5x - 20$, откъдето $x < 4$. Непосредствена проверка за $x = 1, 2, 3$ не дава решения.

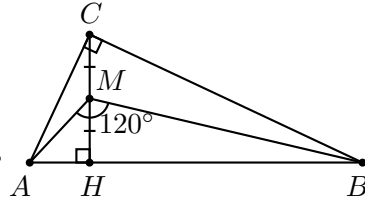
Ако $x > 4^k$, лявата страна е поне $x^2 + 4^k x + 4^{2k} \geq x^2 + 4x + 2^{4k} > 5x + 2^{3k} > 2^{3k} + 5x - 28$.

Остава случаят $x = 4^k$, при който получаваме $2^{3k} + 5 \cdot 4^k = 28$, което очевидно е изпълнено само при $k = 1$. Следователно $x = 4$ и $y = 3$ е единственото решение.

10.1. Ще използваме стандартните означения за $\triangle ABC$. Първо,

$$S_{ABC} = 2S_{ABM} = AM \cdot BM \cdot \sin 120^\circ$$

и следователно $AM \cdot BM = \frac{ab}{\sqrt{3}}$. От косинусова теорема за $\triangle ABM$ получаваме



$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos 120^\circ = AM^2 + BM^2 + AM \cdot BM$$

и следователно $AM \cdot BM =$

$$= AB^2 - (AH^2 + HM^2) - (BH^2 + HM^2) = 2AH \cdot BH - 2HM^2 = \frac{3}{2}h^2 = \frac{3a^2b^2}{2(a^2 + b^2)}.$$

Така достигахме до $\frac{ab}{\sqrt{3}} = \frac{3a^2b^2}{2(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\sqrt{3}\left(\frac{b}{a}\right) + 2 = 0$ и понеже $b \leq a$ следва, че $AC : BC = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{11}}{4}$.

10.2. Записваме второто уравнение във вида $(3^x - 1)(3^x + 4) = 0$ и тъй като $3^x + 4 > 0$, остава $3^x - 1 = 0$, т.е. $x = 0$. Следователно необходимо условие двете уравнения да са еквивалентни е $x = 0$ да е корен на първото уравнение. След заместване получаваме $a + |a - 5| = 5 \Leftrightarrow a \leq 5$. При $a \leq 5$ първото уравнение добива вида

$$a \cdot 5^{2x-1} + (5-a) \cdot 5^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow a \cdot (5^x)^2 + (5-a)5^x - 5 = 0 \Leftrightarrow (5^x - 1)(a5^x + 5) = 0.$$

Ако $a \geq 0$ или $a = -5$, то достигахме до единствено решение $x = 0$. Ако $a < 0$ и $a \neq -5$, получаваме две различни решения $x = 0$ и $x = 1 - \log_5(-a)$. Така окончателно търсените стойности на a са $[0, 5] \cup \{-5\}$.

10.3. Ще използваме следното помощно твърдение:

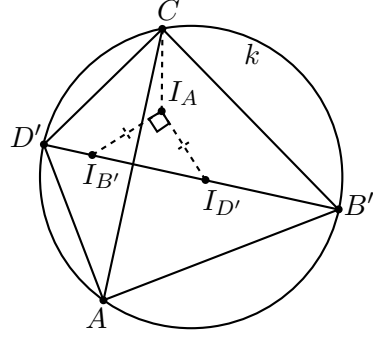
Лема. Нека XY е хорда в окръжност ω и точката Z обхожда дъгата $\widehat{XY}$. Тогава радиусът r_{XYZ} на вписаната в $\triangle XYZ$ окръжност достига максимума си, когато Z е среда на дъгата $\widehat{XY}$.

Доказателство. Ако I е центърът на вписаната в $\triangle XYZ$ окръжност, то $\sphericalangle XIY = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle XZY$ и следователно когато Z обхожда дъгата $\widehat{XY}$, I също обхожда някаква дъга с краища X и Y . При това е очевидно, че разстоянието от I до XY е максимално точно когато I съвпада със средата на тази дъга, т.е. когато Z е среда на $\widehat{XY}$.

От лемата следва, че

$$r_{ABC} + r_{ADC} \leq r_{AB'C} + r_{AD'C},$$

където $\widehat{B'}$ и $\widehat{D'}$ са средите на съответните дъги $\widehat{ABC}$ и $\widehat{ADC}$. Ако означим с $I_{D'}$ и $I_{B'}$ центровете на вписаните в $\triangle AB'C$ и $\triangle AD'C$ окръжности, то $r_{AB'C} + r_{AD'C} = I_{B'}I_{D'}$. От друга страна, ако означим с I_A центъра на вписаната в $\triangle B'CD'$ окръжност, то



$$\sphericalangle CI_AD' = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle CB'D' = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle CAD' = \sphericalangle CI_{B'}D$$

и аналогично $\sphericalangle CI_AB' = \sphericalangle CI_{D'}B'$, т.е. четириъгълниците $CI_AI_{B'}D$ и $CI_AI_{D'}B'$ са вписани. Тогава $\sphericalangle I_AI_{B'}I_{D'} = \sphericalangle I_ACD' = 45^\circ$ и $\sphericalangle I_AI_{D'}I_{B'} = \sphericalangle I_ACB' = 45^\circ$, т.е. $I_B'I_{D'} = 2r_{B'D'C}$. Прилагайки отново лемата, достигаме до извода, че стойността на израза $r_{ABC} + r_{ADC}$ е най-голяма точно тогава, когато $ABCD$ е квадрат. Аналогично и стойността на израза $r_{BAD} + r_{BCD}$ е най-голяма точно тогава, когато $ABCD$ е квадрат. Остава да пресметнем, че този случай $r_{ABC} + r_{ADC} = r_{BAD} + r_{BCD} = \sqrt{2} - 1$ и така окончателно търсената максимална стойност е $2\sqrt{2} - 2$.

Забележка. Втората част на горното решение (разглеждането на делтоида $AB'CD'$) може да се направи и метрично, като се въведе $\sphericalangle AB'D' = \alpha$ и се пресметне, че $r_{AB'C} + r_{AD'C} = \sin \alpha + \cos \alpha - 1 \leq \sqrt{2} - 1$. Също така може да се използва и известната Японска теорема за четириъгълника, която твърди, че ако $ABCD$ е вписан в окръжност четириъгълник, то $r_{ABC} + r_{ADC} = r_{BAD} + r_{BCD}$.

10.4. Ако $x \leq -4$, то лявата страна на уравнението е отрицателна, а дясната е винаги положителна. Случаите $x = -3, -2, -1$ и 0 се отхвърлят с директна проверка. Лесно се вижда, че $y = 0$ не води до решение, а при отрицателно y дясната страна не е цяло число за разлика от лявата. Тогава x и y са естествени числа и нататък решението следва решението на задача 9.4.

11.1. *Отговор:* а) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, б) $m = -1, 0, 1$. а) Тъй като $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$, даденото уравнение е еквивалентно на $4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$. Корените на квадратното уравнение $4y^2 - 4y - 3 = 0$ са $y_1 = \frac{3}{2} > 1$ и $y_2 = -\frac{1}{2}$. Следователно $\cos x = -\frac{1}{2}$, т.е. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

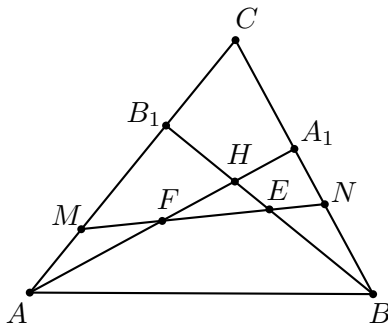
б) Както в подточка а) получаваме уравнението $4\cos^2 x - 4\cos x - 3(m+1) = 0$. Търсим за кои цели стойности на m уравнението $f(t) = 4t^2 - 4t -$

$3(m+1) = 0$ има корен в интервала $[-1, 1]$. Тъй като графиката на $f(t)$ е симетрична спрямо оста на симетрия $t = \frac{1}{2}$, то $f(y) = 0$ има решение в $[-1, 1]$ тогава и само тогава, когато $D \geq 0$ и $f(-1) \geq 0$. Сега от $D = 16(4 + 3m)$ и $f(-1) = 5 - 3m$ получаваме $m \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right]$. Целите числа в този интервал са $m = -1, 0, 1$.

11.2. Достатъчно е да докажем, че $S_{MOC} = S_{NOC}$. Имаме

$$S_{MOC} : S_{NOC} = \frac{\frac{CM}{AC} \cdot \frac{AC \cdot BH}{4}}{\frac{CN}{BC} \cdot \frac{BC \cdot AH}{4}} = \frac{CM}{CN} \cdot \frac{BH}{AH}.$$

От друга страна, по теоремата на Менелай за $\triangle CAA_1$ и $\triangle CBB_1$ получаваме съответно



$$\frac{AM}{CM} \cdot \frac{CN}{NA_1} \cdot \frac{A_1F}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{CN}{CM} = \frac{A_1N}{AM} \text{ и } \frac{B_1M}{CM} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BE}{EB_1} = 1 \Rightarrow \frac{CN}{CM} = \frac{BN}{B_1M}.$$

Следователно

$$\frac{CN}{CM} = \frac{A_1N + BN}{B_1M + AM} = \frac{A_1B}{AB_1} = \frac{BH}{AH},$$

откъдето следва, че $S_{MOC} = S_{NOC}$.

11.3. Ще докажем, че търсените числа са онези t , за които $(6, t) = 1$. Нека $(6, t) = d \neq 1$ и да изберем t числа, x от които са равни на 6. След извършване на разрешената операция сборът на числата се променя с $(t - x) - 5x = t - 6x$ и следователно се дели на d . Сега е ясно, че ако едно от числата е 5, а всички останали са 6, не можем да получим само шестцици.

Нека $(6, t) = 1$ и да изберем естествено число k , за което $kt \equiv 1 \pmod{6}$. Ще покажем как можем да увеличим дадено число $a \neq 6$ с единица, като всички останали числа остават непроменени. Нека B е подмножество на A с $t + 1$ числа (тъй като $t \neq 2014$ такова множество съществува) и $a \in B$. Да извършим k пъти разрешената операция върху всяко от t елементните подмножества на B . Всяко число от B се променя точно kt пъти. Тъй като $kt \equiv 1 \pmod{6}$, то горното е еквивалентно на еднократно прилагане на разрешената операция върху всички числа от B .

Като приложим 5 пъти операцията върху t -елементното множество $B \setminus \{a\}$, ще получим, че само a е увеличено с 1. Следователно всички числа могат да бъдат направени равни на 6.

11.4. Да допуснем, че съществува n , за което $f_k(n) < 2014$ и нека $f_k(n) = c$. Тогава

$$f(m + c) = n + f(m + c + 2014 - c),$$

т.е. при $x = m + c \geq c + 1$ имаме $f(x) = n + f(x + r)$ за $r = 2014 - c > 0$. При фиксирано x това означава, че

$$f(x) = n + f(x + r) = 2n + f(x + 2r) = \dots = sn + f(x + sn),$$

което е невъзможно, защото дясната част расте неограничено. Следователно $f_k(n) > 2014$ (при $f_k(n) = 2014$ получаваме $n = 0$, което е невъзможно). При $n = 1$ получаваме

$$f(m + f_k(1) - 2014 + 2014) = 1 + f(m + 2014)$$

и като положим $r = f_k(1) - 2014$ и $x = m + 2014$, намираме $f(x + r) = 1 + f(x)$ за всяко $x > 2014$. От това равенство с индукция лесно следва, че $m \geq 2015$ е изпълнено равенството $f(x + tr) = t + f(x)$. При $t = n$ и $x = 2015$ намираме $f(2015 + nr) = n + f(2015)$, а от уравнението от условието при $m = 1$ имаме $n + f(2015) = f(1 + f_k(n))$. Получихме равенството $f(2015 + nr) = f(1 + f_k(n))$ и ако допуснем, че $f(n_1) = f(n_2)$ за $n_1 \neq n_2$, от условието ще имаме

$$n_1 + f(m + 2014) = f(m + f_k(n_1)) = f(m + f_k(n_2)) = n_2 + f(m + 2014),$$

т.е. $n_1 = n_2$, което е противоречие. Следователно

$$(1) \quad f_k(n) = 2014 + nr$$

за всяко n . От (1) и от условието имаме

$$(2) \quad f(m + nr + 2014) = n + f(m + 2014).$$

Освен това $f_{k+1}(n) = f(f_k(n)) = f(2014 + nr)$, а от друга страна $f_{k+1}(n) = f_k(f(n)) = 2014 + f(n)r$, откъдето

$$(3) \quad f(2014 + nr) = 2014 + f(n)r.$$

От (3) при замяна на n с $n + 1$ и от (2) при $m = r$ намираме

$$(4) \quad f(nr + r + 2014) = rf(n + 1) + 2014 = n + f(r + 2014),$$

откъдето следва, че r дели $n + f(r + 2014) - 2014$ за всяко n . Това е възможно само при $r = 1$ и заместване в (4) дава $f(n + 1) = n + f(2015) - 2014 =$

$n+1+f(2015)-2015 = n+1+c$, т.е. $f(n) = n+c$ при $n \geq 2$ и $c = f(2015)-2015$. При $n = 1$ в (3) имаме $f(1) = f(2015) - 2014 = 1 + f(2015) - 2015 = 1 + c$. Следователно $f(n) = n + c$ за всяко n . Оттук и от (1) имаме $f_k(n) = n + kc = n + 2014$, т.е. $c = \frac{2014}{k}$. Директно се проверява, че когато k дели 2014, функцията $f(n) = n + c$ удовлетворява уравнението от условието. Когато k не дели 2014, такава функция не съществува.

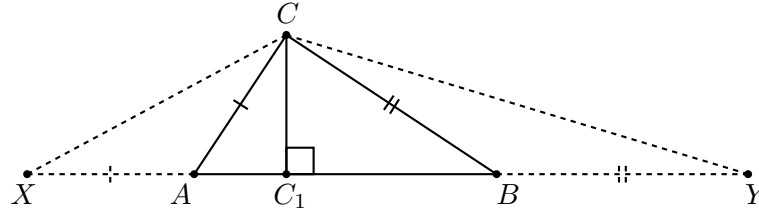
12.1. Да допуснем обратното, т.е. има три различни числа $x, y, z \in [0, 2\pi]$, за които $\sin x + \sin y = 2 \sin z$ и $\cos x + \cos y = 2 \cos z$. Като повдигнем тези равенства на квадрат и ги съберем почленно, получаваме, че $\cos(x - y) = \sin x \sin y + \cos x \cos y = 1$. Можем да считаме, че $x > y$. Понеже $x - y \in (0, 2\pi]$, то $x = 2\pi, y = 0$. Тогава $z = x$ или $z = y$, което е противоречие.

12.2. Понеже $P_{\triangle ACC_1} < P_{\triangle ABC}$ и $P_{\triangle BCC_1} < P_{\triangle ABC}$, то точката C_1 лежи на отсечката AB . Нека X и Y са такива точки върху правата AB , че A е между X и B , B е между A и Y , $AX = AC$ и $BY = BC$. Тогава условието приема вида

$$(XC_1 + CC_1)^2 + (YC_1 + CC_1)^2 = XY^2 \quad (*)$$

Като приложим двукратно питагоровата теорема и формулата за лице, получаваме

$$XC^2 + 4S_{\triangle XCC_1} + YC^2 + 4S_{\triangle YCC_1} = XY^2,$$



От косинусова теорема за $\triangle XYC$ и равенството

$$S_{\triangle XCC_1} + S_{\triangle YCC_1} = S_{\triangle XCY} = \frac{1}{2}XC.YC.\sin \sphericalangle XCY$$

следва, че $\cos \sphericalangle XCY + \sin \sphericalangle XCY = 0$. Тогава

$$135^\circ = \sphericalangle XCY = \sphericalangle XCA + \sphericalangle C + \sphericalangle YCB = \frac{\sphericalangle A}{2} + \sphericalangle C + \frac{\sphericalangle B}{2} = 90^\circ + \frac{\sphericalangle C}{2},$$

откъдето $\sphericalangle C = 90^\circ$.

Забележка. Друго решение се получава, като (*) се преобразува във вида

$$(XC_1 + YC_1 + CC_1)CC_1 = XC_1 \cdot YC_1.$$

От $\frac{CC_1}{XC_1} = \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle A}{2}$ и $\frac{CC_1}{YC_1} = \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle B}{2}$ следва, че $1 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\sphericalangle A}{2} + \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle B}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle A}{2} \operatorname{tg} \frac{\sphericalangle B}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\sphericalangle C}{2}$,
откъдето $\sphericalangle C = 90^\circ$.

12.3. Да забележим, че след привеждане под общ знаменател неравенството

$$\frac{a^3}{4a^2 + (b+c)^2} \geq \frac{a}{4} - \frac{b+c}{16}$$

е еквивалентно на очевидното $(b+c)(2a-b-c)^2 \geq 0$. Остава да съберем почленно това неравенство с другите три подобни.

12.4. Вж. Задача 11.4.

63. Национална олимпиада по математика, Областен кръг

9.1. Уравнението има смисъл при $x \leq 6$, а при $x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ то е еквивалентно на $6 - x = 36 - 12x^2 + x^4 \iff x^4 - 12x^2 + x + 30 = 0$. Чрез проверка на делители на 30 установяваме, че 2 е корен (това се вижда лесно и от условието) и разлагаме $x^4 - 12x^2 + x + 30 = (x-2)(x^3 + 2x^2 - 8x - 15)$. Уравнението $x^3 + 2x^2 - 8x - 15 = 0$ има корен -3 (който не е корен на нашето ирационално уравнение, защото $-3 < -\sqrt{6}$) и разлагаме

$$x^3 + 2x^2 - 8x - 15 = (x+3)(x^2 - x - 5).$$

Квадратното уравнение има корени $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$, като само $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ принадлежи на интервала $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$.

Окончателно, решенията са $x = 2$ и $x = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$.

9.2. В $\triangle AMC$ точка I се явява пресечна точка на симетралата на страната CM и ъглополовящата на $\angle CAM$ и следователно I лежи на описаната около $\triangle AMC$ окръжност и в частност $\angle ICM = \angle IAM = \frac{1}{2}\angle CAB$. Аналогично $\angle ICN = \frac{1}{2}\angle CBA$ и следователно $\angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 180^\circ - 2\angle MCN$. Но по условие M и N са вътрешни точки за AB и следователно $\angle ACB > \angle MCN$, т.е. $\angle MCN < 60^\circ$.

9.3. Очевидно един от простите делители е 2. Ако никое от числата n , $n+2$, $n+3$ и $n+5$ не се дели на 3, то двете нечетни са степени на различни нечетни прости числа, а тогава двете четни са степени на 2, с евентуално изключение на случая, когато $5|n$. Получаваме $n = 2$ и съответно $A = 2.4.5.7$, което има исканите свойства, или $n = 2^x \cdot 5$, $n+2 = 2^y > 2$ (и $n+5 = 5^z$), което означава, че $x = 1$ и тогава $n+2$ се дели на 3 (противоречие), или $n = 5^x$, $n+3 = 2^y > 2$ и $n+5 = 2 \cdot 5^z$, при това $x = 1$ или $z = 1$, като и двете водят до решението $n = 5$ ($A = 5.7.8.10$ има исканото свойство).

По-надолу ще използваме следните две добре известни лема.

Лема 1. Всички решения на уравнението $2^x - 3^y = 1$ в цели неотрицателни числа са $(x, y) = (1, 0)$ и $(2, 1)$.

Доказателство. Ако $y > 0$, по модул 3 заключаваме, че x е четно число, $x = 2x_1$, $x_1 \in \mathbb{N}$, и разлагаме $(2^{x_1} - 1)(2^{x_1} + 1) = 3^y$. Последното е възможно само при $2^{x_1} - 1 = 1$, т.е. $x_1 = 1$, $x = 2$ и $y = 1$.

Лема 2. Всички решения на уравнението $3^x - 2^y = 1$ в цели неотрицателни числа са $(x, y) = (1, 1)$ и $(2, 3)$.

Доказателство. Ако $y > 2$, по модул 4 заключаваме, че x е четно число, $x = 2x_1$, $x_1 \in \mathbb{N}$, и разлагаме $(3^{x_1} - 1)(3^{x_1} + 1) = 2^y$. Последното е възможно само при $3^{x_1} - 1 = 2$, т.е. $x_1 = 1$, $x = 2$ и $y = 3$.

Нека две от числата n , $n+2$, $n+3$ и $n+5$ се делят на 3. Точно едно от тези две числа е четно, а другото е степен на 3 (Защо?) и имаме два случая.

Случай 1. Ако двете кратни на 3 са n и $n+3$, то $n = 3 \cdot 2^u$ и $n+3 = 3^v$ или $n = 3^u$ и $n+3 = 3 \cdot 2^v$. Получаваме $3 = 3^v - 3 \cdot 2^u \iff 3^{v-1} - 2^u = 1$ или $3 = 3 \cdot 2^v - 3^u \iff 2^v - 3^{u-1} = 1$. Сега съответно на Лема 1 или Лема 2 намираме $n = 6$ ($A = 6.8.9.11$ има исканото свойство), $n = 24$ ($A = 24.26.27.29$ не дава решение), $n = 3$ ($A = 3.5.6.8$ има исканото свойство) и $n = 9$ ($A = 9.11.12.14$ не дава решение).

Случай 2. Ако двете кратни на 3 са $n+2$ и $n+5$, разсъждаваме аналогично и получаваме още едно решение $n = 4$ ($A = 4.6.7.9$ има исканото свойство).

9.4. а) Отговор: Не. Да разгледаме едно покриване на S със s окръжности. Тогава върху окръжността с най-много точки от S има поне $\frac{2014}{c}$ точки и за да покрием тези точки с прави, са ни необходими поне $\frac{2014}{2c} = \frac{c \cdot 1007}{c}$ прави (защото всяка права покрива най-много две от точките). Следователно $\ell \geq \frac{1007}{c} \iff c\ell \geq 1007$, докато за дадените стойности на c и ℓ имаме $c\ell = 15.67 = 1005$.

б) Отговор: Да. Да разгледаме 19 успоредни прави и 53 окръжности, всяка от които пресича всяка от деветнадесетте прави в по 2 различни точки (и никои две окръжности не се пресичат върху правите). Получаваме мно-

жество S от общо $19.53.2 = 2014$ точки, за което ще докажем, че има исканото свойство. Да допуснем, че $s < 30$. Тогава ще има окръжност, върху която лежат повече от 20 точки и някоя от 19-те успоредни трябва да пресича тази окръжност поне в 3 точки, противоречие. Аналогично, ако допуснем, че $\ell < 10$, то в съответното покриване има права на която лежат повече от 60 точки и тогава върху някоя от 30-те окръжности от конструкцията има поне 3 точки от тази права, пак противоречие.

10.1. От второто неравенство получаваме $2^x \geq 3^y + 1$ и следователно $4^x \geq 3^{2y} + 2 \cdot 3^y + 1$. От друга страна, от първото неравенство $4^x \leq a - 9^y$ и така достигаем до неравенството

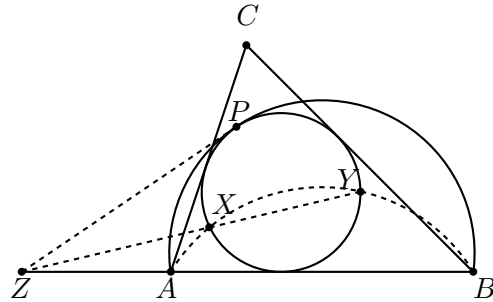
$$2 \cdot (3^y)^2 + 2 \cdot 3^y + 1 - a \leq 0.$$

Тъй като $3^y > 0$ за всяко y , следва, че $a \geq 2 \cdot (3^y)^2 + 2 \cdot 3^y + 1 > 1$. Ще докажем, че $a > 1$ е и достатъчно условие дадената система да има решение. Действително, ако $a > 1$, $3^y = \frac{-1 + \sqrt{2a-1}}{2}$, $2^x = 3^y + 1 = \frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}$, то дадената система неравенства очевидно се удовлетворява и така достигаем до една възможна двойка решения

$$x = \log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2} \right), \quad y = \log_3 \left(\frac{-1 + \sqrt{2a-1}}{2} \right).$$

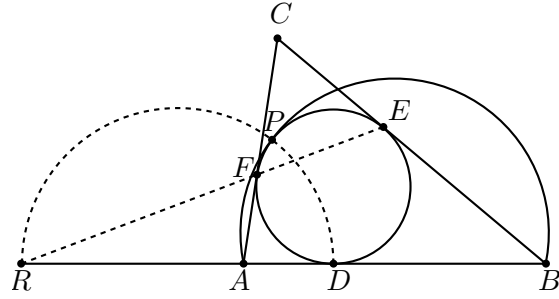
Окончателно, търсените стойности за a са в интервала $(1, +\infty)$.

10.2. Построяваме вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k нека X е произволна точка от нея. Построяваме описаната около $\triangle ABX$ окръжност и нека тя пресича за втори път k в точка Y , а правата XY пресича правата AB в точка Z . През Z построяваме допирателна към k , която пресича k в точка P . (В случай, че $XY \parallel AB$, $\triangle ABC$ е равнобедрен и построяваме точка P като втората пресечна точка на симетралата на AB с k .)



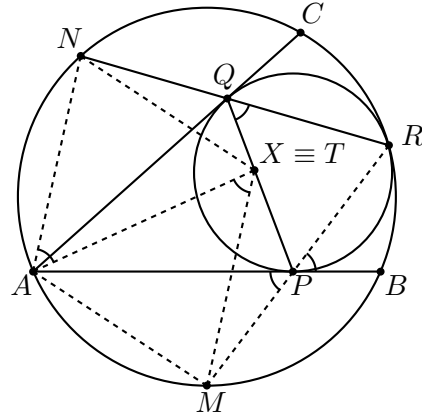
Ще докажем, че описаната около $\triangle ABP$ окръжност ω е търсената. Наистина, от свойството на секущите имаме $ZP^2 = ZX \cdot ZY = ZA \cdot ZB$ и следователно $\triangle ZPA \sim \triangle ZBP$, т.е. $\angle ZPA = \angle ZBP$ и ω се допира вътрешно до k .

Забележка. Задачата има няколко възможни подхода за решение, включително и с инверсия. Един такъв е илюстриран на фигурата вдясно. Построяваме вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k и нека D , E и F са допирните точки на k със страните AB , BC и CA съответно.



Нека $\triangle ABC$ е неравнобедрен и правата EF пресича правата AB в точка R . Построяваме окръжност с диаметър RD , която пресича k за втори път в точка P . Оказва се, че описаната около $\triangle ABP$ окръжност е търсената (Защо?). Едно много характерно, но нетривиално за доказателство свойство на тази конфигурация е, че PD разполага височината от върха C в $\triangle ABC$. Това ни води и до нова възможност за построение на точката P .

10.3. Нека описаните окръжности около $\triangle AMP$ и $\triangle ANQ$ се пресичат за втори път точка X . Тогава $\angle AXP + \angle AXQ = (180^\circ - \angle AMP) + (180^\circ - \angle ANQ) = 180^\circ$ и следователно $X \in PQ$. Нещо повече, $\angle AXM = \angle APM = \angle BPR = \angle PQR = \angle XAN$ и следователно $MX \parallel AN$. Аналогично $NX \parallel AM$, т.е. $AMXN$ е успоредник и $X \equiv T$. С това доказателството е завършено.



10.4. Виж задача 9.4.

11.1. Полагаме: $y = 2^x$ и разглеждаме функцията $f(y) = 2y^2 - (a+8)y + a^2 + 4$. За да има уравнението от условието един положителен и един отрицателен корен, то $f(y) = 0$ трябва да има по един корен във всеки от интервалите $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. Понеже $f(0) = a^2 + 4 > 0$, то достатъчно е да е изпълнено $f(1) < 0$. Това е еквивалентно на $a^2 - a - 2 < 0$, откъдето $a \in (-1, 2)$.

11.2. Ще използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$. Нека CL , $L \in AB$, е ъглополовящата на $\angle ACB$, а P и Q са съответно средите на AB и CL . Тъй като $a^2 + b^2 = bc < b(a+b) = ab + b^2$, то $a < b$, което означава, че $AL > BL$, т.е. точката P е между A и L . Следователно $PL = \frac{c}{2} - \frac{ca}{a+b} =$

$\frac{c(b-a)}{2(b+a)}$. Нека правата PQ пресича страната BC в точка X . От теоремата на Менелай за $\triangle LBC$ и правата PQ имаме

$$\frac{BP}{PL} \cdot \frac{LQ}{QC} \cdot \frac{CX}{XB} = 1,$$

откъдето $\frac{XB}{CX} = \frac{BP}{PL} = \frac{b+a}{b-a}$. От $CX + XB = a$ намираме $CX = \frac{a(b-a)}{2b}$.

Ако T е допирната точка на вписаната окръжност със страната BC , то $CT = \frac{a+b-c}{2}$. Равенството $CT = CX$ е еквивалентно на

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{a(b-a)}{2b} \iff a^2 + b^2 = bc.$$

11.3. Нека $\frac{m}{n}$ е рационален корен на

$$f(x) = 2(p+1)x^3 - 2(p-1)x^2 - (p+3)x + 3p-1 = 0,$$

където $(m, n) = 1$, $m > 0$, $n \neq 0$ и m дели $3p-1$. Тогава $f(x) = (mx-n)g(x)$, където $g(x)$ е полином с цели коефициенти. Тъй като $f(1) = 2p$ и $f(-1) = 2$, то $m-n$ дели $2p$, а $m+n$ дели 2 . Следователно $m-n = \pm 1, \pm 2, \pm p, \pm 2p$, $m+n = \pm 1, \pm 2$, като $m-n$ и $m+n$ са от една и съща четност.

Ако $m-n = x$ и $m+n = y$, то $m = \frac{x+y}{2}$ и $n = \frac{y-x}{2}$ за $x = \pm 1, \pm 2, \pm p, \pm 2p$, $y = \pm 1, \pm 2$. От $m, n \neq 0$ следва, че $x \neq \pm 1, \pm 2$. Остават случаите $x = \pm p, y = \pm 1$ и $x = \pm 2p, y = \pm 2$. От $m > 0$ следва, че $x = p, y = \pm 1$ или $x = 2p, y = \pm 2$. Възможните стойности на m са $m = \frac{p \pm 1}{2}$ и $m = p \pm 1$, като във всички случаи $\frac{p \pm 1}{2}$ дели $3p-1$. От $3p-1 = 6 \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right) + 2 = 6 \cdot \left(\frac{p+1}{2}\right) - 4$, откъдето $\frac{p-1}{2}$ дели 2 (което е невъзможно при $p \geq 5$) или $\frac{p+1}{2}$ дели 4 (което е възможно само при $p = 7$). Директно се проверява, че при $p = 7$ съответните стойности на m и n не дават корен на уравнението. Следователно такава p не съществува.

11.4. Ако X е сборът на числата върху всички пътища, а Y е броят на жителите на всички градове, то от условието имаме $X = 2Y$. Нека x е най-малкото общо кратно на различните числа a и b , като $a > b$. Тогава $x \geq a$ и $x \geq 2b$, откъдето $3x \geq 2(a+b)$. Събираме съответните неравенства за всеки

от пътищата в държавата и като използваме, че от всеки град излизат точно три пътя получаваме, че $3X \geq 6Y$, т.е. $X \geq 2Y$. Това означава, че за всеки път е изпълнено $3x = 2(a + b)$, т.е. $x = a$ и $x = 2b$ или $a = 2b$.

Получихме, че ако два града са свързани с път, то жителите на единия са два пъти повече от жителите на другия. Това означава, че ако от град с a жители може да се стигне до град с $b < a$ жители, минавайки по t пътя, то $a = 2^k b$, където t и k имат една и съща четност. Следователно в държавата няма затворен маршрут с нечетен брой пътища. Тогава градовете могат да се разделят в две групи без пътища във всяка от тях (това следва от добре известния факт, че граф без нечетни цикли е двуделен).

12.1. Да забележим, че ако (x, y) е решение, то и (y, x) също е решение. Следователно ако системата има единствено решение (x_0, y_0) , то $x_0 = y_0$. При $x = y$ системата е еквивалентна на квадратното неравенство $x^2 + (a-1)x + 1 \leq 0$. Това квадратно неравенство има единствено решение, ако дискриминантата му $a^2 - 2a - 3$ е равна на нула, т.е. $a = 3, -1$. Обратно, при $a = 3$ като съберем двете неравенства на системата, получаваме $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 0$, т.е. $x = y = -1$ е единственото решение на системата. При $a = -1$ събирането на двете неравенства на системата дава $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 0$, т.е. $x = y = 1$ е единственото решение на системата. Търсените стойности са $a = 3, -1$.

12.2. Нека $A_1(x_1, x_1^2)$, $A_2(x_2, x_2^2)$, $A_3(x_3, x_3^2)$ са върхове на равнобедрен триъгълник. Можем да считаме, че $x_1 < 0 \leq x_2 \leq x_3$. Нека α е острият ъгъл между правата A_2A_3 и абсцисната ос, а β е острият ъгъл между правата A_2A_3 и тази ос. Тогава

$$\alpha + \beta = 120^\circ, \quad \tan \alpha = \frac{x_3^2 - x_2^2}{x_3 - x_2} = x_3 + x_2, \quad \tan \beta = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2 - x_1} = -x_1 - x_2,$$

откъдето $-\sqrt{3} = \tan 120^\circ = \frac{x_3 - x_1}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$. Понеже

$$0 < \tan \alpha \tan \beta - 1 = -\frac{2 \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)} = \frac{2}{2 \cos(\alpha - \beta) - 1} \geq 2,$$

то $A_1A_3 \geq x_3 - x_1 \geq 2\sqrt{3}$, като равенство се достига само при $x_3 = -x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = 0$.

Забележка. Всъщност доказахме, че ако A_1, A_2, A_3 са три точки върху параболата с растящи абциси и $\angle A_1A_2A_3 = 60^\circ$, то дължината на проекцията на A_1A_3 върху абсцисната ос е поне $2\sqrt{3}$.

12.3. От свойството на ъглополовящите и неравенството на Птолемей имаме, че

$$\begin{aligned}\frac{1}{A_X C} + \frac{1}{B_X C} &= \frac{AX + CX}{AC \cdot CX} + \frac{BX + CX}{BC \cdot CX} = \frac{AX \cdot BC + BX \cdot AC + CX(AC + BC)}{AC \cdot BC \cdot CX} \\ &\geq \frac{CX \cdot AB + CX(AC + BC)}{AC \cdot BC \cdot CX} = \frac{AB + AC + BC}{AC \cdot BC}.\end{aligned}$$

Равенство се достига само когато X лежи на дъгата от описаната около $\triangle ABC$ окръжност, която не съдържа C .

Забележка. Ако I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, то

$$\frac{1}{A_X C} + \frac{1}{B_X C} = \frac{S_{CIA_X} + S_{CIB_X}}{S_{CA_X B_X}} \cdot \frac{AB + AC + BC}{AC \cdot BC}.$$

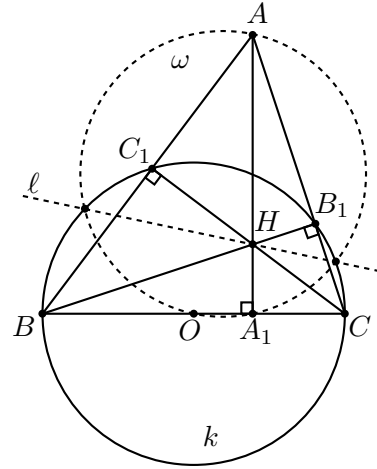
Оттук и доказаното следва, че $A_X B_X$ пресича отсечката CI , като $I \in A_X B_X$ само когато $X \in s$.

12.4. Виж задача 11.4.

63. Национална олимпиада по математика, Национален кръг

1. Първи начин. Нека O е център на k и ω е окръжността с диаметър AO . Нека още AA_1 и BB_1 са височини в $\triangle ABC$ и H е неговият ортоцентър. Тогава степента на H относно ω е на $AH \cdot HA_1$, а степента на H относно k е на $BH \cdot HB_1$. Понеже тези степени са равни, H лежи на радикалната ос l на k и ω . Обратно, лесно се вижда, че всяка точка от l е ортоцентър на някой триъгълник от искания вид.

Втори начин. Нека $AB \cap k = B'$, $AC \cap k = C'$ и $BC' \cap B'C = H$. Тогава H е ортоцентърът на $\triangle ABC$ и H лежи на полярата l на A относно окръжността k (Защо?). Обратно, лесно се вижда, че всяка точка от l е ортоцентър на някой триъгълник от искания вид.



2. Да номерираме стълбовете на дъската с $1, 2, \dots, m$, а редовете с $1, 2, \dots, n$. Нека (i, j) е клетката в i -тия стълб и j -тия ред.

Да разгледаме едно произволно шарено оцветяване S . Ще покажем, че или всеки ред в S съдържа само два различни цвята, или всеки стълб в S съдържа само два различни цвята.

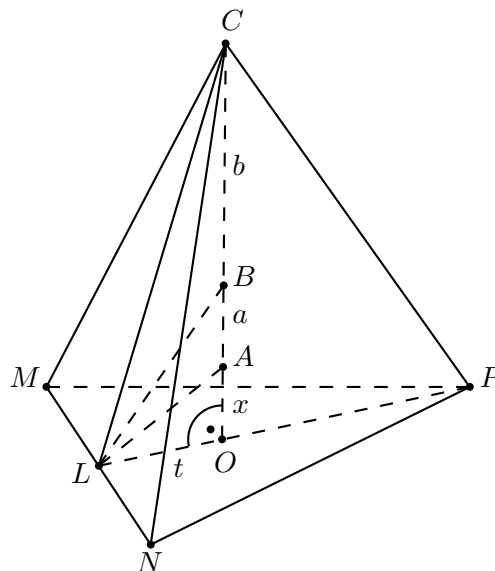
Да допуснем, че S не съдържа правоъгълник 1×3 с хоризонтална подълга страна, който съдържа три различни цвята. Тогава във всеки ред в S се редуват два различни цвята, както се искаше.

Нека сега клетките (u, v) , $(u + 1, v)$ и $(u + 2, v)$ са оцветени съответно в трите различни цвята a , b и c . Последователно получаваме, че $(u + 1, v + 1)$ е оцветена в четвъртия цвят d , $(u, v + 1)$ – в c , $(u + 2, v + 1)$ – в a , $(u + 1, v + 2)$ – в b , $(u, v + 2)$ – в a , $(u + 2, v + 1)$ – в c , и т.н. Аналогично получаваме и че $(u + 1, v - 1)$ е оцветена в цвят d , $(u, v - 1)$ – в c , $(u + 2, v - 1)$ – в a , и т.н. В крайна сметка, оказва се, че стълб u съдържа само цветовете a и c , стълб $u + 1$ съдържа само цветовете b и d , и стълб $u + 2$ съдържа само цветовете a и c . Сега вече лесно се вижда, че всеки стълб, чийто номер има същата четност като u , съдържа само цветовете a и c , и всеки стълб, чийто номер има противоположната четност – само b и d , както се искаше.

И така, във всяко шарено оцветяване или във всеки ред, или във всеки стълб се редуват два различни цвята.

Броят на шарените оцветявания, в които във всеки стълб с нечетен номер се редуват два цвята, а във всеки стълб с четен номер – другите два, е равен на $\binom{4}{2} \times 2^m$. Броят на шарените оцветявания, в които във всеки ред с нечетен номер се редуват два цвята, а във всеки ред с четен номер – другите два, е равен на $\binom{4}{2} \times 2^n$. Тези оцветявания, в които имаме редукване както във всеки ред, така и във всеки стълб (с други думи, тези оцветявания, в които цветът на клетката (i, j) зависи само от четностите на i и j) са броени и в двата случая. Следователно, общият брой на шарените оцветявания е равен на $6 \times (2^m + 2^n) - 24$.

3. Първи начин. Нека ℓ е произволна права и A , B и C са три точки от нея взети в този ред, такива, че ако $AB = a$, $BC = b$, то $b > 2a$. Ще докажем, че съществува правилна триъгълна пирамида $MNPC$, такава че B е център на вписаната сфера в $MNPC$, а A е център на вписаната сфера в $MNPB$. Нека точка O е от правата ℓ (A е между O и B) и $OA = x \in (0, a)$. Построяваме права през O , перпендикулярна на ℓ и върху нея ще докажем съществуването на точка L , такава че BL е ъглополовяща на $\angle CLO$, а AL е ъглополовяща на $\angle BLO$. Нека $OL = t$. Тогава



$$\frac{t^2}{t^2 + (a+x)^2} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow t^2 = \frac{x^2(a+x)}{(a-x)}.$$

От друга страна, имаме $\frac{t^2}{t^2 + (x+a+b)^2} = \frac{(a+x)^2}{b^2}$ и след заместване на t^2 получаваме $f(x) = 2bx^2 - a^2x - a^2b - a^3 = 0$. Но $f(0) = -a^2b - a^3 < 0$, $f(a) = a^2(b - 2a) > 0$ и следователно $\exists x_0 \in (0, a)$, такова че $f(x_0) = 0$. С това е доказано и съществуването на точка L с исканите свойства. Остава да построим точките M , N и P по такъв начин, че $\triangle MNP$ е равнобедрен с център O и среда L на страната MN .

Ако означим с n_A , n_B , n_C , n_M , n_N и n_P числата записани в съответните точки от пространството, то от условието следва, че $n_M n_N n_P n_B = n_A$ и $n_M n_N n_P n_C = n_B$, т.е. $n_B^2 = n_A n_C$.

Сега нека изберем произволни точки A и B и върху правата AB да построим точки C и D такива, че $DC > 2CA$ и $DC > 2CB$. От доказаното по-горе следва, че $n_C^2 = n_A n_D = n_B n_D$, т.е. $n_A = n_B$. Така стигаме до извода, че във всяка точка е записано едно и също естествено число, което от условието лесно следва, че може да бъде само 1-ца.

Втори начин. Да разгледаме две произволни точки X и Y и записаните върху тях числа x и y . Върху правата XY да изберем точки I и J , за които $XY = YI = IJ$. Нека X' е върху правата XY и $XI = JX'$. Да разгледаме симетралната равнина λ на отсечката IJ и нека $ABCX$ и $ABCX'$

са две еднакви правилни триъгълни пирамиди с основа ABC в равнината λ и центрове на вписаните сфери съответно в I и J . Тъй като $n_A n_B n_C n_X = n_I$ и $n_A n_B n_C n_{X'} = n_J$, то $n_X = \frac{n_{X'} \cdot n_I}{n_J}$.

Сега да започнем да движим равнината λ към точката I и да разгледаме сферите S_I и S_J с центрове съответно I и J , които се допират до λ . Нека $A_1 B_1 C_1 X'$ е правилната триъгълна пирамида с основа $A_1 B_1 C_1$ в равнината λ и вписана сфера S_J . Правилната пирамида с основа $A_1 B_1 C_1$ и вписана сфера S_I ще има връх X_1 , като според доказаното по-горе $n_{X_1} = \frac{n_{X'} \cdot n_I}{n_J} = n_X$.

Когато λ се приближава до I радиусът на сферата S_I ще клони към нула, докато $\triangle A_1 B_1 C_1$ ще се приближава до триъгълник, който е основа на правилна триъгълна пирамида с връх X' и вписана сфера с център J и радиус IJ .

Това означава, че точката X_1 ще се приближава към I . От съображения за непрекъснатост върху всички вътрешни точки от отсечката XI (заедно с точката X) е записано едно и също число.

Следователно $x = y$ и значи всички записани числа са равни.

4. Ако $p = 3$, от $q^2 | 3^6 - 1 = 728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11$ следва, че $q = 2$ и това дава решение на задачата. Нека $p \neq 3$. Тъй като $(q + 1, q^2 - q + 1) = 1$ или 3, заключаваме, че $p^2 | q + 1$ или $p^2 | q^2 - q + 1$, като и в двата случая $p < q$. Ако $p + 1 = q$ получаваме решението $p = 2, q = 3$. Оттук нататък ще считаме, че $q \geq p + 2$.

Да разгледаме сега условието $q^2 | p^6 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)$. Тъй като $(q, p - 1) = (q, p + 1) = 1$, имаме $q^2 | (p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)$. Освен това $(p^2 - p + 1, p^2 + p + 1) = (p^2 + p + 1, 2p) = 1$ и следователно $q^2 | p^2 - p + 1$ или $q^2 | p^2 + p + 1$. Първото е невъзможно поради $p^2 - p + 1 < p^2 < q^2$, а от второто следва, че $(p + 2)^2 \leq q^2 \leq p^2 + p + 1$, т.е. $3p + 3 < 0$, противоречие.

5. Ако положим $g(x) = 1/f(x)$, то $g : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и даденото условие се преобразува във вида

$$(*) \quad g(x + y)g(x)g(y) = g(xy)(g(x) + g(y)).$$

Нека $f(1) = c > 0$, т.е. $g(1) = \frac{1}{c}$. От $(*)$ получаваме $g(x + 1) = cg(x) + 1$ и следователно $g(2) = 2, g(3) = 2c + 1, g(4) = 2c^2 + c + 1, g(5) = 2c^3 + c^2 + c + 1, g(6) = 2c^4 + c^3 + c^2 + c + 1$. От друга страна, полагайки $x = 2, y = 3$ в $(*)$ получаваме

$$g(5)g(2)g(3) = g(6)(g(2) + g(3)),$$

което ни води до уравнението

$$4c^5 - 3c^3 - c^2 - c + 1 = 0 \Leftrightarrow (c - 1)(c + 1)(2c - 1)(2c^2 + 2c + 1) = 0.$$

Следователно $c = 1$ или $\frac{1}{2}$.

Случай 1. Ако $c = 1$, то $g(x+1) = g(x) + 1$. Оттук с индукция $g(n) = n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и, нещо повече, $g(x+n) = g(x) + n$ за всяко фиксирано $x \in \mathbb{Q}^+$ и всяко $n \in \mathbb{N}$.

Сега от (*) при $y = n$ получаваме

$$(g(x) + n)g(x)n = g(nx)(g(x) + n),$$

т.е. $g(nx) = ng(x)$. Оттук при $x = p/q$ и $n = q$, където $p, q \in \mathbb{N}$, получаваме $g(x) = x$, за всяко $x \in \mathbb{Q}^+$, т.е. $f(x) = 1/x$, за всяко $x \in \mathbb{Q}^+$.

Случай 2. Ако $c = \frac{1}{2}$, то $g(x+1) = \frac{1}{2}g(x) + 1$. Оттук

$$g(n) = 2 \quad \text{и} \quad g(x+n) - 2 = \frac{g(x) - 2}{2^n}, \quad x \in \mathbb{Q}^+, \quad n \in \mathbb{N};$$

Сега от (*) при $y = n$ получаваме

$$2g(x+n)g(x) = g(nx)(g(x) + 2),$$

и остава да съобразим, че тези равенства ни водят до $g(x) = 2$, за всяко $x \in \mathbb{Q}^+$, т.е. $f \equiv 1/2$.

Така окончателно задачата има две решения $f \equiv \frac{1}{2}$ и $f \equiv \frac{1}{x}$.

Забележка. Може да се докаже (значително по-трудно), че всички функции $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, които изпълняват даденото условие са $f \equiv 0$, $f \equiv \frac{1}{2}$ и $f \equiv \frac{1}{x}$.

6. Нека I_e, I_f, J_e и J_f са центровете на вписаните окръжности на $\triangle ABE$, $\triangle ABF$, $\triangle CDE$ и $\triangle CDF$, съответно. Нека $P = AI_e \cap BI_f$, $Q = AI_f \cap BI_e$, $U = CJ_e \cap DJ_f$ и $V = CJ_f \cap DJ_e$ са центровете на външнописаната окръжност на $\triangle ABC$ срещу A , външнописаната окръжност на $\triangle ABD$ срещу B , вписаната окръжност на $\triangle ACD$ и вписаната окръжност на $\triangle BCD$, съответно.

Имаме $\angle APB = \angle AQB$; следователно, четириъгълникът $ABPQ$ е вписан. Аналогично, вписан е и $CDUV$.

Имаме $\angle APB = \angle UCV$, $\angle AQB = \angle UDV$, $\angle APQ = \angle ABQ = \angle UCD$ и $\angle BQP = \angle BAP = \angle VDC$. Следователно, фигурите $ABPQ$ и $UVCD$ са подобни и еднакво ориентирани. Нека T е техният център на подобие. (С

други думи, нека T е центърът на единствената въртяща хомотетия, която изобразява първата фигура във втората.)

Имаме $\triangle TAQ \sim \triangle TUD$; следователно, $\triangle TAU \sim \triangle TQD$ и $\sphericalangle ATQ = \sphericalangle(AU, QD) = \sphericalangle AI_e Q$. По този начин, T лежи върху описаната окръжност на $\triangle AI_e Q$. Аналогично, T лежи и върху описаните окръжности на $\triangle BI_e P$, $\triangle CJ_e V$ и $\triangle DJ_e U$.

Имаме, в такъв случай, $\sphericalangle ATB = \sphericalangle ATI_e + \sphericalangle I_e TB = \sphericalangle AQB + \sphericalangle APB = \frac{1}{2}\widehat{AB} + \frac{1}{2}\widehat{AB} = \widehat{AB}$, откъдето T лежи върху k .

Нека точката $T' \in I_f I_e^\rightarrow$ е такава, че $I_f A \cdot I_f Q = I_f I_e \cdot I_f T' = I_f B \cdot I_f P$. Тогава T' е обща точка за описаните окръжности на $\triangle AI_e Q$ и $\triangle BI_e P$, различна от I_e ; следователно, $T' \equiv T$ и $T \in I_e I_f$.

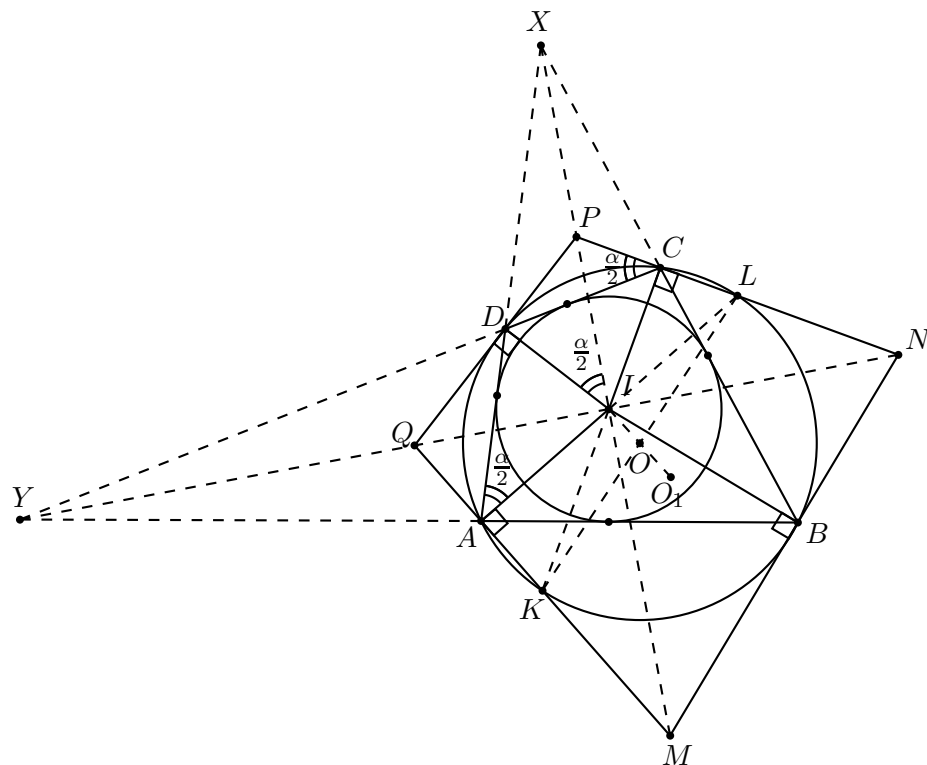
Аналогично, $T \in J_e J_f$, с което задача е решена.

Контролно за определяне на отбора за БОМ 2014

1. Тъй като $|a_k - b_k| \leq |a_k - k| + |k - b_k| = d + |b_k - k|$, то е достатъчно да докажем, че $|b_k - k| \leq d$ за всяко $k = 1, 2, \dots, 2014$. Наистина, ако например $b_k < k - d$, то лесно се вижда, че числата $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2014}$ са по-големи от b_k , което е противоречие, понеже в редицата има най-много $2014 - k$ числа, по-големи от b_k . Аналогично, ако $b_k > k + d$, то числата $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1$ са по-малки от b_k , което отново е противоречие. Така окончателно $|a_k - b_k| \leq 2d$ за всяко $k = 1, 2, \dots, 2014$.

2. Ако $d_1 = n - k$, то от $n - k|n^2 = n^2 - k^2 + k^2$ следва, че $n - k|k^2$ откъдето $k^2 + k - n \geq 0$, т.е. $k \geq (-1 + \sqrt{4n+1})/2$. Аналогично за $d_2 = n + s$ следва, че $s^2 - s - n \geq 0$, $s \geq (1 + \sqrt{4n+1})/2$. Тогава $d_2 - d_1 = s + k \geq \sqrt{4n+1}$ като равенство се достига точно тогава, когато $n = k(k+1)$ за някое $k \in \mathbb{N}$.

3. *Първи начин.* Нека $MNPQ$ е четириъгълникът, образуван от външните ъглополовящи на $ABCD$, както е показано на чертежа по-долу. От $\sphericalangle NMP + \sphericalangle NPQ = (\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}) + (\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}) = 180^\circ$ следва, че $MNPQ$ е вписан в окръжност. Нека центърът на тази окръжност е O_1 , правите AD и BC се пресичат в точка X , а правите AB и CD се пресичат в точка Y (ако $ABCD$ е трапец, то твърдението е тривиално).



Лесно се вижда, че $\angle DAI = \angle PCD = \angle PID = \frac{\alpha}{2}$ и следователно PI се допира до описаната окръжност за $\triangle ADI$. Аналогично QI се допира до същата окръжност, т.е. точките P , I и Q лежат на една права, която се явява радикална ос за окръжностите описани около $\triangle ADI$ и $\triangle BCI$. От друга страна, $XA.XD = XB.XC$ и следователно точка X също лежи на тази радикална ос. Аналогично точките N , I , Q и Y лежат на една права. Нещо повече, X и Y лежат на радикалната ос на описаните около $ABCD$ и I окръжности (I разглеждаме като точка-окръжност) и следователно $OI \perp XY$. От друга страна, четириъгълникът $MBCP$ е вписан в окръжност, т.е. $XM.XP = XB.XC$ и следователно X лежи на радикалната ос за описаните около $ABCD$ и $MNPQ$ окръжности. Аналогично и Y лежи на тази радикална ос и следователно $O_1O \perp XY$, т.е. I , O и O_1 лежат на една права.

Втори начин. След като сме доказали, че диагоналите MP и NQ на четириъгълника $MNPQ$ се пресичат в точка I е достатъчно да съобразим, че те са перпендикулярни. Но тогава описаната около $ABCD$ окръжност се явява окръжност на осемте точки за вписания четириъгълник $ABCD$,

която минава през средите на страните на четириъгълника. Ще докажем, че нейният център O е среда на IO_1 . Действително, ако K и L са средите на MQ и NP съответно, то лесно се вижда, че точките A, I и L лежат на една права, точките C, I и K лежат на една права и IKO_1L е успоредник, т.е. O като среда на KL се явява и среда на IO_1 .

4. Ясно е, че ако стълбовете на $n \times 2^n$ таблица са различни, то това са всички двоични вектори с дължина n . По условие за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ имаме $t = \sum_{j=1}^{2^n} ja_{ij}$. Да означим с v_j броят на единиците в стълб j . Тогава

$$nt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2^n} ja_{ij} = \sum_{k=1}^{2^n} k.v_k$$

Най-малката стойност на $\sum_{k=1}^{2^n} k.v_k$ се достига когато $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_{2^n}$.

а) При $n = 3$ и $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_8$ имаме $\sum_{k=1}^{2^n} k.v_k = 1.3 + (2 + 3 + 4).2 + (5 + 6 + 7).1 + 8.0 = 39$. Следователно $3t \geq 39$, т.е. $t \geq 13$. Показаната таблица е пример, че стойността $t = 13$ се достига.

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

б) Аналогично на а) намираме, че $t \geq \frac{1.4 + 14.3 + 51.2 + 54.1 + 16.0}{4} = \frac{202}{4}$, т.е. $t \geq 51$. Долната таблица е пример за 4×16 таблица с $t = 51$

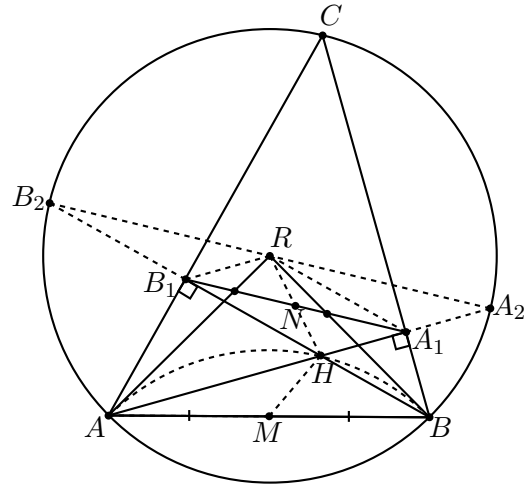
$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

5. Очевидно $f(n) = n$ е решение на задачата и ще докажем, че то е единственото. От условието следва, че $m^2 + f(n^k) \leq mf(m) + n^k$, т.е. $m(f(m) - m) \geq f(n^2) - n^2$ за всеки $m, n \in \mathbb{N}$. В частност, при $n = 1$, получаваме, че $f(m) \geq m$ за всяко $m \in \mathbb{N}$. От друга страна, ако в условието заместим m с $f(n^k)$, то получаваме, че $f(n^k) \mid n^k$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Но както вече доказахме $f(n^k) \geq n^k$ и следователно $f(n^k) = n^k$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Така условието добива вида

$$m^2 + n^k \mid mf(m) + n^k \text{ за всяко } m, n \in \mathbb{N}$$

откъдето следва, че $m^2 + n^k \mid (mf(m) + n^k) - (m^2 + n^k) = m(f(m) - m)$ за всеки $m, n \in \mathbb{N}$. Последното е възможно единствено в случая, когато $f(n) = n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

6. а) От $\sphericalangle RAA_1 = \sphericalangle B_1A_1A = \sphericalangle B_1BA$ и $\sphericalangle RBB_1 = \sphericalangle A_1B_1B = \sphericalangle A_1AB$ следва, че RA и RB са допирателни към описаната около $\triangle ABH$ окръжност. Тогава правата RH е симедиана за $\triangle ABH$ (Защо?) и следователно $\sphericalangle RHB_1 = \sphericalangle AHM$, където M е средата на AB . Така получаваме, че ако $N = RH \cap A_1B_1$, то HN и HM са съответни елементи в подобните триъгълници $\triangle ABH$ и $\triangle A_1B_1H$ откъдето следва, че N е среда на A_1B_1 .



б) Нека правите AA_1 и BB_1 пресичат за втори път описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точките A_2 и B_2 съответно. Лесно се доказва, че A_1 е среда на HA_2 , а B_1 е среда на HB_2 . Но по условие N е среда на HR и следователно точките A_2 , B_2 и R лежат на една права като R е среда на A_2B_2 . Центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност O лежи на симетралата на AB (която е RM) и на симетралата на A_2B_2 (която минава през R) и тъй като $AC \neq BC$ следва, че R съвпада с O . Но $\sphericalangle ARB = 180^\circ - 2\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$ и следователно $\sphericalangle ACB = 45^\circ$.

7. Да допуснем, че a не дели N . Да фиксираме един стълб от единични квадратчета и да разгледаме всички квадрати, които имат общи клетки с този стълб. Получаваме равенство от вида $ax + by = N$, където x и y са броевете на съответните квадрати, откъдето $yb \equiv N \pmod{a} \iff y \equiv Nb^{-1} \equiv r \pmod{a}$, където $r \in \{1, 2, \dots, a-1\}$ е фиксирано (т.е. не зависи от стълба).

Да означим с x_i , $i = 1, 2, \dots, N$, броя на квадратите със страна b , които са разположени изцяло във вертикалната ивица, определена от стълбовете с номера $i, i+1, \dots, i+b-1$. От това означение и горното следва, че $x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+b-1} \equiv r \pmod{a}$ (отляво са преброени всички квадрати със страна b , имащи общи клетки с $(i+b-1)$ -ия стълб). Тогава $r \equiv x_1 \equiv x_{b+1} \equiv x_{2b+1} \equiv \dots \pmod{a}$.

Нека $N = kb + \ell$ и да допуснем за момент, че $0 < \ell < b$. Тогава $x_{kb+1} \equiv r \pmod{a}$, което противоречи на очевидното $x_{kb+1} = 0$.

8. Първо да забележим, че

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) = ((n-1)^2 + (n-1) + 1)(n^2 + n + 1)$$

и следователно ако означим с p_n най-големия прост делител на $n^4 + n^2 + 1$, а с q_n най-големия прост делител на $n^2 + n + 1$, то $p_n = \max\{q_n, q_{n-1}\}$ за всяко $n \geq 2$. Тъй като $(n^2 + n + 1, n^2 - n + 1) = 1$, то $q_n \neq q_{n-1}$ за всяко n . Така задачата се свежда до това да докажем, че съществуват безбройно много $n \geq 2$ такива, че $q_n > q_{n-1}$ и $q_n > q_{n+1}$. Тъй като $q_2 = 7 < 13 = q_3$ и $q_3 = 13 > 7 = q_4$, то 3 едно такова число. Да допуснем, че те са краен брой и m е най-голямото от тях. Тогава или $q_m > q_{m+1} > q_{m+2} \dots$, което очевидно е невъзможно, или съществува $k \geq m$, такова, че $q_k < q_{k+1}$ ($q_k \neq q_{k+1}$). От друга страна, не е възможно $q_k < q_{k+1} < q_{k+2} \dots$, защото $q_{(k+1)^2} = p_{k+1} = \max\{q_k, q_{k+1}\} = q_{k+1}$ и следователно съществува най-малко $l \geq k+1$, такова, че $q_l > q_{l+1}$. От минималността следва, че $q_l > q_{l-1}$, но $l \geq k+1 > k \geq m$, което противоречи с избора на m , а с това и на допускането. Следователно съществуват безбройно много n , изпълняващи условието.

Контролно за определяне на отбора за MOM 2014

1. Ще докажем, че търсената стойност е $\alpha = \frac{2}{51}$. Да допуснем първо, че $\alpha < \frac{2}{51}$ върши работа. Да изберем неотрицателното цяло число $k \geq 0$ по такъв начин, че $\frac{1}{51 \cdot 2^k} \leq \alpha < \frac{1}{51 \cdot 2^{k-1}}$. Да разгледаме множество от $51 \cdot 2^k$ тикви, всяка от които тежи $\frac{1}{51 \cdot 2^k}$ тона. Тогава, както и да разпределим тиквите в 50 чувала, поне един от чувалите ще съдържа поне две тикви и следователно ще тежи поне $\frac{1}{51 \cdot 2^{k-1}} > \alpha$ тона.

Ще докажем, че $\alpha = \frac{2}{51}$ върши работа. Да поставим всяка тиква в отделен чувал и след това да прилагаме следната операция, докато е възможно: ако двата най-леки чувала съдържат общо не повече от $\frac{2}{51}$ тона тикви, пресипваме съдържанието на единия в другия и се освобождаваме от празния чувал. Нека в първия момент, в който тази операция не може да се прилага повече, да имаме n на брой чувала, съдържащи съответно $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ тона тикви. Тогава $x_1 + x_2 > \frac{2}{51}$ и значи $x_2 > \frac{1}{51}$. Оттук

$$1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n > \frac{2}{51} + \frac{n-2}{51},$$

и следователно $n < 51$. По този начин тиквите са разпределени в не повече от 50 чувала, всеки от които съдържа не повече от $\frac{2}{51}$ тона тикви. Остава само да добавим нужния брой празни чували така, че чувалите да станат точно 50.

2. Нека R е допирната точка на k със страната AB . Ще използваме стандартните означения за ъглите на $\triangle ABC$. От условието следва, че $\sphericalangle PTJ = 180^\circ - \sphericalangle PBJ = 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \sphericalangle PRB$ и $\sphericalangle Q TJ = 180^\circ - \sphericalangle QAJ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle QRA$.

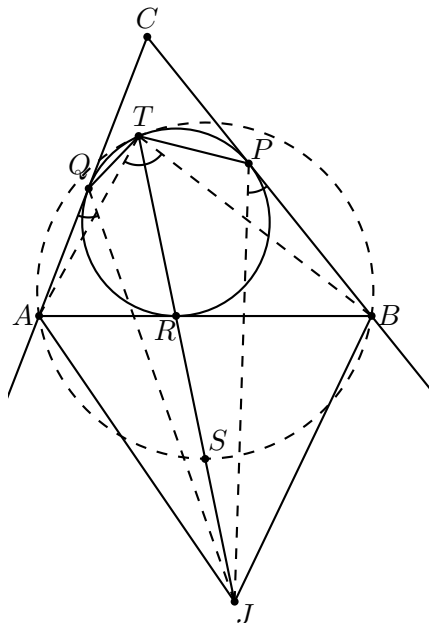
Тогав $\sphericalangle PTQ = \sphericalangle PTJ + \sphericalangle Q TJ = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180^\circ - \sphericalangle PRQ$ и следователно $T \in k$, а $R \in TJ$.

Нека ω е описаната окръжност около $\triangle ABT$ и $S = TR^{\rightarrow} \cap \omega$. От $\triangle CPJ \cong \triangle CQJ$ (по първи признак) следва, че

$$\nless ATJ = \nless AQJ = \nless BPJ = \nless BTJ,$$

т.е. S е среда на $\widehat{AB}$.

Остава да съобразим, че при хомотетия $h(T, R \rightarrow S)$ окръжността k ще се изобрази в окръжността ω и следователно двете окръжности се допират в точка T .



3. Имене

$$xf^2(x) + f(x) = (x^3 - x)g^2(x) \Leftrightarrow [2xf(x) + 1]^2 = (x^2 - 1)[2xg(x)]^2 + 1.$$

Ще опишем всички двойки (p, q) от полиноми с цели коефициенти, такива, че $p^2(x) = (x^2 - 1)q^2(x) + 1$.

Нека (p, q) е една такава двойка, в която степента на q е $k \geq 1$. Без загуба на общност можем да смятаме, че p и q имат положителни старши коефициенти. Да положим $P_0 = p$ и $Q_0 = q$ и да образуваме полиномите $P_1(x) = xp(x) - (x^2 - 1)q(x)$ и $Q(x) = -p(x) + xq(x)$. Лесно се проверява, че тогава P_1 и Q_1 също удовлетворяват даденото уравнение, като при това степента на Q_1 е строго по-малка от степента на Q_0 .

(Един начин да се досетим за тази конструкция е следният. Даденото уравнение може да се препише във вида $1 = (p(x) - q(x)\sqrt{x^2 - 1})(p(x) +$

$q(x)\sqrt{x^2-1}$). В същото време, едно негово решение се дава от $(p, q) = (x, 1)$ и следователно $1 = (x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1})$. Като умножим последните две равенства и групираме множителите по подходящ начин, получаваме точно $1 = (P_1(x) - Q_1(x)\sqrt{x^2-1})(P_1(x) + Q_1(x)\sqrt{x^2-1})$.

Продължавайки този процес, рано или късно ще достигнем до решение (P_s, Q_s) , в което степента на Q_s е равна на нула. Лесно се проверява, че уравнението има точно две решения от този вид: $(x, 1)$ и $(1, 0)$. Понеже прилагането на операцията към първото от тези решения дава второто, можем без загуба на общност да смятаме, че $(P_s, Q_s) = (1, 0)$.

Оттук следва, че всички такива двойки (p, q) се дават от членовете на рекурентната редица, определена от началното условие $(p_0, q_0) = (1, 0)$ и рекурентната връзка, обратна на горния процес: $(p_{i+1}, q_{i+1}) = (xp_i(x) + (x^2 - 1)q_i(x), p_i(x) + xq_i(x))$. (По-точно, тази рекурентна редица дава онези решения, в които старшите коефициенти на p и q са положителни.)

Един член на тази редица ще съответства на решение на първоначалното уравнение точно тогава, когато $p(x)$ дава остатък 1 при деление на $2x$ и $q(x)$ се дели на $2x$. Понеже първите пет члена на редицата са $(1, 0)$, $(x, 1)$, $(2x^2 - 1, 2x)$, $(4x^3 - 3x, 4x^2 - 1)$ и $(8x^4 - 8x^2 + 1, 8x^3 - 4x)$ и $(p_4(x), q_4(x)) \equiv (1, 0) \pmod{2x}$, имаме, че редицата е периодична с период 4 по модул $2x$ и до решения на първоначалното уравнение водят точно тези двойки (p_i, q_i) , за които i се дели на 4. Следователно, търсените n са точно числата от вида $4k + 3$ за $k \geq 0$.

4. Първи начин. Имаме

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{a^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} - \sum_{cyc} \frac{b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} = \\ = \sum_{cyc} \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} = \sum_{cyc} a - b = 0 \end{aligned}$$

и следователно е достатъчно да докажем, че

$$\sum_{cyc} \frac{a^4 + b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \geq \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Последното следва от очевидното неравенство

$$\frac{a^4 + b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \geq \frac{a + b}{4} \Leftrightarrow 4(a^4 + b^4) \geq (a + b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Втори начин. Имаме

$$\frac{a^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \geq \frac{5}{8}a - \frac{3}{8}b \Leftrightarrow 3(a^4 + b^4) \geq 2(a^3b + a^2b^2 + ab^3),$$

което очевидно е вярно. Следователно

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \geq \sum_{cyc} \frac{5}{8}a - \frac{3}{8}b = \frac{a + b + c + d}{4}.$$

5. Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ са двете задружни групи. За произволна група C от A да означим с S_C групата от всички хора от B , всеки от които познава поне един човек от C . Ако $|C| > |S_C|$, то групата $C \cup (B \setminus S_C)$ е задружна с повече от k члена, противоречие.

Това означава, че множествата $S_{\{a_i\}}$ изпълняват условията на теоремата на Хол за системата от различни представители. Следователно можем да считаме, че a_i и b_i за $i = 1, 2, \dots, k$ са врагове. Това означава, че всяка задружна група от k човека съдържа точно по един човек от всяка двойка (a_i, b_i) за $i = 1, 2, \dots, k$.

Без ограничение нека враговете на a_1 са $b_1, \dots, b_t$. Всяка задружна група, съдържаща a_1 не съдържа $b_1, \dots, b_t$ и следователно съдържа $a_2, \dots, a_t$. От всяка от останалите $k - t$ двойки (a_j, b_j) , $j > t$ трябва да изберем a_j или b_j . Следователно такива групи са най-много 2^{k-t} .

Всяка задружна група с k човека не съдържаща a_1 съдържа b_1 . От всяка от останалите $k - 1$ двойки (a_j, b_j) , $j > 1$ трябва да изберем a_j или b_j . Следователно такива групи са най-много 2^{k-1} , а общо задружните групи са най-много $2^{k-1} + 2^{k-t}$.

6. Нека $q = 4p + 1$ и $a \circ b$ означава остатъкът на a при деление на b . Достатъчно е да докажем, че измежду последните цифри на числата $10^k \circ q$ се срещат всички цифри от 0 до 9. Наистина, понеже q е взаимно просто с десет, тогава всички цифри от 0 до 9 ще се срещат и измежду последните цифри на числата $\left\lfloor \frac{10^k}{q} \right\rfloor$ – а те съвпадат с цифрите след десетичната запетая в десетичното представяне на $\frac{1}{q}$.

Нека S е множеството на ненулевите биквадратични остатъци по модул q , т.е., множеството на числата $0 < t < q$, такива, че сравнението $x^4 \equiv t$ има решение по модул q . Тогава S има точно p елемента. Наистина, понеже -1 е квадратичен остатък по модул q , $2p$ -те ненулеви квадратични остатъка по

модул q се разделят на двойки от вида $\{s, -s\}$ и измежду техните квадрати – които са точно биквадратичните остатъци – има точно p различни.

Ще покажем, че всеки елемент на S има вида $10^k \circ q$ за някое k . Наистина, нека d е показателят на q по модул 10. Понеже $d \mid \varphi(q) = 4p$, то $d = p$, $d = 2p$ или $d = 4p$.

Да разгледаме първо случая $d = p$. Нека $0 \leq k < p$; тогава има $0 \leq j \leq 3$, такова, че $k + jp$ е кратно на четири и следователно числото $10^k \equiv [10^{\frac{k+jp}{4}}]^4 \pmod{q}$ е биквадратичен остатък. Понеже числата $10^k \circ q$ за $0 \leq k < p$ са p на брой две по две различни и всяко от тях е биквадратичен остатък, те трябва да съвпадат с множеството S , както се искаше.

В случаите $d = 2p$ и $d = 4p$ аналогични разсъждения показват, че числата $10^k \circ q$ за $0 \leq k < d$ съвпадат съответно с квадратичните и с всички ненулеви остатъци по модул q .

Нека сега u е произволна цифра. Нека $0 \leq j \leq 3$ е такова, че $u + jq$ завършва на 0, 1, 5 или 6. Понеже $q > 10^9$, имаме, че $\sqrt[4]{(j+1)q-1} - \sqrt[4]{u+jq} > 6$. Оттук следва, че в интервала $[u + jq, (j+1)q]$ има поне шест последователни точни четвърти степени – а следователно и поне една точна четвърта степен x^4 , която завършва на същата цифра като $u + jq$. Нека $s = x^4 \circ q$; тогава $x^4 = s + jq$ и $10 \mid x^4 - (u + jq) = s - u$, т.е., s завършва на u , както се искаше.

31. Балканска олимпиада по математика

1. От условието получаваме $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Следователно

$$\begin{aligned} & x^2y + y^2z + z^2x - 2(x + y + z) + 3 = \\ & x^2y - 2x + \frac{1}{y} + y^2z - 2y + \frac{1}{z} + z^2x - 2z + \frac{1}{x} = \\ & = y \left(x - \frac{1}{y} \right)^2 + z \left(y - \frac{1}{z} \right)^2 + x \left(z - \frac{1}{x} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Равенство се достига точно когато $xy = yz = zx = 1$, т.е. $x = y = z = 1$.

2. а) Всяко естествено число, което е точен куб, е специално. Това следва от факта, че

$$k^3 = k^3 \frac{a^3 + 2b^3}{a^3 + 2b^3} = \frac{(ka)^3 + 2(kb)^3}{a^3 + 2b^3}$$

за произволни естествени числа a и b (а в частност и при $a = b = 1$).

б) Първо да обърнем внимание, че $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Ако 2014 е специално число, то

$$x^3 + 2y^3 = 2014(u^3 + 2v^3) \quad (1)$$

за някои естествени числа x, y, u и v . Без ограничение на общостта можем да предположим, че при така избраните x, y, u и v стойността на $x^3 + 2y^3$ е минимална. От факта, че $19 \mid x^3 + 2y^3$ ще докажем, че $19 \mid x$ и $19 \mid y$. Ако допуснем, че $19 \nmid x$, то очевидно следва, че $19 \mid y$ и обратно. Ако пък допуснем, че $19 \nmid x$ и $19 \nmid y$, то от $x^3 \equiv -2y^3 \pmod{19}$ следва, че $(x^3)^6 \equiv (-2y^3)^6 \pmod{19}$, т.е. $x^{18} \equiv 2^6 y^{18} \pmod{19}$ и от малката теорема на Ферма получаваме, че $1 \equiv 2^6 \pmod{19}$, т.е. $19 \mid 63$, което е противоречие.

Следователно $x = 19x_1$, $y = 19y_1$ за някои естествени числа x_1 и y_1 . Замествайки в (1) получаваме

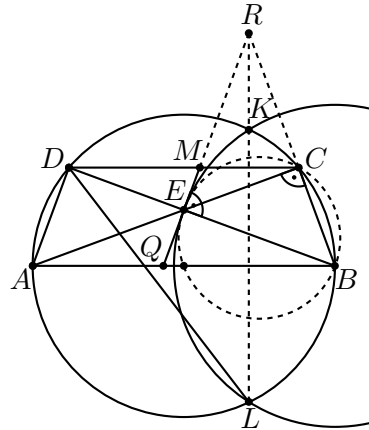
$$19^2(x_1^3 + 2y_1^3) = 2 \cdot 53(u^3 + 2v^3), \quad (2)$$

т.е. $19 \mid u^3 + 2v^3$ откъдето следва, че $u = 19u_1$, $v = 19v_1$ за някои естествени числа u_1 и v_1 . Замествайки в (2) получаваме

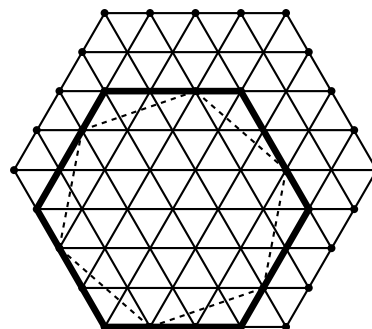
$$x_1^3 + 2y_1^3 = 2014(u_1^3 + 2v_1^3).$$

Тъй като $x_1^3 + 2y_1^3 < x^3 + 2y^3$, то достигахме до противоречие с минималността на $x^3 + 2y^3$. Следователно 2014 не е специално число.

3. Тъй като $ABCD$ е вписан в окръжност трапец, то той е равнобедрен. Нека EM пресича AB в точка Q . От $\angle ADB = \angle QEB = 90^\circ$ следва, че $MQ \parallel AD$, т.е. $QBCM$ също е равнобедрен трапец. Ще докажем, че KL е симетрала на MC (и QB съответно). Наистина, правите QM , BC и KL са радикални оси за окръжността Γ , окръжността с център B и радиус BE и окръжността с диаметър BE , т.е. те се пресичат в техния радикален център R . Но R лежи на симетралата на QB и $KL \perp QB$, следователно KL е симетрала на MC (и QB съответно). Тогава $\angle MKL = \angle CKL = \angle CDL = 90^\circ - \angle DLK$, т.е. $KM \perp DL$.



4. Нека с M означим дадения правилен шестоъгълник със страна n . Под правилен шестоъгълник от тук нататък ще разбираме шестоъгълник, чиито върхове са сред върховете на равностранните триъгълници, образувани от M . Един правилен шестоъгълник ще наричаме *решетъчен*, ако страните му са успоредни на страните на M . За произволен правилен шестоъгълник H може еднозначно да конструираме решетъчен шестоъгълник G , който го „обвива“ както е показано на фигурата вдясно. Обратно, за всеки решетъчен шестоъгълник G броят на правилните шестоъгълниците, които се обвиват от G , е точно m .



Така задачата се свежда до намиране броя на решетъчните шестоъгълници. Първо да съобразим, че броят на върховете на равностранните триъгълници, образувани от M , е равен на $1 + 6(1 + 2 + \dots + n) = 1 + 3n(n + 1)$. От друга страна, центърът на един решетъчен шестоъгълник със страна m е измежду върховете на равностранните триъгълници, образувани от решетъчния шестоъгълник с център, центъра на M и страна $n - m$, т.е.

$$1 + 6(1 + 2 + \dots + (n - m)) = 1 + 3(n - m)(n - m + 1).$$

Така търсеният брой е

$$N = \sum_{m=1}^n [1 + 3(n - m)(n - m + 1)]m = (3n^2 + 3n + 1) \sum_{m=1}^n m - 3(2n + 1) \sum_{m=1}^n m^2 + 3 \sum_{m=1}^n m^3.$$

$$\text{Тъй като } \sum_{m=1}^n m = \frac{n(n + 1)}{2}, \sum_{m=1}^n m^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \text{ и } \sum_{m=1}^n m^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4},$$

$$\text{то след кратко пресмятане получаваме } N = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}.$$

55. Международна олимпиада по математика

1. *Първи начин.* Да положим

$$b_n = (n - 1)a_n - (a_{n-1} + \dots + a_1) = (a_n - a_{n-1}) + \dots + (a_n - a_1), \quad n \geq 1.$$

От второто представяне се вижда, че редицата $b_1, b_2, \dots$ се състои от естествени числа и е строго растяща. Изискването на задачата е еквивалентно на очевидните съществуване и единственост на n , за което $b_n < a_0 \leq b_{n+1}$. Действително, имаме

$$b_n < a_0 \iff a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n}$$

и

$$a_0 \leq b_{n+1} \iff \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Втори начин. (Съществуване) Да допуснем, че не съществува n с исканите свойства. Тъй като $a_1 < a_0 + a_1$, заключаваме, че $2a_2 < a_0 + a_1 + a_2 \iff a_2 < a_0 + a_1$. Сега с индукция по n лесно доказваме, че $a_n < a_0 + a_1$, което е противоречие, защото дадената редица расте неограничено.

(Единственост) Нека n има исканите свойства и е най-малкото такова естествено число. Имаме

$$na_n < a_0 + a_1 + \dots + a_n \leq na_{n+1}.$$

От дясното неравенство получаваме $a_0 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} \leq (n+1)a_{n+1}$, което означава, че $n+1$ няма исканите свойства. Освен това $a_0 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} \leq (n+1)a_{n+1} < (n+1)a_{n+2}$, откъдето $a_0 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+2} \leq (n+2)a_{n+2}$ и по индукция лесно следва, че $a_0 + a_1 + \dots + a_m \leq ma_m$ за всяко $m \geq n+1$, т.е. никое $m \geq n+1$ няма исканите свойства, с което и единствеността е доказана.

2. Ще докажем, че търсеното най-голямо k е равно на $\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor$. Достатъчно е да докажем, че ако l е естествено число, то:

1. Ако $n > l^2$, то всяка мирна конфигурация съдържа квадрат $l \times l$ без топ.

2. Ако $n \leq l^2$, то съществува мирна конфигурация, за която всеки квадрат $l \times l$ съдържа топ.

Нека $n > l^2$ и да разгледаме стълба C , който съдържа топ в най-горното си квадратче. Да изберем l последователни стълба, един от които е C . В тяхното обединение U има точно l топа. Да изтрием най-горните $n - l^2 \geq 1$ реда от U . Останалата част е правоъгълник $l^2 \times l$, може да се раздели на l квадрата със страна l и съдържа $l - 1$ топа. Следователно един от тези квадрати не съдържа топ.

Нека $n \leq l^2$. Първо ще конструираме мирна конфигурация, без празен $l \times l$ квадрат. Да номерираме редовете и стълбовете на квадрата от долу

на горе и от ляво на дясно с числата $0, 1, \dots, l^2 - 1$. По този начин всяко единично квадратче се задава с двойка (i, j) , които показват номера на реда и стълба на разглежданото квадратче. Да поставим топове в квадратчетата $(il + j, jl + i)$ за $i, j = 0, 1, \dots, l - 1$. Тъй като всяко число от 0 до $l^2 - 1$ се представя по единствен начин във вида $il + j$, $(0 \leq i, j \leq l - 1)$, то всеки ред и всеки стълб съдържат точно по един топ.

Да разгледаме произволен квадрат A със страна l . Нека най-долния ред на A е ред $pl + q$, $0 \leq p, q \leq l - 1$. Да отбележим, че $pl + q \leq l^2 - l$. Топовете в редовете, които съдържат A са на позиции

$$ql + p, (q + 1)l + p, \dots, (l - 1)l + p, p + 1, l + (p + 1), \dots, (q - 1)l + p + 1.$$

В нарастващ ред тези числа са:

$$p + 1, l + (p + 1), \dots, (q - 1)l + (p + 1), ql + p, (q + 1)l + p, \dots, (l - 1)l + p.$$

Първото число е най-много $l - 1$ (ако $p = l - 1$, то $q = 0$ и тогава най-малкото число е $ql + p = l - 1$), последното число е поне $(l - 1)l$ и разликата между всеки две последователни числа е най-много l . Това означава, че във всеки l последователни стълба има топ, т.е. топ има и в A .

При $n < l^2$ от разглежданата конфигурация за квадрат $l^2 \times l^2$ и след това изтриваме $l^2 - n$ от най-долните редове и $l^2 - n$ от най-десните стълбове. Ще получим квадрат $n \times n$ в който няма празен $l \times l$ квадрат, но някои от редовете и стълбовете могат да не съдържат топове. Между празните редове и стълбове съществува биекция (понеже броя на редовете без топ е равен на броя на стълбовете без топ) и можем да поставим необходимия брой топове, за да получим мирна конфигурация.

3. Нека правата през C , която е перпендикулярна на SC пресича AB в точка Q . Тогава

$$\angle SQC = 90^\circ - \angle BSC = 180^\circ - \angle SHC,$$

което означава, че точките C, H, S и Q лежат на една окръжност с диаметър SQ . Следователно центърът на описаната окръжност K на $\triangle SHC$ е върху правата AB . Аналогично, центърът на описаната окръжност L на $\triangle CHT$ лежи на правата AD .

За да докажем, че BD е допирателна към описаната около $\triangle SHT$ окръжност, е достатъчно да докажем, че симетралите на HS и HT се пресичат върху AH . Тези симетрали са ъглополовящи на ъглите $\angle AKH$ и $\angle ALH$. Следователно е достатъчно да докажем, че

$$(1) \quad \frac{AK}{KH} = \frac{AL}{LH}.$$

Нека M е пресечната точка на KL и HC . Понеже $KH = KC$ и $LH = LC$, то H и C са симетрични относно правата KL . Следователно M е среда на HC . Ако O е центъра на описаната около $ABCD$ окръжност, то O е среда на AC . Оттук $OM \parallel AH$ и значи $OM \perp BD$. Сега от $OB = OD$ следва, че OM е симетрала на BD , откъдето $BM = DM$. Тъй като $CM \perp KL$, то точките B , C , M и K лежат на една окръжност с диаметър KC . Аналогично, точките L , C , M и D лежат на една окръжност с диаметър LC . От синусовата теорема получаваме:

$$\frac{AK}{AL} = \frac{\sin \angle ALK}{\sin \angle AKL} = \frac{DM}{CL} \cdot \frac{CK}{BM} = \frac{CK}{CL} = \frac{KH}{LH},$$

с което равенство (1) е доказано.

4. Да означим с K пресечната точка на BM и CN . Нека P е между B и Q . От условието следва, че $\triangle ABP \sim \triangle CAQ$ и тогава $\angle BPM = \angle NCQ$ (като съответни външни ъгли). Освен това

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BP}{AP} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{NQ}{CQ}$$

и следователно $\triangle BPM \sim \triangle NQC$. От последното получаваме $\angle CNQ = \angle PBM$ и следователно четириъгълникът $BKNQ$ е вписан. Тогава $180^\circ = \angle BSN + \angle BQN = \angle BSC + \angle BAC$, което означава, че S лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Случаят, когато Q е между B и P се разглежда аналогично, като на последната стъпка $\angle BKN = \angle BQN = \angle BAC$.

5. Ще докажем твърдението в общия случай – всяка крайна колекция от Кейптауновски монети с обща стойност най-много $n + \frac{1}{2}$ може да се разбие на не повече от $n + 1$ групи, всяка от които на обща стойност най-много 1.

Да отбележим първо, че всеки k монети с номинал $\frac{1}{k}$ могат да бъдат разглеждани като една монета с номинал 1 (и тази монета да образува група), а две монети с номинал $\frac{1}{2k}$ могат да бъдат разглеждани като една монета с номинал $\frac{1}{k}$. Това означава, че можем да считаме, че от всеки номинал $\frac{1}{2k-1}$ имаме най-много $2k - 2$ монети (в частност нямаме монети с номинал 1), а от всеки номинал $\frac{1}{2k}$ имаме най-много една монета.

Да разгледаме следното разпределение по групи: в група k , $k = 1, 2, \dots, n+1$ са монетите с номинали $\frac{1}{2k-1}$ и $\frac{1}{2k}$. Тогава във всяка от тези групи досега имаме стойност

$$\frac{2k-2}{2k-1} + \frac{1}{2k} < 1$$

и всички монети с номинали, по-големи от $\frac{1}{2n+1}$, вече са разпределени. Продължаваме с разпределението, като всеки път слагаме монета в група, където има място за нея. Да допуснем, че в даден момент това е невъзможно, останали са още неразпределени монети, и $\frac{1}{m}$, $m \geq 2n+1$, е една от тях. Тъй като в никоя от групите няма място за тази монета, във всяка от тях вече има насъбрана обща стойност, по-голяма от $1 - \frac{1}{m}$. Тогава общата стойност на разпределения до момента монети е по-голяма от

$$(n+1) \left(1 - \frac{1}{m}\right) = n+1 - \frac{n+1}{m} \geq n+1 - \frac{n+1}{2n+1} > n + \frac{1}{2},$$

което противоречи на условието.

6. Да означим с $\mathcal{F}$ множеството от крайните области, а с L – множеството от дадените прави. Нека $B \subset L$ е множество от прави със следните свойства:

1. Няма многоъгълник от $\mathcal{F}$ всички страни на който са от B ;
2. Добавянето на произволна права от $L \setminus B$ води до появяването на многоъгълник от $\mathcal{F}$ със страни от B .

Да оцветим всички прави от B в синьо, а останалите прави в червено. Искаме да докажем, че $|B| = k \geq \lceil \sqrt{n} \rceil$. Да наречем една точка синя, ако тя е пресечна точка на две сини прави и червена, ако тя е пресечна точка на една синя и една червена права.

Да разгледаме произволна червена права l и многоъгълник A , чиято единствена страна лежи на l (според 2. такъв многоъгълник съществува). Нека $r', r, b_1, b_2, \dots, b_s$ са върховете на A в посока на часовниковата стрелка. Да съпоставим на правата l червената точка r и синята точка b_1 . За всяка двойка от червена точка r и синя точка b съществува най-много един многоъгълник A , за който r и b са последователни върхове по посока на часовниковата стрелка. Следователно на всяка двойка (r, b) от червена и синя точка може да се съпостави най-много една червена права.

Ще докажем, че на всяка синя точка се съпоставят най-много две червени прави. Тогава

$$n - k \leq 2 \binom{k}{2} \iff n \leq k^2$$

и задачата е решена.

Да допуснем, че има три червени прави l_1, l_2 и l_3 на които е съпоставена една и съща синя точка b . Нека r_1, r_2 и r_3 са съответните червени точки, съпоставени на тези прави. Точката b определя четири лъча и всяка от точките r_1, r_2, r_3 е най-близката точка до b на един от тези четири лъча. Следователно можем да считаме, че r_2 и r_3 са върху едната синя права през

b , а r_1 е на другата синя права. Да разгледаме многоъгълника A , чрез който сме съпоставили r_1 и b на l_1 . Три от последователните върхове на A са r_1 , b и една от точките r_2 или r_3 (нека това е r_2). Тъй като A има само една червена страна, то A е триъгълника r_1br_2 (в противен случай A ще има две червени страни – едната за точката r_1 , а другата за точката r_2). Получихме, че през r_2 минават две червени прави l_1 и l_2 , както и на поне една синя права (правата през b), противоречие с условието, че никои три прави не се пресичат в една точка.

Български математически състезания 2014-15

Есенен Математически Турнир

8.1. Понеже $\angle CLA = \angle CAL$, то $\angle CLB = \angle CAK$. Оттук и от условието следва, че триъгълниците CAK и CLB са еднакви, откъдето $BC = CK$.

8.2. а) $a^2 + b^2 \leq a^2 + (1-a)^2 = 2a(a-1) + 1 \leq 1$.

б) Имаме $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$, откъдето $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$. Оттук $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx = 96$, като равенство се достига при $x = y = z = 4\sqrt{2}$. Следователно най-малката стойност на A е 96.

Да намерим най-голямата стойност на A . Без ограничение на общността $x \leq y \leq z$. Тогава $z-y+y-x = z-x \leq 1$ и според а) $(z-y)^2 + (y-x)^2 + (z-x)^2 \leq 1 + 1$. След деление на 2 получаваме $A = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 + xy + yz + zx = 97$. Равенство се достига например при $x = 5$, $y = z = 6$. Следователно най-голямата стойност на A е 97.

8.3. а) Понеже всяко от числата 37^m и 29^n при деление с 4 дава остатък 1, то $m@n$ винаги ще се дели на 4, т.е. не може да е равно на 2014.

б) Явно $m@n > 0$; от а) видяхме, че $m@n$ се дели на 4; при $m = n = 1$ стойността му е 8. Ще покажем, че това е най-малката стойност, като се уверим, че $m@n$ не е равно на 4.

Ако $37^m - 29^n = 4$, то $37^m - 4 = 29^n$; числото вляво се дели на 3, а вдясно – не.

Ако $37^m - 29^n = -4$, то $29^n - 37^m = 4$. Последна цифра 4 е възможна само ако последната цифра на 29^n е 1, а на 37^m е 7, т.е. $n = 2k$. Тогава $37^m = (29^k - 2)(29^k + 2)$, което е невъзможно, понеже множителите са взаимно прости, а 37 е просто число.

8.4. Да разгледаме конфигурация с максимален брой равностранни триъгълници. Ясно е, че в нея има поне един равностранен триъгълник.

Ще наричаме две отсечки сравними, ако правите им образуват ъгъл, кратен на 60° . Така отсечките се разпадат на множества от сравними помежду си отсечки.

Да допуснем, че тези множества са повече от 1. Отсечки от различни множества не могат да участват в един равностранен триъгълник. Ще считаме, че всяко множество от сравними отсечки е начертано на отделен прозрачен лист и листовите са поставени един върху друг. Да завъртим под ед-

накъв ъгъл един лист, така че една от отсечките на него да отсече равно-
странно триъгълниче от равностранен триъгълник от друг лист (в който има
такъв). При това броят равностранни триъгълници нараства – противоречие.
Следователно има само един лист, т.е., всички отсечки са сравними.

Тогава отсечките могат да имат само три направления (под ъгъл 60°).
Нека в тях да има съответно x , y и z отсечки, като $x \leq y \leq z$ и $x + y + z = 88$.
За всеки равностранен триъгълник са нужни отсечки от трите направления,
така че броят на триъгълниците не надхвърля xyz , като е равен на това
число, ако всички отсечки от различни направления се пресичат в различни
точки.

Да допуснем, че $z - x \geq 2$ и да премахнем една отсечка от най-масовия
клас, добавяйки я в най-малкия, така че да пресича всички отсечки от
останалите класове в различни точки; при това се губят xy триъгълника
и се печелят $y(z - 1) > xy$, което противоречи на максималността. Така
 $z - x \leq 1$ и като отчетем $x \leq y \leq z$ и $x + y + z = 88$, получаваме $x = y = 29$,
 $z = 30$, и търсеният максимален брой е $xyz = 25230$.

9.1. За да има уравнението два различни реални корена е необходимо и до-
статъчно $(a + 1)^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\frac{1}{2}; +\infty)$.

От формулите на Виет, $|4x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2| \leq 1 \Leftrightarrow |4(2a + 1)| \leq 1$, откъдето
 $2a + 1 \leq \frac{1}{4}$ (използвахме, че $2a + 1 > 0$ от по-горе). Следователно $a \leq -\frac{3}{8}$ и
окончателно търсените a са числата от интервала $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}]$.

Забележка. Неравенството от условието може да бъде формулирано и
като изискване за разстоянието между корените на уравнението.

9.2. От условието следва, че $n^2 + n - 1$ дели $10(14m + 5) - 7(20m - 3) = 71$.
Тъй като $n^2 + n - 1 = (n + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} > -2$ и 71 е просто число, имаме три
възможности: $n^2 + n - 1 = -1, 1$ или 71. В първия и втория случай намираме
 $n = -1, 0, 1$ и -2 , които са решения (работа върши всяко цяло m).

В третия случай уравнението $n^2 + n - 1 = 71$ има корени $n = -9$ и $n = 8$.
Тогава $14m + 5 \equiv 0 \pmod{71}$ след умножение по 5 е равносилно с $m \equiv 25$
 $\pmod{71}$, а $20m - 3 \equiv 0 \pmod{71}$ след умножение по 32 е равносилно отново
с $m \equiv 25 \pmod{71}$, т.е. работа вършат точно тези m , които дават остатък 25
при деление на 71.

9.3. Първи начин. Имаме последователно

$$\begin{aligned}
 2r \cdot (AB + CD) &= r \cdot (AB + BC + CD + DA) = 2S_{ABCD} = \\
 &= [S_{ABC} + S_{ABD}] + [S_{CDA} + S_{CDB}] = \\
 &= 2S_{ABN} + 2S_{CDM} \leq MN \cdot AB + MN \cdot CD = \\
 &= MN \cdot (AB + CD),
 \end{aligned}$$

откъдето следва исканото.

Втори начин. Нека $\emptyset$ е вписаната окръжност на $ABCD$, $\emptyset_1$ е окръжността, която допира отсечката AB и продълженията на правите AD и BC след A и B , $\emptyset_2$ е окръжността, която допира отсечката CD и продълженията на правите BC и AD след C и D , s_1 е радикалната ос на $\emptyset$ и $\emptyset_1$ и s_2 е радикалната ос на $\emptyset$ и $\emptyset_2$. Тогава $s_1 \parallel s_2$, $M \in s_1$ и $N \in s_2$.

Нека d е разстоянието между правите s_1 и s_2 . Понеже $\emptyset$ лежи между s_1 и s_2 , имаме $2r \leq d \leq MN$, както се искаше.

9.4. За всеки връх A на F , нека A' е този връх на F , за който градусната мярка на $\angle AOB$ е равна на числото, записано в A , и $\triangle AOB$ е положително ориентиран. За всяко A , да нарисуваме стрелка, сочеща от A към A' .

Ако две от тези стрелки сочат един и същи връх на F , то тогава техните начални върхове образуват двойка от вида, който се търси в задачата. Да допуснем, че такава двойка няма. Тогава, понеже от всеки връх излиза точно една стрелка, то и във всеки връх трябва да влиза точно една стрелка. Следователно, стрелките образуват няколко независими цикъла.

Понеже всеки такъв цикъл извършва цял брой обороти около O , сумата от градусните мерки на стрелките, които участват в него, ще бъде кратна на 360. Оттук следва, че и сумата от градусните мерки на всички стрелки – която съвпада със сумата от всички записани числа – ще бъде кратна на 360: противоречие.

10.1. Очевидно $x = 0$ и $x = 1$ са решения. Нека $x \in (0, 1)$. Тогава от неравенството $\sqrt{x} > x$ следва, че всеки от събираемите отляво е поне x и оттам лявата страна е винаги по-голяма от дясната.

10.2. Пресмятаме в явен вид двете функции: $f_1(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 5) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 5$ и $f_2(x) = -3(x + 2)(x - 1) = -3x^2 - 3x + 6$. Пресечните точки на двете параболи намираме чрез нулите на функцията

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 5\right) - (-3x^2 - 3x + 6) =$$

$$= \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = \frac{7}{2} \left(x - \frac{1 - \sqrt{57}}{14} \right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{57}}{14} \right).$$

Старшият коефициент на $f_1(x)$ е положителен и следователно параболата $f_1(x)$ е “обърната нагоре”. Старшият коефициент на $f_2(x)$ е отрицателен и следователно параболата $f_2(x)$ е “обърната надолу”.

Ако мравката тръгне от точка P с абсциса, която не принадлежи на интервала $I = (\frac{1-\sqrt{57}}{14}, \frac{1+\sqrt{57}}{14})$, то тя или ще отиде в безкрайността, движейки се по параболата, от която е започнала, или ще стигне до кръстопът. Сменяйки параболата, тя или ще отиде в безкрайността, движейки се по другата параболата, или ще стигне до другия кръстопът. Повтаряйки това разсъждение няколко пъти, виждаме, че мравката или ще отиде в безкрайността по някоя от параболите, или ще остане затворена в цикъла между двете, като посоката на въртене в този цикъл е такава, че тя не може да се върне в P .

Ако мравката тръгне от точка P с абсциса, която принадлежи на I , то тя ще може да се върне обратно в P след като мине през два кръстопъта. Следователно, търсените координати са от вида $(a, \frac{1}{2}a^2 - \frac{7}{2}a + 5)$ или $(a, -3a^2 - 3a + 6)$, където $a \in (\frac{1-\sqrt{57}}{14}, \frac{1+\sqrt{57}}{14})$.

10.3. Имаме

$$2^p - 2 = (1 + 1)^p - 2 = \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} = p \left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)(p-2) \dots (i+1)}{(p-i)!} \right).$$

Нека x е остатъкът на числото $\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)(p-2) \dots (i+1)}{(p-i)!}$ при деление на p . Остава да покажем, че остатъкът на $(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i i^{-1}$ при деление на p също е равен на x .

Имаме

$$\sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)(p-2) \dots (i+1) \cdot (p-1)!}{(p-i)!} \equiv x(p-1)! \pmod{p},$$

откъдето, съгласно теоремата на Уилсън,

$$\sum_{i=1}^{p-1} \{(p-1)(p-2) \dots (i+1) \cdot (p-1)(p-2) \dots (p-i+1)\} \equiv x(p-1)! \equiv -x \pmod{p}.$$

От друга страна, теоремата на Уилсън ни дава и

$$\sum_{i=1}^{p-1} \{(p-1) \dots (i+1) \cdot (p-1) \dots (p-i+1)\} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} \{(p-1) \dots (i+1) \cdot (-1)^{i-1} (i-1)!\} \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} \frac{(p-1)!}{i} \equiv (p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} i^{-1} \pmod{p}.$$

Следователно, $(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} i^{-1} \equiv x \pmod{p}$, с което задачата е решена.

10.4. Нека k е окръжността с център H и радиус HC_1 . Тогава D е външният център на хомотетия за $\emptyset$ и k , а C е външният център на хомотетия за $\emptyset$ и $\emptyset_c$. Съгласно теоремата за трите хомотетии, външният център на хомотетия X за $\emptyset_c$ и k лежи на DC . Но X лежи също така и на I_cH и следователно $X \equiv E$.

Нека l е допирателната към $\emptyset_c$, която е успоредна на AB и не съвпада с AB , и нека l допира $\emptyset_c$ в M' . Разглеждаме хомотетии h_1 с център E и h_2 с център C , такива че h_1 изобразява k в $\emptyset_c$ и h_2 изобразява $\emptyset$ в $\emptyset_c$. Тогава h_1 изобразява C_1 в M' и h_2 изобразява F в M' ; следователно, $M \equiv M'$ и значи $M \in \emptyset_c$, както се искаше.

11.1. Нека R е средата на PQ . Тогава $\angle ORQ = \angle OYQ = 90^\circ$. Следователно четириъгълникът $OQYR$ е вписан в окръжност, откъдето $\angle QRY = \angle QOY$. Аналогично $\angle PRX = \angle POX$. Тъй като $\triangle OYQ \cong \triangle OXP$, то $\angle QOY = \angle POX$. Следователно $\angle QRY = \angle PRX$, което означава, че точките X, R, Y лежат на една права.

11.2. Неравенството от условието е еквивалентно на

$$\frac{x^2 + (2a^2 - a + 4)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + a - 3)x - a^2 + 2a - 3} < 0.$$

За квадратните тричлени $f(x) = x^2 + (2a^2 - a + 4)x - a^2 + 2a - 3$ и $g(x) = x^2 + (a^2 + a - 3)x - a^2 + 2a - 3$ имаме $f(0) = g(0) = -a^2 + 2a - 3$, където $-a^2 + 2a - 3 = -(a-1)^2 - 2 < 0$ за всяко a . Следователно, уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ имат корени съответно $x_1 < 0 < x_2$ и $x'_1 < 0 < x'_2$. Тъй като $x'_1 x'_2 = x_1 x_2$ и $x'_1 + x'_2 - (x_1 + x_2) = a^2 - 2a + 7 = (a-1)^2 + 6 > 0$, разположението на корените е $x_1 < x'_1 < 0 < x_2 < x'_2$. Тогава решенията на неравенството са $x \in (x_1, x'_1) \cup (x_2, x'_2)$, като сбора от дължините на двата интервала е $a^2 - 2a + 7 = (a-1)^2 + 6 \geq 6$.

Директно се проверява, че при $a = 1$ (тогава $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{33}}{2}$, $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$, $x'_1 = -1$, $x'_2 = 2$, като $-6 < x_1 < -5$ и $0 < x_2 < 1$) решенията са $-5, -4, -3, -2$ и 1 , т.е. 5 решения. При $a \neq 1$ сбора на дължините на

двата интервала е по-голям от 6 и като използваме, че затворен интервал с дължина естествено число t съдържа поне t цели числа, лесно се вижда, че тези два интервала съдържат поне 5 цели числа.

11.3. Да допуснем, че всяко от числата $b_1, b_2, \dots, b_n$ не дели най-малкото общо кратно на останалите числа. Тогава за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ имаме $b_i > 1$, като съществува просто число p_i , степента на което в каноничното разлагане на b_i е по-висока от степента на p_i в каноничното разлагане на всяко от останалите числа.

Ако $a_1, a_2, \dots, a_n$ са първите членове на дадените прогресии, от китайската теорема за остатъците следва, че съществува естествено число k , за което $k \equiv a_i + 1 \pmod{p_i}$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$. Тогава $k \notin A_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, n$, противоречие.

11.4. Ще решим задачата в общия случай за $2n$ -ъгълник при $n \geq 2$.

Лема 1. Диагоналите от условието разделят вътрешността на $2n$ -ъгълника на $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ изпъкнали многоъгълника.

Доказателство. След построяване на един диагонал имаме два изпъкнали многоъгълника. След построяване на два диагонала имаме 4 изпъкнали многоъгълника, като построяването на k -ия диагонал добавя (тъй като той пресича всички построени до този момент $k - 1$ диагонала) k нови многоъгълника. Тогава търсеният брой е равен на

$$1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Тъй като всяка страна на дадения $2n$ -ъгълник е страна на точно един многоъгълник от разделянето, от Лема 1 следва, че броят на многоъгълниците, които нямат обща страна с дадения $2n$ -ъгълник е

$$\frac{n^2 + n + 2}{2} - 2n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2},$$

с което лемата е доказана.

Страна на изпъкнал многоъгълник без успоредни страни ще наричаме *интересна*, ако многоъгълникът се съдържа в триъгълника, образуван от тази страна и правите, определени от двете съседни страни.

Лема 2. Във всеки изпъкнал многоъгълник, който не е триъгълник, съществуват най-много две интересни страни.

Доказателство. Да допуснем, че съществуват три интересни страни. Тогава ще имаме поне две различни двойки ъгли на многоъгълника със сбор

на двата ъгъла в двойката по-малък от 180° , и сборът на четирите ъгъла в двете двойки ще е по-малък от 360° . Тъй като сборът на ъглите в изпъкнал m -ъгълник е $(m-2)180^\circ$, то сборът на останалите $m-4$ ъгъла ще е поне $(m-4)180^\circ$. Това означава, че поне един от тези ъгли ще е по-голям от 180° , т.е. многоъгълника няма да е изпъкнал, противоречие.

Понеже всеки два от дадените диагонали се пресичат, то броят на пресечните точки върху всеки диагонал е $n-1$ и следователно върху всеки диагонал има $n-2$ вътрешни отсечки (т.е. отсечки, чиито краища не са върхове на дадения $2n$ -ъгълник). Всяка такава отсечка е страна на два изпъкнали многоъгълника, като тя е интересна за точно един от тези два многоъгълника. Следователно, броят на интересните страни е $n(n-2)$.

Разглеждаме само многоъгълниците, които нямат обща страна с дадения $2n$ -ъгълник. Нека измежду тези многоъгълници има x триъгълника и y многоъгълника с повече от три страни. Имаме $x+y = \frac{n^2-3n+2}{2}$, като броят на интересните страни е най-много $3x+2y$ (всеки триъгълник има три интересни страни). Тогава

$$3x+2y \geq n(n-2) \Leftrightarrow x \geq n(n-2)-2(x+y) \Leftrightarrow x \geq n(n-2)-(n^2-3n+2) = n-2.$$

Остава да забележим, че триъгълниците, които имат обща страна с дадения $2n$ -ъгълник, са поне 3 (тъй като всяка точка от изпъкналата обвивка на пресечните точки на всички диагонали е връх на точно един такъв триъгълник, а изпъкналата обвивка е поне триъгълник).

Окончателно имаме поне $n-2+3 = n+1$ триъгълника и остава да построим пример с точно $n+1$ триъгълника.

Върху дадена права l да изберем $n-1$ точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, като $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-2}A_{n-1}$ и нека α е ъгъл, за който $(n-1)\alpha < 90^\circ$. Да построим през точката A_i права l_i , която сключва с правата l ъгъл $i\alpha$. Лесно се вижда, че всяка права след l_2 добавя един нов триъгълник и следователно броят на триъгълниците е $n-2$. Сега да разгледаме достатъчно голяма окръжност, която съдържа всички пресечни точки на дадените прави. Да изберем пресечните точки на тази окръжност с дадените прави за върхове на $2n$ -ъгълника.

Лесно се вижда, че само пресечните точки на l и l_1 ; l и l_{n-1} ; l_{n-1} и l_{n-2} са върхове на триъгълници, имащи обща страна с $2n$ -ъгълника. Общият брой на триъгълниците е $n+1$. При $n=1007$ имаме поне 1008 триъгълника.

12.1. Понеже $2x^2 + 2x + 1 = 2(x+1)^2 - 2(x+1) + 1$, то

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{[2(2n)^2 + 2 \cdot 2n + 1] \cdot [2(2n)^2 - 2 \cdot 2n + 1]}{[2(2n-1)^2 + 2 \cdot (2n-1) + 1] \cdot [2(2n-1)^2 - 2 \cdot (2n-1) + 1]} \\ &= \frac{2(2n+1)^2 - 2 \cdot (2n+1) + 1}{2(2n-1)^2 - 2 \cdot (2n-1) + 1}, \end{aligned}$$

откъдето $a_1 a_2 \dots a_n = \frac{2(2n+1)^2 - 2 \cdot (2n+1) + 1}{2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{n^2} = 8$.

12.2. Нека $PQ \cap AC = E$ и $PQ \cap BC = F$. Тогава $\angle CEQ = \angle CAM = \angle CMP$ и значи $CEMP$ е вписан в окръжност четириъгълник. Аналогично $CFNQ$ е вписан в окръжност четириъгълник. Тогава $\angle MEQ = \angle PCQ = \angle NFP$ и следователно $EFNM$ е равнобедрен трапец.

Ако $O_1 = AQ \cap ME$ и $O_2 = BP \cap NF$, то

$$\triangle AMO_1 \sim \triangle QEO_1 \sim \triangle PFO_2 \sim \triangle BNO_2$$

и значи

$$\frac{AM}{BN} = \frac{EQ}{FP} = \frac{EO_1}{FO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{EM}{FN} = 1.$$

Тогава $\triangle AME \simeq \triangle BNF$ (по първи признак), откъдето $\angle MAE = \angle NBF$, т.е. $AC = BC$.

12.3. При $n = 1, 2$ и 3 имаме решения съответно $x = y = 10, z = 1, x = y = 5, z = 1$, и $x = 10, y = 2, z = 1$.

Ще докажем, че при $n = 4$ уравнението няма решение. Записваме го във вида $(x+y)(4z^2+1) = 4xy$. Нека $x = 2^a x_1, y = 2^b y_1$, където $a, b \geq 0$ и x_1, y_1 са нечетни числа. Ако $a > b$, то

$$(2^{a-b} x_1 + y_1)(4z^2 + 1) = 4 \cdot 2^a x_1 y_1,$$

което е невъзможно, защото лявата страна е нечетно число. Аналогично случаят $b > a$ е невъзможен. Следователно $a = b$ и

$$(x_1 + y_1)(4z^2 + 1) = 4 \cdot 2^a x_1 y_1.$$

Тогава $x_1 + y_1$ се дели на 4 и значи x_1 и y_1 са нечетни числа, които дават различни остатъци при деление на 4. Нека $x_1 = 4x_2 + 1, y_1 = 4y_2 - 1$. Тогава y_1 има прост делител p от вида $4k-1$, който дели $4z^2+1$, което е невъзможно.

Задача 12.4. Виж задача 11.4.

Зимен Математически Турнир „Атанас Радев“

9.1. Точките D, E лежат на окръжност с диаметър AB . В зависимост от ъглите на $\triangle ABC$ са възможни няколко чертежа.

Ако ъгъл C е тъп, то $\angle QPD = \angle ABC = \angle EDC = 180^\circ - \angle QED$, така че $QPDE$ е вписан. Ако ъгъл A е тъп, то $\angle QPD = \angle BAE = \angle BDE = \angle QED$, така че $QDPE$ е вписан. Ако ъгъл B е тъп или ако $\triangle ABC$ няма тъпи ъгли (и двата чертежа е необходимо да се направят), е в сила $\angle QPD = \angle BAC = \angle EDC = \angle QED$, така че D, E, P, Q лежат на една окръжност.

9.2. *Първи случай:* $p = -3$: Първото уравнение е линейно: $-6x = 4$, $x = -2/3$. Тогава $z = -2$ трябва да е решение на $z^2 - 3z = q$, откъдето $q = 4 + 6 = 10$.

Втори случай: $p \neq -3$, $D' = p^2 - p^2 - 2p + 3 = 0$, $p = 3/2$, $x = -2p/(2p+6) = -3/9 = -1/3$. Тогава $z = -1$ трябва да е решение на $z^2 + (3/2)z = q + 1$, откъдето $q = 1 - 3/2 = -1/2$.

Трети случай: $p \neq -3$, $D' = p^2 - p^2 - 2p + 3 > 0$, $p < 3/2$. При това положение условието ще е изпълнено точно когато корените на второто уравнение са $z_1 = 3x_1$, $z_2 = 3x_2$. От Виет $-p = z_1 + z_2 = 3(x_1 + x_2) = -6p/(p+3)$, откъдето $p^2 + 3p = 6p$, $p(p-3) = 0$, което се случва при $p = 0$ и $p = 3$, от които само $p = 0$ изпълнява условието на случая. От Виет $q = -z_1 z_2 = -9x_1 x_2 = 9(1-0)/(0+3) = 3$. Според обратната теорема на Виет, числата z_1, z_2 са корени на второто уравнение.

Окончателно условието се изпълнява за $(p, q) = (-3, 10)$, $(3/2, -1/2)$ и $(0, 3)$.

9.3. Имаме $2015 = 5.13.31$. Щом $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$, то $3^{3k} \equiv 1 \pmod{13}$, $3^{3k+1} \equiv 3 \pmod{13}$ и $3^{3k+2} \equiv 9 \pmod{13}$. От тези възможен остатък за n^3 е само 1, така че $m = 3k$. Тогава

$$5.13.31 = n^3 - (3^k)^3 = (n - 3^k)(n^2 + n.3^k + 3^{2k}).$$

Като отчетем, че

$$(n - 3^k)^2 < n^2 + n.3^k + 3^{2k},$$

трябва да проверим само случаите $n - 3^k = 1$ ($n^2 + n.3^k + 3^{2k} = 2015$) и $n - 3^k = 5$ ($n^2 + n.3^k + 3^{2k} = 403$). Изразяваме 3^k чрез n и заместваме, получавайки квадратно уравнение за n . Естествено решение има само вторият случай: $n = 14$, $k = 2$, $m = 6$.

9.4. Нека m_k е броят маршрути, при които след k минути мравката е в B . Поради симетрията толкова са маршрутите и до D , и до A_1 . Нека n_k е

броят маршрути, при които след k минути мравката е в C_1 . Нека p_k е броят маршрути, при които след k минути мравката е в B_1 . Поради симетрията толкова са маршрутите и до C , и до D_1 . Нека q_k е броят маршрути, при които след k минути мравката е в A . Имаме $m_{k+1} = q_k + 2p_k$, $n_{k+1} = 3p_k$, $p_{k+1} = n_k + 2m_k$, $q_{k+1} = 3m_k$. Тогава $m_{k+1} - n_{k+1} = q_k + 2p_k - 3p_k = q_k - p_k$ и $q_{k+1} - p_{k+1} = 3m_k - n_k - 2m_k = m_k - n_k$, следователно

$$\begin{aligned} m - n &= m_{2015} - n_{2015} = q_{2014} - p_{2014} = m_{2013} - n_{2013} = \dots = \\ &= q_2 - p_2 = m_1 - n_1 = q_0 - p_0 = 1. \end{aligned}$$

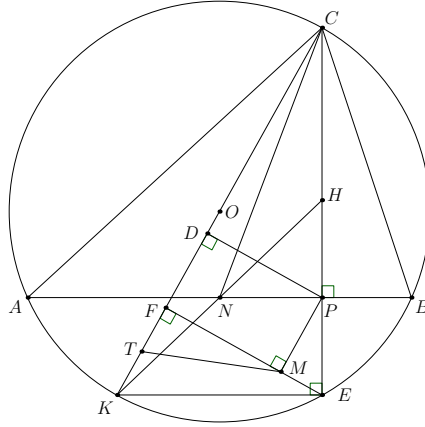
10.1. Да положим $xy = a$, $yz = b$ и $zx = c$, като отбележим, че $x^2 = \frac{ac}{b}$, $y^2 = \frac{ab}{c}$ и $z^2 = \frac{bc}{a}$. От третото уравнение имаме $c = \frac{a+1}{a}$, а оттук и от второто $\frac{c}{a}$ уравнение получаваме

$$b = \frac{5}{2} + \frac{a}{a+1} = \frac{7a+5}{2a+2}.$$

Тогава първото уравнение дава $b = \frac{5}{2} + \frac{2a+2}{7a+5}$, откъдето $21a^2 - 5b - 16 = 0$ с корени $a_1 = 1$ и $a_2 = -\frac{16}{21}$. Следователно възможните тройки (a, b, c) са $(1, 3, 2)$ и $\left(-\frac{16}{21}, -\frac{7}{10}, -\frac{5}{16}\right)$. Второто решение отпада (защо?), а от първото получаваме $x = \pm\sqrt{\frac{a_1c_1}{b_1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и аналогично $y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $z = \pm\sqrt{6}$. Тъй като x , y и z са с еднакви знаци (следва от положителността на a , b и c), заключаваме, че решенията са $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{6}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{6}\right)$.

10.2. Първи начин. Първо ще докажем, че $KE = 2NP$. Нека H е симетричната точка на K относно N . Тогава ON е средна отсечка в $\triangle HKS$ и значи $ON \parallel CH$ и $CH \perp AB$. Отсечката CK е диаметър в k , откъдето получаваме, че $\angle KEN = 90^\circ$. Следователно $KE \parallel NP$ и NP е средна отсечка в $\triangle KEN$, откъдето $KE = 2NP$.

Ще докажем, че $\triangle MTF \sim \triangle CNP$, откъдето исканото следва. Да означим с D петата на перпендикуляра от P към CK . Имаме $\frac{MF}{TF} = \frac{2PD}{FK}$. Освен това $\triangle CDP \sim \triangle EFK$ и следователно $\frac{PD}{FK} = \frac{CP}{KE}$, което означава, че $\frac{MF}{TF} = \frac{2CP}{KE}$. Остава да си спомним, че $KE = 2NP$ и следователно $\frac{MF}{TF} = \frac{CP}{NP}$, с което въпросното подобие е доказано.



Втори начин. Имаме, че $CK = 2R$ и $\angle ECK = \beta - \alpha$, откъдето $KE = 2R \sin(\beta - \alpha)$. Също така имаме

$$NP = NB - PB = \frac{c}{2} - a \cos \beta = R(\sin \gamma - 2 \sin \alpha \cos \beta) = R \sin(\beta - \alpha)$$

и следователно $KE = 2NP$. Отново D е петата на перпендикуляра от P към CK и

$$\cot \angle MTF = \frac{TF}{FM} = \frac{KF}{2DP} = \frac{KE \sin(\beta - \alpha)}{2CP \sin(\beta - \alpha)} = \frac{2NP}{2CP} = \cot \angle PNC.$$

10.3. Нека $k < 2^{n+1}$ е такова естествено число, че $S(n, k) = 1^{2^n} + 2^{2^n} + \dots + k^{2^n}$ се дели на 2^n . Тъй като $(2i)^{2^n}$ се дели на 2^{2^n} , достатъчно е да разгледаме само нечетните събираеми в $S(n, k)$. Ако j е нечетно, по теоремата на Ойлер $j^{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{2^n}$ и следователно $j^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^n}$. Тогава

$$S(n, k) \equiv \left[\frac{k+1}{2} \right] \pmod{2^n}$$

($\left[\frac{k+1}{2} \right]$ е броят на нечетните числа, ненадминаващи k). Ясно е, че

$$\left[\frac{k+1}{2} \right] \leq 2^n, \text{ като равенство се достига точно когато } k = 2^{n+1} - 1.$$

10.4. Отговор: Четири. Да номерираме стълбовете на дъската отляво надясно и редовете ѝ отгоре надолу. Всяко квадратче ще означаваме с наредената двойка от номера на реда и номера на стълба му.

(Конструкция) Точно четири разлики имаме например, когато квадратчетата са номерирани отляво надясно и отгоре надолу, т.е. когато квадратчето (i, j) съдържа числото $10(i - 1) + j$.

(Оценка) *Първи начин.* Да разгледаме квадратче, от което могат да се направят 8 хода с коня (ясно е, че такова има). Тогава поне 4 от разглежданите разлики са с един и същи знак и са различни.

Втори начин. Да оцветим в червено всички квадратчета освен ъгловите, съседните на ъгловите по страна и тези гранични, които се намират през едно от ъглово. (Същото разсъждение можем да проведем и ако оцветим в червено само 16 квадратчета – $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ и получените от тези три чрез завъртане на 90° , 180° и 270° около $(4, 4)$.) Тогава всяко червено квадратче е съседно с хода на коня с поне четири други. Да разгледаме най-малкото число, написано в червено квадратче: неговите съседи с хода на коня ни дават поне четири различни разлики.

11.1. Да означим с d разликата на дадената аритметична прогресия. Тъй като $2015 = 5.13.31$ и редицата е растяща, то a_5, a_{13}, a_{31} образуват геометрична прогресия в този ред. Следователно

$$(a_1 + 12d)^2 = (a_1 + 4d)(a_1 + 30d),$$

откъдето $12d = 5a_1$. Това равенство е изпълнено при $a_1 = 24$, $d = 10$ и тогава намираме $a_{200} = 24 + 199.10 = 2014$. Ако допуснем, че за някои a_1 и d е изпълнено $2015 = a_n = a_1 + (n - 1)d$, след заместване $a_1 = \frac{12}{5}d$ получаваме $d(5n + 7) = 5.2015$. Това равенство е невъзможно, понеже 5.2015 няма делители от вида $5n + 7$. Следователно най-голямата възможна стойност на a_n е 2014.

11.2. Нека M е средата на AC и нека N е такава, че A е среда на NC . Триъгълниците BHC и OMC са подобни. Освен това $\frac{CH}{HP} = \frac{1}{3} = \frac{CM}{MN}$, откъдето $\triangle BCP \sim \triangle OCN$. Оттук получаваме $\angle QAC = \angle QPC = \angle ONC$ и тогава $AQ \parallel ON$. Сега AQ се явява средна отсечка в $\triangle CON$, откъдето следва, че AQ разполовява отсечката CO .

11.3. Ако от всеки връх излиза поне един път, то тръгвайки от произволен град, ще образуваме затворен маршрут (защото влизайки в един град винаги можем да излезем по някой път). Следователно има град, от който не излиза нито един път. Разглеждайки останалите градове, по индукция получаваме, че градовете могат да се наредят в редица $A_1, A_2, \dots, A_n$, като пътят между всеки два града е към града с по-голям номер. Да поставим такса на път

$A_i A_j, i < j$ равна на $j - i$. Тогава всеки маршрут между два града A_p и A_q за $p < q$ има цена $q - p$ и следователно отговорът на поставения въпрос е „да“.

11.4. Ще докажем, че търсените числа са от вида $n = l(l - 1)$, където $l \geq 2$ е някакво естествено число.

При $n = l(l - 1)$ имаме

$$k = \left\lfloor \frac{\sqrt{4n+1}+1}{2} \right\rfloor = l \implies \left\lfloor \frac{n}{k} + k \right\rfloor = 2l - 1,$$

а поради $(2l-2)^2 < 4l(l-1) < (2l-1)^2$ имаме $[2\sqrt{n}] = 2l - 2$, т.е. равенството от условието е изпълнено.

Ще докажем, че когато $n \neq l(l - 1)$ е изпълнено равенството

$$\left\lfloor \frac{n}{k} + k \right\rfloor = [2\sqrt{n}].$$

В този случай k е най-голямото естествено число, за което $k(k - 1) < n$.

Ако предположим, че за някое $l \in N$ имаме $\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2} \geq l > \frac{\sqrt{4n}+1}{2}$, то $1 + 4n \geq (2l - 1)^2 > 4n$ откъдето $4n + 1 = (2l - 1)^2$, т.е. $n = l(l - 1)$, противоречие. Следователно

$$k = \left\lfloor \frac{\sqrt{4n+1}+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{4n}+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

т.е. $k = [\sqrt{n}]$ или $k = [\sqrt{n}] + 1$.

Имаме $k(k - 1) < n < k(k + 1)$. Ще разгледаме три случая:

Ако $k(k + 1) > n > k^2$, то $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = k$ и $\sqrt{n} > k$, откъдето $\{\sqrt{n}\} < \frac{1}{2}$. Оттук $2[\sqrt{n}] = [2\sqrt{n}]$ и следователно

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + k = 2k = 2[\sqrt{n}] = [2\sqrt{n}].$$

Ако $k^2 > n > k(k - 1)$, то $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = k - 1$ и $k > \sqrt{n}$, откъдето $k = [\sqrt{n}] + 1$. Оттук $\{\sqrt{n}\} > \frac{1}{2}$, т.е. $2[\sqrt{n}] = [2\sqrt{n}] - 1$. Следователно

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + k = 2k - 1 = 2([\sqrt{n}] + 1) - 1 = 2[\sqrt{n}] + 1 = [2\sqrt{n}].$$

Ако $n = k^2$, то отново $\left\lfloor \frac{n}{k} + k \right\rfloor = 2k = [2\sqrt{n}]$.

Във всички случаи получихме $\left[\frac{n}{k} + k\right] = [2\sqrt{n}]$.

12.1. Нека $AD \cap BC = E$, $\angle AEB = \theta$, $AB = a$, $CD = b$, $CE = x$, $DE = y$ и $AD = BC = z$. Като извадим равенствата

$$a^2 = (x \pm z)^2 + (y \pm z)^2 - 2(x \pm z)(y \pm z) \cos \theta,$$

$$b^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta,$$

получаваме, че $a^2 - b^2 = 2z(\pm x \pm y + z)(1 - \cos \theta)$. Ако знакът е отрицателен, то $z > x + y > x$ и значи D е между A и E , което противоречи на първото равенство. Следователно

$$S_{ABCD} = S_{ABE} - S_{CDE} =$$

$$((x + z)(y + z) - xy) \frac{\sin \theta}{2} = z(x + y + z) \frac{\sin \theta}{2} = \frac{a^2 - b^2}{4} \cotg \frac{\theta}{2},$$

откъдето $\cotg \frac{\theta}{2} = 1$, т.е. $\theta = 90^\circ$.

12.2. Ще търсим точки $C(x_1, y_1)$ и $D(x_2, y_2)$ от графиките на съответните функции така, че допирателните в тях да са перпендикулярни на правата CD . Тогава е ясно, че разстоянието между графиките е равно на $|CD|$.

Двете допирателни са перпендикулярни на CD точно когато техните ъглови коефициенти $2(x_1 - 6)$ и $-2x_2$ са равни на $-1/k$, където $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ е ъгловият коефициент на CD . Тогава $x_1 - 6 = -x_2$ и

$$-2x_2 = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} = \frac{6 - 2x_2}{-2x_2^2}.$$

Следователно

$$0 = 4x_2^3 + 2x_2 - 6 = (x_2 - 1)(4x_2^2 + 4x_2 + 6),$$

откъдето $x_2 = 1$ и

$$|CD| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(a - 2x_2)^2 + (2x_2^2)^2} = 2\sqrt{5}.$$

12.3. *Първи начин.* Нека $P(x) = x^8 + x + 1$ и $Q(x) = x^2(x - 1)(x^3 + 1) + 1$. Тогава

$$P(x) = x^8 - x^2 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x).$$

Очевидно $x^2 + x + 1$ е неразложим полином над $\mathbb{Z}$. Да допуснем, че Q е разложим полином над $\mathbb{Z}$. Понеже P няма реални корени, то полином от вида $x^2 + ax \pm 1$ дели Q (защо?). Значи за някой комплексен корен α на Q имаме, че $1/\alpha$ или $-1/\alpha$ е корен на Q . В първия случай следва, че

$$0 = Q(\alpha) - \alpha^6 Q(1/\alpha) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha^3 + 1),$$

откъдето $\alpha^3 + 1 = 0$ и значи $Q(\alpha) = 1$, което е противоречие. Във втория случай имаме, че

$$0 = Q(\alpha) - \alpha^6 Q(-1/\alpha) = \alpha(1 - \alpha^2)(\alpha^2 + \alpha - 1),$$

откъдето $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$. Тогава

$$0 = Q(\alpha) = (\alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 2)(\alpha^2 + \alpha - 1) - 4\alpha + 3 = 3 - 4\alpha,$$

което отново е противоречие. И така, Q е неразложим полином над $\mathbb{Z}$, с което задачата е решена.

Втори начин. Както по-горе имаме $x^8 + x + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x)$ и остава да докажем, че полиномът $Q(x)$ е неразложим над $\mathbb{Z}$. Да допуснем противното. Тогава редуцираният по модул 2 полином $Q_2(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$ е разложим над $\mathbb{Z}_2$. Тъй като очевидно $Q_2(x)$ няма корени в $\mathbb{Z}_2$, той има неразложим делител от втора или от трета степен. Единственият неразложим над $\mathbb{Z}_2$ полином от втора степен е $x^2 + x + 1$, а от трета степен има два неразложими над $\mathbb{Z}_2$ полинома: $x^3 + x + 1$ и $x^3 + x^2 + 1$ (тези, които нямат корени в $\mathbb{Z}_2$). Лесно се проверява, че нито един от тези полиноми не дели $Q_2(x)$ (например $Q_2(x) = (x^2 + x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x) + 1$), което е противоречие.

Задача 12.4 Виж Задача 11.4.

Пролетни Математически Състезания

9.1. Отговор: Броят на (различните) реални решения за x е 2 при $r > 0, 25$, 4 при $r = 0, 25$ и при $r = -6, 6$ при $r \in (-\infty, -6) \cup (-6, 0, 25)$.

9.2. Нека точка $D \in \overline{PQ}$ е такава, че $DA = DB$ и $\angle ADB = 90^\circ - \gamma$. Ще докажем, че това е търсената точка, т.е. че $QD = DP$.

При стандартни означения за ъглите на $\triangle ABC$ имаме $\angle DAB = \angle ABD = 45^\circ + \frac{\gamma}{2}$. От $PE = AF$, $BE = QF$ и $\angle BEP = \angle AFQ = 90^\circ$ следва, че $\triangle BEP \cong \triangle QFA$, откъдето $BP = AQ$ и $\angle FAQ = \angle EPB$.

$$\begin{aligned}\angle DBP &= \angle PBE + \beta + 45^\circ + \frac{\gamma}{2} \\ &= 90^\circ - \angle FAQ + \beta + 45^\circ + \frac{\gamma}{2} \\ &= 360^\circ - \angle FAQ - (45^\circ + \frac{\gamma}{2}) - \alpha \\ &= \angle DAQ.\end{aligned}$$

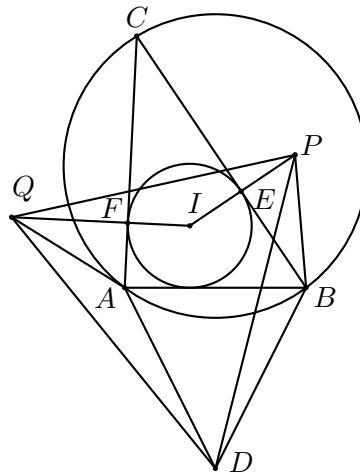
Следователно $\triangle QAD \cong \triangle PBD$, т.е. $QD = DP$.

9.3. Лявата страна е равна на $(x + 2y)^2 + (x - y)^2$ и се дели на простото число $31 \equiv 3 \pmod{4}$. Тогава според класическото следствие от Теоремата на Ферма имаме $31|x + 2y$ и $31|x - y$. Тогава $31|3y$, $31|y$, така че $31|x$. Ако запишем $x = 31a$, $y = 31b$, заключаваме, че двете страни на уравнението се делят на 31^2 . След като разделим на 31^2 и означим $m = n/31$, получаваме $(a + 2b)^2 + (a - b)^2 = 65m$. Най-малкото възможно m е 1 (и $n = 31$). Ако 65 е сбор на два квадрата, то по-големият от тях е по-голям от 32, така че е 36, 49 или 64. Възможни са само представянията $65 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$. Като отчетем знаците и факта, че разликата на двата квадрата се дели на 3, получаваме следните решения:

$a + 2b$	7	-7	4	-4	8	-8	1	-1
$a - b$	4	-4	7	-7	-1	1	-8	8
a	5	-5	6	-6	2	-2	-5	5
b	1	-1	-1	1	3	-3	3	-3

Окончателно, $n = 31$ и решенията са $(x, y) = (155, 31), (-155, -31), (186, -31), (-186, 31), (62, 93), (-62, -93), (-155, 93)$ и $(155, -93)$.

9.4. Ако има n точки от даден цвят, те образуват $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ триъгълника. На симетралата на всяка двойка точки може да има най-много две от дадените точки, така че равнобедрените триъгълници с тази основа са не



повече от $\frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n(n-1)$. Остават поне

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}$$

разностранни триъгълника с върхове в този цвят. Ще бележим

$$S(n) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}.$$

Да допуснем, че в друг цвят има m точки и $n-1 > m$. Ще докажем, че $S(n) + S(m) > S(n-1) + S(m+1)$. Преобразуваме еквивалентно:

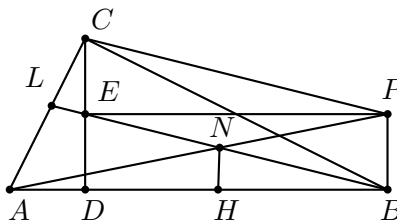
$$S(n) - S(n-1) > S(m+1) - S(m)$$

$$\begin{aligned} n(n-1)(n-8) - (n-1)(n-2)(n-9) &> (m+1)m(m-7) - m(m-1)(m-8) \\ (n-1)(n-6) &> m(m-5), \end{aligned}$$

което е вярно, понеже $n-1 > m > 0$ и $n-6 > m-5 > 0$. Следователно е достатъчно да докажем твърдението в случая, когато бройките точки в различните цветове се различават с не повече от 1. Понеже $109 = 7.15 + 4$, в този случай ще имаме по 16 точки в 4 от цветовете и по 15 в останалите 3 цвята. Понеже $S(15) = 245$, $S(16) = 320$ и $4.320 + 3.245 = 2015$, твърдението следва.

10.1. *Отговор.* $a \in (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [2, +\infty)$. Както $f(x)$, така и $g(x)$, има два различни реални корена. Триъгълникът, определен от точките на пресичане на графиката на $f(x)$ с координатните оси има страна върху абсцисата с дължина $|x_1 - x_2|$ (където x_1 и x_2 са корените на $f(x)$) и височина към тази страна $|f(0)| = 2$. Следователно $S_f = 4(x_1 - x_2)^2 = 4[(a+1)^2 + 8] = 4a^2 + 8a + 36$. Аналогично $4S_g = a^2 + 12a + 40$. Неравенството от условието $S_f \geq S_g$ е еквивалентно на $4a^2 + 8a + 36 \geq a^2 + 12a + 40$, откъдето $3a^2 - 4a - 4 \geq 0$ или $a \in (-\infty, -2/3] \cup [2; +\infty)$.

10.2. Нека петата на перпендикуляра от N към AB означим с H .



Използвайки, че $EBPC$ е успоредник и теоремата на Талес, получаваме

$$\frac{NB}{CP} = \frac{NB}{BE} = \frac{NH}{ED} = \frac{NH}{BP} = \frac{AN}{AP} = \frac{LN}{CP}$$

и оттук $LN = NB$.

10.3. Не. Ако n има исканото свойство, то $n = p^{48}$, където p е просто, или $n = p^6 q^6$, където p и q са различни прости числа.

В първия случай, подреждането е невъзможно, защото сумата на числата в реда, който съдържа делителя 1, ще дава остатък 1 при деление на p , докато сумата на числата във всеки друг ред ще се дели на p . Остава да разгледаме втория случай. Без ограничение на общността можем да смятаме, че $q > p$.

Нека $S = \{1, p, \dots, p^6\}$. Ако всеки ред съдържа точно едно число от S , то като разгледаме по модул q сумите на редовете, които съдържат 1 и p , получаваме $p \equiv 1 \pmod{q}$, т.е. $q | p - 1$, което е невъзможно.

Нека сега има ред, в който не се среща число от S . Тогава делителите в този ред се делят на q , тяхната сума се дели на q и следователно сумата на всички числа в таблицата се дели на q . От последното $q | 1 + p + \dots + p^6$, т.е. $p^7 \equiv 1 \pmod{q}$ и показателят на p по модул q е равен на 7.

Тъй като всеки ред и всеки стълб или не съдържа числа от S , или съдържа поне две числа от S , то има ред или стълб, който съдържа точно две числа от S . Следователно за някои $0 \leq a < b \leq 6$ имаме, че $q | p^a + p^b$. Оттук $p^{2a} \equiv p^{2b} \pmod{q} \Rightarrow 7 | 2(a - b)$, което е противоречие.

Второ решение. (Енчо Мишинев) Да означим с S общата сума по редове. Тъй като n участва в таблицата, имаме $S > n$. Тогава във всеки от седемте реда има делител, който е по-голям от $\frac{S}{7}$. Но най-много шест от делителите на n са по-големи от $\frac{n}{7}$ (такива могат да са само $\frac{n}{q}$ за $q = 1, 2, \dots, 6$). Полученото противоречие показва, че исканото разположение е невъзможно.

10.4. От условието следва, че произволни $m, n \in \mathbb{N}$ е изпълнено

$$f(f(f(f(m+n)))) = f(f(f(m) + f(n))) = f(f(m)) + f(f(n)).$$

Следователно за всички естествени числа m, n, p имаме

$$f(f(m)) + f(f(n+p)) = f(f(f(f(m+n+p)))) = f(f(m+n)) + f(f(p)).$$

Но тъй като $f(f(m+n)) = f(m) + f(n)$ и $f(f(n+p)) = f(n) + f(p)$, получаваме

$$f(f(m)) + f(n) + f(p) = f(f(p)) + f(m) + f(n).$$

Тогава за $p = 1$ имаме, че $f(f(m)) = f(m) + c$, където $c = f(f(1)) - f(1)$. Следователно $f(m + n) = f(f(m + n)) - c = f(m) + f(n) - c$. Полагаме $g = f - c$, което преобразува предното уравнение в $g(m + n) = g(m) + g(n)$ и по индукция лесно получаваме $g(n) = ng(1)$.

Следователно f има вида $f(n) = an + b$, където a и b са константи. Проверката показва, че $a = 1$, т.е. решенията са $f(n) = n + b$, където b е произволна цяла неотрицателна константа.

11.1. *Отговор.* 245.

11.2. От синусовата теорема за $\triangle CPB$ и $\triangle CPA$ имаме:

$$\frac{a}{\sin \angle CPB} = \frac{CP}{\sin \angle PBC} \quad \text{и} \quad \frac{b}{\sin \angle CPA} = \frac{CP}{\sin \angle PAC}.$$

След почленно разделяне на горните две равенства, получаваме $a \sin \angle PBC = b \sin \angle PAC$. От друга страна, от $S_{AMC} = S_{BMC}$ следва, че $a \sin \angle NCB = b \sin \angle NCA$. От $CN = BN$ следва, че $\angle PBC = \angle NBC = \angle NCA$ и от горните две равенства получаваме $\sin \angle PAC = \sin \angle NCA$. Понеже $\triangle ABC$ е остроъгълен, получаваме $\angle PAC = \angle NCA = \angle MCA$.

11.3. Нека при даден ход да означим с n броя на бонбоните, които съответният играч е избрал да раздели на три купчини. Да означим с A този, който е на ход, а с B другия играч. Ще докажем с индукция по n , че A губи при n нечетно и печели при $n > 2$ четно. При 3 и 4 бонбона твърдението е очевидно. Нека то е вярно за всяко $n \leq k$. Ако $k + 1$ е четно число, A може да получи разделяне на 1, 1, $k - 1$ бонбона и B трябва да разделя купчина с k бонбона. Понеже k е нечетно число, той ще загуби. Ако $k + 1$ е нечетно число, разделянето от A на три купчини може да стане само с три нечетни числа или едно нечетно и две четни. И в двата случая съществуват две купчини с общ брой бонбони четно число, по-голямо от 2. От индукционното допускане следва, че B може да спечели.

Ще покажем, че Петър има печеливша стратегия само когато две от числата a , b и c са единици, а третото число е четно (например $a = b = 1$ и c четно). Иван трябва да разделя купчинка с $c + 1$ бонбона и понеже $c + 1$ е нечетно, той ще загуби. Във всички останали случаи в трите купчинки ще има или две четни числа (и тогава Иван ще изяде третата купчина и ще разделя четен брой бонбони) или две нечетни числа, едното от които е по-голямо от 1 (Иван ще изяде третата купчина и ще разделя четен брой бонбони), като и в двата случая броят на бонбоните е по-голям от 2.

11.4. Едно число $x \in [1; n^4 + 4]$ ще наричаме „добро“, ако $\frac{x^4 + 4}{n^4 + 4}$ е цяло число. Лесно се забелязва, че:

1. ако x е добро, то $n^4 + 4 - x$ също е добро.

2. ако $x > n$ е добро, то $\frac{x^4 + 4}{n^4 + 4} \geq 5$. Ако $x^4 + 4 = 2(n^4 + 4)$, ще получим, че n е четно; ако $x^4 + 4 = 3(n^4 + 4)$ ще получим противоречие по модул 3 и при $x^4 + 4 = 4(n^4 + 4)$ ще получим за $x = 2x_0$, че $(2x_0^2 - n^2)(2x_0^2 + n^2) = 3$, което е възможно само при $x_0 = n = 1$.

Имаме $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. Да положим $a = n^2 - 2n + 2$ и $b = n^2 + 2n + 2$, като $n^4 + 4 = ab$ и $a > 1$ и $b > 1$ са нечетни, взаимнопрости числа.

Съгласно КТО съществува естествено число $x \in [1, n^4 + 4]$ такова, че $x \equiv n \pmod{a}$ и $x \equiv -n \pmod{b}$. Тогава $n^4 + 4$ дели $(x^4 + 4) - (n^4 + 4)$, т.е. x е добро число.

Лесно се вижда, че случаите $x = n$ и $x = n^4 - n + 4$ водят до противоречие. Освен това $x < n$ е невъзможно, а от 1. следва, че $x < n^4 - n + 4$.

Ако допуснем, че $x \geq \frac{n^4 + 4}{2}$, то ще имаме, че $x' = n^4 + 4 - x$ е добро число, за което $x' < \frac{n^4 + 4}{2}$ (понеже $\frac{n^4 + 4}{2}$ не е цяло число). Следователно можем да считаме, че $x < \frac{n^4 + 4}{2}$. Ако $x \geq \sqrt[4]{5}n$, то от 2. следва $5n^4 + 4 \geq x^4 + 4 \geq 5n^4 + 20$, което е противоречие. Следователно $x \in \left(\sqrt[4]{5}n; \frac{n^4 + 4}{2}\right)$.

12.1. *Отговор.* б) $a = 1$ или $a = -1$. а) Производната $f'(x) = 3x^2 + 8x + 6$ е с отрицателна дискриминанта, т.е. $f'(x) > 0$ за всяко x . Следователно $f(x)$ е растяща функция.

б) Записваме даденото уравнение във вида

$$x^3 + 4x^2 + 6x = ax^2 + x - a + 4\sqrt[3]{(ax^2 + x - a)^2} + 6\sqrt[3]{ax^2 + x - a}.$$

Сега от а) следва, че $x^3 = ax^2 + x - a$, откъдето $(x - a)(x + 1)(x - 1) = 0$. Уравнението има точно две решения, ако $a = 1$ или $a = -1$.

12.2. Достатъчно е да докажем, че някой член на редицата дели друг член (Защо?). От условието следва, че измежду всеки три последователни числа поне едно е член на редицата.

Нека a е член на редицата и да разгледаме числата $b = a + a(a + 1)(a + 2)$, $b + 1 = a + 1 + a(a + 1)(a + 2)$ и $b + 2 = a + 2 + a(a + 1)(a + 2)$. Тъй като a дели b , ако b е член на редицата, твърдението е доказано. Нека b не е член на редицата. Тогава едно от числата $b + 1$ или $b + 2$ е член на редицата (нека това е $b + 1$, като другият случай се разглежда аналогично). За числата

$c = b + b(b+1)(b+2)$, $c+1 = b+1+b(b+1)(b+2)$ и $c+2 = b+2+b(b+1)(b+2)$ единствено $c+2$ може да бъде член на редицата (защото a дели c и $b+1$ дели $c+1$). Сега за числата $d = c + c(c+1)(c+2)$, $d+1 = c+1+c(c+1)(c+2)$ и $d+2 = c+2+c(c+1)(c+2)$ имаме a дели d , $b+1$ дели $c+1$ и $c+2$ дели $d+2$. Понеже едно от тези три последователни числа е член на редицата, твърдението е доказано.

12.3. Тъй като A_1B_1MN е вписан, то нека $\angle A_1B_1M = \angle A_1NB = \delta$ и $\angle B_1A_1N = \angle B_1MA = \varphi$. Нека P и Q са проекциите на B_1 и A_1 върху AB . Лесно се вижда, че $PM = B_1M \cos \varphi = A_1B_1 \cos \delta \cos \varphi$ и аналогично $QN = A_1B_1 \cos \varphi \cos \delta$, т.е. $MP = QN$. Сега от $AB_1 = AB \cos \alpha$, $AP = AB \cos^2 \alpha$, $BA_1 = AB \cos \beta$, $BQ = AB \cos^2 \beta$ и от условието следва

$$2AB \cos \alpha - AB \cos^2 \alpha = 2AB \cos \beta - AB \cos^2 \beta \iff$$

$$(\cos \alpha - \cos \beta)(2 - \cos \alpha - \cos \beta) = 0.$$

Щом $2 > \cos \alpha + \cos \beta$, то $\cos \alpha = \cos \beta$ и $\alpha = \beta$.

12.4. Виж Задача 11.4.

63. Национална олимпиада по математика, Областен кръг

9.1. От формулите на Виет имаме

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5^2 + 2 \cdot 3 = 31$$

и следователно $2z^2 - 4z - \sqrt{z^2 - 2z - 10} = 2015 : 31 = 65$. Полагаме $t = \sqrt{z^2 - 2z - 10} \geq 0$ и условието добива вида $2t^2 + 20 - t = 65$, т.е. $2t^2 - t - 45 = 0$.

Единственият неотрицателен корен на това уравнение е $t = \frac{1 + \sqrt{1 + 360}}{4} =$

5. Получаваме $z^2 - 2z - 10 = 5^2$, $z^2 - 2z - 35 = 0$, чиито решения са $z = 7$ и $z = -5$.

9.2. Щом $\angle BC_1A_1 = \angle BAC$, то $A_1C_1 \parallel AC$ и следователно ACA_1C_1 е равнобедрен трапец. Ако $\angle CAB = \gamma$, то $\angle ABC = 180^\circ - \gamma$ и $\angle AB_1A_1 = 2\gamma$ като външен за $\triangle A_1B_1C$, следователно ABA_1B_1 е вписан. Тъй като AA_1 и CC_1 са диагонали в равнобедрен трапец, имаме $\angle C_1CA_1 = \angle A_1AC_1 = \angle BB_1A_1$. Отсечката PA_1 се вижда под един и същ ъгъл от точките B_1 и C , т.е. четириъгълникът A_1PB_1C е вписан, откъдето $\angle B_1PC = \angle B_1A_1C$. Следователно $\angle B_1PC_1 + \angle B_1AC_1 = 180^\circ$, т.е. AB_1PC_1 е вписан.

9.3. Едно число е мощно, ако всеки негов прост делител е поне от втора степен. Ако разлагането на различни прости множители на едно число е $p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$, то мощта му е равна на $s_1 s_2 \dots s_k$, понеже за степента на делителя му p_k има s_k възможни избора $(0, 2, 3, \dots, s_k)$.

а) Ако изберем 8 поредни числа, някое от тях ще се дели на 2^2 , без да се дели на 2^3 , така че мощта му ще се дели на 2. Има 7 поредни числа, всяко от които има мощ, която не се дели на 2, например 29, 30, 31, $\dots$, 35.

б) Ако изберем 16 поредни числа, някое от тях ще се дели на 2^3 , без да се дели на 2^4 , така че мощта му ще се дели на 3. Има 15 поредни числа, всяко от които има мощ, която не се дели на 3, например 9, 10, 11, $\dots$, 23.

в) Ако изберем $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5$ поредни числа, някое от тях (m) е от вида $A \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$, където A дава остатък 1, 7, 13, 17, 23 или 29 при деление на 30. Тогава A не се дели на 2, 3 и 5, така че мощта на m е кратна на $5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015$.

От друга страна, в интервала $(31 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5, 37 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5)$ има $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5 - 1$ поредни естествени числа. Да допуснем, че мощта на някое от тях (n) е 2015. Тъй като $11^5 > 37 \cdot 5^5$, то n не може да е от вида $2^{31} \cdot 3^{13} \cdot p^5$, където p е просто, по-голямо от 7. От друга страна $5 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 < 31 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$ и $11 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^5 > 37 \cdot 2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$, така че n не може да бъдератно на $2^{31} \cdot 3^{13} \cdot 7^5$. Също $3^{18} > 2^{18} \cdot 37$, така че n не може да е от вида $3^{31} \cdot 2^{13} \cdot p^5$, където $p \geq 5$. Всички останали варианти за получаване на мощ 2015 водят до значително по-големи числа. Отговор: $2^{32} \cdot 3^{14} \cdot 5^5 - 1$.

9.4. Отговор: $m = 2n = 40$. Кодираме с буквите И, З, С и Ю според посоката. Тогава броят на буквите С трябва да е колкото буквите Ю (нека са по k), а на И колкото З (по $n - k$, където $m = 2n$). Броят на тези кодове е

$$\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} = \binom{2n}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

Общо получаваме $\binom{2n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}^2$ маршрута. Тук използвахме тъждеството $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$, което може да се докаже комбинаторно по следния начин – ако в клас има n момчета и n момичета, то лявата страна представя броя начини да изберем n от децата, а дясната – в избраната група да има k момчета и $n - k$ момичета.

Остава да открием най-малкото n , за което $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ се дели на 5.13.31. Заради делимостта на 31 е необходимо $n \geq 16$. Стойностите $n =$

16, ..., 19 не са подходящи, понеже степента на 13 в числителя и знаменателя на $\frac{(2n)!}{n!n!}$ е еднаква. При $n = 20$ степента на 5, 13 и 31 в числителя е по-голяма, отколкото в знаменателя, така че тази стойност е подходяща.

10.1. Условието $f(1) = 2$ и $f(2) = 1$ дават съответно $a+b+c = 2$ и $4a+2b+c = 1$, откъдето получаваме $b = -3a - 1$ и $c = 2a + 3$. Следователно $f(x) = ax^2 - (3a+1)x + 2a+3$, а дискриминантата на $f(x)$ е $(3a+1)^2 - 4a(2a+3) = a^2 - 6a + 1$.

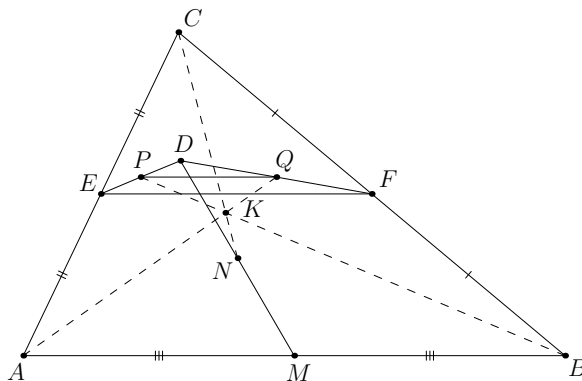
Условието $4x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_2^2 = 15$ дава последователно $4(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2 = 15$,

$$\frac{4(3a+1)^2}{a^2} - \frac{20(2a+3)}{a} = 15$$

и $19a^2 + 36a - 4 = 0$ с решения $a_1 = -2$ и $a_2 = \frac{2}{19}$. Лесно се вижда, че и в двата случая дискриминантата е положителна, т.е. и двете намерени стойности на a дават решение на задачата. Имаме $b = 5$ и $c = -1$ при $a = -2$, $b = -\frac{25}{19}$ и $c = \frac{61}{19}$ при $a = \frac{2}{19}$.

10.2. Нека $AQ \cap BP = K$.

От съответните средни отсечки в $\triangle ABC$ и в $\triangle EFD$ следва, че $PQ \parallel AB$ и $4PQ = AB$. От теоремата на Талес получаваме $\frac{PK}{KB} = \frac{1}{4}$. Нека $CN \cap BP = K'$. Както по-горе получаваме, че $\frac{PK'}{K'B} = \frac{1}{4}$, откъдето следва, че $K \equiv K'$ и следователно правите AQ , BP и CN се пресичат в точка K .



10.3. Нека a и n са такива, че $A = 17^n + 87^n a$ се дели на 455. Тъй като $455 = 5 \cdot 7 \cdot 13$, ще разгледаме израза A поотделно по модули 5, 7 и 13.

Имаме $0 \equiv A \equiv 2^n + 2^n a \pmod{5}$, откъдето $a \equiv -1 \pmod{5}$, и аналогично $0 \equiv A \equiv 3^n + 3^n a \pmod{7}$, откъдето $a \equiv -1 \pmod{7}$, $0 \equiv A \equiv 4^n + (-4)^n a \pmod{13}$, откъдето $a \equiv (-1)^{n+1} \pmod{13}$.

При нечетно n получаваме китайска теорема за остатъците във вида $a \equiv -1 \pmod{5}$, $a \equiv -1 \pmod{7}$, $a \equiv 1 \pmod{13}$, а при четно n имаме системата $a \equiv -1 \pmod{5}$, $a \equiv -1 \pmod{7}$, $a \equiv -1 \pmod{13}$. Решаването на тези системи дава съответно $a \equiv 209 \pmod{455}$ (например проверяваме последователно 34, 69, 104 и т.н. по модул 13 до намиране на остатък 1) и

$a \equiv 454 \pmod{455}$ (очевидно). Сега вече е очевидно, че търсеното a е 209 (имаме $455 \mid 17^n + 209.87^n$ при нечетно n , в частност и при $n = 1$).

10.4. За всяко число $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ означаваме с $\mathcal{X}_i$ множеството от подмножества на $A = \{1, 2, \dots, 2015\}$ със сума на елементите, даваща остатък i при деление на 5. Нека $|\mathcal{X}_i| = x_i$. Ще докажем, че $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Нека $\sigma : A \rightarrow A$ е цикличната пермутация на елементите от A , т.е. $\sigma(i) = i + 1$ за всяко $1 \leq i \leq 2014$ и $\sigma(2015) = 1$. На $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathcal{X}_i$ съпоставяме множеството $X' = \sigma(X) = \{\sigma(a_1), \sigma(a_2), \dots, \sigma(a_n)\}$. От дефиницията на σ следва, че сумата на елементите на X' е сравнима с $i + n$ по модул 5. Тъй като n не се дели на 5, имаме $i + n \equiv j \pmod{5}$, $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, където $j \neq i$. Освен това числото j е едно и също за различните $X \in \mathcal{X}_i$, т.е. винаги $\sigma(X) \in \mathcal{X}_j$. Образите на различни множества са различни, т.е. съпоставката е инективна. Следователно $x_i \leq x_j$.

Прилагайки същото разсъждение за $\sigma : X_j \rightarrow X_k$ получаваме $x_j \leq x_k$, $k \neq j$, $k \neq i$ и т.н., като цикълът се затваря на петата стъпка. Следователно $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Тъй като $\binom{2015}{n} = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5x_0$, търсеният брой е $x_0 = \frac{\binom{2015}{n}}{5}$.

11.1. Уравнението е еквивалентно на $(2^x - a)(2^{2x} - a2^x + a - 1) = 0$, откъдето намираме $2^x = a$, $2^x = 1$ и $2^x = a - 1$. При $a \leq 0$ имаме само едно решение; при $a \in (0, 1)$ имаме две решения; при $a = 1$ имаме едно решение; при $a \in (1, 2)$ имаме три решения; при $a = 2$ имаме две решения и при $a > 2$ отново имаме три решения. Следователно отговорът е $a \in (0, 1) \cup \{2\}$.

11.2. Ще разгледаме случая когато точката P е между D и O (случаят, когато O е между P и D , се разглежда аналогично). Нека T е среда на AB , а K е диаметрално противоположната на D . Имаме $DI^2 = DA^2 = DL \cdot DC = DT \cdot DK = DP \cdot DO$. Първото равенство следва от добре известния факт, че $DI = DA = DB$. Второто равенство следва от подобие на триъгълниците DAC и DLA . Третото равенство следва от това, че $CLTK$ е вписан четириъгълник (поради $\angle LCK = \angle LTK = 90^\circ$), а четвъртото от $DP = 2DT$ и $DK = 2DO$.

а) От $DL \cdot DC = DP \cdot DO$ следва, че точките C , L , P и O лежат на една окръжност. Това следва и от $\angle LPD = \angle LDP = \angle OCL$, откъдето $\angle LPO + \angle OCL = 180^\circ$.

б) От $DI^2 = DP \cdot DO$ следва, че триъгълниците DIO и DPI са подобни, откъдето $\angle CIO = \angle IPO$. От а) следва, че $\angle ILO = \angle CPO$. От последните две равенства получаваме $\angle CPI = \angle IPO - \angle CPO = \angle CIO - \angle ILO = \angle IOL$.

11.3. Нека $\alpha = \frac{n}{q}$ и $\beta = \frac{m}{q}$, като $q, n \geq m$ са естествени числа. Ако

положим $b_i = a_i^{\frac{1}{q}}$, то $b_1 b_2 \dots b_{2015} = 1$ и следователно е достатъчно да докажем, че ако $b_1 b_2 \dots b_{2015} = 1$, то

$$\sum_{i=1}^{2015} b_i^n \geq \sum_{i=1}^{2015} b_i^{n-1}.$$

За всяко $i = 1, 2, \dots, 2015$ имаме

$$1 + \underbrace{b_i^n + b_i^n + \dots + b_i^n}_{n-1} \geq n \sqrt[n]{1 \cdot b_i^n \dots b_i^n} = n b_i^{n-1}.$$

След събиране имаме $(n-1) \sum_{i=1}^{2015} b_i^n + 2015 \geq n \sum_{i=1}^{2015} b_i^{n-1}$. Освен това

$$\sum_{i=1}^{2015} b_i^{n-1} \geq 2015 \sqrt[n-1]{b_1^{n-1} \dots b_{2015}^{n-1}} = 2015$$

и като съберем почленно последните две равенства, получаваме исканото.

11.4. Ако две числа x и y дават различни остатъци при деление с 2^n , то след дописване на произволна цифра отдясно, новите числа дават различни остатъци при деление с 2^{n+1} (защото ако $10x + c \equiv 10y + c \pmod{2^{n+1}}$, то $x \equiv y \pmod{2^n}$). Следователно, ако имаме пълна система остатъци по модул 2^n , след дописване от дясно към всяко число на 1 (от тези числа се получават различни нечетни остатъци), а след това на 2 (от тези числа се получават различни четни остатъци), получаваме пълна система остатъци по модул 2^{n+1} .

Започвайки от 1, 2, 3, 4, които образуват пълна система от остатъци по модул 2^2 , получаваме пример с 4 различни цифри, удовлетворяващ условието на задачата.

Да допуснем, че е възможно да построим такова множество с три цифри a , b и c . Цифрите a , b и c не са с еднаква четност, защото в противен случай всички остатъци по модул 2^{2015} ще бъдат с еднаква четност и няма да образуват пълна система от остатъци. Нека a и b са нечетни, а c е четно (другият случай се разглежда аналогично). Тъй като числата от M образуват пълна система от остатъци, то половината от числата в M са четни. Понеже c е единствената четна цифра, то всички четни числа от M завършват на c . Ако изтрием последната цифра c от тези числа, ще получим пълна система от остатъци от различни 2013-цифрени числа по модул 2^{2014} , защото ако $x \equiv y \pmod{2^{2014}}$, то $10x + c \equiv 10y + c \pmod{2^{2015}}$. За новото множество повтаряме

разсъжденията от по-горе и получаваме пълна система от остатъци по модул 2^{2013} , съставено от различни 2012-цифрени числа. Продължавайки по този начин ще получим пълна система от остатъци по модул $2^2 = 4$ съставено от различни едноцифрени числа. Това е противоречие, понеже различните едноцифрени числа са само три – a , b и c .

12.1. След повдигане на квадрат и почленно събиране на равенствата $\sin x + \cos y = 1 + \sin(x - y)$ и $\cos x - \sin y = 1 - \sin(x - y)$, получаваме $2 + 2\sin(x - y) = 2 + 2\sin^2(x - y)$, откъдето $\sin(x - y) = 0$ или $\sin(x - y) = 1$.

Ако $\sin(x - y) = 0$ получаваме $x = y$ и $\sin x + \cos x = \cos x - \sin x$, откъдето $\sin x = 0$, т.е. $x = 0$. Директно се проверява, че $x = y = 0$ е решение. Ако $\sin(x - y) = 1$, то $x - y = \frac{\pi}{2}$, което е възможно само при $x = \frac{\pi}{2}$ и $y = 0$. Директно се проверява, че $x = \frac{\pi}{2}, y = 0$ е решение.

12.2. Тъй като

$$\begin{aligned} DA \cdot AB \sin \angle A + BC \cdot CD \sin \angle C &= 2S_{ABCD} \\ &= AB \cdot BC \sin \angle B + CD \cdot DA \sin \angle D, \end{aligned}$$

от $AD = BC$ и $AB = \sqrt{3}CD$ следва, че

$$\sqrt{3} \sin \angle A + \sin \angle C = \sqrt{3} \sin \angle B + \sin \angle D,$$

т.е.

$$\sin \frac{\angle C - \angle D}{2} \cos \frac{\angle C + \angle D}{2} = \sqrt{3} \sin \frac{\angle B - \angle A}{2} \cos \frac{\angle B + \angle A}{2}.$$

Да отбележим, че $\angle C + \angle D \neq 180^\circ$, тъй като иначе от $AD = BC$ ще получим, че $ABCD$ е успоредник, което е противоречие с $AB = \sqrt{3}CD$. Сега от $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ имаме, че

$$\cos \frac{\angle C + \angle D}{2} = -\cos \frac{\angle B + \angle A}{2} \neq 0$$

и значи

$$\sin \frac{\angle C - \angle D}{2} = \sqrt{3} \sin \frac{\angle A - \angle B}{2}.$$

Понеже $\angle C - \angle D = 2(\angle A - \angle B)$ следва, че

$$2 \sin \frac{\angle A - \angle B}{2} \cos \frac{\angle A - \angle B}{2} = \sqrt{3} \sin \frac{\angle A - \angle B}{2}.$$

Тъй като $\angle A > \angle B$, то $\cos \frac{\angle A - \angle B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и тогава $\angle A - \angle B = 60^\circ$.

12.3. Виж Задача 11.3.

12.4. Виж Задача 11.4.

63. Национална олимпиада по математика, Национален кръг

1. *Първи начин.* Да означим $s = \sin \frac{\widehat{AB}}{2}$, $t = \sin \frac{\widehat{BL}}{2}$, $u = \sin \frac{\widehat{LC} + \widehat{AK}}{2}$, $v = \sin \frac{\widehat{CK}}{2}$, $w = \sin \frac{\widehat{DK}}{2}$, $x = \sin \frac{\widehat{LD} + \widehat{AK}}{2}$. Имаме

$$\frac{NL.KP.MQ}{KM.PN.LQ} = \frac{NL}{NC} \cdot \frac{NC}{NP} \cdot \frac{KP}{AK} \cdot \frac{AK}{KM} \cdot \frac{MQ}{DQ} \cdot \frac{DQ}{LQ} = \frac{t}{v} \cdot \frac{u}{s} \cdot \frac{v}{u} \cdot \frac{x}{w} \cdot \frac{s}{x} \cdot \frac{w}{t} = 1.$$

Втори начин. Нека точката T от правата MN е такава, че $\angle NTB = \angle ADB = \angle ACB$ и N е между P и T . Тогава $\triangle CNP \sim \triangle TNB$ и следователно $(TL + NL)PN = CN.BN$, откъдето $TL = \frac{NL.KP}{PN}$. Аналогично от $\triangle DQM \sim \triangle TQB$ получаваме $TL = \frac{LQ.KM}{MQ}$. Резултатът следва.

2. *Отговор:* 101. Ще докажем следното по-общо твърдение:

Няколко от квадратчетата на една таблица P са оцветени в синьо. Казваме, че едно разрязване на P на правоъгълници с цели страни е правилно, ако всеки правоъгълник съдържа точно едно синьо квадратче. Тогава P притежава единствено правилно разрязване тогава и само тогава, когато сините квадратчета образуват правоъгълник.

Лесно се вижда, че ако сините квадратчета образуват правоъгълник, то P има единствено правилно разрязване (има единствени възможности за ъглите на правоъгълника, после за останалите квадратчета от контура и накрая за вътрешността му).

Да докажем сега обратната посока на твърдението. Единственото правилно разрязване на P ще означаваме с S , а една (вертикална или хоризонтална) права, която разрязва таблицата на два правоъгълника, всеки от които съдържа поне едно синьо квадратче, ще наричаме *разделяща*.

(1) Нека Π е правоъгълна област от таблицата, която съдържа поне едно синьо квадратче. Тогава Π има правилно разрязване.

Ще докажем това с индукция по броя на сините квадратчета в Π . Ако този брой е единица, то всичко е ясно. Ако пък не е, то тогава можем с един вертикален или един хоризонтален разрез да разрежем Π на две по-малки правоъгълни области Π_1 и Π_2 , всяка от които съдържа ненулев, но по-малък брой сини квадратчета, и да приложим индукционното допускане за тях.

(2) Съгласно (1), за всяка разделяща права l съществува правилно разрязване на таблицата, в което участва разрезът l . Но понеже единственото правилно разрязване на таблицата е S , то всеки разрез по разделяща права участва в S .

(3) Нека $l_1, l_2, \dots, l_p$ са всички вертикални разделящи разрези, изброени отляво надясно, и $m_1, m_2, \dots, m_q$ са всички хоризонтални разделящи разрези,

изброени отдолу нагоре. Тогава тези разрези вече разделят таблицата на правоъгълници, всеки от които съдържа не повече от едно синьо квадратче. Следователно S не съдържа никакви други разрези и всеки от правоъгълниците, на които тези разрези разделят таблицата, съдържа точно едно синьо квадратче.

(4) Нека l_0 е най-дясната вертикална права, вляво от която няма сини квадратчета, l_{p+1} е най-лявата вертикална права, вдясно от която няма сини квадратчета, и m_0 и m_{q+1} са дефинирани аналогично. Ясно е, че разстоянието между l_i и l_{i+1} е равно на единица за $0 \leq i \leq p$ и разстоянието между m_j и m_{j+1} е равно на единица за $0 \leq j \leq q$ – защото в противен случай щяха да съществуват още разделящи прави.

(5) Следователно, сините квадратчета съвпадат с квадратчетата във вътрешността на правоъгълника, определен от правите l_0, l_{p+1}, m_0 и m_{q+1} .

3. Лема. Нека $k \geq 2$ е естествено число. Тогава уравнението $2x^{2k} + 1 = y^2$ няма решение в естествени числа.

Доказателство. Да допуснем, че x, y и $k \geq 2$ са такива естествени числа, че $2x^{2k} + 1 = y^2$ и нека те са такива, че x е минимално възможно.

Очевидно x е четно, а y е нечетно; да означим $x = 2a, y = 2b + 1$. Тогава $2^{2k-1}a^{2k} = b(b+1)$, като двата множителя отдясно са взаимнопрости. Имаме две възможности:

– ако $b = x_1^{2k}$ и $b+1 = 2^{2k-1}x_2^{2k}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $x_1x_2 = a$, то $2^{2k-1}x_2^{2k} - x_1^{2k} = 1$, което води до противоречие по модул 4;

– ако $b = 2^{2k-1}x_1^{2k}$ и $b+1 = x_2^{2k}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, $x_1x_2 = a$, то $x_2^{2k} - 2^{2k-1}x_1^{2k} = 1$, което води до уравнението $y_1^2 = 2^{2k-1}x_1^{2k} + 1$, $y_1 = x_2^k$, като при това $x_1 < x$.

Ясно е, че описаният процес на намаляване на степените на 2 може да продължава докато имаме степен на двойката поне 5. Следователно можем да достигнем до уравнението $y_0^2 = 8x_0^{2k} + 1$, където $x_0 < x$ и $y_0 = y_2^k, y_2 \in \mathbb{N}$. Отново y_0 е нечетно – нека $y_0 = 2c + 1$. Получаваме $c(c+1) = 2x_0^{2k}$, като двата множителя отдясно са взаимнопрости. И тук имаме две възможности:

– ако $c = x_3^{2k}$ и $c+1 = 2x_4^{2k}$, $x_3, x_4 \in \mathbb{N}$, $x_3x_4 = x_0$, то $4x_4^{2k} = 2c+2 = y_2^k + 1$, откъдето $(2x_4^k - 1)(2x_4^k + 1) = y_2^k$, което води до $2x_4^k - 1 = y_3^k, 2x_4^k + 1 = y_4^k$, $y_3, y_4 \in \mathbb{N}$, $y_3y_4 = y_2$, и накрая $y_4^k - y_3^k = 2$, което е невъзможно;

– ако $c = 2x_3^{2k}$ и $c+1 = x_4^{2k}$, $x_3, x_4 \in \mathbb{N}$, $x_3x_4 = x_0$, то $2x_3^{2k} + 1 = (x_4^k)^2$, което води до противоречие с избора на минимално по x решение. С това лемата е доказана.

Корените на характеристичното уравнение $t^2 - 6t + 1 = 0$ на разглежданата редица са $t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Оттук и от началните условия $a_1 = 2$ и $a_2 = 12$

намираме общия член

$$a_n = \frac{(3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Да означим $(3 + 2\sqrt{2})^n = \alpha_n + \beta_n \sqrt{2}$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{N}$. Тогава $(3 - 2\sqrt{2})^n = \alpha_n - \beta_n \sqrt{2}$, $a_n = \beta_n$ и $\alpha_n^2 - 2\beta_n^2 = 1$. Ако допуснем, че a_n е точна (по-голяма от първа) степен за някое n , от последните две равенства получаваме противоречие с лемата.

Забележка. Намирането на общия член на редицата може да се замени със следното разсъждение. Нека b_n е редицата със същата рекурентна връзка и начални условия $b_1 = 3$ и $b_2 = 17$. Тогава по индукция леко се доказва, че $2a_n^2 + 1 = b_n^2$.

4. Първи начин. От (i) следва, че f е строго растяща функция. Тогава имаме

$$x + y \geq f(f(x + y)) \quad (1)$$

(използвахме (ii)), $f(f(x + y)) \geq f(f(x) + y)$ (следва от (i), тъй като f е растяща) и $f(f(x) + y) \geq f(x) + f(y)$ (замествайки x с y и y с $f(x)$ в (i)). Тъй като функцията f е растяща, имаме $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \inf_{x > 0} f(x) = \ell \geq 0$. Да отбележим, че от (ii) следва, че $\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = 0$.

Да допуснем, че $\ell > 0$. Тъй като f е растяща, получаваме $f(f(x)) \geq f(\ell) > 0$, което противоречи на $\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = 0$. Следователно $\ell = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$. Избирайки $y \rightarrow 0+$ в (1), получаваме $x \geq f(x)$ за всяко положително x . Сега от (i) получаваме

$$x + y \geq f(x + y) \geq f(x) + y,$$

$$x - f(x) \geq f(x + y) - f(x) - y \geq 0.$$

Фиксирайки $x + y$ и избирайки $x \rightarrow 0+$ в последните неравенства, получаваме $f(x + y) = x + y$, което означава, че $f(x) = x$ за всяко положително x . Очевидно тази функция е решение на задачата.

Втори начин. Прилагайки последователно (i) и (ii) получаваме

$$x \geq f(f(x)) = f\left(\frac{1}{n}f(x) + \frac{n-1}{n}f(x)\right) \geq f\left(\frac{1}{n}f(x)\right) + \frac{n-1}{n}f(x)$$

(n е естествено число). Тогава, ако изберем в горния израз $n \rightarrow +\infty$, достигаме до $x \geq f(x)$. Следователно $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$. Комбиниране (i) и

$x + y \geq f(x + y)$, за да получим $x + y \geq f(x + y) \geq f(x) + y$ и оттук нататък продължаваме както по-горе.

5. Тъй като $AC \parallel LQ$ и $BC \parallel LP$, имаме $S_{ALQ} = S_{CLQ} = S_{PLC} = S_{PLB}$. Нека точката K е такава, че четириъгълникът $AKBC$ е успоредник. Аналогично имаме, че $S_{AKQ} = S_{AKC} = S_{CKB} = S_{PKB}$.

Но геометричното място на точките X , такива, че $\triangle AXQ$ и $\triangle PXB$ са еднакво ориентирани и имат равни лица, е права ℓ през пресечната точка на AQ и BP . Следователно, $\ell \equiv KL$ и правите AQ , BP и KL се пресичат в една точка.

Нека N е средата на CL . Тогава правата KL е хомотетична на MN с център C и коефициент 2. Понеже точката T е симетрична на C относно MN , оттук следва, че T лежи на KL , с което задачата е решена.

6. Отговор: 730.

Лема: Редицата $A = a_1, a_2, \dots, a_k$ от две по две различни числа не съдържа десетчленна нарастваща подредица тогава и само тогава, когато нейните членове могат да бъдат оцветени в девет цвята по такъв начин, че членовете от всеки цвят да образуват намаляваща подредица.

Доказателство: Да предположим първо, че такова оцветяване има. Тогава всяка десетчленна подредица на A съдържа два члена от един и същи цвят – и, следователно, не е нарастваща.

Да предположим след това, че A не съдържа десетчленна нарастваща подредица. Да оцветим в цвят i всеки член a на A , такъв, че най-дългата нарастваща подредица на A , която има a за последен елемент, има дължина i . Лесно се вижда, че това оцветяване притежава исканото свойство. С това лемата е доказана.

Ще покажем, че измежду всеки 730 ученици има десет, които могат да се подредят в хубава редица.

Нека $M_1, M_2, \dots, M_{730}$ е редица, в която учениците са подредени по нарастване на рейтинга им по алгебра. Нека a_i е рейтингът по геометрия на M_i . Ако редицата $a_1, a_2, \dots, a_{730}$ съдържа десетчленна нарастваща подредица, то хубава редица е намерена. В противен случай, съгласно лемата, можем да „оцветим“ учениците в 9 цвята по такъв начин, че рейтингите по геометрия за всеки цвят да образуват намаляваща подредица. В един от тези цветове ще бъдат оцветени поне 82 ученици; нека, без загуба на общност, $N_1, N_2, \dots, N_{82}$ са едноцветни и подредени едновременно по нарастване на рейтингите по алгебра и намаляване на рейтингите по геометрия.

Нека b_i е рейтингът по теория на числата на N_i . Ако редицата $b_1, b_2, \dots, b_{82}$ има десетчленна намаляваща подредица, то хубава редица е намерена (за

рейтингите по геометрия и теория на числата). В противен случай, съгласно лемата, можем да оцветим учениците $N_1, N_2, \dots, N_{82}$ в 9 цвята по такъв начин, че рейтингите по теория на числата на учениците от всеки цвят да образуват нарастваща подредица. В един от тези цветове ще бъдат оцветени поне 10 ученици и те ще образуват хубава редица за рейтингите си по алгебра и теория на числата.

Остана да построим множество от 729 ученици, което не съдържа десетчленна хубава редица.

Нека k е цяло число между 0 и 728. Нека, за $0 \leq i < j \leq 2$, $f_{ij}(k)$ е числото, което се получава, когато в деветичния запис на k цифрите в i -тия и j -тия разряд се заменят с допълненията си до 8. (Ако $k \leq 80$, то деветичния запис на k можем при нужда да допълним с нули отляво, така че да получим три разряда.)

Да разгледаме 729 ученици с рейтинги по алгебра съответно $0, 1, \dots, 728$, като ученикът с рейтинг k има освен това и рейтинг по геометрия $f_{01}(k)$, по теория на числата – $f_{02}(k)$, и по комбинаторика – $f_{12}(k)$.

Ясно е, че за всеки два различни рейтинга има две числа $0 \leq i < j \leq 2$, такива, че за всеки ученик стойностите на тези два рейтинга се получават един от друг чрез f_{ij} . Ще докажем, че измежду нашите ученици няма десет, които да образуват хубава редица по отношение на рейтингите по алгебра и геометрия. За останалите двойки рейтинги доказателството е аналогично.

Нека $M_1, M_2, \dots, M_{729}$ е редица, в която учениците са подредени по нарастване на рейтингите им по алгебра. Нека a_i е рейтингът по геометрия на M_i . Достатъчно е да докажем, че редицата $a_1, a_2, \dots, a_{729}$ не съдържа десетчленна нарастваща подредица.

За всяко i да оцветим a_i в цвят s , където s е цифрата във втория разряд на деветичния запис на a_i . Лесно се вижда, че при това всяка едноцветна подредица на $a_1, a_2, \dots, a_{729}$ е подредена в намаляващ ред – с което, съгласно лемата, задачата е решена.

Забележка. При оценката не използвахме четвъртия рейтинг.

Контролно за определяне на отбора за БОМ 2014

1. Отговор: $(x, y, z) = (7, 1, \sqrt{7}), (1, \sqrt{7}, 7), (\sqrt{7}, 7, 1)$. Нека $f(a, b, c) = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$. Изразът е цикличен и нека временно приемем, че x е най-голямото от числата. Ще докажем, че $f(x^2, y^2, z^2) \geq f(x^2, y^2, xy)$. Наистина

$$\begin{aligned} f(x^2, y^2, z^2) - f(x^2, y^2, xy) &= \frac{y^2}{y^2 + z^2} + \frac{z^2}{z^2 + x^2} - \frac{2y}{x + y} \\ &= \frac{(x - y)(xy - z^2)^2}{(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)(x + y)} \geq 0. \end{aligned}$$

Равенство се достига само при $z^2 = xy$ или $x = y$. Ако положим $t = x/y$, то t обхожда интервала $[1, 7]$ и имаме $f(x^2, y^2, xy) = \frac{t^2}{t^2+1} + \frac{2}{t+1} =: g(t)$. Имаме

$$g'(t) = \frac{2t}{(t^2+1)^2} - \frac{2}{(t+1)^2} = \frac{-2t^4 + 2t^3 + 2t - 2}{(t^2+1)^2(t+1)^2} = \frac{-2(1-t)^2(t^2+t+1)}{(t^2+1)^2(t+1)^2} < 0$$

в интервала $(1, 7)$. Следователно $g(t)$ намалява строго и най-малка стойност $(1, 23)$ се достига само при $t = 7$. Сега $f(x^2, y^2, z^2) \geq 1, 23$ с равенство при $x = 7, y = 1, z = \sqrt{7}$.

2. Нека точка Y е такава, че $AONY$ е успоредник. Тъй като $ON \parallel AD$, имаме $Y \in AD$. Достатъчно е да докажем, че $\triangle AOY \sim \triangle AXD$, защото AN е разполовява OY .

Добре известно е, че ъглополовящата AD на $\angle ABC$ е ъглополовяща и на $\angle OAA'$. Освен това съответните страни на триъгълниците OND и ADX са успоредни и значи тези триъгълници са подобни. Следователно $\frac{ON}{OD} = \frac{AD}{AX}$.

Тъй като $OD = OA$ и $ON = AY$, получаваме $\frac{AY}{AO} = \frac{AD}{AX}$. Последното и $\angle OAY = \angle DAX$ доказват исканото подобие.

3. Ако съществуват две точки, които са краища на диаметър в окръжността, то можем да преместим едната от тях на достатъчно малко разстояние по окръжността, така че и двете точки да участват само в остроъгълни и тъпоъгълни триъгълници, като при това броят на остроъгълните триъгълници не намалява след преместването на едната от точките. Следователно можем да считаме, че имаме само тъпоъгълни и остроъгълни триъгълници.

Да разгледаме произволна точка A от окръжността с център X . Тогава точката A участва в тъпоъгълен триъгълник и не е при тъпия му връх тогава

и само тогава, когато останалите два върха на триъгълника се намират в една и съща полуравнина спрямо AX . Тогава броят на тъпоъгълните триъгълници от указания вид е $\binom{a}{2} + \binom{b}{2}$, където a и b са съответно броя на точките в двете полуравнини спрямо правата AX . Имаме $a + b = n - 1$ и

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} = \frac{a^2 + b^2 - a - b}{2} = \frac{\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} - a - b}{2}.$$

Този брой е минимален при максимално близки a и b .

Окончателно минималният брой тъпоъгълни триъгълници е $n \binom{(n-1)/2}{2}$ за нечетно n и $\frac{n}{2} \cdot \left(\binom{n/2}{2} + \binom{(n-2)/2}{2} \right)$ за четно n . Остава от общия брой триъгълници, който е $\binom{n}{3}$, да извадим получената оценка. Пример за нечетно n е правилният n -ъгълник, а за четно $n = 2k$ е достатъчно да разгледаме правилен n -ъгълник, на който k поредни точки са ротирани на еднакъв достатъчно малък ъгъл спрямо центъра на окръжността.

4. Отговор: да! Ще докажем, че съществуват два ненулеви остатъка a и b по модул p , такива, че тяхното произведение е сравнимо със сумата на останалите ненулеви остатъци по модул p . Въпросната сума е $p(p-1) - a - b \equiv -(a+b) \pmod{p}$ и нашето условие е еквивалентно на $ab \equiv -(a+b) \pmod{p}$, т.е. на $(a+1)(b+1) \equiv 1 \pmod{p}$. Тъй като $p > 3$, съществуват ненулеви остатъци m и n , за които $mn \equiv 1 \pmod{p}$ и $m \neq n$. Освен това е ясно, че $m, n \not\equiv 1 \pmod{p}$ и следователно можем да изберем $a = m - 1$ и $b = n - 1$.

Забележка. При $p \equiv 1 \pmod{4}$ можем да изберем a , за което $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ и да забележим с помощта на теоремата на Уилсън, че a е сравнимо с произведението на останалите ненулеви остатъци. При $p \equiv 1 \pmod{4}$ съществува значително по-сложна конструкция – тогава работа върши множеството от остатъци с показател q по модул p , където q е нечетен прост делител на $p - 1$.

5. Тъй като полиномът е реципрочен, то $f = gh$ за някакви полиноми $g(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ и $h(x) = (x - \frac{1}{x_1}) \dots (x - \frac{1}{x_n})$. Тогава $g(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$ и $h(x) = x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} x^{n-1} + \dots + \frac{1}{b_n}$. Имаме $|a_n| = |b_n + \frac{1}{b_n} + \frac{b_1^2 + \dots + b_{n-1}^2}{b_n}| \leq 2$ и значи $b_{n-1} = \dots = b_1 = 0$ и $b_n = \pm 1$.

От полиномите $(x^n - 1)^2$ само $(x - 1)^2$ и $(x^2 - 1)^2$ имат $2n$ реални корена, тъй като $x^n - 1$ сменя монотонността си най-много в една точка и пресича абсисата най-много два пъти. Аналогично при $b_n = 1$ единственото решение е $(x + 1)^2$.

6. Първо да забележим, че всяко четно $n = 2k$ върши работа, понеже $2^{2k} + 1 = (2^k)^2 + 1^2$. Освен това, при $n = 1$ имаме $2^n + 1 = 3 \neq x^2 + y^2$, а при $n = 3$

имаме $2^n + 1 = 9 = 3^2 + 0^2$. Оттук нататък ще считаме, че $n \geq 5$ е нечетно. Ще използваме следното помощно твърдение.

Лема. Ако числото n може да се представи като сума на два точни квадрата, то степенните показатели на всички негови прости делители от вида $4k + 3$ са четни.

Доказателство. Ако простото $p = 4k + 3$ дели $n = x^2 + y^2$, то е добре известно, че $p|x$ и $p|y$ и в частност $p^2|n$. Тогава числото $\frac{n}{p^2} = (\frac{x}{p})^2 + (\frac{y}{p})^2$ е строго по-малко от n , има същите четности на въпросните степенни показатели като него, и отново е сума на 2 точни квадрата. Понеже този процес на премахване на делители е краен, то ще стигнем до число без прости делители от вида $4k + 3$ и от конструкцията му следва исканото твърдение.

Ще докажем, че никое нечетно $n \geq 5$ не е решение на задачата. Наистина, за нечетно n имаме $2^n + 1 \equiv 2 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ и от лемата следва, че $3^2|2^n + 1$. Разглеждане на n по модул 6 показва, че последното е възможно само при $n \equiv 3 \pmod{6}$, т.е. при $n = 3k$ за някое нечетно $k \in \mathbb{N}$. Тогава $2^n + 1 = 2^{3k} + 1 = (2^k + 1)(4^k - 2^k + 1)$, като и двата множителя се делят на 3 поради нечетността на k . От друга страна, не може и двата множителя да се делят на 9 (Защо?) и следователно някой от тях се дели точно на 3. Най-накрая да забележим, че и двата множителя са сравними с 1 по модул 4 и този от тях, който се дели точно на 3^1 , трябва да има друг прост делител от вида $4k + 3$ от нечетна степен. Остава да приложим лемата. Окончателно, всички търсени n са 3 и четните числа.

7. а) Да номерираме градовете с $1, 2, \dots, 10$. Нека компанията направи безплатно пътуването от града с по-голям номер към този с по-малък. Тогава на всеки 9 пътувания с намаляващи номера трябва да има поне едно пътуване с нарастващи номера, т.е. поне 10% от пътуванията ще се заплатят.

Нека линиите образуват пълен граф с 10 върха и нека безплатните посоки са зададени. Да разгледаме най-дългата верига $A_1 A_2 \dots A_k$ от безплатни пътувания. Ще покажем, че в нея има поне 9 отсечки, т.е. че $k \geq 10$. Да допуснем обратното; тогава има град B извън веригата. Заради максималността отсечката BA_1 е платена, така че $A_1 B$ е безплатна. Сега заради максималността отсечката BA_2 е платена (иначе веригата $A_1 B A_2 \dots A_k$ би била безплатна), така че $A_2 B$ е безплатна. Отново заради максималността отсечката BA_3 е платена, така че $A_3 B$ е безплатна. Продължавайки така, заключаваме, че безплатни са и $A_4 B, A_5 B, \dots, A_k B$. Но тогава $A_1 A_2 \dots A_k B$ е безплатна верига: противоречие с максималността. Щом $k \geq 10$, то можем да направим кръгово пътуване с 10 отсечки, от които да платим само една. Така компанията не може да си гарантира повече от 10%.

б) Нека поне една от линиите липсва. Да номерираме и двата града, които тя свързва, с 1, а останалите - с $2, 3, \dots, 9$. Ако приложим подхода от а), гарантираме поне $11\frac{1}{9}\%$.

8. Ще използваме стандартните означения и още – нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k , A_1 , B_1 и C_1 са допирните точки на k съответно със страните BC , CA и AB , M_A , M_B и M_C са съответно средите на страните BC , CA и AB , X_Y е ортогоналната проекция на X върху правата YI за всички точки $X, Y \in \{A, B, C\}$ и ω_A , ω_B и ω_C са съответно описаните около триъгълниците $M_AB_C C_B$, $M_B C_A A_C$ и $M_C A_B B_A$ окръжности с центрове съответно A_0 , B_0 и C_0 .

Лема. Правите BI , A_1B_1 и $M_B M_C$ се пресичат в точката A_B .

Доказателство. Тъй като $\angle AA_B B = 90^\circ$, имаме $M_C A = M_C B = M_C A_B = c/2$. Тогава $\angle M_C A_B B = \angle A_B B M_A = \angle C B A_B$ и значи $M_C A_B \parallel BC$, откъдето $A_B \in M_B M_C$. Нека A_B е вътрешна за отсечката $M_B M_C$. Имаме $M_B A_B = M_B M_C - A_B M_C = (a - c)/2$, а от друга страна $M_B B_1 = b/2 - (b + c - a)/2 = (a - c)/2$. Следователно $M_B B_1 = M_B A_B$ и оттук $\angle A_B B_1 M_B = \angle M_B A_B B_1 = 90^\circ - \gamma/2 = \angle C B_1 A_1$, което означава, че $A_B \in A_1 B_1$. Другият случай (A_B е външна за отсечката $M_B M_C$) е аналогичен.

Неколкократно приложение на лемата дава, че всяка от шестте четворки точки (A_1, B_1, A_B, B_A) , (B_1, C_1, B_C, C_B) , (C_1, A_1, C_A, A_C) , (M_A, M_B, C_A, C_B) , (M_B, M_C, A_B, A_C) и (M_C, M_A, B_C, B_A) определя права.

В нашата задача точките B , A_1 , C_1 , I и B_C лежат на окръжността с диаметър BI . Следователно $\angle IB_C C_1 = \angle I B C_1 = \angle C B I = \angle A_1 B C I = \beta/2$. По-нататък, $\angle I A_1 B_C = \angle I B B_C = \alpha/2$, тъй като $\triangle B I B_C$ е правоъгълен и $\angle B_C I B = 90^\circ - \alpha/2$.

По подобен начин се получава, че $\angle B_1 C_B I = \angle I C_B A_1 = \gamma/2$ и $\angle C_B A_1 I = \alpha/2$. Тогава $\angle C_B A_1 B_C = \angle C_B A_1 I + \angle I A_1 B_C = \alpha$. От лемата имаме $B_C M_A \parallel AC$ и $C_B M_A \parallel BC$ и следователно $\angle C_B M_A B_C = \alpha = \angle C_B A_1 B_C$. Оттук следва, че точката A_1 лежи на окръжността ω_A . Аналогично се вижда, че $B_1 \in \omega_B$ и $C_1 \in \omega_C$.

Отново с помощта на лемата и ъглите, намерени по-горе, заключаваме, че триъгълниците $A_1 B_C C_B$ и ABC са подобни и имат общ център на вписаната окръжност I . Аналогично се получава, че триъгълниците $A_C B_1 C_A$ и $A_B B_A C_1$ са подобни на $\triangle ABC$ и имат I за център на вписаната си окръжност. Нещо повече, ориентацията на триъгълниците $A_1 B_C C_B$, $A_C B_1 C_A$ и $A_B B_A C_1$ е еднаква (и противоположна на тази на $\triangle ABC$). Следователно всеки два от тези триъгълници са съответни при въртяща хомотетия с център I .

Да разгледаме въртящата хомотетия φ , при която са съответни $\triangle A_1 B_C C_B$

и $\triangle A_C B_1 C_A$. Имаме $\varphi(C_B) = C_A$, $\varphi(\omega_A) = \omega_B$ и следователно $\varphi(A') = B'$. Следователно триъгълниците $C_B I C_A$ и $A' I B'$ са подобни. От вписания четириъгълник $C C_A I C_B$ сега имаме $\angle I C_B C_A = \angle I C C_A = \beta/2$ и значи $\angle I A' B' = \beta/2$. Аналогично $\angle A' B' I = \alpha/2$ и $\angle I B' C' = \gamma/2$. Следователно $\angle I A' B' + \angle A' B' C' = (\alpha + \beta + \gamma)/2 = 90^\circ$, което означава, че $I A' \perp B' C'$. По подобен начин се вижда, че $I B' \perp A' C'$ и следователно I е ортоцентърът на $\triangle A' B' C'$.

Контролно за определяне на отбора за МОМ 2014

1. Да допуснем, че такава функция съществува. Ще докажем, че тя е инективна. Да допуснем, че $f(a) = f(b)$ за някои $a, b \in \mathbb{R}^+$. Тогава от $(a + y)f(2af(a) + f(y)) = a^3 f(yf(a))$ и аналогичното равенство от $x = b$ получаваме $\frac{a+y}{b+y} = \frac{a^3}{b^3}$ за всяко y , което очевидно е невъзможно.

Да положим $y = x^3 - x > 0$. Получаваме $x^3 f(2(x^3 - x)f(x) + f(x^3 - x)) = x^3 f((x^3 - x)f(x))$, откъдето $2(x^3 - x)f(x) + f(x^3 - x) = (x^3 - x)f(x) \iff (x^3 - x)f(x) + f(x^3 - x) = 0$, което е невъзможно.

2. *Първи начин.* Да означим с T пресечната точка на правите AD и BC и с O пресечната точка на диагоналите AC и BD . Нека втората пресечна точка на описаните около $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ окръжности е P (тук се използва $AB \nparallel CD$).

Имаме $\angle PAD = \angle POB = \angle PCB$ от вписаните четириъгълници $APOD$ и $BCOP$ и аналогично $\angle ADP = \angle PBC$. Тогава $\triangle ADP \sim \triangle CBP$. Тъй като PM и PN са съответни медиани в тези триъгълници, получаваме $\angle PMD = \angle PNB$. Тогава четириъгълникът $MPNT$ е вписан и $\angle PAK = \angle PAC = \angle PTC = \angle PTN = \angle PMN = \angle PMK$, т.е. K лежи на описаната около $\triangle APM$ окръжност. Аналогично L лежи на описаната около $\triangle BPN$ окръжност. Сега твърдението следва от теоремата на Микел – окръжностите, описани около $APKM$ и $BPLN$ се пресичат върху AB .

Втори начин. Както по-горе въвеждаме точката P – тя е точка на Микел за $ABCD$. Тогава лесно се вижда, че $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ and $\triangle ACP \sim \triangle DBP$. Нещо повече, имаме

$$\frac{AK}{CK} = \frac{S_{AMN}}{S_{CMN}} = \frac{S_{DMN}}{S_{BMN}} = \frac{DL}{BL}$$

и това дава $\angle AKP = \angle DLP$. Тогава $KPLO$ е вписан и $\angle PKL = \angle POL = \angle PCB = \angle PAD$, т.е. P принадлежи на описаната около $\triangle AMK$ окръжност.

Аналогично P лежи на описаната около $\triangle BNL$ окръжност. Нека тези две окръжности се пресичат за втори път в точка Q . Тогава $\angle AQP + \angle BQP = \angle PKO + \angle PLO = 180^\circ$, т.е. $Q \in AB$.

3. Първи начин. Първо ще докажем, че ако $a > 1$ и $b > 1$ са взаимнопрости и $a + b \leq 2015$, то двойката (a, b) е добра. Ако $a + b = 2015$, то двойката (a, b) е добра. Нека $a + b < 2015$. Без ограничение можем да считаме, че $xa - yb = 1$, за естествени числа x и y . Ако $xa \leq 2015$, то можем да променим цвета на първите xa числа, след което да променим цвета на последните yb от тези xa числа. Сега твърдението следва по индукция.

Ако $xa > S$ да променим цвета на първите ka числа, където $(k-1)a < b < ka$ (тези ходове могат да се направят, защото $ka = (k-1)a + a < b + a < S$). След това, започвайки от дясно на ляво от тези ka числа последователно променяме цвета на групи от по b числа, докато останат по-малко от b числа. Сега в началото на редицата имаме по-малко от b числа, които са с променен цвят. От числата с непроменен цвят, започвайки от ляво на дясно, отново променяме няколко групи от по a числа докато получим общо променени групи x (заедно с предишните промени) или докато получим по-голям от b брой числа с променен цвят. Както по-горе от $a + b < S$ следва, че това е възможно. След това, започвайки от дясно на ляво от числата с променен цвят, последователно променяме цвета на групи от по b числа, докато останат по-малко от b числа. По този начин след някакъв брой ходове ще получим, че само числото 1 е с променен цвят и твърдението следва по индукция. Следователно всички прости числа са хубави.

Нека t е хубаво съставно число и нека p е прост делител на t . Тъй като p дели $t - p$, то ако можем да променяме цвета на p последователни числа, то можем да променяме цвета и на $t - p$ последователни числа. Следователно, ако двойката $(t, p - t)$ е добра, то ако имаме право да променяме цвета на произволни p последователни числа, можем да променим цвета на всички числа.

Ясно е, че последователността на прилагане на ходовете е без значение и че двукратна промяна на едни и същи последователни числа не променя цвета на числата. Тъй като 1 може да си смени цвета само с ход върху числата $1, 2, \dots, p$, то такъв ход е единствен. Сега последователно следва, че няма ходове върху числата $2, 3, \dots, p+1$, $3, 4, \dots, p+2$ и т.н. $p, p+1, \dots, 2p-1$. Същите разсъждения показват, че има единствен ход върху числата $p+1, p+2, \dots, 2p$ и т.н. Следователно p трябва да дели 2015.

Получихме, че ако t е хубаво съставно число, то за всяка двойка (a, b) , за която $a + b = t$ трябва да имаме, че или a и b са взаимнопрости, или

НОД(a, b) е делител на $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Това означава, че хубавите съставни числа са от вида p^2 , pq или pqr , където $p, q, r \in \{5, 13, 31\}$ са различни числа. Тези числа са: 25, 169, 961, 65, 155, 403, 2015.

4. Нека ℓ е правата през C , която е успоредна на AB и K е петата на перпендикуляра от A към ℓ . Точките A, K, C и P лежат на една окръжност. Да означим $\angle NKP = \angle NPK = \alpha$. Тогава $\angle KNP = 180^\circ - 2\alpha$, откъдето $\angle KAP = \frac{1}{2}\angle KNP = 90^\circ - \alpha$ и следователно $\angle MAP = 90^\circ - \angle KAP = \alpha$. Оттук и от вписания четириъгълник $AMPQ$ имаме $\angle MQP = \alpha$. Следователно точките P, Q, K и N лежат на една окръжност и значи центърът на описаната около $\triangle PQN$ окръжност лежи върху симетралата на KN , която е постоянна.

5. Нека $m < n$ е фиксирано естествено число. Имаме

$$\begin{aligned} f(f(m) + 1) + \cdots + f(f(m + 1)) &\leq [f(m + 1) - f(m)]f(f(m + 1)) \\ &\leq [f(m + 1) - f(m)](m + n). \end{aligned}$$

(използвахме (1), $f(f(m + 1)) \leq n + m$ от (3), а (2) не е нарушено). Нека $f(1) = k$. Тогава $k < n$ и от горното неравенство за $m = 1, 2, \dots, k - 1$ имаме съответно

$$\begin{aligned} f(f(1) + 1) + \cdots + f(f(2)) &\leq [f(2) - f(1)](n + 1) \\ f(f(2) + 1) + \cdots + f(f(3)) &\leq [f(3) - f(2)](n + 2) \\ &\vdots \\ f(f(k - 1) + 1) + \cdots + f(f(k)) &\leq [f(k) - f(k - 1)](n + k - 1) \end{aligned}$$

Освен това от (1) имаме

$$f(f(k) + 1) + \cdots + f(n) \leq (n - f(k))(n + f(1)).$$

Като съберем тези неравенства, получаваме исканото.

6. Да оцветим в черно горното ляво квадратче на всеки блок. Нека сме разположили k непресичащи се блока върху дъската. Тогава черните квадратчета се намират в таблица 10×2015 и номерата на стълбовете им се различават поне с 10.

Да разгледаме една редица от блокове, които се допират последователно два по два до квадратчетата под черното на лявостоящия блок. Да "сплескаме"

тази редица така, че всички черни квадратчета да попаднат в стълба на най-лявото от тях. Тогава те са в различни редове, а изходната дъска се е скъсила с $10x$ стълба, където x е броя на блоковете в нашата редица.

Да приложим горната процедура към всички такива редици (ясно е, че това ”изчерпва” конфигурацията) и да разгледаме черните квадратчета – те са попаднали в таблица $10 \times (2015 - 10k)$. Тогава $10(2015 - 10k) \leq k$, откъдето $k \leq 199$. Ясно е и обратното – от всяка такава таблица $10 \times (2015 - 10.199) \equiv 10 \times 25$ можем да подредим 199 блока. Следователно търсеният брой е равен на начините, по които можем да изберем 199 различни черни квадратчета в таблица 10×250 , т.е. на $\binom{250}{199} = \binom{250}{51}$.

7. Нека $n = 2k + 1$ е нечетно и да допуснем, че $2^{2k+1} + 2021n = x^2$, $x \in \mathbb{N}$. Тогава $x^2 \equiv 2(2^k)^2 \pmod{43}$. Нека $y \in \mathbb{N}$ е такава, че $y2^k \equiv 1 \pmod{43}$. Тогава $(xy)^2 \equiv 2 \pmod{43}$, т.е. 2 е квадратичен остатък по модул 43, противоречие.

Нека сега $n = 2k$ е четно и $2^{2k} + 2021n = x^2$, $x \in \mathbb{N}$. Тогава $(x - 2^k)(x + 2^k) = 2021n$, откъдето $x - 2^k = d_1n_1$, $x + 2^k = d_2n_2$, $d_1d_2 = 2021$, $n_1n_2 = n$, $d_1, d_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Имаме $2^{k+1} = \frac{2021n}{d_1n_1} - d_1n_1 < 2021n$, откъдето $2^k < 2021k$. Но функцията $f(k) = 2^k/k$ е растяща и $f(15) > 2021$. Следователно $k \in \{1, 2, \dots, 14\}$, при което с директна проверка (случаите се отхвърлят лесно по различни модули) намираме единственото решение $k = 2$, $x = 90$, $n = 4$.

8. Ще разглеждаме A като множество от вектори $\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\}$ (разбира се, накрая ще кажем, че $n = 2015$), отъждествявайки вектора $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с числото $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$. Ясно е, че $b = p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$ дели a тогава и само тогава, когато $\beta_i \leq \alpha_i$ за всяко $i = 1, \dots, n$, като в такъв случай ще пишем $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$. Трябва да докажем, че съществува крайно множество B , такава, че за всяко $\mathbf{a} \in A$ съществува $\mathbf{b} \in B$, такава, че $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$.

При $n = 1$ е достатъчно да вземем $B = \{\mathbf{b} = (\beta_1)\}$, където β_1 е най-малкото число в множеството $\{\alpha_1 : \mathbf{a} \in A\}$.

Нека твърдението е доказано за някое $n \geq 1$. Да разгледаме множеството $A' = \{\mathbf{a}' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in A\}$. Съгласно индукционното предположение съществува крайно множество $B' \subset A'$ с разглежданото свойство. Нека $|B'| = k$ и $b_{n+1}^{(1)}, \dots, b_{n+1}^{(k)}$ са последните координати на елементи на A , съответни на тези от B' , и нека $b = \max\{b_{n+1}^{(1)}, \dots, b_{n+1}^{(k)}\}$.

За всяко $i = 0, 1, \dots, b$ полагаме $A_i = \{\mathbf{a} \in A : \alpha_{n+1} = i\}$ и нека $A_{b+1} = \{\mathbf{a} \in A : \alpha_{n+1} > b\}$. Тогава $A = \bigcup_{i=1}^{b+1} A_i$ е разбиване на A на непресичащи се множества. Съгласно индукционното предположение за всяко A_i , $i = 1, 2, \dots, b$, съществува крайно B_i с разглежданото свойство. Тогава множеството

воту $B = B' \cup (\cup_{i=1}^b B_i$ има исканото свойство за A .

9. Нека $Y \in \Gamma$ е диаметрално противоположна на A и X е втората пресечна точка на YH и Γ . Ще докажем, че X принадлежи едновременно на AP и DT и окръжността, описана около $\triangle AFE$.

Последното е очевидно, защото $\angle AXH = \angle AXY = 90^\circ$ и значи X лежи на окръжността с диаметър AH (която е точно описаната около $\triangle AFE$).

Тъй като AX е радикалната ос на Γ и окръжността, описана около $\triangle AFE$, EF е радикалната ос на окръжността, описана около $\triangle AFE$, и окръжността, описана около четириъгълника $BCEF$, и BC е радикалната ос на окръжността, описана около четириъгълника $BCEF$, и Γ , тези три прави се пресичат в точка P , т.е. $X \in AP$.

Тъй като BE и YC са перпендикулярни на AC , имаме $BH \parallel CY$. Аналогично $CH \parallel AY$. Следователно $BYCH$ е успоредник и оттук XY минава през средата на BC . Освен това имаме и $DY \parallel BC$ и значи точка D е симетрична на Y относно симетралата на BC , т.е. относно OT , където O е центърът на Γ . Тогава XD е симедиана в $\triangle XBC$ и минава през T , т.е. $X \in DT$.

Забележка. Точката X може да се дефинира и по-други начини, например като пресечна точка на AP и MH , където M е средата на BC .

10. Тъй като $P(x) = x$ има 4 различни корена, $P'(x) = 1$ има 3 различни корена. Това означава, че $P'(x)$ има три интервала на монотонност и във всеки от тях по един корен на $P'(x) = 1$.

Да допуснем, че $P(x) = -x$ има поне три различни корена (ако са точно три, ще има един двукратен. Тогава $P'(x) = -1$ също има 3 различни корена, по един във всеки от споменатите по-горе интервали. Тогава по теоремата на Рол $P'(x)$ има три различни корена $a < b < c$, пак по един във всеки от нашите интервали. Ако например $P(x)$ има положителен старши коефициент, то P' си променя знака от положителен на отрицателен в точката b . Това означава, че $P(x) \leq P(b)$ в околност на b . Но $P(x)$ клони към безкрайност и в двете посоки на реалната ос, откъдето следва, че уравнението $P(x) = P(b)$ има поне три различни корена, противоречие.

11. Ще докажем, че $f(n) = g(n) = h(n) = n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Ще означаваме с $Im(f)$ (съответно $Im(g)$, $Im(h)$) образът на f .

Нека $f(s)$ е минимален елемент в $Im(f)$. Ако $s > 1$, то $f(g(s-1)) < f(s)$ дава противоречие. Аналогично се вижда, че $g(1)$ и $h(1)$ са минимални елементи съответно на g и h .

Нека сега $f(t)$ е минимален елемент на $Im(f) \setminus \{f(1)\}$. Ясно е, че $t \geq 2$. Тогава от $f(g(t-1)) < f(t)$ следва, че $f(g(t-1)) = f(1)$. Последното означава, че $g(t-1) = 1$, т.е. $1 \in Im(g)$ и значи $g(1) = 1$ и $t = 2$. Аналогично се вижда,

че $f(1) = h(1) = 1$ и $f(2)$ и $h(2)$ са минимални елементи съответно в $Im(f)$ и $Im(h)$.

Нека за някое естествено число k е вярно, че $f(i) = g(i) = h(i) = i$ за $i \leq k$ и $f(k+1)$, $g(k+1)$ и $h(k+1)$ са минимални елементи съответно в $Im(f)$, $Im(g)$ и $Im(h)$. Нека $f(a)$ е минимален елемент на $Im(f) \setminus \{1, \dots, k, f(k+1)\}$. Ясно е, че $a \geq k+2$. Тогава от $f(g(a-1)) < f(a)$ и избора на a следва, че $f(g(a-1)) = f(r)$ за някое $r \in \{1, 2, \dots, k+1\}$. Последното всъщност означава, че $g(a-1) = r$ и ако допуснем, че $r \neq k+1$, получаваме $a-1 = r$, т.е. $a = r+1 \leq k+1$, което противоречи на избора на a . Следователно $r = k+1$, $k+1 \in Im(g)$, $g(k+1) = k+1$ и $a = k+2$. Аналогично се вижда, че $f(k+1) = h(k+1) = k+1$ и $g(k+2)$ и $h(k+2)$ са минимални елементи съответно в $Im(g) \setminus \{1, \dots, k, g(k+1)\}$ и $Im(h) \setminus \{1, \dots, k, h(k+1)\}$. С това индукцията е завършена.

12. Първи начин. Нека p е просто число, чийто индекс по модул 10 е равен на $p-1$ (т.е. числата $0, 1, 10, \dots, 10^{p-2}$ образуват пълна система остатъци по модул p).

Нека $N(p)$ да е числото $\frac{10^{p-1}-1}{p}$ с добавени нули отпред, за да се получи $(p-1)$ -цифрено число. Тогава числата $iN(p)$, $i = 1, 2, \dots, p-1$, с добавени нули отпред, за да се получи $(p-1)$ -цифрено число, са анаграмни на $N(p)$. Действително, за всяко $i = 1, 2, \dots, p-1$ можем да намерим $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, за което $10^k \equiv i \pmod{p}$. Сега $iN(p)$ е период на дробта $\frac{i}{p}$, оттам и на $\frac{10^k}{p}$, а периодът на последната дроб е циклична пермутация на периода на $\frac{1}{p}$.

Простото число 17 има индекс 16 по модул 10. Тогава числата $N(17)$, $2N(17)$, $3N(17)$ и $4N(17)$ с добавени нули отпред, имат исканото в условието свойство. За да решим проблема с нулите в началото, долепваме отпред на всяко от горните 4 числа число s (без нули в началото), което е анаграмно на 3s. Тъй като индексът на 7 по модул 10 е равен на 6, подходящ пример е $s = 142857$. По-малък пример се получава от числата 09, 18, 27 и 45.

Втори начин. Числата 1638, 1728, 1818 и 4815 имат исканото свойство.

32. Балканска олимпиада по математика

1. След полагане $x = ab^2$, $y = bc^2$ и $z = ca^2$ неравенството се свежда до неравенството на Шур

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2y + y^2z + z^2x.$$

2. Добре известно е, че $FA = FB = FI$ и $EA = EC = EI$, така че FE е симетрала на AI . Тогава $KA = KI$ и $\angle KAF = \angle KIF = \angle FCB =$

$\angle FEB = \angle FEA$, така че KA допират ω . Аналогично се вижда, че и правите LB и MC допират ω . Тогава $\triangle KAF \sim \triangle KAE$ и $\frac{KA}{KE} = \frac{KF}{KA} = \frac{AF}{AE}$, така че $\frac{KF}{KE} = \left(\frac{AF}{AE}\right)^2$. Аналогично получаваме $\frac{ME}{MD} = \left(\frac{CE}{CD}\right)^2$ и $\frac{LD}{LF} = \left(\frac{BD}{BF}\right)^2$. Умножавайки, получаваме $\frac{KF}{KE} \cdot \frac{ME}{MD} \cdot \frac{LD}{LF} = 1$ и от обратната теорема на Менелай за $\triangle DEF$ получаваме желаното.

3. Да допуснем, че всички критици са гласували за различна двойка актьор-актриса. За всяко $n = 34, 35, \dots, 100$ да изберем актьор или актриса, получил точно n гласа и нека S е множеството от избраните. Ако в S има a актьора и b актриси, то $a + b = 67$ и $ab \leq 33 \cdot 34 = 1122$.

Нека има x критици, гласували за точно един от S , и y критици, гласували за двама от S . Тогава броят на подадените гласове от хора от S е $x + 2y = 34 + 35 + \dots + 100 = 4489$, така че критиците са $x + y = 4489 - y \geq 4489 - ab \geq 4489 - 1122 = 3367$, противоречие.

4. Да означим $m = \lfloor n\sqrt{d} \rfloor$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} n\sqrt{d} \lfloor n\sqrt{d} \rfloor &= n\sqrt{d} (n\sqrt{d} - m) = \frac{n\sqrt{d}(dn^2 - m^2)}{n\sqrt{d} + m} \\ &> \frac{n\sqrt{d}(dn^2 - m^2)}{2n\sqrt{d}} = \frac{dn^2 - m^2}{2}. \end{aligned}$$

Следователно е достатъчно да изберем d така, че да имаме $dn^2 - m^2 \notin \{1, 2, 3, 4\}$ (от горното очевидно имаме $dn^2 - m^2 > 0$).

Нека $d = 20k + 15 = 5(4k + 3)$, където k е цяло неотрицателно число. (Ясно е, че такова d има в кое да е множество от 20 последователни естествени числа.) Тогава в уравненията $dn^2 = m^2 + 2$ и $dn^2 = m^2 + 3$ получаваме противоречие по модул 5, а за $dn^2 = m^2 + 1$ и $dn^2 = m^2 + 4$ използваме наличието на прост делител от вида $4\ell + 3$ на естественото число $4k + 3$.