

XII МАТЕМАТИЧЕСКА ОЛИМПИАДА „Леонард Ойлер“
Дистанционен етап

Първи тур
17.11.2019 г.

1. Саша, Андрей и Оля избрали по естествено число. Всеки от тях умножил числата на другите деца по своето и извадил по-малкото произведение от по-голямото. Саша получил 1, а Андрей 121. Колко може да е получила Оля? Открийте всички възможни варианти и докажете, че няма други.
2. На окръжност отбелязали 150 сиви, 151 кафяви и 152 розови точки, така че никои две едноцветни точки не са една до друга. Докажете, че има кафява точка, чиито две съседки са розови.
3. Правоъгълник е разчертан на 100 реда от по 101 еднакви квадратчета и е разделен на ивици 1×5 , така че всяка колона съдържа точно k вертикални ивици. Какво може да бъде k ?
4. В трапец $ABCD$ ($BC \parallel AD$), където $AD = 2BC$, е взета точка F , за която $AB = FB$. Точка M е среда на FD . Докажете, че $CM \perp FA$.
5. Има ли 10000 последователни седемцифрени числа, които могат да се разбият на 99 групи с еднакви сборове на числата в тях?

XII МАТЕМАТИЧЕСКА ОЛИМПИАДА „Леонард Ойлер“
Дистанционен етап

Втори тур
01.12.2019 г.

1. Всяка клетка на дъска 7×7 оцветили в един от девет цвята. Всяка клетка, която не допира края на дъската, има съседи (по страна или диагонал) от осемте цвята, различни от нейния. Докажете, че всеки цвят се среща в поне четири клетки.
2. Петьо намислил естествено число, не по-голямо от 4. Васко може да каже едно или повече естествени числа и да попита Петьо дали числото му е сред тях, напр. „Числото ти равно ли е на 1 или на 3?“. Петьо отговаря „Да“ или „Не“. Как Васко да познае числото на Петьо с 11 въпроса, ако на Петьо се разрешава да излъже не повече от три пъти?
3. Може ли от числата $1!, 2!, \dots, 99!, 100!$ да задраскаме едно, така че произведението на останалите да е точен куб? (*За естественото число n бележим с $n!$ произведението на естествените числа от 1 до n включително.*)
4. Точки D и E лежат на продълженията на страните AB и BC на остроъгълния триъгълник ABC съответно след точки B и C . Точките M и N са среди на AE и DC . Докажете, че $MN > AD/2$.
5. На екрана на компютъра е записано число. Мишката му има два бутона: натискането на левия превръща числото n от екрана в $2n-1$, а на десния – в $2n+1$. Докато програмистът не гледал, котето Кро натиснало сто пъти бутоните на мишката. Програмистът видял крайното число. Той знае броя на натисканията на бутоните, а също и кое число е било на екрана преди идването на Кро. Докажете, че той може да определи в какъв ред Кро е натискал бутоните, ако началното число е било **а)** цяло; **б)** произволно.

XII МАТЕМАТИЧЕСКА ОЛИМПИАДА „Леонард Ойлер“
Дистанционен етап

Трети тур
15.12.2019 г.

1. Васко останал без пари и започнал работа. Той работил без почивен ден и получавал по 100 гроша на ден, но първия ден загубил 1 грош, а всеки следващ ден загубвал по 1 грош повече от предния ден. След кой ден работа Васко останал пак без пари? (Васко получава парите следобед, а ги губи вечер.)
2. На презентация на фирмата „Рога и Копита“ около кръгла маса се наредили депутати и бизнесмени, общо 30. Всеки от тях казал „Сред двамата ми съседни поне един е бизнесмен“. Депутатите винаги казват истината, а бизнесмените казват каквото си искат. Колко най-много може да са били депутатите на презентацията?
3. В остроъгълен триъгълник ABC ъгъл A е 45° . Докажете, че периметърът на ABC е по-малък от удвоения сбор на височините от върховете му B и C .
4. На масата има 101 кутии с по 101 клечки във всяка. На ход се взема клечка от някоя кутия. Двама играчи се редуват. Ако до 10000-я ход някой успее да изпразни някоя кутия, печели играта, иначе играта завършва наравно. Може ли някой да спечели независимо от играта на съперника, и ако да, то кой?
5. Учителят написал на дъската 10 отрицателни цели числа. Васко ги преписал в тетрадката и дописал всевъзможните им произведения от по 2, 3, ..., 10 числа. Сборът на всички записани от Васко числа е отрицателен. На колко може да е равен този сбор?