

Първи ден

1. На дъската написали четири положителни числа. Докажете, че разликата на някои две от тях е по-малка от третинката от сумата на другите две.
2. В лагер има 99 ученици, като всички имат еднакъв ненулев брой познати сред останалите. Група деца със свойството, че всеки извън групата познава някого от групата, ще наричаме *популярна*. Докажете, че от всяка популярна група с над 49 деца можем да изберем популярна група с точно 49 деца.
3. Даден е триъгълник ABC , в който $2\angle B - \angle A = 180^\circ$. Вътре в него е избрана точка K , а на страната му AB – точка $L \neq B$ така, че $\angle ACK = 2\angle BCK$ и $BK = KL$. Докажете, че $CK + AL = AC$.
4. Дадени са естествените числа $a_1, a_2, \dots, a_k$ ($k < 2020$). За всяко от тях можем да изберем едно или повече от останалите, така че сумата на 1024-тите им степени се дели на неговата 1024-та степен. Докажете, че сред тези числа има две равни.

Втори ден

5. Сумата от дробните части на няколко положителни числа е равна на цялата част на произведението им. Докажете, че дробната част на сумата на тези числа е равна на произведението на целите им части. Напомняме, че *цялата част* $[x]$ на x е най-голямото цяло число, ненадхърлящо x (например $[1,3]=1$), а *дробната му част* $\{x\}$ се задава с формулата $\{x\}=x-[x]$.
6. На всяка страна на изпъкнал 100-ъгълник отбелязали по две точки, делящи тази страна на три равни части. После изтрили всичко освен отбелязаните точки. Докажете, че по тях можем да възстановим изходния 100-ъгълник.
7. Дадено е естественото число n . Множеството A от естествени числа е такова, че за всяко естествено m , ненадхърлящо n , в множеството A има число, кратно на m . Намерете най-малката възможна сума на елементите на A .
8. В езика УЪ има само две букви: «У» и «Ъ». Дума наричаме всяка поредица от $2n$ букви У и $2n$ букви Ъ (числото n е дадено и фиксирано). Езиковедите наричат две думи *сходни*, ако едната се получава от другата с **едно** разместване на две съседни букви У и Ъ. Колко най-много думи можем да напишем на дъската, така че сред записаните да няма сходни?

В отговора се допускат само четирите аритметични операции, вдигане на степен, факториел и стандартни комбинаторни величини. Многоточия не са позволени. Броят на използваните операции не трябва да зависи от n .