

XII МАТЕМАТИЧЕСКА ОЛИМПИАДА „Леонард Ойлер“

**Регионален кръг
3-4 февруари 2020 г.**

8 клас

ПЪРВИ ДЕН

1. Сбора на цифрите на шестцифрено число умножили по произведението на цифрите му. Получили 390. Намерете поне едно такова шестцифрено число.
2. Дадени са n цели числа, всеки две от които се различават поне с 3. Сборът на квадратите на двете най-големи е под 500. И сборът на квадратите на двете най-малки е под 500. За кое най-голямо n е възможно това?
3. Ъглополовящата на ъгъла A на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ пресича страната CD в точка K , като $DK = BC$ и $KC + AB = AD$. Докажете, че ъгъл $BCD =$ ъгъл ADC .
4. На полуокръжност има 50 точки. Всеки две точки, между които има не повече от 9 други точки, са свързани с отсечка. *Степен на точката* ще наричаме броя отсечки, излизащи от нея. Панда и Вомбат играят, редувайки се; започва Панда. За ход Панда изтърва отсечка, свързваща точки с четен сбор на степените, а Вомбат – с нечетен. Който не може да играе, губи. Кой ще победи при правилна игра?
5. Затворена начупена линия се състои от 1001 звена и никои три върха не лежат на една права. Всяко звено, евентуално с две изключения, пресича всички 998 звена, нямащи общи точки с него. Вярно ли е това и за всяко от другите две звена?

ВТОРИ ДЕН

6. Петьо и Васко стартират по кръгова писта от една точка в посока обратно на часовата стрелка. Бягат с постоянни скорости, като тази на Васко е два пъти по-голяма от тази на Петьо. Петьо все бяга обратно на часовата стрелка, а Васко може да си сменя посоката, ако преди това е пробягал поне половин обиколка в една посока. Покажете, че докато Петьо бяга първата си обиколка, Васко може три пъти да застане до него (да го догони или пресрещне), без да броим старта.
7. Зеленият хамелеон винаги казва истината, а кафявият лъже, след което позеленява. В редица от 2019 хамелеона всеки подред отговорил на въпроса колко са сега зелените хамелеони в редицата. Отговорите били 1, 2, 3, ..., 2019 в някакъв ред (не непременно този). Колко най-много може да са били зелените хамелеони отначало?
8. Съществува ли безкрайна редица от различни естествени числа, такава че разликата на всеки две числа от нея е точен квадрат?
9. На първия ред на една страница написали 1999 естествени числа. На втория ред под всеки две съседни числа записали най-големия им общ делител. Аналогично съставили третия, четвъртия и т.н. ред. Може ли в 1000-я ред да има 1000 поредни естествени числа в някакъв ред?
10. Точка D е на средната отсечка на равнобедрен триъгълник ABC , успоредна на страната BC . Точка E е на продължението на страната BA след точка A , като $\angle ECA = \angle DCA$. Точка F е на продължението на страната CA след точка A , като $\angle FBA = \angle DBA$. Докажете, че точка A лежи на средната отсечка на триъгълника DEF , успоредна на страната EF .