

НАЦИОНАЛНИ ОЛИМПИАДИ
ПО МАТЕМАТИКА 2010

Петър Бойваленков Емил Колев
Николай Николов

Съюз на Математиците в България
УНИМАТ СМБ

НАЦИОНАЛНИ ОЛИМПИАДИ ПО МАТЕМАТИКА 2010

Петър Бойваленов Емил Колев
Николай Николов

УНИМАТ СМБ
Съюз на Математиците в България

Настоящата книга съдържа условията и решенията на задачите от финалните етапи на националните олимпиади във водещи (по преценка на авторите) в “олимпийската“ математика страни. Текстът се основава на материалите, разпространявани между ръководствата на националните отбори по време на Международната олимпиада (Астана, 2-14 юли 2010 г.), както и на материали от интернет.

Читателите, които се интересуват от нивото на трудност в отделните олимпиади, вероятно ще сравнят задачите от това издание с аналозите от 2008 и 2009 г. Периодът е сравнително къс за изводи, но според авторите тенденцията е да се предлагат задачи, които са по-трудни както в техническо, така и в творческо отношение. Може би това наблюдение може да послужи и на колегите, които често пледират задачите на нашите състезания да стават все по-лесни и по-лесни.

Авторите се надяват задачите от тази книга да послужат добре на учениците с изявени интереси в областта на математиката и на специалистите, които се занимават с подготовка на олимпийци. Материалите са подготвени както следва: Николай Николов – Иран и Южна Корея, Емил Колев – САЩ и Китай, Петър Бойваленков – Русия, Япония и Жаутиков.

Copyright © УНИМАТ СМБ
София 1113, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
тел. (02)979-28-06, e-mail: peter@math.bas.bg
София, октомври 2010 г.
ISBN: 978-954-8880-33-6

СЪДЪРЖАНИЕ

	Условия	Решения
Иран	3	21
Китай	7	37
Русия	11	60
САЩ	15	76
Южна Корея	17	83
Япония	19	90
Жаутиков	20	95

Иран

Първи кръг

Задача 1. Нека $p(x)$ е квадратен тричлен, за който $|p(x)| \leq 1$ при $x \in \{-1, 0, 1\}$. Да се докаже, че $|p(x)| \leq \frac{5}{4}$ за всяко $x \in [-1, 1]$.

Задача 2. Овощна градина 50×50 е разделена на области 1×1 . В някои области са засадени ябълкови, портокалови и прасковени дървета. Известно е, че всяко портокалово дърво е съседно на поне едно ябълково дърво, всяко прасковено дърво е съседно на поне едно ябълково и едно портокалово дърво и всяко празно място е съседно на поне едно ябълково, едно портокалово и едно прасковено дърво. Да се докаже, че броят на празните области не надминава 1000.

Задача 3. Ъглополовящата на $\angle A$ на $\triangle ABC$ пресича страната BC и описаната около триъгълника окръжност съответно в точки D и M . Права през D пресича лъчите $MB^{\rightarrow}$ и $MC^{\rightarrow}$ в точки P и Q . Да се докаже, че $\angle PAQ \geq \angle A$.

Задача 4. Полк от $n(n+2)$ войници е строен в n колони и $n+2$ редици на равни разстояния от една стъпка. След команда, при която всеки войник се придвижва на една стъпка в едно от четирите направления или остава на място, полкът се оказва строен в $n+2$ колони и n редици на равни разстояния. Да се докаже, че n е четно число.

Задача 5. Естествените числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ са такива, че $a_j - a_i$ дели a_j при $i < j$. Да се докаже, че $ia_j \leq ja_i$ при $i < j$.

Задача 6. Карти с номера от 1 до 11 са раздадени последователно по посока на часовниковата стрелка на 11 човека, които стоят около кръгла маса на равни разстояния. На всеки ход човек може да даде една от картите си на свой съсед, ако номерът i на тази карта има свойството, че преди и след хода картите с номера $i-1$, i и $i+1$ не са върхове на остроъгълен триъгълник (карта 0 е картата 11, а карта 12 е картата 1). Да се докаже, че не може в някой момент всички карти да са в един човек.

Втори кръг

Задача 1. В равнината са дадени $n \geq 3$ точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, никои три от които не лежат на една права.

а) Точки $M_1, M_2, \dots, M_n$ лежат съответно на отсечките $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$, а точки $B_1, B_2, \dots, B_n$ – съответно в $\triangle M_nA_1M_1, \triangle M_1A_2M_2, \dots, \triangle M_{n-1}A_nM_n$. Да се докаже, че

$$B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_nB_1 \leq A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1.$$

б) За даден $\angle XYZ$ с H_{XYZ} означаваме полуравнината, определена от външната ъглополовяща на ъгъла и несъдържаща точката X . Точките $C_1, C_2, \dots, C_n$ лежат съответно в полуравнините $H_{A_nA_1A_2}, H_{A_1A_2A_n}, \dots, H_{A_{n-1}A_nA_1}$. Да се докаже, че

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1 \leq C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_nC_1.$$

Задача 2. Пермутация π на числата от 1 до n ще наричаме *добра*, ако множеството $\{\pi(k) - k | k = 1, 2, \dots, n\}$ има два елемента. Да се докаже, че броят на добрите пермутации е равен на $\sigma(n) - \tau(n)$, където $\sigma(n)$ е сумата на положителните делители на n , а $\tau(n)$ е техният брой.

Задача 3. Триъгълник е разделен на хомотетични на него триъгълници, като коефициентите на хомотетии са числа между -1 и 1 . Да се докаже, че сумата от тези коефициенти е равна на 1 .

Задача 4. Съществуват ли функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ така, че

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| > 1 \text{ за всеки } x \neq y?$$

Задача 5. Дадена е сфера върху равнина. Върху сферата е отбелязана точка. Да се докаже, че чрез търкаляне на сферата върху равнината можем да придвижим точката на върха на сферата, а сферата да върнем в изходна позиция.

Задача 6. Дадени са две взаимно прости естествени числа m и n . Да се докаже, че уравнението $x^m u^n + y^m v^n = z^m w^n$ има безбройно много решения в естествени числа.

Задача 7. Стените на описан около сфера многостен са оцветени в бяло и черно така, че всеки две черни стени нямат общо ребро. Да се докаже, че сумата на лицата на черните стени не надминава тази на белите.

Задача 8. Част от точките от двумерната целочислена решетка са изтрети, а останалите образуват граф с ребра между точките, които са на разстояние 1. Известно, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ във вътрешността на квадрата с върхове $(\pm n, \pm n)$ има по-малко от n изтрети точки. Да се докаже, че графът има точно една безкрайна свързана компонента.

Трети кръг

Задача 1. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува естествено число N така, че за произволно естествено число $b \in [2, 1389]$ сумата от цифрите на N в b -ична бройна система е по-голяма от n .

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и център O на описаната окръжност k . Нека M и N са средите съответно на BH и CH , а $B' = BO \cap k$. Да се докаже, че ако $HONM$ е вписан в окръжност четириъгълник, то $2B'N = AC$.

Задача 3. Квадрат $m \times n$ е разделена на mn единични квадратчета. Във всяко от тях е прекаран единият от диагоналите. Да се докаже, че съществува път по тези диагонали, който съединява горната и долната страна или лявата и дясната страна на квадрата.

Задача 4. Чертаем затворена начупена линия с $2n$ звена, които номерираме последователно. Да се докаже, че ако звената с четни номера са вертикални и начертани нагоре, то линията се самопресича.

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$, за който $AB = AC < BC$. Нека D и M са средите съответно на BC и AB , а X е такава точка, че $BX \perp AC$ и $DX \parallel AB$. Нека $H = BX \cap AD$ и P е втората пресечна точка на DX и описаната около $\triangle ANX$ окръжност. Да се докаже, че допирателната през A към описаната около $\triangle AMP$ окръжност е успоредна на BC .

Задача 6. Редица $a_0, a_1, \dots, a_{1389}$ от неотрицателни числа ще наричаме *вдлъбната*, ако $a_i \geq \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$ за всяко $1 \leq i \leq 1388$. Да се намери най-голямото число c така, че за всяка вдлъбната редица,

$$\sum_{i=0}^{1389} i a_i^2 \geq c \sum_{i=0}^{1389} a_i^2.$$

Задача 7. Точка M лежи на страната BC на $\triangle ABC$, а окръжност ω се допират до отсечките AB , BM и до описаната около $\triangle AMC$ окръжност

съответно в точки T , K и P . Да се докаже, че ако $TK \parallel AM$, то описаните около $\triangle APT$ и $\triangle KPC$ окръжности се допират.

Задача 8. Нека S и T са дървета (крайни свързани графи без цикли), нямащи върхове от степен 2. На всяко тяхно ребро е съпоставено положително число, наречено *дължина* на реброто. *Разстояние* между два върха е сумата на дължината на ребрата от пътя между тях. Върховете от степен 1 се наричат *листа*. Нека f е такава биекция между листата на S и листата на T , че разстоянието между всеки две листа u и v в S е равно на разстоянието между листата $f(u)$ и $f(v)$ в T . Да се докаже, че съществува биекция g между върховете на S и върховете на T така, че разстоянието между всеки върха u и v в S е равно на разстоянието между върховете $g(u)$ и $g(v)$ в T .

Задача 9. Да се намерят всички растящи функции $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ такива, че

$$f\left(\frac{x+f(x)}{2} + y\right) = 2x - f(x) + f(f(y)) \text{ за произволни } x, y \geq 0.$$

Задача 10. Да се намерят всички полиноми $P(x, y)$ с реални коефициенти такива, че

$$P(ab, c^2 + 1) + P(bc, a^2 + 1) + P(ca, b^2 + 1) = 0 \text{ за произволни } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Задача 11. Нека $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е растяща функция, за която съществуват прости числа $p_1, p_2, \dots, p_n$ и естествени числа $s_1, s_2, \dots, s_n$ така, че за всяко $1 \leq i \leq n$ множеството $\{f(p_i r + s_i) | r = 1, 2, \dots\}$ е безкрайна аритметична прогресия. Да се докаже, че съществува такова $a \in \mathbb{N}$, че $f(a+1), f(a+2), \dots, f(a+n)$ е аритметична прогресия.

Задача 12. Две окръжности ω_1 и ω_2 се пресичат в точки P и K , а XY е тяхната обща допирателна, която е по-близко до P , като $X \in \omega_1$ и $Y \in \omega_2$. Нека $XP \cap \omega_2 = C$, $YP \cap \omega_1 = B$ и $BX \cap CY = A$. Да се докаже, че ако Q е втората пресечна точка на описаните около $\triangle ABC$ и $\triangle AXY$ окръжности, то $\sphericalangle QXA = \sphericalangle QKP$.

Китай

Задача 1. Две окръжности k_1 и k_2 се пресичат в точки A и B . Права през B пресича k_1 и k_2 съответно в точки C и D , а друга права през B пресича k_1 и k_2 съответно в точки E и F . Правата CF пресича k_1 и k_2 съответно в точки P и Q . Точките M и N са среди съответно на дъгите $\widehat{PB}$ и $\widehat{QB}$. Да се докаже, че ако $CD = EF$, то точките C , F , M и N лежат на една окръжност.

Задача 2. Дадено е цяло число $k \geq 3$ и редица $\{a_n\}$, за която $a_k = 2k$ и

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 1, & \text{ако } a_{n-1} \text{ и } n \text{ са взаимнопрости} \\ 2n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

за всяко $n > k$. Да се докаже, че числото $a_n - a_{n-1}$ е просто за безбройно много n .

Задача 3. Дадени са комплексни числа a , b и c , за които неравенството $|az^2 + bz + c| \leq 1$ е изпълнено за всяко комплексно число z , за което $|z| \leq 1$. Да се намери максимума на $|bc|$.

Задача 4. Дадени са цели числа m и n , по-големи от 1 и цели числа $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Да се докаже, че съществува множество T от цели числа, за което $|T| \leq 1 + \frac{a_m - a_1}{2n + 1}$ и всяко a_i може да се представи във вида $a_i = t + s$ за някое $t \in T$ и $s \in [-n, n]$.

Задача 5. Дадени са $n + 1$ купчинки от карти O и $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 3$. За един ход е позволено да се извърши едната от следните операции:

(1) ако има поне три карти в A_i , можем да вземем три карти от A_i и да поставим по една карта във всяка от купчинките A_{i-1} , A_{i+1} и O (допускаме, че $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$);

(2) ако в O има поне n карти, можем да вземем n карти от O и да поставим по една карта във всяка от купчинките $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Да се докаже, че ако общият брой карти е поне $n^2 + 3n + 1$, след няколко хода във всяка от купчинките могат да се получат поне $n + 1$ карти.

Задача 6. Дадени са две по две различни положителни цели числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, за които

$$(n+1)a_1^n + na_2^n + (n-1)a_3^n \text{ дели } (n+1)b_1^n + nb_2^n + (n-1)b_3^n$$

за всяко цяло положително число n . Да се докаже, че съществува цяло положително число k , за което $b_i = ka_i$ за всяко $i = 1, 2, 3$.

Китай, момичета

Задача 1. Да се докаже, че съществуват краен брой тройки (a, b, c) от естествени числа, за които $abc = 2009(a + b + c)$.

Задача 2. В окръжност k е вписан правоъгълен триъгълник ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. Точка E от дъгата $\widehat{BC}$ е такава, че $EA > EC$. Точка F от лъча EC е такава, че $\angle EAC = \angle CAF$. Отсечката BF пресича k за втори път в точка D . Нека O е центърът на описаната окръжност за $\triangle DEF$. Да се докаже, че точките A, C и O лежат на една права.

Задача 3. Дадено е цяло положително число n . В правоъгълна координатна система са дадени точките

$$\{P_1, P_2, \dots, P_{4n+1}\} = \{(x, y) \mid x \text{ и } y \text{ са цели числа } xy = 0, |x| \leq n, |y| \leq n\}$$

Да се определи минимума на израза

$$(P_1P_2)^2 + (P_2P_3)^2 + \dots + (P_{4n}P_{4n+1})^2 + (P_{4n+1}P_1)^2.$$

Задача 4. Нека n е цяло положително число, по-голямо от 3. В равнината са избрани точки $V_1, V_2, \dots, V_n$, никои три от които не лежат на една права. Някои от точките са свързани с отсечки, като две точки V_i и V_j се наричат *съседни*, ако V_i и V_j са свързани с отсечка. Първоначално във всяка точка $V_1, V_2, \dots, V_n$ е поставена по една шахматна фигура $C_1, C_2, \dots, C_n$ (не задължително в този ред). За един ход е разрешено да се изберат част от фигурите и всяка от тях да се премести в съседна точка така, че след преместването във всяка точка има отново точно по една фигура и никои две фигури не са си сменили местата. Множество от отсечки се нарича *хармонично*, ако при всяко начално разположение на фигурите след краен брой ходове всяка фигура C_i , ($1 \leq i \leq n$) се намира в точка V_i . Да се намери минималния възможен брой отсечки в хармонично множество.

Задача 5. Дадени са реални числа x, y и z , по-големи или равни на 1. Да се докаже, че

$$(x^2 - 2x + 2)(y^2 - 2y + 2)(z^2 - 2z + 2) \leq (xyz)^2 - 2xyz + 2.$$

Задача 6. Окръжности k_1 и k_2 се допират външно в точка S . Хорда AB в k_2 се допира до k_1 в точка C . Точка M е среда на дъгата $\widehat{AB}$ (не съдържаща S) и нека N е петата на перпендикуляра от M към правата AB . Да се докаже, че $AC \cdot CB = 2r \cdot MN$, където r е радиусът на k_1 .

Задача 7. Върху дъска 10×10 е избрана област R , състояща се от $4n$ единични квадратчета. Известно е, че R може да се разбие на n квадратчета 2×2 . Освен това R може да се разбие на n парчета от дадените видове (позволения са завъртания):



Да се определи колко най-малко може да бъде n .

Задача 8. За всяко естествено число n нека $a_n = n\sqrt{5} - [n\sqrt{5}]$. Да се намери най-малкото и най-голямото измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$. (С $[x]$ означаваме най-голямото цяло число, не надминаващо x .)

Китай, западна

Задача 1. Множество M е получено от множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ чрез изтриване на краен брой реални числа. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува полином $f(x)$ от степен n , всички коефициенти на който са от M , и който има n корена в M .

Задача 2. Дадено е естествено число $n \geq 3$. Да се намери най-малкото естествено число k , за което съществува множество A от k реални числа и n различни реални числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, за които числата

$$x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1$$

са от A .

Задача 3. Ортоцентърът и средата на страната BC на $\triangle ABC$ са означени съответно с H и D . Права през H пресича страните AB и AC съответно

в точки E и F , като $AE = AF$. Правата DH пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в две точки. Да се докаже, че една от тези точки лежи на описаната около $\triangle AEF$ окръжност.

Задача 4. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществуват безбройно много естествени числа n , за които числата

$$2^n + 3^n - 1, 2^n + 3^n - 2, \dots, 2^n + 3^n - k$$

са съставни.

Задача 5. Дадена е редица $\{x_n\}$, за която $x_1 \in \{5, 7\}$ и $x_{n+1} \in \{5^{x_n}, 7^{x_n}\}$ за $n = 1, 2, \dots$. Да се намерят всички възможни стойности за последните две цифри на x_{2009} .

Задача 6. Върху страната BC на остроъгълен триъгълник ABC е избрана точка D . Окръжност с диаметър BD пресича правите AB и AD съответно в точки X и P . Окръжност с диаметър CD пресича правите AC и AD съответно в точки Y и Q . От A са спуснати перпендикуляри към правите PX и QY и петите на тези перпендикуляри са означени съответно с M и N . Да се докаже, че $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ тогава и само тогава, когато правата AD минава през центъра на описаната окръжност на $\triangle ABC$.

Задача 7. В математическо състезание участвали n , ($n \geq 3$) ученика. Състезателната тема се състои от 15 въпроса за попълване на отговора. За верен отговор на всеки въпрос се присъжда 1 точка, а при неверен или непопълнен отговор не се дават точки. След състезанието се оказало, че сборът от резултатите на кои да са 12 ученика е не по-малък от 36 точки и има поне трима ученика, за които съществуват три задачи, на които тези ученици са отговорили правилно. Да се определи най-малката възможна стойност на n .

Задача 8. Дадени са реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geq 3$, за които $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ и $2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1}$ за $k = 2, 3, \dots, n-1$. Да се намери най-малкото $\lambda(n)$, за което за всяко $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ е изпълнено

$$|a_k| \leq \lambda(n) \cdot \max\{|a_1|, |a_n|\}.$$

Русия, 26-27 април 2010

Финалният етап на Всерусийската олимпиада се проведе в град Майкоп, столица на Адигея, република в състава на Руската федерация, от 25 до 30 април 2010 г. В него взе участие и български отбор, а руски отбор върна визитата от 9 до 13 май за финалния кръг на нашата олимпиада. Ръководството на националните отбори реши да участваме със смесен отбор, запазвайки силите на някои от най-добрите ни олимпийци за Балканиадата. Трета награда получи Радослав Кафов (СМГ, участник в състезанието за 10-ти клас), а Виктор Вълов (СМГ, 11 клас), Живко Жечев (ПМГ Шумен, 11 клас) и Емил Лалов (МГ Плевен, 11 клас) получиха похвални грамоти. Участието на българския отбор беше финансово осигурено от Американска Фондация за България, генерален спонсор на националните отбори. Ръководители на отбора бяха ст.н.с. Петър Бойваленков и Емил Карлов.

9 клас

Задача 9.1. (И. Богданов, О. Подлипский) Учител има 24 молива от 4 цвята – по 6 молива от всеки цвят. Учителят раздал моливите на 6 ученика така, че всеки ученик получил по 4 молива. Да се намери минималният брой ученици, които могат да бъдат избрани така, че в тях да има моливи от всички цветове, независимо от разпределението на моливите. (Избирацият знае кой какви моливи има.)

Задача 9.2. (С. Берлов) Върху окръжност са написани 100 две по две различни числа. Да се докаже, че е възможно да бъдат избрани 4 последователни от числата така, че сумата на двете крайни да е строго по-голяма от сумата на двете средни.

Задача 9.3. (А. Полянский) Дадени са окръжност ω с център I и две прави, които се допират до ω в точки A и B и се пресичат в точка O . Върху по-малката дъга AB на ω е избрана точка C , различна от средата на дъгата. Правите AC и OB се пресичат в точка D , а правите BC и OA – в точка E . Да се докаже, че центровете на описаните около триъгълниците ACE , BCD и OCI окръжности лежат на една права.

Задача 9.4. (К. Кноп, И. Богданов) В стола на СМГ има 100 ябълки с общо тегло 10 кг, като всяка ябълка тежи не по-малко от 25 г. Ученик трябва да разреже ябълките на части и до ги раздаде на 100 души така,

че всеки да получи по 100 г. Да се докаже, че ученикът може да направи разрязванията така, че всяко порче да тежи поне 25 г.

Задача 9.5. (П. Козлов) Различните реални числа a и b са такива, че уравнението

$$(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$$

няма реални корени. Да се докаже, че числото $20(b - a)$ не е цяло.

Задача 9.6. (И. Богданов) Всяко от 1000 джуджета има калпак, който е син отвън и червен отвътре или обратно. Джудже, което носи червен (отвън) калпак може само да лъже, а джудже със син (отвън) калпак може да говори само истината. В продължение на един ден всяко джудже казало на всяко друго "Ти си с червен калпак!", като при това някои джуджета са си преобръщали калпака наопаки през този ден. Да се намери минималният възможен брой обръщания на калпаки.

Задача 9.7. (В. Сендеров) Естественото число n се нарича *неуспешно*, ако не може да се представи във вида $n = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}$ за някои естествени $x, y > 1$. Да се определи дали множеството на неуспешните числа е крайно или безкрайно.

Задача 9.8. (С. Волченков) В остроъгълния $\triangle ABC$ медианата AM е по-дълга от страната AB . Да се докаже, че $\triangle ABC$ може да бъде разрязан на три части, от които да се сглоби ромб.

10 клас

Задача 10.1. (И. Богданов, О. Подлипский) Учител има 40 молива от 4 цвята – по 10 молива от всеки цвят. Учителят раздал моливите на 10 ученика така, че всеки ученик получил по 4 молива. Да се намери минималният брой ученици, които могат да бъдат избрани така, че в тях да има моливи от всички цветове, независимо от разпределението на моливите. (Избирацията знае кой какви моливи има.)

Задача 10.2. Виж Задача 9.2.

Задача 10.3. (Д. Прокопенко) През центъра O на описаната около неравнобедрен остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност са построени две прави, перпендикулярни на страните AB и AC . Тези прави пресичат височината AD на $\triangle ABC$ в точки P и Q . Точката M е средата на страната BC , а S е центърът на окръжността, описана около $\triangle OPQ$. Да се докаже, че $\angle BAS = \angle CAM$.

Задача 10.4. (П. Зусманович, Ф. Петров) Във всяка клетка на квадрат 100×100 е записано цяло число. Правоъгълник, съставен от клетки на квадрата, се нарича *добър*, ако сумата от числата в него се дели на 17. Разрешено е едновременно да се оцветят всички клетки в добър правоъгълник, но е забранено една клетка да се оцветява два пъти. Да се намери максималното d , за което е възможно да се оцветят поне d клетки при произволно разположение на числата.

Задача 10.5. (П. Козлов) Различните реални числа a и b са такива, че уравнението $(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$ няма реални корени. Да се докаже, че числото $20(b - a)$ не е цяло.

Задача 10.6. (Л. Емелянов) В $\triangle ABC$ е взета точка K , лежаща на ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$. Правата CK пресича за втори път окръжността ω , описана около $\triangle ABC$ в точка M . Окръжност Ω минава през точка A , допира се до правата CM в точка K и пресича за втори път отсечката AB в точка P , а окръжността ω – в точка Q . Да се докаже, че точките P , Q и M лежат на една права.

Задача 10.7. (В. Сендеров) Дадени са n , $n \geq 3$, две по две взаимнопрости числа. Известно е, че при деление на произведението на кои да е $n - 1$ от числата на оставащото число се получава едни и същи остатък r . Да се докаже, че $r \leq n - 2$.

Задача 10.8. (В. Долников) В една страна някои двойки градове са свързани с двупосочни директни авиолинии, като от всеки град може да се долети до всеки друг град (с евентуални прекачвания). Известно е, че ако се избере произволен затворен маршрут с нечетен брой авиолинии и се закрият тези линии, вече няма да е възможно от всеки град да се долети до всеки друг град. Да се докаже, че градовете могат да бъдат разделени на 4 части така, всяка авиолиния да свързва градове от различни части. (Някои части могат и да не съдържат градове.)

11 клас

Задача 11.1. (Н. Агаханов, И. Богданов) Съществуват ли ненулеви реални числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, за които $\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(a_{10} + \frac{1}{a_{10}}\right) = \left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(a_{10} - \frac{1}{a_{10}}\right)$?

Задача 11.2. (Р. Карасев) В $n \times n$ таблица ($n \geq 4$) са разположени n знака $+$ в клетките на единия главен диагонал и знаци $-$ във всички

останали клетки. Разрешено е да се променят всички знаци на противоположните им в даден ред или стълб. Да се докаже, че не е възможно след краен брой такива операции да останат по-малко от n плюса.

Задача 11.3. (П. Кожевников) Четириъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност ω , а диагоналите му се пресичат в точка K . Точките M_1, M_2, M_3 и M_4 са съответно средите на дъгите AB, BC, CD и DA (несъдържащи други върхове на четириъгълника). Точките I_1, I_2, I_3 и I_4 са центровете на окръжностите, вписани съответно в триъгълниците ABK, BCK, CDK и DAK . Да се докаже, че правите M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3 и M_4I_4 се пресичат в една точка.

Задача 11.4. (Ф. Петров) Дадено е естествено число $n \geq 3$. Да се намери минималното естествено число k , за което е вярно следното твърдение: за произволни n точки $A_i = (x_i, y_i)$ в равнината, никои три от които не лежат на една права, и произволни реални числа c_i ($1 \leq i \leq n$) съществува полином $P(x, y)$ от степен най-много k , за който $P(x_i, y_i) = c_i$ за всички $i = 1, \dots, n$.

Задача 11.5. (И. Богданов) Дадено е естествено число $n > 1$. Да се докаже, че съществуват n последователни естествени числа, чието произведение се дели на всички прости числа, ненадминаващи $2n + 1$ и не се дели на нито едно друго просто число.

Задача 11.6. (И. Богданов, О. Подлипский) Възможно ли е четирите центъра на вписаните в стените на тетраедър окръжности да лежат в една равнина?

Задача 11.7. (И. Богданов) Полином $P(x)$ от степен $n \geq 3$ има n реални корена $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, като $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \dots < x_n - x_{n-1}$. Да се докаже, че максимумът на функцията $y = |P(x)|$ в интервала $[x_1, x_n]$ се достига в точка от интервала $[x_{n-1}, x_n]$.

Задача 11.8. Д. Фон-Дер-Флаасс В лятна школа се преподават 9 предмета на 512 ученика, които са настанени в 256 двуместни стаи (учениците в една стая се наричат съседи). Известно е, че за всеки два ученика множествата от предметите, които са им интересни, са различни (в частност, точно на един ученик не е интересно нищо). Да се докаже, че е възможно всички ученици да бъдат подредени в кръг така, че всеки два съседа да са един до друг, а за всеки двама, които не са съседи и са един до друг, за единия са интересни всички предмети, интересни на другия, и точно още един предмет.

САЩ (27-28 април, 2010)

Задача 1. Даден е изпъкнал петъгълник $AXYZB$ вписан в полуокръжност с диаметър AB . Петите на перпендикулярите от Y към правите AX , BX , AZ и BZ са означени съответно с P , Q , R и S . Да се докаже, че острият ъгъл между правите PQ и RS е равен на половината от $\angle XOZ$, където O е средата на отсечката AB .

Задача 2. Един зад друг в кръг са застанали n ученика. Височините на учениците са $h_1 < h_2 < \dots < h_n$. Ако ученик с височина h_k е веднага след ученик с височина h_{k-2} или по-малка, двамата ученика могат да си сменят местата. Да се докаже, че са възможни най-много $\binom{n}{3}$ такива смени (т.е. след не повече от $\binom{n}{3}$ смени ще се достигне до разположение, при което не са възможни повече смени).

Задача 3. Дадени са 2010 положителни числа $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$, за които $a_i a_j \leq i + j$ за всички различни i и j . Да се намери най-голямата възможна стойност на произведението $a_1 a_2 \dots a_{2010}$.

Задача 4. Даден е триъгълник ABC , за който $\angle A = 90^\circ$. Точките D и E съответно върху страните AC и AB са такива, че $\angle ABD = \angle DBC$ и $\angle ACE = \angle ECB$. Отсечките BD и CE се пресичат в I . Да се определи възможно ли е дължините на всички отсечки AB , AC , BI , ID , CI и IE да са цели числа.

Задача 5. Нека $q = \frac{3p-5}{2}$, където p е нечетно просто число. Да означим

$$S_q = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}.$$

Да се докаже, че ако $\frac{1}{p} - 2S_q = \frac{m}{n}$ за цели числа m и n , то разликата $m - n$ се дели на p .

Задача 6. На дъската са написани 68 двойки от ненулеви цели числа. За всяко естествено число k най-много едната от двете двойки (k, k) и $(-k, -k)$

е записана на дъската. Ученик изтрива някои от записаните 136 цели числа при положение, че сборът на някои две от изтритите числа не е равен на нула. Ученикът получава по една точка за всяка от дадените 68 двойки от която има изтрито поне едно число. Да се намери максималният брой точки N , които може да получи ученикът, без значение кои 68 двойки числа са били записани.

Южна Корея

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$ с лице T и периметър L . Нека P , Q и R са допирните точки на вписаната в триъгълника окръжност съответно със страните BC , CA и AB . Да се докаже, че

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^3 + \left(\frac{BC}{QR}\right)^3 + \left(\frac{CA}{RP}\right)^3 \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L^2}{T}.$$

Задача 2. Нека O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на $\triangle ABC$, а вписаната в него окръжност с център I се допира до страната BC в точка D . Известно е, че $\angle B < \angle C$ и $AO \parallel HD$. Ако $E = AH \cap OD$ и F е средата на отсечката CI , да се докаже, че точките E , F , I и O лежат на една окръжност.

Задача 3. Дадени са $n \geq 2$ уеб страници, номерирани от 1 до n , така, че за всяко $1 \leq i \leq n-1$ има връзка от страницата i към страницата $i+1$. Разрешено е добавянето на нова връзка от страница с по-малък номер към страница с по-голям номер. Да се докаже, че може да се добавят не повече от $3(n-1)\log_2(\log_2 n)$ нови връзки така, че може да се премине от произволна страница с по-малък номер към произволна страница с по-голям номер с най-много 3 връзки.

Задача 4. Даден е трапец $ABCD$ с основи AB и CD . Нека k_1 е окръжността с център A и радиус AB , а k_2 – окръжността с център C и радиус CD . Нека $BD \cap k_1 = P$ ($P \neq B, D$) и k е окръжността с диаметър PD . Ако $k \cap k_1 = X$ ($X \neq P$) и $k \cap k_2 = Y$ ($Y \neq D$), да се докаже, че пресечната точка на k_2 и описаната около $\triangle BXY$ окръжност лежи на правата BD .

Задача 5. Около кръгла маса стоят $2n$ човека, някои от които имат бисквити. Ако човек изяде една бисквита и има друга, той може да я даде на свой съсед. Нека A е един от хората. Да се намери минималният брой бисквити, така че за всяко тяхно разпределение има стратегия, при която в A ще попадне поне една бисквита.

Задача 6. Едно просто число p се нарича *добро*, ако:

(1) не съществува естествено число $n \geq 2$, такова, че $\frac{p^n-1}{n}$ е цяло число, взаимно просто с n ;

(2) за безбройно много $k \in \mathbb{N}$ съществуват $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, по-големи от $\frac{p}{2}$ така, че за всяко $1 \leq i \leq k$ числото $\frac{p^{n_i}-1}{n_{i+1}}$ е цяло и взаимно просто с n_{i+1} ($n_{k+1} = n_1$).

Да се докаже, че 2 не е добро число, но всички нечетни прости числа са добри.

Япония (11 февруари 2010 г.)

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, $AB \neq AC$, с височина AN , $N \in BC$. Точките P и Q са такива, че A, B и P , и A, C и Q съответно лежат на една права в посочения ред. Да се докаже, че ако точките B, C, P и Q лежат на една окръжност и $NP = NQ$, то точката N съвпада с центъра на описаната около $\triangle APQ$ окръжност.

Задача 2. Нека k е естествено число и m е цяло нечетно число. Да се докаже, че съществува естествено число n , за което 2^k дели $n^n - m$.

Задача 3. Дадени са 2010 острова и 2009 моста, свързващи някои от тях (един мост свързва два различни острова). От всеки остров може да се достигне до всеки друг остров по мостове. Един ден от всеки остров било пратено по едно писмо до остров (възможно до същия). Оказало се, че за всеки два острова A и B , свързани с мост, получателите на писмата от A и B са на острови, които са свързани с мост или са на един и същи остров.

Да се докаже, че е в сила поне едно от следните две твърдения:

- (1) Има остров, от който е изпратено писмо до същия остров.
- (2) Има двойка острови, свързани с мост, които са си разменили писма.

Задача 4. Да се докаже, че за произволни реални положителни числа x, y и z е в сила неравенството

$$\frac{1 + xy + xz}{(1 + y + z)^2} + \frac{1 + yz + yx}{(1 + z + x)^2} + \frac{1 + zx + zy}{(1 + x + y)^2} \geq 1.$$

Задача 5. Даден е изпъкнал 2010-ъгълник, някои три диагонала на който не се пресичат в обща точка (различна от връх). Разглеждаме затворените зигзагообразни начупени линии (ЗЗОНЛ), които се състоят от диагонали и минават точно по веднъж през всеки от върховете на 2010-ъгълника. Да се намери максималният възможен брой точки на самопресичане на ЗЗОНЛ. (ЗЗОНЛ е начупена линия $P_1P_2 \dots P_nP_{n+1}$, за която $P_1 \equiv P_{n+1}$.)

Казахстан (Жаутиков, 12-13 януари 2010 г.)

Олимпиадата Жаутиков се провежда в Казахстан от 2005 г. и има всички характеристики на национална олимпиада с международно участие. На 10-17 януари 2010 г. в 6-тото издание на Жаутиков взеха участие български отбори от СМГ (Любослав Панчев, Виктор Вълков и Даниел Добрев с ръководители Румяна Караджова и Петя Тодорова) и ПМГ Шумен (Живко Жечев, Младен Вълков и Йоана Йорданова с ръководители Мадлен Христова и Петър Бойваленов). Нашите ученици спечелиха два златни (Любослав Панчев и Виктор Вълков), един сребърен (Живко Жечев) и два бронзови (Младен Вълков и Даниел Добрев) медала.

Задача 1. Да се реши в прости числа уравнението $p^3 - q^7 = p - q$.

Задача 2. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB = AD$ и точките M и N лежат съответно на страните BC и CD така, че $MN = BN + DM$. Правите AM и AN пресичат за втори път описаната около $ABCD$ окръжност съответно в точки P и Q . Да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle APQ$ лежи върху отсечката MN .

Задача 3. Правоъгълник е разбит на фигури от три вида: равнобедрени правоъгълни триъгълници с основа 2, единични квадрати и успоредници, определени от две страни и два диагонала на единични квадрати. Да се докаже, че броят на успоредниците е четно число.

Задача 4. На дъската са записани числата $1, 2, \dots, n$, $n > 2$. На всяка минута две числа се изтриват и на тяхно място се записва най-малкият прост делител на сумата им. Да се намери най-малката стойност на n , за която е възможно накрая да остане само числото 97.

Задача 5. Във всеки връх на правилен n -ъгълник е поставен пул. Разрешено е за един ход да се разменят местата на два съседни пула. Да се намери минималният брой стъпки, необходими за достигане на ситуация, в която всеки пул е преместен на $[n/2]$ позиции по посока на часовниковата стрелка, считано от първоначалната му позиция.

Задача 6. Нека O , I и H са съответно центровете на описаната и вписаната окръжности и ортоцентъра на остроъгълен неравнобедрен $\triangle ABC$. Да се докаже, че:

- а) $\angle OIH > 90^\circ$; б) $\angle OIH > 135^\circ$.

Изложените решения и за трите кръга са съществено преработени!

Иран, първи кръг

Задача 1. Нека $p(x)$ е квадратен тричлен, за който $|p(x)| \leq 1$ при $x \in \{-1, 0, 1\}$. Да се докаже, че $|p(x)| \leq \frac{5}{4}$ за всяко $x \in [-1, 1]$.

Решение. Да отбележим, че

$$p(x) = \frac{x(x+1)}{2}p(1) + (1-x^2)p(0) + \frac{x(x-1)}{2}p(-1)$$

(защото квадратните тричлени от двете страни съвпадат в три точки). При $0 \leq x \leq 1$ имаме, че

$$|p(x)| \leq \frac{x(x+1)}{2} + (1-x^2) + \frac{x(1-x)}{2} = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leq \frac{5}{4},$$

а при $-1 \leq x \leq 0$:

$$|p(x)| \leq -\frac{x(x+1)}{2} + (1-x^2) + \frac{x(x-1)}{2} = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \leq \frac{5}{4}.$$

И така, $|p(x)| \leq \frac{5}{4}$ за всяко $x \in [-1, 1]$, като равенство се достига при $p(x) = \pm(x^2 - x - 1)$, $x = \frac{1}{2}$ и $p(x) = \pm(x^2 + x - 1)$, $x = -\frac{1}{2}$.

Задача 2. Овощна 50×50 градина е разделена на 1×1 области. В някои области са засадени ябълкови, портокалови и прасковени дървета. Известно е, че всяко портокалово дърво е съседно на поне едно ябълково дърво, всяко прасковено дърво е съседно на поне едно ябълково и едно портокалово дърво и всяко празно място е съседно на поне едно ябълково, едно портокалово и едно прасковено дърво. Да се докаже, че броят на празните области не надминава 1000.

Решение. Нека a_1 , a_2 и a_3 е съответно броят на ябълковите, портокаловите и прасковените дървета, а a_4 – броят на празните области.

Броят на съседствата на ябълковите дървета с останалите дървета и празните области не надминава $4a_1$, а от условието следва, че този брой е поне $a_2 + a_3 + a_4$. Значи $4a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4$.

Броят на съседствата на портокаловите с прасковените дървета и празните области не надминава $3a_2$ (понеже всяко портокалово дърво има за съсед ябълково), а от друга страна той е поне $a_3 + a_4$ (понеже всяко прасковено дърво и всяка празна област имат за съсед портокалови дървета). И така, $3a_2 \geq a_3 + a_4$.

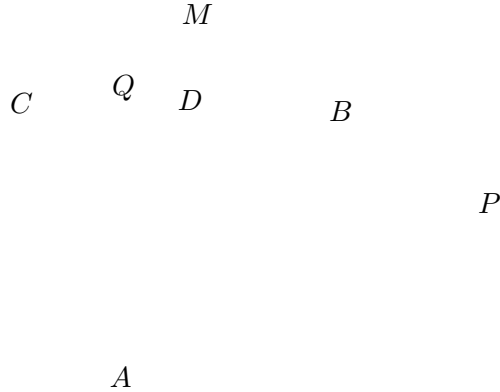
Аналогично $2a_3 \geq a_4$. Тогава $3a_2 \geq a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + a_4$ и значи $2a_2 \geq a_4$. Оттук $4a_1 \geq a_2 + a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + a_4$ и следователно $2a_1 \geq a_4$. Сега

$$2500 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + \frac{a_4}{2} + a_4 = \frac{5}{2}a_4,$$

откъдето $a_4 \leq 1000$.

Задача 3. Ъглополовящата на $\sphericalangle A$ на $\triangle ABC$ пресича страната BC и описаната около триъгълника окръжност съответно в точки D и M . Права през D пресича лъчите $MB^{\rightarrow}$ и $MC^{\rightarrow}$ в точки P и Q . Да се докаже, че $\sphericalangle PAQ \geq \sphericalangle A$.

Решение. Понеже $\sphericalangle DBM = \sphericalangle DAC = \frac{\sphericalangle A}{2}$, следва, че BM е допирателна към описаната около $\triangle ABD$ окръжност.



Черт. 1

Тогава P е външна точка за тази окръжност и значи $\sphericalangle APD \leq \sphericalangle ABD = \sphericalangle B$. Аналогично $\sphericalangle AQD \leq \sphericalangle ACD = \sphericalangle C$ и следователно

$$\sphericalangle PAQ = 180^\circ - \sphericalangle APQ - \sphericalangle AQP \geq 180^\circ - \sphericalangle B - \sphericalangle C = \sphericalangle A.$$

Задача 4. Полк от $n(n+2)$ войници е строен в n колони и $n+2$ редици на равни разстояния от една стъпка. След команда, при която всеки войник

се придвижва на една стъпка в едно от четирите направления или остава на място, полкът се оказва строен в $n + 2$ колони и n редици на равни разстояния. Да се докаже, че n е четно число.

Решение. Нека четирите направления са горе, долу, ляво и дясно. След командата най-горната редица се придвижва надолу, най-долната редица – нагоре, най-лявата колона (без двамата крайни войници) – наляво, а най-дясната (също без двамата крайни войници) – надясно. Останалите войници, които първоначално са строени в $n - 2$ колони и n реда, се придвижват така, че да се строят в n колони и $n - 2$ редици. И така, от n преминахме към $n - 2$. Като продължим, стигаме до $n = 1$ или $n = 2$. Тъй като при $n = 1$ условието не може да бъде изпълнено, следва, че n е четно число.

Задача 5. Естествените числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ са такива, че $a_j - a_i$ дели a_j при $i < j$. Да се докаже, че $ia_j \leq ja_i$ при $i < j$.

Решение. Понеже всяко от числата $a_j > a_j - a_1 > a_j - a_2 > \dots > a_j - a_{j-1}$ е делител на a_j , следва, че $a_j - a_i \leq \frac{a_j}{i+1}$ при $i < j$. Оттук $(i+1)(a_j - a_i) \leq a_j$ и значи $ia_j \leq (i+1)a_i \leq ja_i$.

Задача 6. Карти с номера от 1 до 11 са раздадени последователно по посока на часовниковата стрелка на 11 човека, които стоят около кръгла маса на равни разстояния. На всеки ход човек може да даде една от картите си на свой съсед, ако номерът i на тази карта има свойството, че преди и след хода картите с номера $i - 1$, i и $i + 1$ не са върхове на остроъгълен триъгълник (карта 0 е картата 11, а карта 12 е картата 1). Да се докаже, че не може в някой момент всички карти да са в един човек.

Решение. Да разделим масата на 11 равни дъги. Разстояние между две карти ще наричаме по-малкия брой на дъгите между позициите на тези карти. Лесно се вижда, че четността на сумата от разстоянията между картите с последователни номера се запазва (ако картата с номер i лежи на по-малката дъга между $i - 1$ и $i + 1$, то сумата не се променя след хода, а иначе се променя с 2). Тъй като в началото тази сума е нечетно число (всъщност е 11), тя не може да стане равна на 0, което трябваше да докажем.

Иран, втори кръг

Задача 1. В равнината са дадени $n \geq 3$ точки $A_1, A_2, \dots, A_n$, никои три от които не лежат на една права.

а) Точки $M_1, M_2, \dots, M_n$ лежат съответно на отсечките $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$, а точки $B_1, B_2, \dots, B_n$ – съответно в $\triangle M_nA_1M_1, \triangle M_1A_2M_2, \dots, \triangle M_{n-1}A_nM_n$. Да се докаже, че

$$B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_nB_1 \leq A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1.$$

б) За даден $\angle XYZ$ с H_{XYZ} означаваме полуравнината, определена от външната ъглополовяща на ъгъла, и несъдържаща точката X . Точките $C_1, C_2, \dots, C_n$ лежат съответно в полуравнините $H_{A_nA_1A_2}, H_{A_1A_2A_n}, \dots, H_{A_{n-1}A_nA_1}$. Да се докаже, че

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1 \leq C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_nC_1.$$

Решение. а) Ще използваме, че ако P е точка в $\triangle ABC$, то $(*) PB + PC \leq AB + AC$. Наистина, ако $D = AB \cap CP$, то

$$PB + PC \leq BD + PD + PC = BD + CD \leq BD + DA + AC = AB + AC.$$

Тогава

$$\begin{aligned} & B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_nB_1 \\ & \leq (B_1M_1 + B_2M_1) + (B_2M_2 + B_3M_2) + \dots + (B_nM_n + B_1M_n) \\ & = (B_1M_n + B_1M_1) + (B_2M_1 + B_2M_2) + \dots + (B_nM_{n-1} + B_nM_n) \\ & \leq (A_1M_n + A_1M_1) + (A_2M_1 + A_2M_2) + \dots + (A_nM_{n-1} + A_nM_n) \\ & = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1 \end{aligned}$$

(второто неравенство следва от $(*)$).

б) Нека $u_k = \frac{\overrightarrow{A_kA_{k+1}}}{l_k}$, където $l_k = A_kA_{k+1}$, $1 \leq k \leq n$. Тогава векторът $u_k - u_{k-1}$ е по направление на вътрешната ъглополовяща на $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1}$. От условието следва, че $(**) v_k \cdot (u_k - u_{k-1}) \leq 0$, където $v_k = \frac{\overrightarrow{A_kC_k}}{C_k}$. Понеже $|u_k| = |u_{k-1}| = 1$, то

$$C_{k-1}C_k \geq \overrightarrow{C_{k-1}C_k} \cdot u_k = (v_k + l_{k-1}u_{k-1} - v_{k-1}) \cdot u_{k-1} = v_k \cdot u_{k-1} + l_{k-1} - v_{k-1} \cdot u_{k-1}.$$

Следователно

$$\sum_{k=1}^n C_{k-1}C_k \geq \sum_{k=1}^n l_{k-1} + \sum_{k=1}^n v_k \cdot u_{k-1} - \sum_{k=1}^n v_{k-1} \cdot u_{k-1}.$$

От $(**)$ получаваме, че $\sum_{k=1}^n v_k \cdot (u_k - u_{k-1}) \leq 0$, т.е.

$$\sum_{k=1}^n v_{k-1} \cdot u_{k-1} = \sum_{k=1}^n v_k \cdot u_k \leq \sum_{k=1}^n v_k \cdot u_{k-1}$$

и значи $\sum_{k=1}^n C_{k-1} C_k \geq \sum_{k=1}^n l_{k-1}$, което трябваше да докажем.

Задача 2. Пермутация π на числата от 1 до n ще наричаме *добра*, ако множеството $\{\pi(k) - k | k = 1, 2, \dots, n\}$ има два елемента. Да се докаже, че броят на добрите пермутации е равен на $\sigma(n) - \tau(n)$, където $\sigma(n)$ е сумата на положителните делители на n , а $\tau(n)$ е техният брой.

Решение. Да разгледаме една добра пермутация π . Тъй като $\sum_{k=1}^n (\pi(k) - k) = 0$, то единият от двата елемента на множеството $\{\pi(k) - k | k = 1, \dots, n\}$ е положителен, а другият – отрицателен; например, $a > 0$ и $-b < 0$. Нека $A = \{k | \pi(k) - k = a\}$ и $B = \{k | \pi(k) - k = -b\}$.

Първо да отбележим, че ако $i \in A$ и $i + a + b \leq n$, то $i + a + b \in A$. Наистина, $\pi(i) = i + a$ и значи $\pi(i + a + b) \neq i + a$, т.е. $i + a + b \notin B$. Аналогично, ако $i \in B$ и $1 \leq i - a - b$, то $i - a - b \in B$.

Очевидно $i \in A$ при $1 \leq i \leq b$. От по-горе следва, че ако остатъкът на $1 \leq i \leq n$ при деление на $a + b$ е ненулев и не надминава b , то $i \in A$. Аналогично, ако остатъкът на $1 \leq i \leq n$ при деление на $a + b$ е 0 или по-голям от b , то $i \in B$. Оттук лесно следва, че $d = a + b$ дели n .

Обратно, горните разсъждения позволяват за всеки делител d на n и всяко $1 \leq a \leq d - 1$ да построим добра пермутация така, че елементите на множеството $\{\pi(k) - k | k = 1, \dots, n\}$ са a и $-b = a - d$. Следователно броят на добрите пермутации е равен на

$$\sum_{d|n} (d - 1) = \sum_{d|n} d - \sum_{d|n} 1 = \sigma(n) - \tau(n).$$

Задача 3. Триъгълник е разделен на хомотетични на него триъгълници, като коефициентите на хомотетия са числа между -1 и 1 . Да се докаже, че сумата от тези коефициенти е равна на 1 .

Решение. Нека една от страните на големия триъгълник е хоризонтална, например a . Разглежданата сума е равна на сумата S на отношенията на хоризонталните страни на малките триъгълници към a , взети със съответния знак. В S всяка хоризонтална страна, която не лежи на a , се появява два пъти, като отношението, съответстващо на по-близкия до a триъгълник, е

отрицателно, а другото – противоположно на него. Следователно S е равно на сумата на отношенията, които съответстват на страните върху a , които очевидно са положителни със сума 1.

Задача 4. Съществуват ли функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ така, че

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| > 1 \text{ за всеки } x \neq y?$$

Решение. Не съществуват. Да допуснем противното. Тогава

$$(f(x) - f(y))^2 + (g(x) - g(y))^2 \geq \frac{1}{2}(|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|)^2 > \frac{1}{2}.$$

Нека k_x означава затворения кръг с център $(f(x), g(x))$ и радиус $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Тогава $(k_x)_{x \in \mathbb{R}}$ е неизброима фамилия от непресичащи се кръгове. Като изберем по една точка с рационални координати във всеки от кръговете, получаваме противоречие с изброимостта на рационалните числа.

Задача 5. Дадена е сфера върху равнина. Върху сферата е отбелязана точка. Да се докаже, че чрез търкаляне на сферата върху равнината можем да придвижим точката на върха на сферата, а сферата да върнем в изходна позиция.

Решение. Нека r е радиусът на сферата, а A е началната позиция на дъното на сферата. Търкаляме сферата по голямата окръжност през A и отбелязаната точка, докато тази точка не попадне на върха на сферата. Нека B е положението на дъното в този момент. Тогава $AB \leq 2\pi r < 4\pi r$ и значи съществува точка C в равнината така, че $AC = BC = 2\pi r$. Оттук следва, че като търкаляме сферата по отсечката BC и след това по отсечката CA , маркираната точка ще бъде на върха както когато дъното е в C , така и накрая (когато дъното е пак в A).

Задача 6. Дадени са две взаимно прости естествени числа m и n . Да се докаже, че уравнението $x^m u^n + y^m v^n = z^m w^n$ има безбройно много решения в естествени числа.

Решение. Понеже m и n са взаимно прости числа, то съществуват числа $1 \leq k \leq n$ и $1 \leq l \leq m$ така, че $km - ln = 1$. Тогава числата

$$x = y = 2^{ni}, \quad u = v = 2^{mi}, \quad z = 2^{ni+k}, \quad w = 2^{mi-l}$$

дават решение на уравнението за всяко $i \in \mathbb{N}$.

Задача 7. Стените на описан около сфера многостен са оцветени в бяло и черно така, че всеки две черни стени нямат общо ребро. Да се докаже, че сумата на лицата на черните стени не надминава тази на белите.

Решение. Съединяваме върховете $A_1 A_2 \dots A_n$ на всяка черна стена на многостена с допирната ѝ точка T със сферата и получаваме разбиване на черните стени на многостена на триъгълници. По условие $A_1 A_2$ е ребро и на бяла стена. Ако T' е допирната точка на тази стена със сферата, то $A_1 T = A_1 T'$ и $A_2 T = A_2 T'$ като допирателни към сферата и следователно $\triangle A_1 A_2 T \cong \triangle A_1 A_2 T'$. По този начин на всеки черен триъгълник съпоставяме равнолицев бял, откъдето следва твърдението на задачата.

Задача 8. Част от точките от двумерната целочислена решетка са изтрети, а останалите образуват граф с ребра между точките, които са на разстояние 1. Известно, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ във вътрешността на квадрата с върхове $(\pm n, \pm n)$ има по-малко от n изтрети точки. Да се докаже, че графът има точно една безкрайна свързана компонента.

*Решение.** При $n = 1$ следва, че началото O е връх на разглеждания граф, който ще означаваме с Γ .

Първо ще докажем, че свързаната компонента Γ_0 на Γ , съдържаща O , е безкрайна. Да допуснем противното. Нека k е максималното разстояние по хоризонтала или вертикала от O до връх A на Γ_0 . Можем да считаме, че $A = (k, 0)$. Тогава O и A са свързани с път в Γ_0 и той пресича всяка от правите $x = i$, $0 \leq i \leq k$. От избора на k следва, че за всяко такова i съществува j , за което $|j| \leq k + 1$ и (i, j) е изтрита точка (иначе $(i, j) \in \Gamma_0$ при $|j| \leq k + 1$). Следователно във вътрешността на квадрата с върхове $(\pm(k + 2), \pm(k + 2))$ има поне $k + 1$ изтрети точки. От друга страна, по условие те са най-много $k + 1$. Оттук следва, че $(-1, j) \in \Gamma_0$ при $|j| \leq k + 1$, което е противоречие.

Сега да допуснем, че G има друга безкрайна свързана компонента Γ_1 . Ако $(i, j) \in \Gamma_1$, то при $n \geq N = \max\{|i|, |j|\}$ контурът на квадрата с върхове $(\pm n, \pm n)$ съдържа точки както от Γ_0 , така от Γ_1 (за да се убедим в това, достатъчно е да свържем точка извън този квадрат с точка от този квадрат, като и двете точки са или от Γ_0 или от Γ_1). Върху този контур има поне две изтрети точки (иначе точки от Γ_0 и Γ_1 ще са съседни). Значи при $n \geq N + 1$ вътрешността на квадрата с върхове $(\pm n, \pm n)$ съдържа поне $2(n - N)$ изтрети точки. При $n \geq 2N$ те са поне n , което е противоречие.

*Условието и решението на задачата са леко променени.

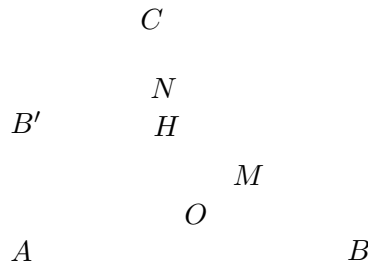
Иран, трети кръг

Задача 1. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува естествено число N така, че за произволно естествено число $b \in [2, 1389]$ сумата от цифрите на N в b -ична бройна система е по-голяма от n .

Решение. Числото $N = (1389!)^{n+1} - 1$ има исканото свойство. Наистина, $N + 1$ се дели на b^{n+1} за всяко $b \in [2, 1389]$ и следователно последните $n + 1$ цифри на $N + 1$ в b -ична бройна система са нули. Значи последните $n + 1$ цифри на N в b -ична бройна система са $b - 1$ и тяхната сума е $(n + 1)(b - 1) > n$.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и център O на описаната окръжност k . Нека M и N са средите съответно на BH и CH , а $B' = BO \cap k$. Да се докаже, че ако $HONM$ е вписан в окръжност четириъгълник, то $2B'N = AC$.

Решение. Хомотетията с център H и коефициент 2 изобразява M в B и N в C (черт. 2). Следователно тя изобразява описаната около $HONM$ окръжност ω в описаната около $\triangle HBC$ окръжност Γ ; в частност, двете окръжности се допират в H . Както е добре известно, радиусът на Γ е равен на радиуса R на k . Значи ω има радиус $\frac{R}{2}$ и понеже минава през центъра O на k , следва, че тя се допира до k , например в T .



Черт. 2

Тъй като k и Γ са симетрични спрямо BC , то и допирните им точки T и H с ω са симетрични спрямо BC ; в частност $HT \perp BC$. От друга страна,

OT е диаметър на ω ($OT = R$) и следователно $HT \perp HO$, откъдето $HO \parallel BC$. Значи $HO \perp B'C$ и понеже $OB' = OC$, то $HB' = HC$ (HO е симетрала на $B'C$). Следователно, ако D е средата на HB' то медианите $B'N$ и CD в равнобедрения $\triangle B'CH$ са равни. От друга страна, $AH \parallel B'C$ (като перпендикулярни на BC) и аналогично $CH \parallel B'A$. Тогава $AB'CH$ е успоредник и значи неговите диагонали се разполовяват, т.е. D е среда и на AC . Оттук $B'N = CD = \frac{AC}{2}$.

Задача 3. Квадрат $m \times n$ е разделена на mn единични квадратчета. Във всяко от тях е прекаран единият от диагоналите. Да се докаже, че съществува път по тези диагонали, който съединява горната и долната страна или лявата и дясната страна на квадрата.

*Решение.** Свързана компонента ще наричаме такава съвкупност от квадратчета, че множеството от прекараните диагонали в тях е свързано, но при добавяне на ново квадратче това не е вярно.

Да допуснем, че твърдението на задачата не е вярно и да разгледаме свързана компонента G , която съдържа път с максимална височина $h < m$, започващ от квадратче от долната страна. Понеже няма път между лявата и дясната страна на квадрата, то G не съдържа някое от крайните квадратчета от долната страна, например лявото. Да разгледаме най-лявото квадратче върху долната страна на квадрата, което не е от G , но има обща страна с квадратче от G . Съществува и квадратче b на височина $h + 1$, което не е от G , но има обща страна с квадратче от G . Не е трудно да се съобрази, че прекараните диагонали в a и b са свързани с път, минаващ през квадратчета, имащи общи върхове с квадратчета от G . Този път има височина $h + 1$, което е противоречие.

Задача 4. Чертаем затворена начупена линия с $2n$ звена, които номерираме последователно. Да се докаже, че ако звената с четни номера са вертикални и начертани нагоре, то линията се самопресича.

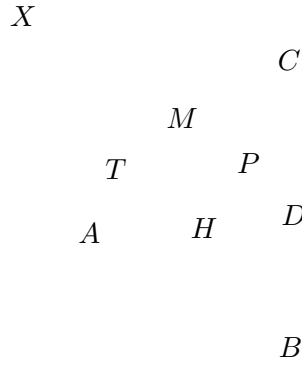
Решение. Да допуснем обратното. Тогава сумата S от ъглите на получения многоъгълник е равна на $(n - 1) \cdot 360^\circ$. От друга страна, всяко звено с нечетен номер има две съседни вертикални звена и значи сумата от ъглите, които сключва с тях е 360° . Следователно $C = n \cdot 360^\circ$ – противоречие.

Задача 5. Даден е остроъгълнен $\triangle ABC$, за който $AB = AC < BC$. Нека D и M са средите съответно на BC и AC , а X е такава точка, че $BX \perp AC$

*Оригиналното решение е непълно.

и $DX \parallel AB$. Нека $H = BX \cap AD$ и P е втората пресечна точка на DX и описаната около $\triangle ANX$ окръжност. Да се докаже, че допирателната през A към описаната около $\triangle AMP$ окръжност е успоредна на BC .

Решение. Нека T е петата на височината от B към AC . От $AB < AC$ следва, че T лежи между A и M . Тъй като $MD \parallel AB$, то $X = BT \cap DM$, като X и B лежат в различни полуравнини относно AC .



Черт. 3

Понеже $CDHT$ е вписан в окръжност четириъгълник, следва, че $\sphericalangle ANX = \sphericalangle ANT = \sphericalangle C$. От друга страна, $ANPX$ е вписан в окръжност четириъгълник и значи $\sphericalangle APX = \sphericalangle ANX = \sphericalangle C$. Тъй като $\sphericalangle C < \sphericalangle A = \sphericalangle AMX$, то M лежи между P и X . Тогава $\sphericalangle APM = \sphericalangle APX = \sphericalangle C$ и значи ъгълът с допирателната през A към описаната около $\triangle AMP$ окръжност е равен на $\sphericalangle C$, т.е. тази допирателна е успоредна на BC .

Задача 6. Редица $a_0, a_1, \dots, a_{1389}$ от неотрицателни числа ще наричаме *вдлъбната*, ако $a_i \geq \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$ за всяко $1 \leq i \leq 1388$. Да се намери най-голямото число c така, че за всяка вдлъбната редица,

$$\sum_{i=0}^{1389} i a_i^2 \geq c \sum_{i=0}^{1389} a_i^2.$$

Решение. За вдлъбнатата редица a_i , $i \leq 0 \leq 1389$, търсената най-голяма възможна стойност на c е

$$c_0 = \frac{1389^2 - 5 \cdot 1389}{4 \cdot 1389 - 2}.$$

Ще докажем, че c_0 е търсеното число. Имаме да покажем, че

$$\sum_{i=[c_0]+1}^{1389} (i - c_0)a_i^2 \geq \sum_{i=0}^{[c_0]} (c_0 - i)a_i^2.$$

Полагаме

$$b_i = (1389 - i) \frac{a_{[c_0]}}{1389 - [c_0]}.$$

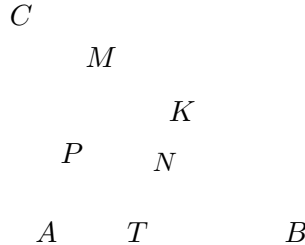
Предвид линейността на редицата (b_i) , от $a_{[c_0]} = b_{[c_0]}$ и $a_{1389} \geq b_{1389} = 0$ следва, че $a_i \geq b_i$ при $i \geq [c]$ и $a_i \leq b_i$ при $i \leq [c_0]$. Тогава

$$\sum_{i=[c_0]+1}^{1389} (i - c_0)a_i^2 \geq \sum_{i=[c_0]+1}^{1389} (i - c_0)b_i^2 = \sum_{i=0}^{[c_0]} (c_0 - i)b_i^2 \geq \sum_{i=0}^{[c_0]} (c_0 - i)a_i^2.$$

Задача 7. Точка M лежи на страната BC на $\triangle ABC$, а окръжност ω се допира до отсечките AB , BM и до описаната около $\triangle AMC$ окръжност съответно в точки T , K и P . Да се докаже, че ако $TK \parallel AM$, то описаните около $\triangle APT$ и $\triangle KPC$ окръжности се допират.

Решение. Ъглополовящата l на $\sphericalangle B$ е перпендикулярна на $TK \parallel AM$ и следователно $AB = MB$, т.е. l е и симетрала на AM . Значи центърът на описаната около $\triangle AMC$ окръжност лежи на l . Центърът на ω също лежи на l и получаваме, че и P е върху l . Тогава

$$\sphericalangle BAP = \sphericalangle BMP = 180^\circ - \sphericalangle CMP = \sphericalangle CAP.$$



Черт. 4

Следователно P лежи и на ъглополовящата на $\sphericalangle A$, т.е. P е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Оттук

$$\sphericalangle TPK = \sphericalangle BTK = 90^\circ - \frac{\sphericalangle B}{2} = \frac{\sphericalangle A}{2} + \frac{\sphericalangle C}{2} = \sphericalangle TAP + \sphericalangle KCP.$$

Накрая, ако допирателната t към описаната около $\triangle APT$ окръжност пресича TK в точка N , то $\angle TPN = \angle TAP$. Значи $\angle KPN = \angle KCP$, т.е. t е допирателна и към описаната около $\triangle APT$ окръжност, което трябваше да докажем.

Задача 8. Нека S и T са дървета (крайни свързани графи без цикли), нямащи върхове от степен 2. На всяко тяхно ребро е съпоставено положително число, наречено *дължина* на реброто. *Разстояние* между два върха е сумата на дължината на ребрата от пътя между тях. Върховете от степен 1 се наричат *листа*. Нека f е такава биекция между листата на S и листата на T , че разстоянието между всеки две листа u и v в S е равно на разстоянието между $f(u)$ и $f(v)$ в T . Да се докаже, че съществува биекция g между върховете на S и върховете на T така, че разстоянието между всеки два върха u и v в S е равно на разстоянието между върховете $g(u)$ и $g(v)$ в T .

*Решение.** Фиксираме листо $u \in S$. За всеки връх $a \in S$, който не е листо, съществуват други две листа $v, w \in S$ така, че пътищата от u към v и w се разделят в a (понеже степенята на a е поне 3). На a съпоставяме върха $b \in T$, в който пътищата в T от листото $f(u)$ до листата $f(v)$ и $f(w)$ се разделят.

Ще проверим, че при всеки избор на v и w на a се съпоставя b . Нека $v', w' \in S$ е друг избор на листа, при който на a се съпоставя b' . С $l_S(xy)$ (съответно $l_T(xy)$) ще означаваме дължината на пътя между върховете $x, y \in S$ ($x, y \in T$). Да отбележим, че ако пътищата в S от x и y към z се срещат в t , то

$$l_S(xy) = l_S(xz) + l_S(yz) - 2l_S(tz).$$

Понеже f запазва дължините на пътищата между листата, следва, че

$$\begin{aligned} 2l_S(ua) &= l_S(uv) + l_S(uw) - l_S(vw) = \\ &= l_T(f(u)f(v)) + l_T(f(u)f(w)) - l_T(f(v)f(w)) = \\ &= 2l_T(f(u)b), \end{aligned}$$

откъдето $l_S(ua) = l_T(f(u)b)$. Аналогични равенства имаме както за v и w вместо u , така и за u, v' , и w' при b' вместо b . Тогава $l_S(ua) = l_T(f(u)b) = l_T(f(u)b')$ и следователно, ако $b \neq b'$, то пътищата в T от b и b' до $f(u)$ се срещат във връх $c \neq b, b'$. Тогава пътят от $f(v)$ до $f(v')$ е обединение на пътищата от $f(v)$ до b , от b до b' и от b' до $f(v')$. Следователно

$$l_T(f(v)f(v')) > l_T(f(v)b) + l_T(f(v')b) = l_S(va) + l_S(v'a) \geq l_S(vv'),$$

*Оригиналното решение е грешно.

откъдето $l_T(f(v)f(v')) > l_S(vv')$, което е противоречие.

И така, $b = b'$, което показва, че изображението $\tilde{g} : a \rightarrow b$, дефинирано от множеството на върховете на S , които не са листа, в множеството на върховете на T , които не са листа, е добре дефинирано изображение. Допускайки, че то не е инекция, с помощта на разсъждение, подобно на последното от горните (но проведено върху S), стигаме до противоречие. Като използваме f , продължаваме $\tilde{g}$ до инекция g от множеството V_S на всички върхове на S в множеството V_T на всички върхове на T . Следователно $|V_S| \leq |V_T|$. Аналогично $|V_S| \geq |V_T|$ и значи $|V_S| = |V_T|$, откъдето следва, че g е биекция.

Сега ще докажем, че g е изоморфизъм между S и T , който запазва дължините на ребрата, откъдето ще следва твърдението на задачата. Нека a и b са съседни върхове в S . Те лежат на път в S от листо u до листо v , като без ограничение a е по-близо до u . От дефиницията на g следва, че $g(a)$ и $g(b)$ лежат на пътя в T между $g(u)$ и $g(v)$. Ако допуснем, че между тях има връх $g(c) \in T$, то c трябва да лежи на пътя в S между u и v и от $l_S(u, \cdot) = l_T(f(u), f(\cdot))$ следва, че c лежи между a и b , което е противоречие. И така, $g(a)$ и $g(b)$ са съседни върхове в T , като

$$\begin{aligned} l_T(f(a), f(b)) &= l_T(f(u), f(b)) - l_T(f(u), f(a)) = \\ &= l_S(u, b) - l_S(u, a) = l_S(a, b). \end{aligned}$$

Задача 9. Да се намерят всички растящи функции $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ такива, че

$$f\left(\frac{x + f(x)}{2} + y\right) = 2x - f(x) + f(f(y)) \text{ за произволни } x, y \geq 0.$$

Решение. Нека $f(0) = a$. При $x = y = 0$ имаме, че

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = f(a) - a,$$

при $x = \frac{a}{2}, y = 0$:

$$f\left(\frac{f(a) - \frac{a}{2}}{2}\right) = 2a,$$

а при $x = a, y = 0$:

$$f\left(\frac{f(a) + a}{2}\right) = 2a.$$

Тъй като f е растяща функция, следва, че

$$f\left(\frac{f(a) + \frac{a}{2}}{2}\right) = 2a.$$

От друга страна, при $x = y = \frac{a}{2}$ получаваме, че

$$f\left(\frac{f(a) + \frac{a}{2}}{2}\right) = 2a - f(a) + f(f(a) - a)$$

и следователно

$$f(a) = f(f(a) - a).$$

Като положим $x = 0, y = \frac{a}{2}$, намираме, че

$$f(a) = -a + f(f(a) - a)$$

и значи $a = 0$, т.е. $f(0) = 0$. Сега при $x = 0$ следва, че

$$f(y) = f(f(y)).$$

Тогава при $x = y$ получаваме, че

$$f\left(\frac{3x + f(x)}{2}\right) = 2x.$$

Следователно f е сюрективна функция и от $f(x) = f(f(x))$ заключаваме, че $f(x) = x$ за всяко $x \geq 0$. Тази функция очевидно удовлетворява условието на задачата.

Задача 10. Да се намерят всички полиноми $P(x, y)$ с реални коефициенти такива, че

$$P(ab, c^2 + 1) + P(bc, a^2 + 1) + P(ca, b^2 + 1) = 0 \text{ за произволни } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Решение. Трябва да намерим всички полиноми $Q(x, y) = P(x, y + 1)$, за които е в сила тъждеството

$$Q(ab, c^2) + Q(bc, a^2) + Q(ca, b^2) = 0.$$

Да предположим, че съществува такъв ненулев полином Q . Можем да счистаме, че неговата степен е минимална. При $a = b = c = 0$ следва, че $Q(0, 0) = 0$. Тогава при $a = b = 0$ получаваме, че $Q(0, c^2) = 0$ и значи $Q(0, y) = 0$.

Сега при $a = 0$ намираме, че $Q(bc, 0) = 0$, т.е. $Q(x, 0) = 0$. Следователно $Q(x, y) = xyR(x, y)$, където R е полином. За R имаме, че

$$abc^2R(ab, c^2) + a^2bcR(bc, a^2) + ab^2cR(ca, b^2) = 0$$

и значи

$$cR(ab, c^2) + aR(bc, a^2) + bR(ca, b^2) = 0.$$

При $a = b = 0$ следва, че $R(0, c^2) = 0$. Тогава $R(0, y) = 0$, т.е. $R(x, y) = xQ_1(x, y)$, където Q_1 е полином. Полиномът Q_1 има по-ниска степен от Q и изпълнява същото твърждение като Q , което е противоречие. И така, $Q = 0$, т.е. $P = 0$ и този полином изпълнява даденото условие.

Задача 11. Нека $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е растяща функция, за която съществуват прости числа $p_1, p_2, \dots, p_n$ и естествени числа $s_1, s_2, \dots, s_n$ така, че за всяко $1 \leq i \leq n$ множеството $\{f(p_i r + s_i) | r = 1, 2, \dots\}$ е безкрайна аритметична прогресия. Да се докаже, че съществува такова $a \in \mathbb{N}$, че $f(a + 1), f(a + 2), \dots, f(a + n)$ е аритметична прогресия.

Решение. Нека $d_i > 0$ е разликата на прогресията $\{f(p_i r + s_i) | r = 1, 2, \dots\}$. Съгласно китайската теорема за остатъците (КТО), за всеки $1 \leq i, j \leq n$ съществува $x_{ij} \in \mathbb{N}$ така, че

$$x_{ij} \equiv s_i \pmod{p_i}, \quad x_{ij} \equiv s_j \pmod{p_j}.$$

Тогава

$$f(x_{ij} + p_i p_j) = f(x_{ij}) + d_i p_j, \quad f(x_{ij} + p_i p_j) = f(x_{ij}) + d_j p_i$$

и следователно $d_i p_j = d_j p_i$, т.е. $\frac{d_i}{p_i} = d \in \mathbb{N}$ е константа за всяко i . Пак съгласно КТО съществуват $x, y \in \mathbb{N}$ така, че за всяко i ,

$$x \equiv s_i \pmod{p_i}, \quad y \equiv -i \pmod{p_i}.$$

Тогава

$$f(x + y + i) = f(x) + \frac{y + i}{p_i} d_i = f(x) + d(y + i)$$

и следователно числото $a = x + y$ има желаното свойство.

Задача 12. Две окръжности ω_1 и ω_2 се пресичат в точки P и K , а XY е тяхната обща допирателна, която е по-близко до P , като $X \in \omega_1$ и $Y \in \omega_2$. Нека $XP \cap \omega_2 = C$, $YP \cap \omega_1 = B$ и $BX \cap CY = A$. Да се докаже, че ако Q е

втората пресечна точка на описаните около $\triangle ABC$ и $\triangle AXY$ окръжности, то $\sphericalangle QXA = \sphericalangle QKP$.

Решение. Въртящата хомотетия с център Q , която изобразява описаната около $\triangle AXY$ окръжност в описаната около $\triangle ABC$ окръжност, изобразява X в B и Y в C . Нека T е образът на K . Тогава $\triangle XYK \sim \triangle BCT$.

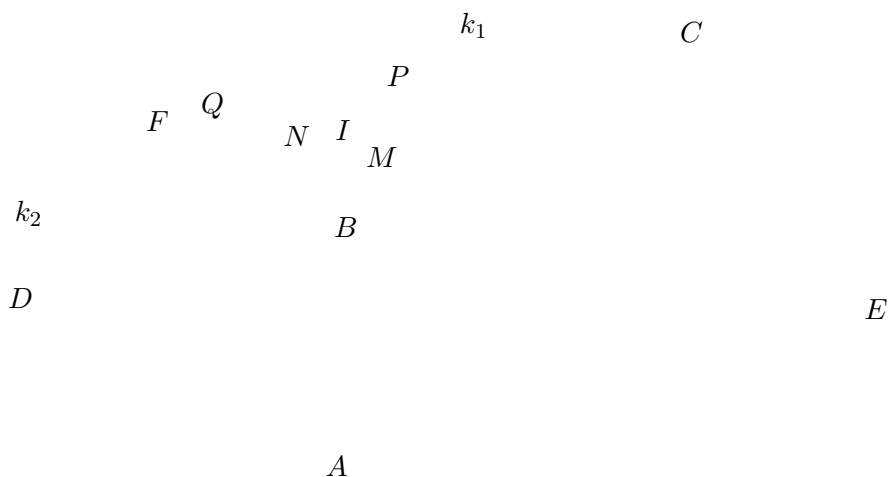
От друга страна, $\sphericalangle B XK = \sphericalangle B PK = \sphericalangle Y CK = \sphericalangle X Y K$, $\sphericalangle X BK = \sphericalangle Y X K$ и следователно $\triangle B XK \sim \triangle X Y K$. Тогава $\triangle B XK \sim \triangle B CT$. Оттук $\frac{BX}{BK} = \frac{BC}{BT}$ и $\sphericalangle X BK = \sphericalangle C BT$, т.е. $\sphericalangle X BC = \sphericalangle K BT$. Значи $\triangle BCX \sim \triangle BTK$, откъдето $\sphericalangle BKT = \sphericalangle BXC = 180^\circ - \sphericalangle BKP$, т.е. лежи на отсечката PT (същото е вярно и ако $\sphericalangle BKP = 90^\circ$). Следователно

$$\sphericalangle QXA = 180^\circ - \sphericalangle QXB = 180^\circ - \sphericalangle QKT = \sphericalangle QKP.$$

Китай

Задача 1. Две окръжности k_1 и k_2 се пресичат в точки A и B . Права през B пресича k_1 и k_2 съответно в точки C и D , а друга права през B пресича k_1 и k_2 съответно в точки E и F . Правата CF пресича k_1 и k_2 съответно в точки P и Q . Точките M и N са среди съответно на дъгите $\widehat{PB}$ и $\widehat{QB}$. Да се докаже, че ако $CD = EF$, то точките C, F, M и N лежат на една окръжност.

Решение. Тъй като $\sphericalangle ADB = \sphericalangle AFB$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AEF$ (черт. 1), то от условието $CD = EF$ получаваме, че $\triangle ACD \cong \triangle AEF$. Следователно $AD = AF$ и $\sphericalangle ADF = \sphericalangle AFD$.



Черт. 1

Оттук намираме

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle AFD = \sphericalangle ADF = \sphericalangle ABE,$$

т. е. правата AB е ъглополовяща за $\angle CBF$ в $\triangle BCF$. Тъй като CM и FN също са ъглополовящи в $\triangle BCF$, то AB , CM и FN се пресичат в центъра I на вписаната в $\triangle CBF$ окръжност. Тогава от k_1 и k_2 получаваме

$$CI.IM = BI.IA = FI.IN.$$

Следователно $CI.IM = FI.IN$, което означава, че точките C , F , M и N лежат на една окръжност.

Задача 2. Дадено е цяло число $k \geq 3$ и редица $\{a_n\}$, за която $a_k = 2k$ и

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 1, & \text{ако } a_{n-1} \text{ и } n \text{ са взаимнопрости} \\ 2n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

за всяко $n > k$. Да се докаже, че числото $a_n - a_{n-1}$ е просто за безбройно много n .

Решение. Нека $a_\ell = 2\ell$ за някое $\ell \geq k$ и да проследим какво става с редицата малко след a_ℓ . Лесно се вижда, че ако p е най-малкият прост делител на $\ell - 1$ (такова p съществува, защото $\ell - 1 \geq k - 1 \geq 2$ по условие), то $(\ell - 1, i) = \begin{cases} 1, & \text{ако } 1 \leq i < p, \\ p, & \text{ако } i = p \end{cases}$. Следователно имаме

$$(2\ell + i - 2, \ell + i - 1) = \begin{cases} 1, & \text{ако } 1 \leq i < p, \\ p, & \text{ако } i = p, \end{cases}$$

което означава, че

$$a_{\ell+i-1} = \begin{cases} 2\ell + i - 1, & \text{ако } 1 \leq i < p, \\ 2\ell + 2p - 2, & \text{ако } i = p \end{cases}$$

Тогава имаме $a_{\ell+p-2} = 2\ell + p - 2$ и $a_{\ell+p-1} = 2(\ell + p - 1)$, откъдето

$$a_{\ell+p-1} - a_{\ell+p-2} = (2\ell + 2p - 2) - (2\ell + p - 2) = p$$

е просто число. Освен това от горното следва, че $a_\ell = 2\ell$ за безбройно много стойности на ℓ . Следователно съществуват безбройно много $\ell \geq k$, за които $a_\ell = 2\ell$ и $a_{\ell+p-1} - a_{\ell+p-2} = p$ е най-малкият прост делител на $\ell - 1$.

Задача 3. Дадени са комплексни числа a , b и c , за които неравенството $|az^2 + bz + c| \leq 1$ е изпълнено за всяко комплексно число z , за което $|z| \leq 1$. Да се намери максимума на $|bc|$.

Решение. Нека $f(z) = az^2 + bz + c$. Ще докажем, че $|f(z)| \leq 1$ за всички z , $|z| \leq 1$, е изпълнено тогава и само тогава, когато $|f(z)| \leq 1$ за всички z , $|z| = 1$. Нека $f(z) = a(z - \alpha)(z - \beta)$. Ако $\alpha = \beta$, едната от двете пресечни точки на единичната окръжност и правата през α и началото на координатната система е по-близо до α отколкото z . Ако $\alpha \neq \beta$, правата през z , която е перпендикулярна на правата през α и β пресича единичната окръжност в две точки, едната от които е по-близо до α , β отколкото z . С това твърдението е доказано.

За всяко комплексно число z , за което $|z| = 1$, имаме

$$|f(z)| = |cz^{-2} + bz^{-1} + a|.$$

Следователно $|ab|_{\max} = |bc|_{\max}$. Можем да запишем $a'z^2 + b'z + c' = e^{i\alpha} f(e^{i\beta} z)$. Съществуват реални числа α и β , за които a' и b' са положителни реални числа и следователно без ограничение на общността можем да приемем, че $a, b \geq 0$. Тогава за $z = e^{i\theta}$ върху единичната окръжност имаме

$$1 \geq |f(z)| = |f(e^{i\theta})| \geq |\operatorname{Im} f(e^{i\theta})| = |a \sin 2\theta + b \sin \theta + \operatorname{Im} c|.$$

Без ограничение на общността можем да приемем, че $\operatorname{Im} c \geq 0$ (в противен случай можем да вземем $-\theta$ вместо θ). За всяко $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ имаме

$$1 \geq a \sin 2\theta + b \sin \theta \geq 2\sqrt{ab \sin 2\theta \sin \theta},$$

откъдето $ab \leq \frac{1}{4 \sin 2\theta \sin \theta}$. Следователно

$$ab \leq \min_{\theta} \frac{1}{4 \sin 2\theta \sin \theta} = \frac{1}{4 \max_{\theta} \sin 2\theta \sin \theta} = \frac{3\sqrt{3}}{16},$$

т. е. $|bc|_{\max} = |ab|_{\max} \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

Пример за функция, за която $|bc| = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ се дава от функцията

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}}{8} z^2 - \frac{\sqrt{6}}{4} z - \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

За нея имаме $|f(e^{i\theta})| = 1 - \frac{3}{8} \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \leq 1$.

Задача 4. Дадени са цели числа m и n , по-големи от 1 и цели числа $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Да се докаже, че съществува множество T от цели

числа, за което $|T| \leq 1 + \frac{a_m - a_1}{2n+1}$ и всяко a_i може да се представи във вида $a_i = t + s$ за някое $t \in T$ и $s \in [-n, n]$.

Решение. Да положим $a_1 = a$, $a_m = b$, $b - a = (2n+1)q + r$, където $q, r \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq r \leq 2n$. Да разгледаме множеството

$$T = \{a + n + (2n+1)k \mid k = 0, 1, \dots, q\}.$$

Имаме $|T| = q + 1 \leq 1 + \frac{b-a}{2n+1}$ и нека

$$B = \{t + s \mid t \in T, s = -n, -n+1, \dots, n\} = \{a, a+1, \dots, a + (2n+1)q + 2n\}.$$

Остава да забележим, че $a + (2n+1)q + 2n \geq a + (2n+1)q + r = b$, т. е. всяко a_i принадлежи на B . С това доказателството е завършено.

Задача 5. Дадени са $n+1$ купчинки от карти: O и $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 3$. За един ход е позволено да се извърши едната от следните операции:

(1) ако има поне три карти в A_i , можем да вземем три карти от A_i и да поставим по една карта във всяка от купчинките A_{i-1} , A_{i+1} и O (допускаме, че $A_0 = A_n$ и $A_{n+1} = A_1$);

(2) ако в O има поне n карти, можем да вземем n карти от O и да поставим по една карта във всяка от купчинките $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Да се докаже, че ако общият брой карти е поне $n^2 + 3n + 1$, след няколко хода във всяка от купчинките могат да се получат поне $n+1$ карти.

Решение. Достатъчно е да разгледаме случая, когато картите са общо $n^2 + 3n + 1$. Нека първоначално прилагаме операция (1) за всяка купчина A_i с поне 3 карти. Тъй като при всяка такава операция общият брой карти в купчините $A_1, A_2, \dots, A_n$ намалява с 1, то такива операции могат да се приложат само краен брой пъти.

Накрая ще получим, че във всяка купчина $A_1, A_2, \dots, A_n$ има по не повече от две карти, а в купчината O има поне $n^2 + n + 1$ карти.

Сега прилагаме $n+1$ пъти операция (2). Във всяка купчина A_i има поне по $n+1$ карти. Ще покажем, че можем да увеличим картите в купчина O до $n+1$, като запазим поне по $n+1$ карти в останалите купчини.

Да разположим $A_1, A_2, \dots, A_n$ по окръжност с център O . Всяка група $G = \{A_l, A_{l+1}, \dots, A_{i+l-1}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq l \leq n\}$ наричаме *отбор*. Отбор ще наричаме *добър*, ако след прилагане на операция (1) по един път във всяка точка от G във всяка купчина има поне $n+1$ карти. Ще означаваме с $a_1, a_2, \dots, a_n$ броят на картите в купчините $A_1, A_2, \dots, A_n$. Отбор от една

купчина $G = \{A_l\}$ е добър тогава и само тогава, когато $a_l \geq n + 4$. Отбор от две купчини $G = \{A_l, A_{l+1}\}$ е добър тогава и само тогава, когато е изпълнено $a_l, a_{l+1} \geq n + 3$.

Отбор от l купчини $G = \{A_i, A_{i+1}, \dots, A_{i+l-1}\}$ е добър тогава и само тогава, когато $a_i, a_{i+l-1} \geq n + 3$, $a_j \geq n + 2$, $i + 1 \leq j \leq i + l - 2$. Накрая, отбор от n купчини $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ е добър тогава и само тогава, когато $a_j \geq n + 2$, $1 \leq j \leq n$. Ще докажем, че ако $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n^2 + 2n + 1$, то има поне един добър отбор. Да допуснем, че няма добър отбор. Тогава $a_i \in \{n + 1, n + 2, n + 3\}$, тъй като в противен случай ще имаме добър отбор от една купчина. Да означим броя на числата измежду $a_1, a_2, \dots, a_n$, съответно равни на $n + 1$, $n + 2$ и $n + 3$, съответно с x , y и z .

Ще покажем, че $x \geq z$. Понеже $n^2 + 2n + 1 > n(n + 2)$, то $z \geq 1$. Ако $z = 1$, то $x \geq 1$ тъй като в противен случай $a_i \geq n + 2$ за всяко i и $G = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ е добър отбор. Ако $z \geq 2$, то z купчинки с $n + 3$ карти разделят кръга на z дъги (никои от тези z точки не са съседни). Тъй като няма добър отбор има поне една купчина на всяка дъга с $n + 1$ карти. Следователно $x \geq z$ и общият брой карти в $A_1, A_2, \dots, A_n$ е равен на

$$x(n + 1) + y(n + 2) + z(n + 3) \leq (x + y + z)(n + 2) = m(n + 2) < n^2 + 2n + 1,$$

което е противоречие.

Доказахме, че когато броят на картите в O е по-малък от $n + 1$, има добър отбор. Прилагаме операция (1) във всяка купчинка на добър отбор. При това картите в O нарастват, докато картите във всяка от останалите купчинки са поне $n + 1$. Повтаряме тази операция докато получим в O поне $n + 1$ карти. С това доказателството е завършено.

Задача 6. Дадени са две по две различни естествени числа a_1, a_2, a_3 , b_1, b_2 и b_3 , за които

$$(n + 1)a_1^n + na_2^n + (n - 1)a_3^n \text{ дели } (n + 1)b_1^n + nb_2^n + (n - 1)b_3^n$$

за всяко естествено число n . Да се докаже, че съществува естествено число k , за което $b_i = ka_i$ за всяко $i = 1, 2, 3$.

Решение. Нека r е произволно естествено число и p е просто число, за което

$$p > (a_1^r + a_2^r + a_3^r)(b_1^r + b_2^r + b_3^r).$$

Тъй като p е просто, то $(p, a_1^r + a_2^r + a_3^r) = 1$. Освен това p е взаимнопросто с $p - 1$. От Китайската теорема за остатъците следва, че съществува естествено число n , за което

$$n \equiv r \pmod{p - 1}, \quad n(a_1^r + a_2^r + a_3^r) + a_1^r - a_3^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

От тези сравнения и малката теорема на Ферма намираме

$$(n+1)a_1^n + na_2^n + (n-1)a_3^n \equiv n(a_1^r + a_2^r + a_3^r) + a_1^r - a_3^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

От условието на задачата сега намираме

$$(n+1)b_1^n + nb_2^n + (n-1)b_3^n \equiv 0 \pmod{p}$$

и както по-горе получаваме

$$n(b_1^r + b_2^r + b_3^r) + b_1^r - b_3^r \equiv 0 \pmod{p}.$$

След елиминирание на n от получените сравнения, намираме

$$(a_1^r + a_2^r + a_3^r)(b_1^r - b_3^r) \equiv (b_1^r + b_2^r + b_3^r)(a_1^r - a_3^r) \pmod{p}.$$

Оттук и от избора на p следва, че сравнението всъщност е равенство, т.е.

$$\begin{aligned} (a_1^r + a_2^r + a_3^r)(b_1^r - b_3^r) &= (b_1^r + b_2^r + b_3^r)(a_1^r - a_3^r) \\ \iff (a_2b_1)^r + 2(a_3b_1)^r + (a_3b_2)^r &= (a_1b_2)^r + 2(a_1b_3)^r + (a_2b_3)^r, \end{aligned}$$

като последното равенство е изпълнено за всяко естествено число r .

Лема. Дадени са такива реални числа $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_s$, $0 < y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_s$, че за всяко естествено число r е изпълнено

$$x_1^r + x_2^r + \dots + x_s^r = y_1^r + y_2^r + \dots + y_s^r.$$

Тогава $x_i = y_i$ за $i = 1, 2, \dots, s$.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по s . При $s = 1$ избираме $r = 1$ и получаваме $x_1 = y_1$. Да допуснем, че твърдението е вярно за $s = t$. При $s = t + 1$ без ограничение приемаме, че $x_{t+1} < y_{t+1}$. Тогава

$$\left(\frac{x_1}{y_{t+1}}\right)^r + \dots + \left(\frac{x_{t+1}}{y_{t+1}}\right)^r = \left(\frac{y_1}{y_{t+1}}\right)^r + \left(\frac{y_t}{y_{t+1}}\right)^r + 1 \geq 1.$$

Тъй като $0 < \frac{x_i}{y_{t+1}} < 1$ за $1 \leq i \leq t + 1$ при $r \rightarrow \infty$ горното равенство дава $0 \geq 1$, противоречие. Следователно $x_{t+1} = y_{t+1}$, с което доказателството на лемата е завършено.

От лемата следва (за $s = 4$), че числата a_2b_1 , a_3b_1 и a_3b_2 са равни в някакъв ред на a_1b_2 , a_1b_3 и a_2b_3 . Тъй като шестте числа са две по две различни, не е трудно да се установи, че са налице точно две възможности:

$a_2b_1 = a_3b_2 = a_1b_3$ и $a_3b_1 = a_1b_2 = a_2b_3$ или $a_2b_1 = a_1b_2$, $a_3b_1 = a_1b_3$ и $a_3b_2 = a_2b_3$.

Случай 1. Ако $a_2b_1 = a_3b_2 = a_1b_3$ и $a_3b_1 = a_1b_2 = a_2b_3$, то

$$\frac{a_2b_1}{a_3b_1} = \frac{a_3b_2}{a_1b_2} = \frac{a_1b_3}{a_2b_3},$$

откъдето $\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = t$. Тогава $t^2 = t$, т.е. $t = 1$, и $a_1 = a_2$, противоречие.

Случай 2. Ако $a_2b_1 = a_1b_2$, $a_3b_1 = a_1b_3$ и $a_3b_2 = a_2b_3$, то $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$ и нека $\frac{b_1}{a_1} = \frac{k}{l}$, $(k, l) = 1$. Получаваме $b_i = \frac{k}{l}a_i$, за $i = 1, 2, 3$. От $2b_1 + b_2 = \frac{k}{l}(2a_1 + a_2)$ и условието на задачата (за $n = 1$) имаме $2a_1 + a_2$ дели $2b_1 + b_2$, т. е. $\frac{k}{l}$ е цяло число. Следователно $l = 1$ и $b_i = ka_i$, за $i = 1, 2, 3$.

Китай, олимпиада за момичета

Задача 1. Да се докаже, че съществуват само краен брой тройки (a, b, c) от естествени числа, за които $abc = 2009(a + b + c)$.

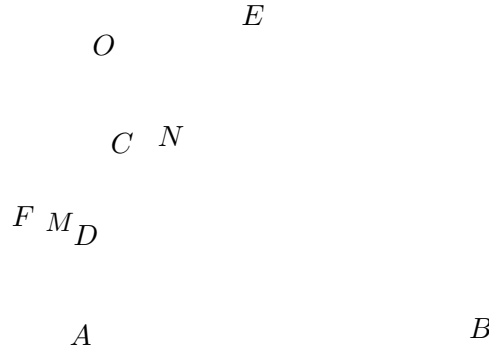
Решение. За всеки три числа x, y и z съществуват точно 6 техни пермутации. Следователно е достатъчно да докажем, че съществуват краен брой тройки $a \geq b \geq c$, за които $abc = 2009(a + b + c)$. Имаме

$$abc = 2009(a + b + c) \leq 2009(3a) = 6027a.$$

Оттук получаваме $bc \leq 6027$. Ясно е, че има краен брой двойки (b, c) , за които $bc \leq 6027$. Тъй като $a = \frac{2009(b + c)}{bc - 2009}$, то за всяка такава двойка съществува най-много едно естествено число a , за което $abc = 2009(a + b + c)$. Следователно съществуват краен брой тройки с исканото свойство.

Задача 2. В окръжност k е вписан правоъгълен триъгълник ABC , $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. Точка E от дъгата $\widehat{BC}$ е такава, че $EA > EC$. Точка F от лъча EC е такава, че $\sphericalangle EAC = \sphericalangle CAF$, $F \neq E$. Отсечката BF пресича k за втори път в точка D . Нека O е центърът на описаната окръжност за $\triangle DEF$. Да се докаже, че точките A , C и O лежат на една права.

Решение. Нека M и N са петите на перпендикулярите от O съответно към правите DF и DE (черт. 2). Тъй като O е център на описаната окръжност за $\triangle DEF$, то $EO = DO = FO$.



Черт. 2

Следователно

$$\sphericalangle EOF = \sphericalangle EOD + \sphericalangle DOF = 2\sphericalangle NOD + 2\sphericalangle DOM = 2\sphericalangle NOM.$$

Тъй като $\sphericalangle OND = \sphericalangle OMD = 90^\circ$, то четириъгълникът $OMDN$ е вписан в окръжност, откъдето намираме $\sphericalangle NDM + \sphericalangle NOM = 180^\circ$, т. е. $\sphericalangle BDN = \sphericalangle NOM$. Освен това четириъгълникът $ABED$ е вписан в окръжност, то $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BDE$. От последните няколко равенства пресмятаме

$$\sphericalangle EOF = 2\sphericalangle NOM = 2\sphericalangle BDN = 2\sphericalangle BDE = 2\sphericalangle BAE.$$

Тъй като BC е диаметър на k , то

$$\sphericalangle EOF + \sphericalangle EAF = 2\sphericalangle BAE + 2\sphericalangle EAC = 2\sphericalangle BAC = 180^\circ,$$

т. е. четириъгълникът $AE OF$ е вписан в окръжност. Да означим с ω тази окръжност. Понеже O лежи на симетралата на отсечката EF и O е среда на дъгата $\widehat{EF}$ от ω , то AO е ъглополовяща на $\angle EAF$, което означава, че точките A , C и O лежат на една права.

Задача 3. Дадено е естествено число n . В правоъгълна координатна система са дадени точките

$$\{P_1, P_2, \dots, P_{4n+1}\} = \{(x, y) \mid x \text{ и } y \text{ са цели числа } xy = 0, |x| \leq n, |y| \leq n\}$$

Да се определи минимума на израза

$$(P_1 P_2)^2 + (P_2 P_3)^2 + \dots + (P_{4n} P_{4n+1})^2 + (P_{4n+1} P_1)^2.$$

Решение. Ще докажем, че търсеният минимум е $16n - 8$. Означаваме $P_i = (x_i, y_i)$ за $1 \leq i \leq 4n + 1$ и $P_{4n+2} = (x_{4n+2}, y_{4n+2}) = P_1 = (x_1, y_1)$. Ще покажем, че

$$S = \sum_{i=1}^{4n+1} (P_i P_{i+1})^2 \geq 16n - 8.$$

Лесно се проверява, че горното неравенство се превръща в равенство, когато точките $(P_1, P_2, \dots, P_{4n+1})$ са съответно

$$\begin{aligned} &((2, 0), (4, 0), \dots, (n, 0), (n-1, 0), \dots, (1, 0), (0, 2), (0, 4), \dots, (0, n), (0, n-1), \dots, \\ &(0, 1), (-2, 0), (-4, 0), \dots, (-n, 0), (-n+1, 0), \dots, (-1, 0), (0, -2), (0, -4), \dots, \\ &(0, -n), (0, -n+1), \dots, (0, -1), (0, 0)) \end{aligned}$$

при n четно и

$$\begin{aligned} &((1, 0), (3, 0), \dots, (n, 0), (n-1, 0), \dots, (2, 0), (0, 1), (0, 3), \dots, (0, n), (0, n-1), \dots, \\ &(0, 2), (-1, 0), (-3, 0), \dots, (-n, 0), (-n+1, 0), \dots, (-2, 0), (0, -1), (0, -3), \dots, \\ &(0, -n), (0, -n+1), \dots, (0, -2), (0, 0)) \end{aligned}$$

при нечетно n .

Да забележим, че

$$S = \sum_{i=1}^{4n+1} [(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2].$$

Достатъчно е да докажем, че за набора

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{4n+1}\} = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n+1 \text{ нули}}\}$$

е изпълнено

$$T_n(\{x_1, x_2, \dots, x_{4n+1}\}) = \sum_{i=1}^{4n+1} (x_i - x_{i+1})^2 \geq 8n - 4.$$

При фиксирано естествено число n с индукция по m , $1 \leq m \leq n$, ще докажем, че при

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{2m+2n+1}\} = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n+1 \text{ нули}}\}$$

е изпълнено

$$T_m(\{x_1, x_2, \dots, x_{2m+2n+1}\}) = \sum_{i=1}^{2m+2n+1} (x_i - x_{i+1})^2 \geq 8m - 4.$$

При $m = 1$ и

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{2n+3}\} = \{\pm 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n+1 \text{ нули}}\}$$

получаваме $T_1(\{x_1, x_2, \dots, x_{2n+3}\}) = 8 \cdot 1 - 4 = 4$ с равенство при

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{2n+3}\} = \{0, 1, 0, -1, 0, \underbrace{0, \dots, 0}_{2n-2 \text{ нули}}\}.$$

Допускаме, че твърдението е вярно при $m = k < n$ и го разглеждаме при $m = k + 1$. Поради симетрията можем да предполагаме, че или

$$(1) \quad \{x_1, x_2, \dots, x_{2m+2n+3}\} = \{s, m, t, \dots, u, -m, v \dots\}$$

или

$$(2) \quad \{x_1, x_2, \dots, x_{2m+2n+3}\} = \{s, m, -m, t \dots\}.$$

Като използваме индукционното допускане, получаваме, че ако е изпълнено (1), то

$$T_{k+1}(\{s, m, t, \dots, u, -m, v \dots\}) =$$

$$\begin{aligned}
&= (m-s)^2 + (m-t)^2 + (u+m)^2 + (m+v)^2 - (s-t)^2 + (u-v)^2 + \\
&\quad + T_k(\{s, t, \dots, u, v \dots\}) = \\
&= 2(m-s)(m-t) + 2(m+u)(m+v) + T_k(\{s, t, \dots, u, v \dots\}) \geq \\
&\geq 2[m - (m-1)][m - (m-2)] + 2[m + (-m+1)][m + (-m+2)] + 8k - 4 = \\
&= 8(k+1) - 4,
\end{aligned}$$

а ако е изпълнено (2) имаме

$$\begin{aligned}
&T_{k+1}(\{s, m, -m, t, \dots\}) = \\
&= (m-s)^2 + (m+m)^2 + (m+t)^2 - (s-t)^2 + T_k(\{s, t, \dots\}) = \\
&= 2m(m-s) + 2m(m+t) + 2(m^2 + st) + T_k(\{s, t, \dots\}) \geq \\
&\geq 2m + 2m + 2(2m-1) + 8k - 4 > 8(k+1) - 4.
\end{aligned}$$

Задача 4. Нека $n \geq 3$ е естествено число. В равнината са избрани точки $V_1, V_2, \dots, V_n$, някои три от които не лежат на една права. Някои от точките са свързани с отсечки, като две точки V_i и V_j се наричат *съседни*, ако V_i и V_j са свързани с отсечка. Първоначално във всяка точка $V_1, V_2, \dots, V_n$ е поставена по една шахматна фигура $C_1, C_2, \dots, C_n$ (не задължително в този ред). За един ход е разрешено да се изберат част от фигурите и всяка от тях да се премести в съседна точка така, че след преместването във всяка точка има отново точно по една фигура и някои две фигури не са си разменили местата. Множество от отсечки се нарича *хармонично*, ако при всяко начално разположение на фигурите след краен брой ходове всяка фигура C_i , $1 \leq i \leq n$, се намира в точка V_i . Да се намери минималният възможен брой отсечки в хармонично множество.

Решение. Ще докажем, че търсеният минимален брой е $n+1$. За хармонично множество от отсечки да разгледаме граф G с върхове $V_1, V_2, \dots, V_n$ и ребра прекараните отсечки.

Първо ще покажем, че в G има поне n ребра. Когато шахматна фигура се премества от връх V_i във връх V_j , друга фигура трябва да се премести от връх V_k във връх V_i . Следователно G е свързан и всеки връх е от степен поне 2. Оттук следва, че ребрата в G са поне $\frac{2n}{2} = n$.

Да допуснем, че в G има точно n ребра. Това означава, че всеки връх е от степен точно 2 и понеже G е свързан, той представлява цикъл. Без ограничение можем да считаме, че цикълът е $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow V_1$. Ако поставим фигури C_1 и C_2 съответно във върхове V_2 и V_1 , не можем да сменим местата им, защото при прилагане на позволената операция можем само да придвижваме фигурите по цикъла, без да променяме реда им.

Остава да покажем, че $n + 1$ ребра са достатъчни. Разглеждаме граф G съставен от цикъл $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow V_1$ и едно допълнително ребро V_2V_n . С помощта на това допълнително ребро можем да сменяме относителното разположение на фигурите по цикъла $V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow V_1$ по следния начин. Ако C_i е във връх V_1 , а C_j е във връх V_2 , то чрез прилагане на операцията по цикъла $V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \rightarrow V_2$ можем да поставим C_j във връх V_n , т. е. променяме относителното разположение на C_i и C_j спрямо първия цикъл. По такъв начин можем да променяме относителното разположение на всеки две фигури и следователно можем да ги разположим в реда $C_1, C_2, \dots, C_n$ по първия цикъл. След това можем да поставим всяка фигура C_i във връх V_i .

Задача 5. Дадени са реални числа x, y и z , по-големи или равни на 1. Да се докаже, че

$$(x^2 - 2x + 2)(y^2 - 2y + 2)(z^2 - 2z + 2) \leq (xyz)^2 - 2xyz + 2.$$

Решение. Полагаме $a = x - 1$, $b = y - 1$ и $c = z - 1$ и записваме даденото неравенство във вида

$$\begin{aligned} (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) &\leq [(a + 1)(b + 1)(c + 1) - 1]^2 + 1 = \\ &= (abc + ab + bc + ca + a + b + c)^2 + 1. \end{aligned}$$

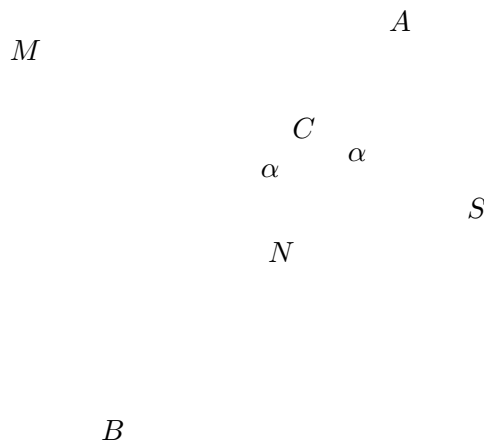
Ще докажем това неравенство като използваме, че

$$(A^2 + 1)(B^2 + 1) \leq [(A + 1)(B + 1) - 1]^2 + 1 = (AB + A + B)^2 + 1,$$

което следва директно с разкриване на скоби. Прилагаме това неравенство първо за $(A, B) = (a, b)$ и втори път за $(A, B) = (ab + a + b, c)$, откъдето следва и исканото неравенство.

Задача 6. Окръжности k_1 и k_2 се допират вътрешно в точка S . Хорда AB в k_2 се допира до k_1 в точка C . Точка M е среда на дъгата $\widehat{AB}$ (не съдържаща S) и нека N е петата на перпендикуляра от M към правата AB . Да се докаже, че $AC \cdot CB = 2r \cdot MN$, където r е радиусът на k_1 .

Решение. Първо ще докажем, че точките S , C и M лежат на една права (черт. 3). Да разгледаме хомотетия с център S , която изпраща k_1 в k_2 . Тогава правата AB се изобразява в права l , която се допира до k_2 и е успоредна на AB . Следователно тази хомотетия изобразява C в средата на дъгата $\widehat{AB}$, т. е. в точка M .



Черт. 3

От $AC \cdot CB = SC \cdot CM$ (степен на точката C спрямо k_1) следва, че е достатъчно да докажем равенството

$$(1) \quad \frac{SC}{2r} = \frac{MN}{CM}.$$

Ако $\angle MCN = \alpha$, то $\angle SCA = \alpha$ (A е между S и M). От синусовата теорема имаме $\frac{SC}{2r} = \sin \alpha$, а от правоъгълния $\triangle MNC$ имаме $\sin \alpha = \frac{MN}{CM}$, откъдето получаваме верността на (1).

Задача 7. Върху дъска 10×10 е избрана област R , състояща се от $4n$ единични квадратчета. Известно е, че R може да се разбие на n квадратчета 2×2 . Освен това R може да се разбие на n парчета от дадените видове (позволени са завъртания):

Да се определи колко най-малко може да бъде n .

Решение. Отговорът е $n = 4$. Дадените фигури показват, че $n = 4$ изпълнява условието на задачата.

	2	2		
	2	2	3	3
1	1		3	3
1	1	4	4	
		4	4	

	b	b		
	a	b	b	c
a	a		c	c
a	d	d	c	
		d	d	

Ще покажем, че n е четно число. Маркираме квадратчетата на безкрайна шахматна дъска както е показано на фигурата. Директно се проверява, че всеки квадрат 2×2 покрива четен брой маркирани квадратчета (2 или 4), докато използваните фигури покриват нечетен брой маркирани квадратчета. Следователно трябва да имаме четен брой фигури.

X	X			X	X		
		X	X			X	X
		X	X			X	X
X	X			X	X		
X	X			X	X		
		X	X			X	X
		X	X			X	X
X	X			X	X		

Ще покажем, че $n > 2$. Ако $n = 2$, то R се покрива от 2 квадрата с размери 2×2 и следователно имаме само следните две възможности:

Директно се проверява, че и двете фигури не могат да се покрият с две от фигурите от условието на задачата.

Задача 8. За всяко естествено число n нека $a_n = n\sqrt{5} - [n\sqrt{5}]$. Да се намери най-малкото и най-голямото измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_{2009}$.

Решение. Да разгледаме редицата, дефинирана с равенствата $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ и $b_n = 4b_{n-2} + b_{n-1}$, $n \geq 2$. За тази редица имаме

$$b_n = \frac{(2 + \sqrt{5})^n - (2 - \sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$$

и в частност $b_6 = 1292$ и $b_7 = 5473$.

За всяко $k = 1, 2, \dots, 5473$ да разделим $1292k$ с частно и остатък на 5473 – получаваме единствени цели числа x_k и y_k , за които $1292k = 5473y_k + x_k$, като $1 \leq x_k \leq 5473$. Тъй като $(1292, 5473) = 1$, то $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{5473})$ е пермутация на $(1, 2, 3, \dots, 5473)$, като е ясно, че $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{5473} = 1291$.

За удобство нека $f(x) = x - [x]$. Имаме

$$\begin{aligned} f(x_k\sqrt{5}) &= f(1292k\sqrt{5} - 5473y_k\sqrt{5}) = \\ &= f\left(\frac{(2 + \sqrt{5})^6 - (2 - \sqrt{5})^6}{2}k - \frac{(2 + \sqrt{5})^7 - (2 - \sqrt{5})^7}{2}y_k\right) = \\ &= f(-(2 - \sqrt{5})^6k + (2 - \sqrt{5})^7y_k). \end{aligned}$$

Понеже

$$0 < (2 - \sqrt{5})^6k + (2 - \sqrt{5})^7y_k \leq 5473(2 - \sqrt{5})^6 - 1291(2 - \sqrt{5})^7 < 1$$

следва, че $f(x_k\sqrt{5}) = 1 - (2 - \sqrt{5})^6k + (2 - \sqrt{5})^7y_k$ и следователно стойностите на функцията $f(x)$ строго намаляват, когато k расте (с естествени стойности) от 1 до 5473.

Тъй като имаме $x_1 = 1292$, $x_{5473} = 5473$, $x_{5472} = 4181$, $x_{5471} = 2889$ и $x_{5470} = 1597$, то търсените максимум и минимум са съответно a_{1292} и a_{1597} .

Китай, западна

Задача 1. Множество M е получено от множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ чрез изтриване на краен брой реални числа. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува полином $f(x)$ от степен n , всички коефициенти на който са от M , и който има n корена в M .

Решение. От условието на задачата следва, че множеството

$$T = \{|x| \in R, x \notin M\}$$

е крайно и нека $\alpha = \max_{x \in T} x$. За всяко реално число $k > \max\{|a|, 1\}$ е изпълнено $-k \notin T$ и следователно $-k \in M$. Ще покажем, че полиномът $f(x) = k(x+k)^n$ има исканото свойство. От $k > 1$ следва, че $\deg f(x) = n$ и коефициентът пред x^m е равен на

$$k \binom{n}{m} k^{n-m} \geq k.$$

Оттук следва, че всички коефициенти на $f(x)$ не са от T и следователно са от M . От друга страна корените на полинома са $-k$ с кратност n и са от M .

Задача 2. Дадено е естествено число $n \geq 3$. Да се намери най-малкото естествено число k , за което съществува множество A от k реални числа и n различни реални числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, за които числата

$$x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1$$

са от A .

Решение. Да положим

$$m_1 = x_1 + x_2, m_2 = x_2 + x_3, \dots, m_{n-1} = x_{n-1} + x_n, m_n = x_n + x_1.$$

Ясно е, че $m_i \neq m_{i+1}$ за $i = 1, 2, \dots, n$ защото в противен случай $x_i = x_{i+2}$. Следователно $k \geq 2$. Ако $k = 2$ нека $A = \{a, b\}$ и тогава

$$x_1 + x_2 = a, x_2 + x_3 = b, \dots, x_n + x_1 = b$$

при n четно и $x_1 + x_2 = a, x_2 + x_3 = b, \dots, x_n + x_1 = a$ при n нечетно. Във втория случай имаме $x_n = x_2$, което е невъзможно. В първия случай намираме

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}a &= (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) + \dots + (x_{n-1} + x_n) = \\ &= (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5) + \dots + (x_n + x_1) = \frac{n}{2}b \end{aligned}$$

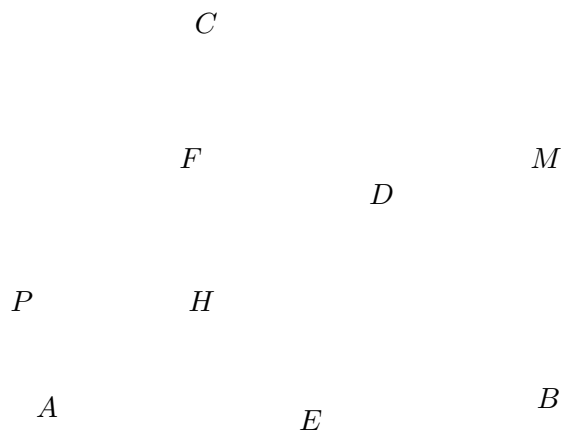
което дава $a = b$, отново противоречие. За $k = 3$ конструираме следния пример: нека $x_{2k-1} = k, k \geq 1$ и $x_{2k} = n + 1 - k$. При четно n имаме

$$x_i + x_{i+1} = \begin{cases} n + 1, & \text{при нечетно } i, \\ n + 2, & \text{при четно } i < n, \\ \frac{n}{2} + 2, & \text{при } i = n. \end{cases}$$

При нечетно n имаме $x_i + x_{i+1} = \begin{cases} n + 1, & \text{при нечетно } i < n, \\ n + 2, & \text{при четно } i, \\ \frac{n-1}{2} + 2, & \text{при } i = n. \end{cases}$

Задача 3. Ортоцентърът и средата на страната BC на $\triangle ABC$ са означени съответно с H и D . Права през H пресича страните AB и AC съответно в точки E и F , като $AE = AF$. Правата DH пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в две точки. Да се докаже, че една от тези точки лежи на описаната около $\triangle AEF$ окръжност.

Решение. Нека M е симетричната на H спрямо D . Добре известно е, че M лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Нека P е другата пресечна точка на правата DH и описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Ще докажем, че A, P, E и F лежат на една окръжност (черт. 4).



Черт. 4

От $AF = AE$ следва $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AEF$ или $\sphericalangle BFH = \sphericalangle CEH$. Освен това $\sphericalangle FBH = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ECH$. Следователно $\triangle BFH \sim \triangle CEH$, откъдето $\frac{BF}{BH} = \frac{CE}{CH}$. Понеже $BMCH$ е успоредник, намираме

$$(1) \quad \frac{BF}{CM} = \frac{CE}{BM}.$$

От друга страна, понеже D е среда на BC , то $S_{PBM} = S_{PCM}$, откъдето

$$BP \cdot BM \sin \sphericalangle MBP = CP \cdot CM \sin \sphericalangle MCP.$$

Понеже $\sphericalangle MBP + \sphericalangle MCP = 180^\circ$, то $\sin \sphericalangle MBP = \sin \sphericalangle MCP$ и получаваме $BP \cdot BM = CP \cdot CM$. Сега от (1) следва $\frac{BF}{BP} = \frac{CE}{CP}$ и понеже $\sphericalangle PBF = \sphericalangle PCE$ намираме $\triangle PBF \sim \triangle PCE$. Следователно $\sphericalangle PFB = \sphericalangle PEC$, откъдето $\sphericalangle PFA = \sphericalangle PEA$. От последното равенство следва, че точките P, A, E и F лежат на една окръжност.

Задача 4. Да се докаже, че за всяко естествено число k съществуват безбройно много естествени числа n , за които числата

$$2^n + 3^n - 1, 2^n + 3^n - 2, \dots, 2^n + 3^n - k$$

са съставни.

Решение. За фиксирано естествено число k избираме достатъчно голямо естествено число m , за което $2^m + 3^m - k > 1$. От всяко от числата

$$2^m + 3^m - 1, 2^m + 3^m - 2, \dots, 2^m + 3^m - k$$

избираме по един прост делител $p_1, p_2, \dots, p_k$ и нека

$$n_t = m + t(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1),$$

където t е произволно естествено число. За всяко i , $1 \leq i \leq k$, ще покажем, че $2^{n_t} \equiv 2^m \pmod{p_i}$. При $p_i = 2$ сравнението е очевидно, а при $p_i \neq 2$ от малката теорема на Ферма намираме

$$2^{n_t} \equiv 2^m \cdot 2^{t(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_k-1)} \equiv 2^m \cdot 1 = 2^m \pmod{p_i}.$$

По същия начин намираме $3^{n_t} \equiv 3^m \pmod{p_i}$, откъдето

$$2^{n_t} + 3^{n_t} - i \equiv 2^m + 3^m - i \pmod{p_i},$$

като $2^{n_t} + 3^{n_t} - i > 2^m + 3^m - i$. Следователно $2^{n_t} + 3^{n_t} - i$ е съставно число. Получихме, че n_t е едно от числата, за които всички числа

$$2^n + 3^n - 1, 2^n + 3^n - 2, \dots, 2^n + 3^n - k$$

са съставни. Тъй като t е произволно, то съществуват безбройно много такива числа.

Задача 5. Дадена е редица $\{x_n\}$, за която $x_1 \in \{5, 7\}$ и $x_{n+1} \in \{5^{x_n}, 7^{x_n}\}$ за $n = 1, 2, \dots$. Да се намерят всички възможни стойности за последните две цифри на x_{2009} .

Решение. Да отбележим, че $7^k \equiv 7, 49, 43, 1 \pmod{100}$ съответно при $k \equiv 1, 2, 3, 0 \pmod{4}$ и $5^k \equiv 25 \pmod{100}$ при $k \geq 2$.

За x_n , $n = 2009$, имаме следните три случая:

1. Ако $x_n = 7^{x_{n-1}} = 7^{5^{x_{n-2}}}$, то $5^{x_{n-2}} \equiv 1 \pmod{4}$ и следователно $x_n \equiv 7 \pmod{100}$.

2. Ако $x_n = 7^{x_{n-1}} = 7^{7^{x_{n-2}}}$, то $7^{7^{x_{n-2}}} \equiv (-1)^{x_{n-2}} \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4}$, и следователно $x_n \equiv 43 \pmod{100}$.

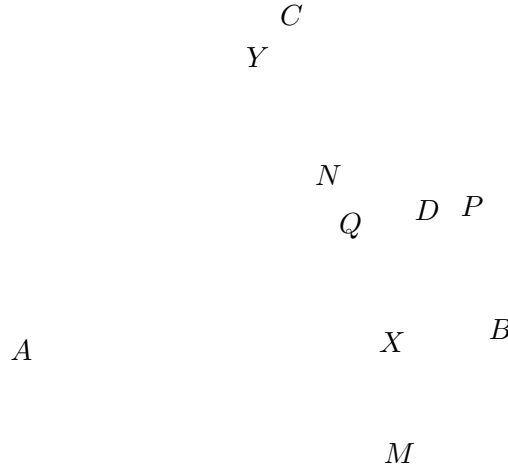
3. Ако $x_n = 5^{x_{n-1}}$, то $x_n \equiv 25 \pmod{100}$.

Задача 6. Върху страната BC на остроъгълен триъгълник ABC е избрана точка D . Окръжност с диаметър BD пресича правите AB и AD съответно в точки X и P . Окръжност с диаметър CD пресича правите AC и AD съответно в точки Y и Q . От A са спуснати перпендикуляри към правите PX и QY и петите на тези перпендикуляри са означени съответно с M и N . Да се докаже, че $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ тогава и само тогава, когато правата AD минава през центъра на описаната окръжност на $\triangle ABC$.

Решение. От условието следва, че точките B, P, D и X , като и C, Y, Q и D лежат на една окръжност. Тогава

$$\sphericalangle AXM = \sphericalangle BXP = \sphericalangle BDP = \sphericalangle QDC = \sphericalangle AYN.$$

От $\sphericalangle AMX = \sphericalangle ANY = 90^\circ$ следва, че $\triangle AMC \sim \triangle ANY$, откъдето получаваме $\sphericalangle MAX = \sphericalangle NAY$ и $\frac{AM}{AX} = \frac{AN}{AY}$.



Черт. 5

Следователно $\angle MAN = \angle XAY$. От горните равенства следва $\triangle AMN \sim \triangle AXY$ и

$$\begin{aligned} \triangle AMN \sim \triangle ABC &\iff \triangle AXY \sim \triangle ABC \iff XY \parallel BC \\ &\iff \angle DXY = \angle XDB. \end{aligned}$$

Тъй като A, X, D и Y лежат на една окръжност, то $\angle DXY = \angle DAY$. Понеже $\angle XDB = 90^\circ - \angle ABC$, то

$$\angle DXY = \angle XDB \iff \angle DAC = 90^\circ - \angle ABC,$$

което е еквивалентно на правата AD да минава през центърът на описаната окръжност за $\triangle ABC$.

Следователно $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ тогава и само тогава, когато AD минава през центъра на описаната окръжност за $\triangle ABC$.

Задача 7. В математическо състезание участвали n , ($n \geq 3$) ученика. Състезателната тема се състои от 15 въпроса за посочване на отговор. За верен отговор на всеки въпрос се присъжда 1 точка, а при неверен или непълнен отговор не се дават точки. След състезанието се оказало, че сборът от резултатите на кои да са 12 ученика е не по-малък от 36 точки и има поне трима ученика, за които съществуват три задачи, на които тези

ученици са отговорили правилно. Да се определи най-малката възможна стойност на n .

Решение. Ще докажем, че търсената най-малка стойност е $n = 911$.

Нека $n = 911$. Ако всеки ученик е отговорил вярно на поне три въпроса, то за всеки ученик ще има $\binom{15}{3} = 455$ начина да е отговорил вярно на точно три въпроса. Тогава от принципа на Дирихле следва, че има поне трима ученика, за които съществуват три задачи, на които тези ученици са отговорили правилно.

Ако има ученик X с по-малко от три верни отговора, то броят на учениците с по-малко от четири верни отговора е не по-голям от 10. В противен случай избираме произволни 11 такива ученици заедно с X и сборът от техните резултати е по-малък от 36. Тогава има повече от $911 - 11 = 900$ ученици измежду останалите, с резултат поне 4. Понеже $\binom{4}{3} \cdot 900 > \binom{15}{3} \cdot 2$, то има трима ученика, за които съществуват три задачи, на които тези ученици са отговорили правилно.

Ако в състезанието участват 910 ученика, ги разделяме на $455 = \binom{15}{3}$ групи от по двама ученика. Във всяка група двамата ученици отговарят вярно само на трите въпроса от съответната група.

Задача 8. Дадени са реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \geq 3$, за които $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ и $2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1}$ за $k = 2, 3, \dots, n-1$. Да се намери най-малкото $\lambda(n)$, за което за всяко $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ е изпълнено

$$|a_k| \leq \lambda(n) \cdot \max\{|a_1|, |a_n|\}.$$

Решение. Ще докажем, че търсената стойност е $\lambda(n) = \frac{n+1}{n-1}$. Разглеждаме редицата, дефинирана чрез равенствата $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{n+1}{n-1}$ и

$$a_k = -\frac{n+1}{n-1} + \frac{2n(k-2)}{(n-1)(n-2)} \text{ за } k = 3, 4, \dots, n.$$

Тогава $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ и $2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1}$ за $k = 2, 3, \dots, n-1$. Лесно се проверява, че $|a_k| \leq \frac{n+1}{n-1} \max\{|a_1|, |a_n|\}$, т.е. $\lambda(n) \leq \frac{n+1}{n-1}$.

Да разгледаме редица $\{a_k\}$, удовлетворяваща двете условия от задачата. Ще покажем, че $a_k \leq \frac{n+1}{n-1} \max\{|a_1|, |a_n|\}$ за всички $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Понеже $2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1}$, то $a_{k+1} - a_k \geq a_k - a_{k-1}$, откъдето

$$a_n - a_{n-1} \geq a_{n-1} - a_{n-2} \geq \dots \geq a_2 - a_1.$$

Имаме

$$\begin{aligned} (k-1)(a_n - a_1) &= (k-1)[(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1)] \geq \\ &\geq (n-1)[(a_k - a_{k-1}) + (a_{k-1} - a_{k-2}) + \dots + (a_2 - a_1)] = \\ &= (n-1)(a_k - a_1). \end{aligned}$$

Следователно

$$(1) \quad a_k \leq \frac{k-1}{n-1}(a_n - a_1) + a_1 \frac{1}{n-1}[(k-1)a_n + (n-k)a_1].$$

Аналогично за всяко $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ и всяко $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ намираме

$$a_j \leq \frac{1}{k-1}[(j-1)a_k + (k-j)a_1].$$

За $j \in \{k, k+1, \dots, n\}$ имаме

$$a_j \leq \frac{1}{n-1}[(j-k)a_n + (n-j)a_k],$$

откъдето

$$\sum_{j=1}^k a_j \leq \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k [(j-1)a_k + (k-j)a_1] = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$$

и

$$\sum_{j=k}^n a_j \leq \frac{1}{n-k} \sum_{j=k}^n [(j-k)a_n + (n-j)a_k] = \frac{n+1-k}{2}(a_k + a_n).$$

Сумирайки горните неравенства, получаваме

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{j=1}^k a_j + \sum_{j=k}^n a_j \leq \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + \frac{n+1-k}{2}(a_k + a_n) = \\ &= \frac{k}{2}a_1 + \frac{n+1}{2}a_k + \frac{n+1-k}{2}a_n. \end{aligned}$$

Следовательно

$$(2) \quad a_k \geq -\frac{1}{n-1}[ka_1 + (n+1-k)a_n].$$

От (1) и (2) за $k = 2, 3, \dots, n-1$ намираме

$$\begin{aligned} |a_k| &\leq \max \left\{ \frac{1}{n-1} |(k-1)a_n + (n-k)a_1|, \frac{1}{n-1} |ka_1 + (n+1-k)a_n| \right\} \leq \\ &\leq \frac{n+1}{n-1} \max\{|a_1|, |a_n|\}. \end{aligned}$$

Окончательно намираме, че $\lambda(n)_{\min} = \frac{n+1}{n-1}$.

Русия

Задача 9.1 Учител има 24 молива от 4 цвята – по 6 молива от всеки цвят. Учителят раздал моливите на 6 ученика така, че всеки ученик получил по 4 молива. Да се намери минималният брой ученици, които могат да бъдат избрани така, че в тях да има моливи от всички цветове, независимо от разпределението на моливите. (Избирацият знае кой какви моливи има.)

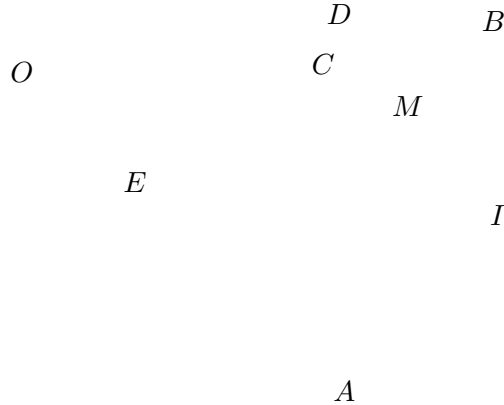
Решение. Отговор – 3. Тъй като моливите от всеки цвят са 6, а всеки получава по 4, то някой е получил моливи от поне два различни цвята. Добавяме към него двама, които имат моливи от останалите два цвята и получаваме трима, които имат моливи от всички цветове. Предоставяме на читателя да даде пример как моливите могат да бъдат раздадени така, че да няма двама, които заедно да имат моливи от всички цветове.

Задача 9.2 Върху окръжност са написани 100 две по две различни числа. Да се докаже, че е възможно да бъдат избрани 4 последователни от числата така, че сумата на двете крайни да е строго по-голяма от сумата на двете средни.

Решение. Да допуснем обратното и нека числата са $a_1, a_2, \dots, a_{100}$, като ще считаме, че $a_{100+n} = a_n$. Тогава са в сила неравенствата $a_n + a_{n+3} \leq a_{n+1} + a_{n+2}$, или $a_{n+3} - a_{n+2} \leq a_{n+1} - a_n$ при $n = 1, 2, \dots, 100$. Следователно $a_{100} - a_{99} \leq a_{98} - a_{97} \leq \dots \leq a_2 - a_1 \leq a_{100} - a_{99}$, което означава, че всички тези неравенства всъщност са равенства. Нека $a_{2n} - a_{2n-1} = k$ за всички $n = 1, 2, \dots, 50$ и аналогично $a_{2n+1} - a_{2n} = \ell$ за $n = 1, 2, \dots, 50$. Сумирайки 100-те получени равенства, достигахме до $0 = 50k + 50\ell$, откъдето $k = -\ell$. Но тогава $a_3 - a_2 = \ell = -k = -(a_2 - a_1) = a_1 - a_2$, т.е. $a_1 = a_3$, противоречие с условието.

Задача 9.3 Дадени са окръжност ω с център I и две прави, които се допират до ω в точки A и B и се пресичат в точка O . Върху по-малката дъга AB на ω е избрана точка C , различна от средата на дъгата. Правите AC и OB се пресичат в точка D , а правите BC и OA – в точка E . Да се докаже, че центровете на описаните около триъгълниците ACE , BCE и OCE окръжности лежат на една права.

Решение. Нека M е втората пресечна точка на окръжностите, описани около триъгълниците ACE и BCD (ако тези окръжности се допират, правите AE и BD биха били успоредни). Достатъчно е да докажем, че окръжността, описана около $\triangle OCI$, също минава през M , тъй като в такъв случай центровете на трите окръжности от условието ще лежат на симетралата на отсечката CM (черт. 1).



Черт. 1

Да означим $\sphericalangle CAB = \alpha$ и $\sphericalangle CBA = \beta$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $\beta > \alpha$. Тогава $\sphericalangle OBE = \alpha$ и $\sphericalangle DAE = \beta$. Тъй като четириъгълникът $OBIA$ е вписан, имаме $\sphericalangle OIA = \sphericalangle OBA = \alpha + \beta$. Следователно $\sphericalangle CIO = \sphericalangle CIA - \sphericalangle OIA = 2 \sphericalangle CBA - (\alpha + \beta) = \beta - \alpha$. За да докажем, че точка M лежи на окръжността, описана около $\triangle OCI$, е достатъчно да видим, че $\sphericalangle CMO = \beta - \alpha$.

Тъй като четириъгълниците $AECM$ и $DBMC$ са вписани, получаваме

$$\begin{aligned} \sphericalangle BME &= \sphericalangle BMC + \sphericalangle CME = (180^\circ - \sphericalangle CDB) + \sphericalangle CAE \\ &= \sphericalangle ODA + \sphericalangle DAO = 180^\circ - \sphericalangle EOB, \end{aligned}$$

т.е. четириъгълникът $EOBM$ също е вписан и $\sphericalangle OME = \sphericalangle OBE = \alpha$. Следователно $\sphericalangle CMO = \sphericalangle CME - \sphericalangle OME = \sphericalangle CAE - \alpha = \beta - \alpha$, с което доказателството е завършено.

Забележка. Точката M е всъщност *точката на Микел* за четиристранника, определен от правите AC , BC , AO и BO , т.е. M лежи на описаната окръжност за триъгълника, образуван от кои да е три от тези четири прави.

Следователно M лежи не само на описаните около триъгълниците ACE , BCE и OCI окръжности (както доказахме), но и на окръжността, описана около $\triangle AOD$.

Задача 9.4 В стола на МГ има 100 ябълки с общо тегло 10 кг, като всяка ябълка тежи не по-малко от 25 г. Ученик трябва да разреже ябълките на части и да ги раздаде на 100 души така, че всеки да получи по 100 г. Да се докаже, че ученикът може да направи разрязванията така, че всяко парче да тежи поне 25 г.

Решение. Всички тегла в решението са в грамове. Ще наричаме едно парче от ябълка (или цяла ябълка) *голямо*, ако теглото му е поне 25. Ще докажем с индукция по n , че винаги е възможно да разделим n големи ябълки с общо тегло $100n$ поравно за n човека.

Случаят $n = 1$ е очевиден. Нека $n > 1$ и да разгледаме двете най-тежки ябълки с тегла a и b , $a \geq b$. Да отбележим, че $a + b \geq 200$ (в противен случай средното тегло на ябълка е по-малко от $200/2 = 100$ и няма как да имаме общо тегло $100n$). Да заменим тези две ябълки с една с тегло $c = a + b - 100 \geq 100$. Съгласно индукционното предположение, получените "комплект" ябълки може да се раздели на големи парчета и да се раздаде на $n - 1$ души поравно. Ако в това разделяне има парче с тегло повече от 50, да го разрежем на две големи парчета и след тази процедура да считаме, че сме разделили ябълките на парчета с тегла $c_1, c_2, \dots, c_k$, ненадминаващи 50. Да означим $s_d = c_1 + \dots + c_d$ при $d = 1, 2, \dots, k$ и да положим $s_0 = 0$.

Сега да разгледаме изходния комплект ябълки. Да разрежем всички ябълки без a и b така, както е в новия комплект. Да забележим, че $a \geq 200/2 = 100$. Да означим с t минималният индекс, за който $a - s_t \leq 75$ и да отрежем от a парчета $c_1, \dots, c_t$, а от b – парчета $c_{t+1}, \dots, c_k$. Тъй като $a - s_{t-1} > 75$, от a е останало парче $a' = a - s_t = (a - s_{t-1}) - c_t$, за което $75 \geq a' > 75 - c_t \geq 25$. От b е останало парче b' , за което $a' + b' = a + b - c = 100$ и значи $25 \leq b' \leq 75$. Сега можем да дадем a' и b' на един човек и да разпределим останалите парчета така, както е в новия комплект.

Забележка. Числото 25 не може да бъде заменено с по-голямо, независимо от n .

Задача 9.5 Различните реални числа a и b са такива, че уравнението

$$(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$$

няма реални корени. Да се докаже, че числото $20(b - a)$ не е цяло.

Решение. Да допуснем противното. Нека $b > a$ за определеност – тогава имаме $20(b - a) \geq 1$, т.е. $b - a \geq \frac{1}{20}$. Дискриминантата на втория квадратен тричлен в даденото уравнение е отрицателна, откъдето $100b^2 - 10a < 0$. Следователно $10b^2 < a \leq b - \frac{1}{20}$, т.е. $10b^2 - b + \frac{1}{20} < 0$. Но това е невъзможно, защото дискриминантата на $10b^2 - b + \frac{1}{20}$ също е отрицателна, а старшият коефициент е положителен.

Задача 9.6 Всяко от 1000 джуджета има калпак, който е син отвън и червен отвътре или обратно. Джудже, което носи червен (отвън) калпак може само да лъже, а джудже със син (отвън) калпак може да говори само истината. В продължение на един ден всяко джудже казало на всяко друго ”Ти си с червен калпак!”, като при това някои джуджета са си преобръщали калпака наопаки през този ден. Да се намери минималният възможен брой обръщания на калпаци.

Решение. Отговор – 998 обръщания. Ще наричаме едно джудже *червено* или *синьо*, ако носи (в даден момент) калпак със съответния цвят.

(Оценка) Да забележим, че едно джудже може да каже на друго ”Ти си с червен калпак!” тогава и само тогава, когато тези две джуджета са разноцветни – при това синьото джудже ще е казало истината, а червеното ще е излъгало. Ако някои три джуджета не са обръщали калпаците си, то две от тях са били едноцветни през целия ден и няма как да са си казали необходимото. Следователно обръщанията са поне $1000 - 2 = 998$.

(Конструкция) Ще казваме, че две джуджета са си *говорили*, ако всяко от тях е казало на другото заветната фраза. Ще опишем ситуация с точно 998 обръщания в случая, когато в началото джуджето Вася е синьо, а всички останали – червени. В началото на деня всяко джудже си говори с Вася. След това всички червени джуджета последователно си преобръщат калпаците, като след всяко преобръщане всички останали червени джуджета си говорят с това, което току-що си е преобръщало калпака. Когато остане само едно червено джудже (т.е. след 998 преобръщания) вече всяка двойка джуджета са си говорили.

Забележка. Пример с 998 преобръщания на калпаци е възможен във всяка ситуация, при която не всички джуджета са едноцветни.

Задача 9.7 Естественото число n се нарича *лошо*, ако не може да се представи във вида $n = \frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}$ за някои естествени $x, y > 1$. Да се определи дали множеството на лошите числа е крайно или безкрайно.

Решение. Ще докажем, че разглежданото множество е безкрайно, като установим, че всяко число от вида $n = p^2$, където p е нечетно просто число, е лошо. Да допуснем противното, т.е. $(y^2 - 1)p^2 = x^2 - 1$ за някои естествени x и y . Тогава лесно се вижда, че точно едно от числата $x + 1$ и $x - 1$ се дели на p .

Ако $p|x + 1$, то $p^2|x + 1$, т.е. $x = kp^2 - 1$ за някое естествено k . Тогава

$$y^2 = \frac{x+1}{p^2}(x-1) + 1 = k(kp^2 - 2) + 1 = k^2p^2 - 2k + 1.$$

Но $k^2p^2 > k^2p^2 - 2k + 1 > k^2p^2 - 2kp + 1$, т.е. $(kp)^2 > y^2 > (kp - 1)^2$, което е невъзможно.

Ако $p|x - 1$, аналогично получаваме $x = kp^2 + 1$, $y^2 = k^2p^2 + 2k + 1$ и $(kp)^2 < y^2 < (kp + 1)^2$.

Задача 9.8 В остроъгълния $\triangle ABC$ медианата AM е по-дълга от страната AB . Да се докаже, че $\triangle ABC$ може да бъде разрязан на три части, от които да се сглоби ромб.

Решение. Нека N е средата на страната AC , а K е точка върху правата MN , за която $MK = MN$. Тогава триъгълниците MNC и MKB са симетрични относно M и следователно са еднакви. Да направим разрез по средната отсечка MN . Разполагайки $\triangle MNC$ по такъв начин, че да съвпадне с $\triangle MKB$, получаваме успоредник $ANKB$ и, ако $AN = AB$, то ромбът е построен.

Нека $AN < AB$. Да построим окръжност k с център A и радиус AB . Тогава точка N е вътрешна, а точка M е външна за k . Нека k пресича отсечката NM в точка P . Отрязвайки от успоредника $ANKB$ триъгълник APN и премествайки го така, че страната AN да съвпадне с BK , получаваме ромб.

Нека $AN > AB$. Тъй като $\triangle ABC$ е остроъгълен, петата H на височината CH лежи върху отсечката AB . Петата T на перпендикуляра, спуснат от N към AB , е средата на отсечката AH . Следователно $BT > AT$ и тогава $BN > AN$. Тогава окръжността с център B и радиус AN пресича страната AN в точка S (точка N е външна, а точка A – вътрешна за тази окръжност). Отрязвайки от успоредника $\triangle ABS$ и премествайки го така, че страната AB да съвпадне със страната NK , получаваме ромб.

Забележка. Може да се докаже, че и тъпоъгълен триъгълник може да се разреже на три части, от които да се сглоби ромб. Действително, ако

ъгъл B е тъп и $AB \geq BC$, то медианата AM е по-дълга от страната AB , като при това $AN < AB$.

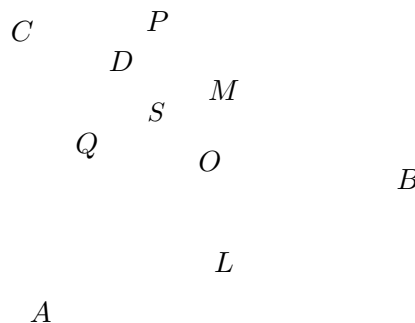
Задача 10.1 Учител има 40 молива от 4 цвята – по 10 молива от всеки цвят. Учителят раздал моливите на 10 ученика така, че всеки ученик получил по 4 молива. Да се намери минималният брой ученици, които могат да бъдат избрани така, че в тях да има моливи от всички цветове, независимо от разпределението на моливите. (Избиращият знае кой какви моливи има.)

Решение. Отговор – 3. Виж решението на задача 9.1.

Задача 10.2 Виж решението на Задача 9.2.

Задача 10.3. През центъра O на описаната около неравнобедрен остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност са построени две прави, перпендикулярни на страните AB и AC . Тези прави пресичат височината AD на $\triangle ABC$ в точки P и Q . Точката M е средата на страната BC , а S е центърът на окръжността, описана около $\triangle OPQ$. Да се докаже, че $\sphericalangle BAS = \sphericalangle CAM$.

Решение. Нека $AB > AC$ за определеност (черт. 2). Да означим с L средата на отсечката AB . Да забележим, че $\sphericalangle AOL = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB$. Оттук $\sphericalangle BAO = 90^\circ - \sphericalangle AOL = 90^\circ - \sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$.



Черт. 2

Тъй като страните на $\triangle OPQ$ са перпендикулярни съответно на страните на $\triangle ABC$, имаме $\triangle OPQ \sim \triangle ABC$, като $\triangle OPQ$ се получава от $\triangle ABC$ след

ротация на 90° и хомотетия с коефициент k . Тъй като OS и AO са съответни в $\triangle OPQ$ и $\triangle ABC$, то $OS \perp AO$ и $OS = kAO$. Освен това отсечката MD е равна на височината на $\triangle OPQ$ към PQ и значи $MD = kAD$. Следователно правоъгълните триъгълници AOS и ADM са подобни и тогава получаваме $\sphericalangle SAO = \sphericalangle MAD$, откъдето

$$\sphericalangle BAS = \sphericalangle BAO + \sphericalangle SAO = \sphericalangle CAD + \sphericalangle MAD = \sphericalangle CAM.$$

Задача 10.4. Във всяка клетка на квадрат 100×100 е записано цяло число. Правоъгълник, съставен от клетки на квадрата, се нарича *добър*, ако сумата от числата в него се дели на 17. Разрешено е едновременно да се оцветят всички клетки в добър правоъгълник, но е забранено една клетка да се оцветява два пъти. Да се намери максималното d , за което е възможно да се оцветят поне d клетки при произволно разположение на числата.

Решение. Отговор – $9744 = 100^2 - 16^2$ клетки.

Лема. В правоъгълник $1 \times k$ е възможно да се оцветят няколко непресичащи се добри правоъгълника, съдържащи поне $k - 16$ клетки.

Доказателство. Ще проведем индукция по k . При $k \leq 16$ няма нужда да оцветяваме нищо. Нека $k \geq 17$ и в 17-те клетки отляво да стоят числата $a_1, \dots, a_{17}$. Измежду числата $0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_{17}$ има две, които дават еднакви остатъци при деление на 17. Тогава тяхната разлика има вида $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ и се дели на 17. Да премахнем от дадения правоъгълник клетките от i -та до j -та включително. Останалите клетки дефинират нов правоъгълник $1 \times (k - (j - i + 1))$, в който, съгласно индукционното предположение, можем да оцветим няколко непресичащи се добри правоъгълника така, че да останат не повече от 16 неоцветени клетки. Тогава в изходния правоъгълник ще са оцветени общо поне $k - 16$ клетки, с което лемата е доказана.

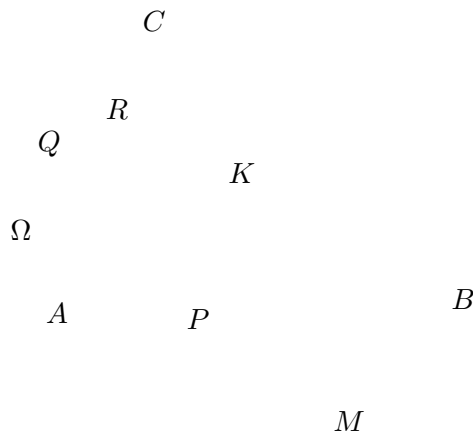
Ще докажем, че е възможно да оставим не повече от $16^2 = 256$ неоцветени клетки. Да приложим лемата за правоъгълник 1×100 , в клетките на който са записани сумите от числата в стълбовете на изходния квадрат. Получаваме няколко добри правоъгълника и можем да оцветим съответните им правоъгълници с височина 100 в изходния квадрат. След това ще останат неоцветени не повече от 16 стълба и лемата за всеки от тях оставя неоцветени не повече от 256 неоцветени клетки.

Оставяме на читателя да съобрази, че ако в квадрат 16×16 са записани единици, а във всички останали клетки – нули, то не е възможно да останат по-малко от 256 неоцветени клетки.

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 10.6. В $\triangle ABC$ е взета точка K , лежаща на ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$. Правата CK пресича за втори път окръжността ω , описана около $\triangle ABC$ в точка M . Окръжност Ω минава през точка A , допира се до правата CM в точка K и пресича за втори път отсечката AB в точка P , а окръжността ω – в точка Q . Да се докаже, че точките P , Q и M лежат на една права.

Решение. Нека R е втората пресечна точка на окръжността Ω и отсечката AC (черт. 3). Тогава имаме равенствата $\sphericalangle MKP = \sphericalangle KAP = \sphericalangle KAR = \sphericalangle KPR$, откъдето $PR \parallel CM$.



Черт. 3

По-нататък, имаме $\sphericalangle CMQ = \sphericalangle CAQ = \sphericalangle RAQ = \sphericalangle RPQ$, което показва, че правите MQ и PQ съвпадат, с което исканото е доказано.

Забележка. Не е трудно да се докаже, че точка Q винаги лежи на дъгата AC , която не съдържа точката B .

Задача 10.7. Дадени са n , $n \geq 3$, две по две взаимнопрости числа. Известно е, че при деление на произведението на кои да е $n - 1$ от числата на оставащото число се получава едни и същи остатък r . Да се докаже, че $r \leq n - 2$.

Решение. Твърдението е тривиално при $r = 0$ и затова нека $r > 0$. Да означим дадените числа с $a_1, \dots, a_n$ и нека $P = a_1 a_2 \dots a_n$, $P_i = P/a_i$ при

$i = 1, 2, \dots, n$. Да забележим, че $a_i > r$ (защото P_i дава остатък r при деление на a_i).

Да разгледаме числото $S = P_1 + P_2 + \dots + P_n - r$. Имаме $a_1 | S = (P_1 - r) + (P_2 + P_3 + \dots + P_n)$, понеже и двете събираеми се делят на a_1 . Аналогично, $a_i | S$ за всички $i = 1, \dots, n$. Оттук и от условието следва, че $a_1 \dots a_n = P | S$. Тъй като $S > a_1 - r > 0$, получаваме $S \geq P$ и тогава $P_1 + \dots + P_n = S + r > P$. Следователно $P_i > P/n$ за някое i , откъдето $a_i < n$, т.е. $a_i \leq n - 1$. Тогава $r < a_i \leq n - 1$, т.е. $r \leq n - 2$.

Задача 10.8. В една страна някои двойки градове са свързани с двупосочни директни авиолинии, като от всеки град може да се долети до всеки друг град (с евентуални прекачвания). Известно е, че ако се избере произволен затворен маршрут с нечетен брой авиолинии и се закрият тези линии, вече няма да е възможно от всеки град да се долети до всеки друг град. Да се докаже, че градовете могат да бъдат разделени на не повече от 4 части така, всяка авиолиния да свързва градове от различни части.

Решение. Да разгледаме граф G с върхове градовете, като два върха са съединени с ребро точно когато между съответните градове има авиолиния. Тогава G е свързан, но след премахване на ребрата от произволен цикъл с нечетна дължина вече не е свързан. Трябва да докажем, че е възможно върховете на G да бъдат оцветени правилно в 4 цвята. Ще използваме следната известна лема.

Лема. Ако в един граф няма цикли с нечетна дължина, то неговите върхове могат да бъдат оцветени правилно в два цвята.

Доказателство. Ясно е, че е достатъчно да докажем твърдението за свързан граф. Да фиксираме връх A и да оцветим всички върхове на нечетно (четно) разстояние от A в червено (синьо). Ако това оцветяване не е правилно, съществува ребро между едноцветни, да речем червени, върхове B и C . Нека $A = B_0, B_1, \dots, B_{2n-1} = B$ и $A = C_0, C_1, \dots, C_{2m-1} = C$, са най-къси пътища от A до B и до C . Ако i е максималния индекс, за който $B_i = C_i$, получаваме цикъл $B_i, B_{i+1}, \dots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, \dots, C_i = B_i$ с нечетна дължина – противоречие, с което доказателството е завършено.

Ако в G има цикъл, да премахнем едно ребро от този цикъл. Очевидно G остава свързан граф. Да продължим този процес докато не останат цикли в G . Нека V е множеството от премахнатите ребра и W е множеството от всички останали. Полученият граф е свързан и това означава, че не съществуват цикли с нечетна дължина, чийто ребра са от V . Действително, ако има такъв цикъл, то при премахването му от G ще останат всички ребра

от W и графът ще остане свързан.

Да разгледаме сега граfoвете G_V и G_W с върхове – върховете на G и с ребра съответно множествата V и W . Тогава в G_W няма цикли, а в G_V няма цикли с нечетна дължина. От лемата следва, че върховете на G_W могат да бъдат оцветени правилно в цветове 0 и 1, а върховете на G_V могат да бъдат оцветени правилно в цветове 0 и 2. Сега да съпоставим на всеки връх на G сумата от цветовете му в двете оцветявания. Тогава, ако два върха са съединени с ребро в G , те са съединени с ребро в един от граfoвете G_V или G_W и, както не е трудно да се види, техните цветове са различни. Последното означава, че полученото оцветяване (в цветовете 0, 1, 2, 3) е правилно.

Задача 11.1. Съществуват ли ненулеви реални числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, за които

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(a_{10} + \frac{1}{a_{10}}\right) = \left(a_1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdots \left(a_{10} - \frac{1}{a_{10}}\right)?$$

Решение. Да допуснем, че такива числа съществуват. Отбелязвайки, че a_k и $\frac{1}{a_k}$ са с еднакъв знак, имаме

$$\left|a_k + \frac{1}{a_k}\right| = |a_k| + \frac{1}{|a_k|} > \max\left(|a_k|, \frac{1}{|a_k|}\right) \geq \left|a_k - \frac{1}{a_k}\right| \geq 0.$$

Умножаваме тези неравенства и получаваме

$$\left|a_1 + \frac{1}{a_1}\right| \cdots \left|a_{10} + \frac{1}{a_{10}}\right| > \left|a_1 - \frac{1}{a_1}\right| \cdots \left|a_{10} - \frac{1}{a_{10}}\right|,$$

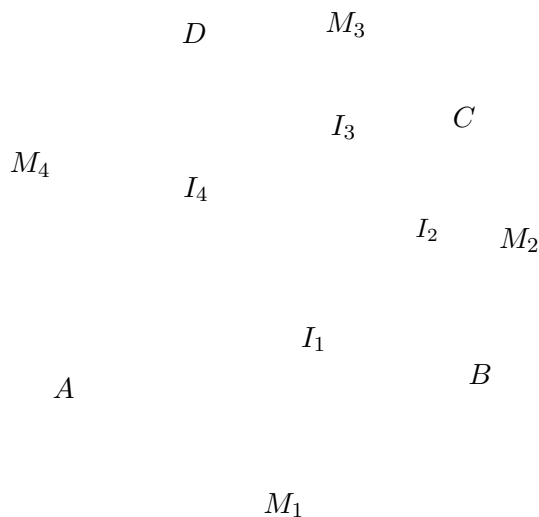
т.е. исканото равенство не е възможно.

Задача 11.2. В $n \times n$ таблица ($n \geq 4$) са разположени n знака $+$ в клетките на единия главен диагонал и знаци $-$ във всички останали клетки. Разрешено е да се променят всички знаци на противоположните им в даден ред или стълб. Да се докаже, че не е възможно след краен брой такива операции да останат по-малко от n плюса.

Решение. Да забележим, че ако четири клетки са върховете на правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, то никаква операция не може да промени четността на броя на плюсовете в тези клетки. Предоставяме на читателя да намери n такива непресичащи се четворки, включващи в началото по един плюс.

Задача 11.3. Четириъгълник $ABCD$ е вписан в окръжност ω , а диагоналите му се пресичат в точка K . Точките M_1, M_2, M_3 и M_4 са съответно средите на дъгите AB, BC, CD и DA (несъдържащи други върхове на четириъгълника). Точките I_1, I_2, I_3 и I_4 са центровете на окръжностите, вписани съответно в триъгълниците ABK, BCK, CDK и DAK . Да се докаже, че правите M_1I_1, M_2I_2, M_3I_3 и M_4I_4 се пресичат в една точка.

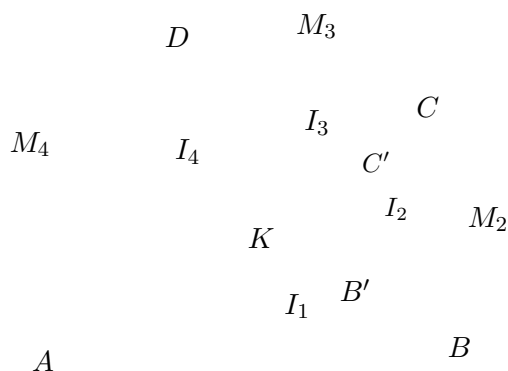
Решение. Да забележим, че точката I_1 лежи на ъглополовящите AM_2 и BM_4 на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABD$, т.е. $I_1 = AM_2 \cap BM_4$. Аналогично $I_2 = BM_3 \cap CM_1$, $I_3 = CM_4 \cap DM_2$ и $I_4 = DM_1 \cap AM_3$ (черт. 4). Тъй като $\widehat{AM_1} + \widehat{CM_3} = \widehat{BM_1} + \widehat{DM_3}$, правата M_1M_3 сключва равни ъгли с хордите AC и BD . Тогава M_1M_3 е успоредна на ъглополовящата на $\sphericalangle AKB$, т.е. на правата I_1I_3 . Аналогично, $M_2M_4 \parallel I_2I_4 \perp I_1I_3$ (Защо $I_2I_4 \perp I_1I_3$?).



Черт. 4

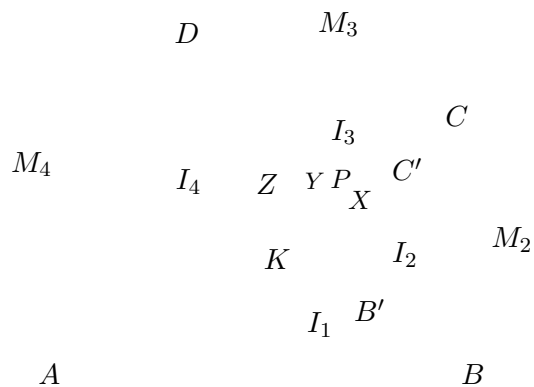
Ако правите I_1I_3 и M_1M_3 или I_2I_4 и M_2M_4 съвпадат, твърдението е очевидно. Нека I_1 не лежи на правата M_1M_3 . Да означим $A' = DM_1 \cap BM_4$, $B' = AM_2 \cap CM_1$, $C' = BM_3 \cap DM_2$ и $D' = AM_4 \cap CM_4$.

Имаме $\sphericalangle BM_1M_2 = \sphericalangle CM_1M_2$ и $\sphericalangle BM_2M_1 = \sphericalangle AM_2M_1$, откъдето $\triangle M_1M_2B$ и $\triangle M_1M_2B'$ са симетрични относно правата M_1M_2 (черт. 5). Тогава $M_2B' = M_2B$ и аналогично $M_2C' = M_2C$ и от $M_2B = M_2C$ следва, че $M_2B' = M_2C'$. Тъй като $\sphericalangle AM_2M_4 = \sphericalangle DM_2M_4$, правата M_2M_4 е ъглополовяща, оттам и височина, на равнобедрения $\triangle M_2B'C'$. Следователно $B'C' \perp M_2M_4$ и $B'C' \parallel M_1M_3 \parallel I_1I_3$.



М₁
Черт. 5

Нека правата M_2I_2 пресича $B'C'$, I_1I_3 и M_1M_3 съответно в точките X , Y и Z (черт. 6). От хомотетии с центрове I_2 и M_2 получаваме $\frac{M_1Z}{M_3Z} = \frac{B'X}{C'X} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Нека $P = M_1I_1 \cap M_3I_3$. Ако правата PY пресича M_1M_3 в точка Z' , то от хомотетия с център P получаваме $\frac{M_1Z'}{M_3Z'} = \frac{I_1Y}{I_3Y}$. Следователно Z' съвпада със Z . Получаваме, че точка P лежи на правата M_2I_2 . Аналогично P лежи на правата M_4I_4 , т.е. правите M_1I_1 , M_2I_2 , M_3I_3 и M_4I_4 се пресичат в точка P .



М₁
Черт. 6

Забележка 1. Точките A' , B' , C' и D' са центровете на окръжностите, вписани съответно в триъгълниците ABD , BAC , CBD и DAC .

Забележка 2. В края на решението по същество се използва теоремата за трите хомотетии (а именно, тези, които изпращат отсечките $B'C'$, M_1M_3 и I_1I_3 една в друга).

Забележка 3. Точка P лежи върху OK , където O е центърът на описаната около $ABCD$ окръжност. Според журито за 10-ти клас този факт е забелязан и доказан частично единствено от българския участник Виктор Вълков.

Задача 11.4. Дадено е естествено число $n \geq 3$. Да се намери минималното естествено число k , за което е вярно следното твърдение: за произволни n точки $A_i = (x_i, y_i)$ в равнината, някои три от които не лежат на една права, и произволни реални числа c_i ($1 \leq i \leq n$) съществува полином $P(x, y)$ от степен най-много k , за който $P(x_i, y_i) = c_i$ за всички $i = 1, \dots, n$.

Решение. Отговор – $k = \lfloor n/2 \rfloor$.

Лема. За произволни точки $A_i = (x_i, y_i)$ ($1 \leq i \leq n$) в равнината, някои три от които не лежат на една права, съществува полином $P(x, y)$ от степен не повече от $\lfloor n/2 \rfloor$, за който $P(x_n, y_n) = 1$ и $P(x_i, y_i) = 0$ при $i = 1, \dots, n-1$.

Доказателство. Да забележим, че съществуват $d = \lfloor n/2 \rfloor$ прави, такива че точката A_n не лежи върху никоя от тях, а всяка от точките $A_1, \dots, A_{n-1}$ лежи върху поне една от тези прави (при нечетно n това са правите A_1A_2 , $A_3A_4, \dots, A_{n-2}A_{n-1}$, а при четно n – правите A_1A_2 , $A_3A_4, \dots, A_{n-3}A_{n-2}$, $A_{n-2}A_{n-1}$). Нека $k_ix + \ell_iy + m_i = 0$ е уравнението на i -тата права ($i = 1, \dots, d$). Тогава полиномът

$$Q(x, y) = \frac{(k_1x + \ell_1y + m_1) \dots (k_dx + \ell_dy + m_d)}{(k_1x_n + \ell_1y_n + m_1) \dots (k_dx_n + \ell_dy_n + m_d)}$$

има исканото свойство, с което доказателството е завършено.

Ще докажем, че твърдението от условието е вярно за $k = \lfloor n/2 \rfloor$. За всяко $i = 1, \dots, n$ да разгледаме полином $P_i(x, y)$, който се анулира във всички точки $A_1, \dots, A_n$, освен в A_i , като $P_i(x_i, y_i) = 1$. Тогава полиномът $P(x) = c_1P_1(x, y) + \dots + c_nP_n(x, y)$ приема исканите стойности във всички точки $A_1, \dots, A_n$.

Остава да докажем, че твърдението не е вярно при $k < \lfloor n/2 \rfloor$. Да разгледаме точките $A_i(i, i^2)$ ($i = 1, \dots, n$), лежащи върху параболата $y = x^2$, и

да положим $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$, $c_n = 1$. Тъй като параболата се пресича с права в не повече от две точки, точките A_i удовлетворяват условията. Да допуснем, че съществува полином $P(x, y)$ от степен най-много k , за който $P(x_i, y_i) = c_i$, $i = 1, \dots, n$. Да положим $Q(x) = P(x, x^2)$ – тогава степента на $Q(x)$ не надминава $2k$. От допускането следва, че $Q(1) = Q(2) = \dots = Q(n-1) = 0$ и $Q(n) = 1$. Получихме, че ненулевият полином $Q(x)$ има $n-1$ корена. Тогава неговата степен е поне $n-1$, т.е. $2k \geq n-1$ и $k \geq [n/2]$.

Задача 11.5. Дадено е естествено число $n > 1$. Да се докаже, че съществуват n последователни естествени числа, чието произведение се дели на всички прости числа, ненадминаващи $2n+1$ и не се дели на нито едно друго просто число.

Решение. Ако числото $n+1$ е съставно, числата $n+2, \dots, 2n+1$ имат исканото свойство. Действително, тяхното произведение очевидно се дели на всички прости числа от интервала $[n+2, 2n+1]$, но не се дели на прости числа, по-големи от $2n+1$. Освен това, за всяко просто число $p \leq n$, имаме пълна система остатъци по модул p измежду нашите множители и, в частност, остатък 0.

Ако $n+1$ е просто, то е нечетно, а числото $n+2 > 2$ е четно и следователно е съставно. Сега са подходящи числата $n+3, \dots, 2n+2$. Действително, както по-горе виждаме, че тяхното произведение P се дели на всички прости числа от интервалите $[1, n]$ и $[n+3, 2n+2]$, но не се дели на прости числа, по-големи от $2n+1$ (тъй като числото $2n+2$ е съставно). Освен това, P се дели и на $n+1 = \frac{2n+2}{2}$.

Задача 11.6. Възможно ли е четирите центъра на вписаните в стените на тетраедър окръжности да лежат в една равнина?

Решение. Да допуснем, че е възможно центровете I_A, I_B, I_C и I_D на окръжностите, вписани съответно в стените BCD, CDA, ABD и ABC , да лежат в една равнина.

Нека $I_A I_B I_C I_D$ е изпъкнал четириъгълник – тогава отсечките $I_A I_C$ и $I_B I_D$ се пресичат. Да означим с M, N, K и L съответно средите на ребрата AB, AD, CD, BC . Да разгледаме $\triangle ABC$ и да построим права ℓ през точка B , успоредна на AC . Тогава вписаната в $\triangle ABC$ окръжност лежи между правите ℓ и AC , допира се до AC , но не се допира до ℓ . Това означава, че точките I_D и B лежат в различни полуравнини относно средната отсечка ML . Аналогично получаваме, че точките I_B и I_D са от едната страна от

равнината $MNKL$, а точките I_A и I_C – от другата. Но тогава отсечките $I_B I_D$ и $I_A I_C$ не могат да се пресечат, противоречие.

Остана да отбележим, че, например, точка I_A не може да бъде вътрешна за $\triangle I_B I_C I_D$. Това следва от факта, че точките I_B , I_C и I_D лежат (строго) от едната страна на равнината BCD , а точка I_A е в тази равнина.

Задача 11.7. Полином $P(x)$ от степен $n \geq 3$ има n реални корена $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, като $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < \dots < x_n - x_{n-1}$. Да се докаже, че максимумът на функцията $y = |P(x)|$ в интервала $[x_1, x_n]$ се достига в точка от интервала $[x_{n-1}, x_n]$.

Решение. Да забележим, че максимумът на $|P(x)|$ не може да се достига в x_i , понеже $|P(x_i)| = 0$. Да разгледаме произволна точка $a \in (x_i, x_{i+1})$ при $i < n - 1$ и да положим $t = a - x_i$, $b = x_n - t$. Имаме $b \in (x_{n-1}, x_n)$, защото $x_n > b > x_n - (x_{i+1} - x_i) > x_n - (x_n - x_{n-1}) = x_{n-1}$. Ще докажем, че $|P(b)| > |P(a)|$ (твърдението на задачата очевидно следва от това).

От условието следва, че $x_{k+m} - x_k < x_{\ell+m} - x_\ell$ при $1 \leq k < \ell \leq n - m$. Имаме $P(x) = p(x - x_1) \dots (x - x_n)$, където p е старшият коефициент на $P(x)$. Да забележим, че $|b - x_s| = x_n - x_s - t > x_{i+n-s} - x_i - t = |x_{i+n-s} - a|$ при $i + 1 \leq s \leq n - 1$. Освен това имаме $|b - x_r| = b - x_r > x_{n-1} - x_r > a - x_r = |a - x_r|$ при $1 \leq r \leq i - 1$. Умножаваме всички получени неравенства с равенството $p|b - x_n||b - x_i| = pt(x_n - x_i - t) = p|a - x_i||a - x_n|$ и получаваме

$$\begin{aligned} P(b) &= p|b - x_1||b - x_2| \dots |b - x_n| > \\ &> p|a - x_1||a - x_2| \dots |a - x_n| = P(a). \end{aligned}$$

Задача 11.8. В лятна школа се преподават 9 предмета на 512 ученика, които са настанени в 256 двуместни стаи (учениците в една стая се наричат съседни). Известно е, че за всеки два ученика множествата от предметите, които са им интересни, са различни (в частност, точно на един ученик не е интересно нищо). Да се докаже, че е възможно всички ученици да бъдат подредени в кръг така, че всеки два съседа да са един до друг, а за всеки двама, които не са съседни и са един до друг, за единия са интересни всички предмети, интересни на другия, и точно още един предмет.

Решение. Ще докажем с индукция по n твърдението в общия случай – за $n \geq 2$ предмета и 2^n ученика, разбити произволно на 2^{n-1} двойки съседни. Тъй като има точно 2^n набора от n предмета, всеки набор е интересен точно на един ученик.

При $n = 2$ непосредствено се проверява, че твърдението е вярно. Нека $n > 2$ и да разгледаме произволни два съседа, като изберем предмет, към който те имат различен интерес (например математика), и да разбием учениците на две групи по 2^{n-1} души всяка – в група A да са тези, на които математиката е интересна, а в група B – всички останали.

Да заселим група A в друг хотел с 2^{n-2} стаи. Ще оставим тези, които са били съседни, да бъдат съседни и в новия хотел. Останалите (съобразете, че има такива и броят им е четен) ще настаним по произволен начин и ще наречем тези двойки нови.

Съгласно индукционното предположение група A може да бъде разположена в кръг K по искания начин. Нека $(x_1, x_2), \dots, (x_{2k-1}, x_{2k})$ са всички нови двойки в K , отчетени по посока на часовниковата стрелка (x_{2i-1} е преди x_{2i} и считаме, че $x_{2k+1} = x_1$). Да означим с x'_i първоначалния съсед на x_i . Ясно е, че $x'_i \in B$, и да наречем двойките $(x'_2, x'_3), \dots, (x'_{2k-2}, x'_{2k-1}), (x'_{2k}, x'_1)$ нови в група B . Ясно е, че новите двойки, заедно със старите, дават разбиване на група B на двойки съседни.

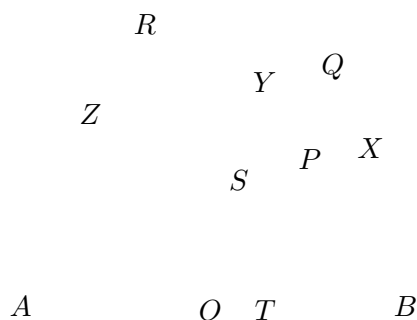
Да приложим индукционното предположение за група B с това разбиване, разполагайки я по кръг по искания начин. Сега в този кръг да поставим между всеки двама от нова двойка (x'_{2i}, x'_{2i+1}) участъка от кръга K от x_{2i} до x_{2i+1} включително. Не е трудно да се види, че полученият кръг има исканите свойства.

Забележка. Тази задача беше определена за най-интересна след традиционното за Всерусийските олимпиади гласуване на учениците. За съжаление, нейният автор Дмитрий Германович Фон-Дер-Флаас почина преждевременно на 10.06.2010 г.

САЩ

Задача 1. Даден е изпъкнал петоъгълник $ABXYZ$ вписан в полуокръжност с диаметър AB . Петите на перпендикулярите от Y към правите AX , BX , AZ и BZ са означени съответно с P , Q , R и S . Да се докаже, че острият ъгъл между правите PQ и RS е равен на половината от $\angle XOZ$, където O е средата на отсечката AB .

Решение. Да означим с T петата на перпендикуляра от Y към правата AB (черт. 1). Да забележим, че P , Q и T са петите на перпендикулярите от Y към страните на $\triangle ABX$. Тъй като Y лежи на описаната около $\triangle ABX$ окръжност, точките P , Q и T лежат на една права съгласно теоремата на Симсън. Аналогично получаваме, че точките S , R и T лежат на една права.



Черт. 1

Трябва да покажем, че $\angle XOZ = 2\angle PTS$, което следва от равенствата $\angle PTY = \angle PAY$ и $\angle STY = \angle SBY$. Действително, имаме

$$\frac{1}{2}\angle XOZ = \frac{\widehat{XY}}{2} + \frac{\widehat{YZ}}{2} = \angle XAY + \angle ZBY = \angle PAY + \angle SBY$$

и $\angle PTS = \angle PTY + \angle STY$. Исканите равенства следват от факта, че четириъгълниците $ATPY$ и $BTSY$ са вписани в окръжност поради $\angle APY = \angle ATY = 90^\circ$ и $\angle BTY = \angle BSY = 90^\circ$.

Задача 2. Един зад друг в кръг са застанали n ученика. Височините на учениците са $h_1 < h_2 < \dots < h_n$. Ако ученик с височина h_k е веднага след ученик с височина h_{k-2} или по-малка, двамата ученика могат да си сменят местата. Да се докаже, че са възможни най-много $\binom{n}{3}$ такива смени (т.е. след не повече от $\binom{n}{3}$ смени ще се достигне до разположение, при което не са възможни повече смени).

Решение. Нека h_i означава ученикът с височина h_i . Ще докажем с индукция по j , че за $1 \leq i < j \leq n$ ученик h_j може да си смени мястото с ученик h_i най-много $j - i - 1$ пъти. Базата на индукцията следва от факта, че h_i не може да сменя мястото си с h_{i+1} .

За доказване на индукционната стъпка да забележим, че h_i , h_{j-1} и h_j могат да бъдат разположени или в този ред или в реда h_i , h_j и h_{j-1} . Тъй като h_{j-1} и h_j не могат да си сменят местата, единственият начин да променим относителният ред на тези трима ученици е h_i да смени мястото си или с h_{j-1} или с h_j . Следователно всеки две промени на h_i с h_j трябва да бъдат разделени от смяна на h_i с h_{j-1} . Тъй като имаме най-много $j - i - 2$ промени от последния вид, имаме най-много $j - i - 1$ промени от първия вид. Следователно общият брой промени е най-много

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (j - i - 1) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-i-1} j = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-i}{2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n-i+1}{3} - \binom{n-i}{3} \right) = \binom{n}{3}. \end{aligned}$$

Задача 3. Дадени са 2010 положителни числа $a_1, a_2, \dots, a_{2010}$, за които $a_i a_j \leq i + j$ за всички различни i и j . Да се намери най-голямата възможна стойност на произведението $a_1 a_2 \dots a_{2010}$.

Решение. Умножаваме неравенствата $a_{2i-1} a_{2i} \leq 4i - 1$ за $i = 1, 2, \dots, 1005$ и получаваме

$$a_1 a_2 \dots a_{2010} \leq 3.7.11 \dots 4019.$$

Ще докажем, че горната граница се достига. Нека

$$a_{2008} = \sqrt{\frac{4017.4018}{4019}}, \quad a_{2009} = \sqrt{\frac{4019.4017}{4018}}, \quad a_{2010} = \sqrt{\frac{4018.4019}{4017}}$$

и да дефинираме a_i за $i < 2008$ рекурсивно чрез $a_i = \frac{2i+1}{a_{i+1}}$. Тогава имаме

$$(1) \quad a_i a_j = i + j \text{ когато } j = i + 1 \text{ или } i = 2008, j = 2010.$$

Ще докажем с индукция по $i+j$, че от горните две условия следва $a_i a_j \leq i+j$ при $i < j$, т. е. тази редица удовлетворява условието на задачата.

Разглеждаме следните случаи:

- Ако $j = i + 1$ или $i = 2008, j = 2010$, то от (1) следва, че $a_i a_j = i + j$.
- Ако $i = 2007$ и $j = 2009$, то

$$a_i a_{i+2} = \frac{(a_i a_{i+1})(a_{i+2} a_{i+3})}{(a_{i+1} a_{i+3})} = \frac{(2i+1)(2i+5)}{2i+4} < 2i+2.$$

Първото равенство се получава от (1), а неравенството следва от

$$(2i+1)(2i+5) = 4i^2 + 12i + 5 < 4i^2 + 12i + 8 = (2i+2)(2i+4).$$

- Ако $i < 2007$ и $j = i + 2$, то

$$a_i a_{i+2} = \frac{(a_i a_{i+1})(a_{i+2} a_{i+3})(a_{i+3} a_{i+4})}{(a_{i+1} a_{i+2})(a_{i+3} a_{i+4})} \leq \frac{(2i+1)(2i+5)(2i+6)}{(2i+3)(2i+7)} < 2i+2.$$

Първото неравенство следва от прилагане на индукционната хипотеза за $(i+2, i+4)$ и (1) за другите двойки. Второто неравенство се проверява директно чрез разкриване на скоби.

- Ако $j - i > 2$, то

$$a_i a_j = \frac{(a_i a_{i+1})(a_{i+2} a_j)}{(a_{i+1} a_{i+2})} \leq \frac{(2i+1)(i+2+j)}{2i+3} < i+j.$$

За първото неравенство използваме индукционното допускане за $(i+2, j)$, а второто неравенство се проверява директно чрез разкриване на скоби.

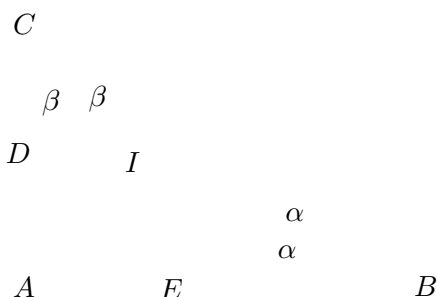
Следователно търсената най-голяма стойност е

$$a_1 a_2 \dots a_{2010} = 3.7.11 \dots 4019.$$

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$, за който $\sphericalangle A = 90^\circ$. Точките D и E съответно върху страните AC и AB са такива, че $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ и $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ECB$. Отсечките BD и CE се пресичат в I . Да се определи възможно ли е дължините на всички отсечки AB , AC , BI , ID , CI и IE да са цели числа.

Решение. Ще покажем, че дадените отсечки не могат да имат дължини цели числа. Да положим $\alpha = \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC$ и $\beta = \sphericalangle ACE = \sphericalangle ECB$ (черт. 2). Тъй като I е центърът на вписаната окръжност за $\triangle ABC$ и $\sphericalangle A = 90^\circ$, то $\sphericalangle BAI = \sphericalangle CAI = 45^\circ$. От синусовата теорема за $\triangle ABI$ намираме

$$\frac{AB}{BI} = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\sin 45^\circ} = \sin \alpha + \cos \alpha.$$



Черт. 2

Следователно числото $s = \sin \alpha + \cos \alpha$ е рационално. От друга страна, имаме

$$s = \sin(45^\circ - \beta) + \cos(45^\circ - \beta) = \sqrt{2} \cos \beta$$

и следователно $\cos \beta$ е ирационално число. Но от правоъгълния $\triangle ACE$ имаме $\cos \beta = \frac{AC}{EC} = \frac{AC}{CI + IE}$, което е рационално число. Полученото противоречие показва, че не е възможно всички посочени отсечки да имат дължини цели числа.

Задача 5. Нека $q = \frac{3p-5}{2}$, където p е нечетно просто число. Да означим

$$S_q = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}.$$

Да се докаже, че ако $\frac{1}{p} - 2S_q = \frac{m}{n}$ за цели числа m и n , то разликата $m - n$ се дели на p .

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{2}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \\ &= \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{3}{k+1}.\end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned}2S_q &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} \right) - 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{q+1} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\frac{3p-1}{2}} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\frac{p-1}{2}} \right) = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{3p-1}{2}},\end{aligned}$$

откъдето намираме

$$\begin{aligned}1 - \frac{m}{n} &= 1 + 2S_q - \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \dots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{\frac{3p-1}{2}} = \\ &= \left(\frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{3p-1}{2}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1} \right) = \\ &= \frac{p}{\frac{p+1}{2} \cdot \frac{3p-1}{2}} + \dots + \frac{p}{(p-1)(p+1)}.\end{aligned}$$

Понеже всички знаменатели са взаимнопрости с p , от горното равенство следва, че $m - n$ се дели на p .

Задача 6. На дъската са написани 68 двойки от ненулеви цели числа. За всяко естествено число k най-много едната от двете двойки (k, k) и $(-k, -k)$ е записана на дъската. Ученик изтрива някои от записаните 136 цели числа при положение, че сборът на някои две от изтритите числа не е равен на нула. Ученикът получава по една точка за всяка от дадените 68 двойки от която има изтрито поне едно число. Да се намери максималният брой точки N , които може да получи ученикът, без значение кои 68 двойки числа са били записани.

Решение. Ще докажем, че $N = 43$. Първо ще покажем, че винаги можем да получим 43 точки. Без ограничение можем да считаме, че за всяка двойка от вида (a, a) стойността на a е положителна. В противен случай можем да заменим всяко появяване на a с $-a$ и всяко появяване на $-a$ с a . Да означим с $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ всички различни абсолютни стойности на числа върху дъската.

Разглеждаме 2^n възможни стратегии, при които или изтриваме всички появявания на a_i или всички появявания на $-a_i$ за всяко $1 \leq i \leq n$.

Ако $\alpha = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$, то $\alpha + \alpha^2 = 1$. Всяка стратегия може да се представи като наредена n -орка $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, където за всяко i е изпълнено $s_i = \alpha$ или $s_i = \alpha^2$. Ако $s_i = \alpha$ изтриваме всички появявания на a_i на дъската, а ако $s_i = \alpha^2$, изтриваме всички появявания на $-a_i$. Тегло на стратегията наричаме произведението $w(s) = \prod_{i=1}^n s_i$. Лесно се проверява, че сборът от теглата на всички 2^n стратегии е равен на

$$\sum_s w(s) = \prod_{i=1}^n (\alpha + \alpha^2) = 1.$$

За всяка двойка P и всяка стратегия s , нека $c(P, s) = w(s)$, ако стратегията s дава точка върху двойката P и $c(P, s) = 0$ в противен случай. Ще пресметнем $\sum_s c(P, s)$ за фиксирана точка P . Ако P е от вида (a_i, a_i) , то всяка стратегия, която използва a_i печели една точка от P . Следователно

$$\sum_s c(P, s) = \alpha \prod_{i \neq j} (\alpha + \alpha^2) = \alpha.$$

Ако P има вида (x, y) за $x \neq y$, то

$$c(p) = \begin{cases} \alpha^2 + \alpha(1 - \alpha) + (1 - \alpha)\alpha = 3\alpha - 1, & \text{ако } (x, y) = (a_k, a_l), \\ \alpha(1 - \alpha) + (1 - \alpha)\alpha + (1 - \alpha)^2 = \alpha, & \text{ако } (x, y) = (-a_k, -a_l), \\ \alpha^2 + \alpha(1 - \alpha) + (1 - \alpha)^2 = 2 - 2\alpha, & \text{ако } (x, y) = (\pm a_k, \mp a_l). \end{cases}$$

Нека C е сборът на стойностите $c(P, s)$ върху всички двойки и стратегии. Горните разсъждения показват, че

$$C = \sum_{P, s} c(P, s) = \sum_P \alpha = 68\alpha > 42.$$

Да допуснем, че всяка стратегия пчели не повече от 42 точки. Тогава всяка стратегия s дава принос най-много $42w(s)$ и следователно

$$C \leq 42 \sum_s w(s) = 42,$$

което е противоречие с $C > 42$.

Остава да докажем, че не винаги е възможно да спечелим 44 точки. Да разгледаме следните 68 двойки. За всяко $l = 1, 2, \dots, 8$ включваме по 5 двойки (l, l) и получаваме 40 двойки от равни положителни числа. За всяко $1 \leq l < m \leq 8$ включваме една двойка $(-l, -m)$ и получаваме $\binom{8}{2} = 28$ двойки от различни отрицателни числа.

Ще покажем, че не можем да спечелим 44 точки. Да допуснем, че точно k от числата $1, 2, \dots, 8$ са изтрети. Тогава печелим най-много $5k$ точки от двойките от равните числа и най-много $28 - \binom{k}{2}$ точки от двойките от различните числа. Следователно можем да спечелим най-много

$$5k + 28 - \binom{k}{2} = -\frac{1}{2}k^2 + \frac{11}{2}k + 28$$

точки. Тази квадратна функция достига максимум (при цели стойности за k) от 43 при $k = 5$ и $k = 6$. Това означава, че не можем да спечелим повече от 43 точки.

Южна Корея

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$ с лице T и периметър L . Нека P , Q и R са допирните точки на вписаната в триъгълника окръжност съответно със страните BC , CA и AB . Да се докаже, че

$$\left(\frac{AB}{PQ}\right)^3 + \left(\frac{BC}{QR}\right)^3 + \left(\frac{CA}{RP}\right)^3 \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L^2}{T}.$$

Решение. Полагаме $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $s = \frac{a+b+c}{2}$, $QR = p$, $RP = q$, $PQ = r$. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ARQ$ имаме, че

$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos A), \quad p^2 = 2(s-a)^2(1 - \cos A),$$

откъдето

$$p^2 = (s-a)^2 \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{bc} = \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \cdot a(s-a).$$

Като умножим почленно неравенствата

$$4(s-a)(s-b) = c^2 - (b-a)^2 \leq c^2, \quad 4(s-b)(s-c) \leq a^2, \quad 4(s-c)(s-a) \leq b^2,$$

получаваме, че $8(s-a)(s-b)(s-c) \leq abc$. Следователно

$$p^2 \leq \frac{a(s-a)}{2} \quad \text{и аналогично} \quad q^2 \leq \frac{b(s-b)}{2}, \quad r^2 \leq \frac{c(s-c)}{2}.$$

Ако означим с M лявата страна на даденото неравенство, следва, че

$$\begin{aligned} M &\geq 2\sqrt{2} \left(\left(\frac{a}{s-a} \right)^{3/2} + \left(\frac{b}{s-b} \right)^{3/2} + \left(\frac{c}{s-c} \right)^{3/2} \right) \\ &\geq \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \right)^{3/2}, \end{aligned}$$

като последното се получава от неравенството на Йенсен за изпъкналата функция $x^{3/2}$. По-нататък, можем да считаме, че $a \leq b \leq c$ и тогава

$\frac{1}{s-a} \geq \frac{1}{s-b} \geq \frac{1}{s-c}$. Сега от неравенството на Чебишев, неравенството между средното аритметично и средното геометрично, и Хероновата формула последователно получаваме

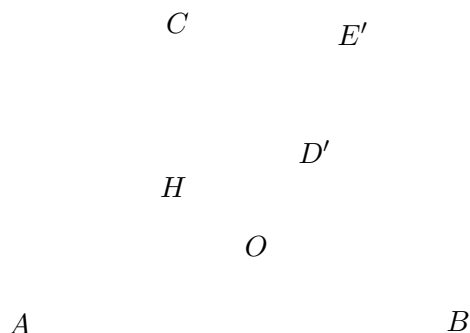
$$\begin{aligned} \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} &\geq \frac{a+b+c}{3} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \right) \\ &\geq \frac{a+b+c}{((s-a)(s-b)(s-c))^{1/3}} = \frac{(a+b+c)s^{1/3}}{(s(s-a)(s-b)(s-c))^{1/3}} = \left(\frac{L^2}{T\sqrt{2}} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

Тогава

$$M \geq \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{L^2}{T\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{L^2}{T}.$$

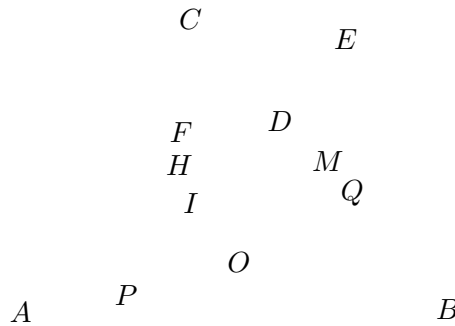
Задача 2. Нека O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на $\triangle ABC$, а вписаната в него окръжност с център I се допира до страната BC в точка D . Известно е, че $\angle B < \angle C$ и $AO \parallel HD$. Ако $E = AH \cap OD$ и F е средата на отсечката CI , да се докаже, че точките E , F , I и O лежат на една окръжност.

Решение. Нека $E' (\neq A)$ е пресечната точка на правата AH и описаната около $\triangle ABC$ окръжност, а $D' = OE' \cap BC$ (черт. 1). Тъй като H и E' са симетрични относно BC , то $\angle OE'A = \angle D'E'A = \angle D'HE'$. От друга страна, понеже AO и $E'O$ са радиуси на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, то $\angle OE'A = \angle OA'E'$. Следователно $\angle OAE' = \angle D'HE'$ и значи $AO \parallel HD'$. Тогава от условието $AO \parallel HD$ и фактът, че D и D' лежат на отсечката BC , получаваме, че $D = D'$ и $E = E'$.



Черт. 1

Нека $P (\neq D)$ е пресечната точка на правата ID и вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k , а $Q = AP \cap BC$ (черт. 2). Тъй като съществува хомотетия с център A , при която k преминава във външновписаната окръжност k_a към страната BC , следва, че k_a се допира до BC в точката Q . Следователно средата M на BC е среда и на DQ . Нека $P' = OQ \cap PD$. Понеже $MD = MQ$ и $MO \parallel DP'$, то $2MO = DP'$. От друга страна, както е добре известно, $2MO = AH$, откъдето $DP' = AH$. Сега от $AH \parallel DP'$ следва, че $AP'DH$ е успоредник и значи $AP' \parallel DH$. Тогава точките O и Q лежат на правата AP' , т.е. $P = P'$. Следователно $2MO = DP' = DP = 2DI$, откъдето $MO = DI$ и значи $OI \parallel BC$.



Черт. 2

По-нататък, понеже $AO = EO$, то $\angle DEA = \angle OAH = \angle C - \angle B$. Тогава от $\angle AEC = \angle B$ следва, че $\angle DEC = \angle DEA + \angle AEC = \angle C$. От друга страна, F е центърът на описаната около $\triangle IDC$ окръжност, откъдето $FC = FD$ и значи $\angle CFD = 180^\circ - \angle C$. Следователно точките E, C, F и D лежат на една окръжност и тогава $\angle CDE = \angle CFE$. Сега от $OI \parallel BC$ имаме, че $\angle CDE = \angle IOE$ и значи $\angle CFE = \angle IOE$. Това показва, че точките E, F, I и O лежат на една окръжност.

Задача 3. Дадени са $n \geq 2$ уеб страници, номерирани от 1 до n , така, че за всяко $1 \leq i \leq n - 1$ има връзка от страницата i към страницата $i + 1$. Разрешено е добавянето на нова връзка от страница с по-малък номер към страница с по-голям номер. Да се докаже, че може да се добавят не повече от $3(n - 1) \log_2(\log_2 n)$ нови връзки така, че може да се премине

от произволна страница с по-малък номер към произволна страница с по-голям номер с най-много 3 връзки.

Решение. Нека $T(n)$ е най-малкият брой нови връзки, които могат да се добавят, така, че даденото свойство да е изпълнено. По индукция ще докажем, че

$$T(n) \leq 3(n-1) \log_2(\log_2 n), \quad n \geq 2.$$

Това е тривиално при $n = 2, 3$, защото $T(2) = T(3) = 0$. Нека $n \geq 4$. Да предположим, че

$$(1) \quad T(m) \leq 3(m-1) \log_2(\log_2 m), \quad 2 \leq m < n.$$

Ще докажем същото при $m = n$. Нека $k \geq 2$ е такова число, че $k^2 \leq n < (k+1)^2$. Тогава $T(n) \leq T((k+1)^2 - 1)$. Да разделим страниците от 1 до $(k+1)^2 - 1$ на групи $\{1, 2, \dots, k+1\}$, $\{k+2, k+3, \dots, 2(k+1)\}$, $\dots$, $\{k(k+1)+1, k(k+1)+2, \dots, (k+1)^2-1\}$ (в първите k групи има $k+1$ страници, а в последната има k страници).

За всяко $0 \leq r \leq k-1$ и всяко $1 \leq i \leq k-1$ добавяме нова връзка от страницата $r(k+1)+i$ към страницата $r(k+1)+k+1$. Общият брой на тези връзки е $(k-1)k$. Също така, за всяко $1 \leq r \leq k$ и всяко $2 \leq i \leq k$ добавяме нова връзка от страницата $r(k+1)$ към страницата $r(k+1)+i$. Общият брой на тези връзки е пак $(k-1)k$. Накрая добавяме $\binom{k}{2}$ нови връзки между всеки две страници, чиито номера се делят на $k+1$.

Като използваме тези три вида нови връзки, лесно се вижда, че всеки две страници от различни групи са свързани с най-много три връзки. От дефиницията на $T(k)$ следва, че можем да добавим $T(k)$ връзки между първите k страници във всяка група така, че всеки два страници да са свързани с най-много 3 връзки. Значи

$$T(n) \leq T(k^2 + 2k) \leq 2k(k-1) + \frac{k(k-1)}{2} + (k+1)T(k).$$

Тъй като

$$3(k^2 - 1) \log_2(\log_2 k^2) \leq 3(n-1) \log_2(\log_2 n),$$

достатъчно е да докажем, че

$$\frac{3k(k-1)}{2} + (k+1)T(k) \leq 3(k^2 - 1) \log_2(\log_2 k^2).$$

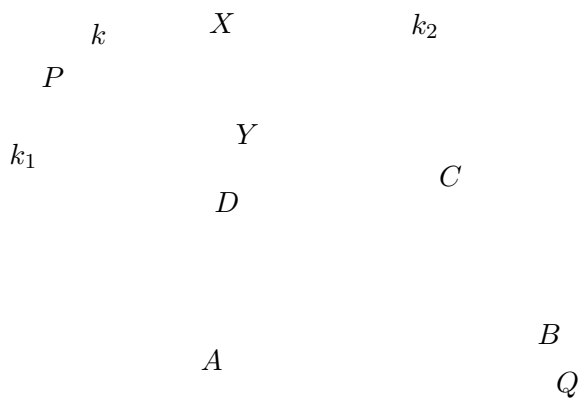
Като използваме (1) при $m = k$, остава да проверим, че

$$\frac{3k(k-1)}{2} + (k+1)3(k-1) \log_2(\log_2 k) \leq 3(k^2 - 1) \log_2(\log_2 k^2),$$

което е еквивалентно на очевидното неравенство $(k-1)(k+2) \geq 0$.

Задача 4. Даден е трапец $ABCD$ с основи AB и CD . Нека k_1 е окръжността с център A и радиус AB , а k_2 – окръжността с център C и радиус CD . Нека $BD \cap k_1 = P$ ($P \neq B, D$) и k е окръжността с диаметър PD . Ако $k \cap k_1 = X$ ($X \neq P$) и $k \cap k_2 = Y$ ($Y \neq D$), да се докаже, че пресечната точка на k_2 и описаната около $\triangle BXY$ окръжност лежи на правата BD .

Решение. Нека Q е втората пресечната точка на правата BD и k_2 . Достатъчно е да докажем, че точките B, X, Y и Q лежат на една окръжност. Има шест случая в зависимост от разположението на P, D, B и Q (върху една права). Те са аналогични и ние ще приведем доказателство само в случая, когато редът е P, D, B и Q .



Черт. 3

Нека $\sphericalangle ABD = \alpha$ и $\sphericalangle DPX = \beta$. Тогава

$$\sphericalangle PXB = \pi - \frac{\sphericalangle PAB}{2} = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle ABP = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

и значи

$$\sphericalangle XBD = \pi - \sphericalangle DPX - \sphericalangle PXB = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta.$$

От друга страна, $\sphericalangle DYX = \beta$,

$$\sphericalangle DYQ = \frac{1}{2}\sphericalangle DCQ = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BDC = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

и следователно

$$\angle XYQ = \angle DYQ - \angle DYX = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta.$$

И така, $\pi - \angle XBQ = \angle XBD = \angle XYQ$, което искахме да докажем.

Задача 5. Около кръгла маса стоят $2n$ човека, някои от които имат бисквити. Ако човек изяде една бисквита и има друга, той може да я даде на свой съсед. Нека A е един от хората. Да се намери минималният брой бисквити, така че за всяко тяхно разпределение има стратегия, при която в A ще попадне поне една бисквита.

Решение. Ще докажем, че търсеният минимален брой е 2^n .

Да означим с $A_{-n+1}, \dots, A_{-1}, A_0 = A, A_1, \dots, A_n$ хората около масата.

Първо ще покажем, че при $m < 2^n$ бисквити има разпределение, при което A никога не получава бисквита. Нека $N = \sum_{i=-n+1}^n a_i 2^{-|i|}$, където a_i са броят на бисквитите в A_i в даден момент. Да забележим, че при извършване на операцията N не увеличава стойността си. Нека отначало всички m бисквити са в A_n ; тогава $N = m \cdot 2^{-n} < 1$. От друга страна, ако в A попадне бисквита, то $N \geq 1$, което е противоречие.

Сега ще покажем, че при $m = 2^n$ има стратегия, при която A получава бисквита. Без ограничение можем да считаме, че отначало е изпълнено неравенството $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_{-i}$. Нека A_n да изяде $\lfloor a_n/2 \rfloor$ бисквити и да даде толкова на A_{n-1} . Тогава новата сума $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ е сбор на старата сума $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ и $\lfloor a_n/2 \rfloor$, който е не по-малък от $\frac{m-a_n}{2} + \lfloor a_n/2 \rfloor \geq 2^{n-1} - 1/2$. Значи тази нова сума е поне 2^{n-1} . Нека сега A_{n-1} да изяде $\min\{2^{n-2}, \lfloor a_{n-1}/2 \rfloor\}$ и да даде толкова на A_{n-2} . Подобно на по-горе следва, че $\sum_{i=0}^{n-2} a_i \geq 2^{n-2}$ и т.н. Накрая, ако A_1 изяде $\min\{2^0, \lfloor a_1/2 \rfloor\}$ бисквити и даде толкова на A_0 , то A_0 ще има поне една бисквита.

Задача 6. Едно просто число p се нарича *добро*, ако:

(1) не съществува естествено число $n \geq 2$, такова, че $\frac{p^n-1}{n}$ е цяло число, взаимно просто с n ;

(2) за безбройно много $k \in \mathbb{N}$ съществуват $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, по-големи от $\frac{p}{2}$ така, че за всяко $1 \leq i \leq k$ числото $\frac{p^{n_i}-1}{n_{i+1}}$ е цяло и взаимно просто с n_{i+1} ($n_{k+1} = n_1$).

Да се докаже, че 2 не е добро число, но всички нечетни прости числа са добри.

Решение. 1. Случаят $p = 2$. Както е добре известно, от $n|2^n - 1$ следва $n = 1$ и значи 2 не е добро число. Наистина, да допуснем, че $n|2^n - 1$ и $n > 1$. Ясно е, че n е нечетно число и нека q , $q \geq 3$, е най-малкият му прост делител. Ако s е показателят на 2 по модул q (т.е. най-малкото число, за което $q|2^s - 1$, очевидно $s \geq 2$), то от $q|2^{q-1} - 1$ (съгласно малката теорема на Ферма) и $q|2^n - 1$ (понеже $q|n$ и $n|2^n - 1$) следва, че $s|q - 1$ и $s|n$. Значи s , а оттам и n , има прост делител, по-малък от q , което е противоречие.

2. Случаят $p \geq 3$. Първо ще покажем, че (1) е изпълнено. Както по-горе следва, че ако $n|p^n - 1$, $n \geq 2$, то най-малкият прост делител q на n дели $p - 1$. Ще пишем $q^e || n$, ако $q^e | n$, но $q^{e+1} \nmid n$. Ако $n = q^e m$, то от

$$p^n - 1 = (p^m - 1) \prod_{j=0}^{e-1} \frac{p^{q^{j+1}m} - 1}{p^{q^j m} - 1}$$

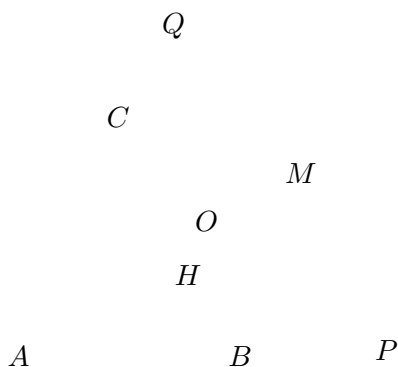
следва, че $q^{e+1} | p^n - 1$. Значи $q|n$, $q|\frac{p^n - 1}{n}$, откъдето $q = 1$ – противоречие.

Има различни начини за конструиране на редици, удовлетворяващи (2). Например, нека S е множеството от простите делители на $p - 1$ и $q \in S$. Нека $n_1 = p - 1$ и $q^{e_{q,1}} || p - 1$. При $i \geq 1$ дефинираме индуктивно $e_{q,i+1}$ и n_{i+1} : $q^{e_{q,i+1}} || p^{n_i} - 1$ и $n_{i+1} = \prod_{q \in S} q^{e_{q,i+1}}$. Оставяме на читателя да докаже, че за всяко достатъчно голямо $k \in \mathbb{N}$ числата $n_1, n_2, \dots, n_k$ имат исканите свойства.

Япония

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, $AB \neq AC$, с височина AH , $H \in BC$. Точките P и Q са такива, че A, B и P , и A, C и Q съответно лежат на една права в посочения ред. Да се докаже, че ако точките B, C, P и Q лежат на една окръжност и $HP = HQ$, то точката H съвпада с центъра на описаната около $\triangle APQ$ окръжност.

Решение. Без ограничение на общността можем да считаме, че $AB < AC$ (черт. 1). Нека O е центърът на описаната около $\triangle APQ$ окръжност и M е средата на отсечката PQ . Тогава точките O, M и H лежат на една права (симетралата на PQ).



Черт. 1

От друга страна, тъй като

$$\angle PAO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOP) = 90^\circ - \angle AQP = 90^\circ - \angle ABC = \angle PAH,$$

точките A, H и O също лежат на една права. Ако $O \neq H$, имаме

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle AHM = 360^\circ - \angle HAQ - \angle AQM - \angle QMH \\ &= 270^\circ - (90^\circ - \angle ACB) - \angle ABC = 180^\circ - \angle ABC + \angle ACB, \end{aligned}$$

откъдето $\angle ABC = \angle ACB$, противоречие.

Задача 2. Нека k е естествено число и m е цяло нечетно число. Да се докаже, че съществува естествено число n , за което 2^k дели $n^n - m$.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по k . При $k = 1$ можем да вземем n нечетно. Нека $n_0 \in \mathbb{N}$ е такава, че $n_0^{n_0} \equiv m \pmod{2^k}$. Очевидно n_0 е нечетно.

Ако $n_0^{n_0} \equiv m \pmod{2^{k+1}}$, няма какво да доказваме. В противен случай ще докажем, че $n = n_0 + 2^k$ върши работа.

Имаме $n_0^{n_0} - m = d2^k$, където d е нечетно и следователно $n_0^{n_0} - m - 2^k = (d-1)2^k$ се дели на 2^{k+1} . От теоремата на Ойлер следва, че $n^{2^k} \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$. Тогава

$$\begin{aligned} n^n &= n^{n_0+2^k} = n^{n_0} n^{2^k} \equiv n^{n_0} \equiv (n_0 + 2^k)^{n_0} \equiv n_0^{n_0} + \binom{n_0}{1} n_0^{n_0-1} 2^k \\ &\equiv m + 2^k + n_0^{n_0} 2^k = m + (n_0^{n_0} + 1) 2^k \pmod{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Следователно $n^n - m \equiv (n_0^{n_0} + 1) 2^k \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$.

Задача 3. Дадени са 2010 острова и 2009 моста, свързващи някои от тях (един мост свързва два различни острова). От всеки остров може да се достигне до всеки друг остров по мостове. Един ден от всеки остров било пратено по едно писмо до остров (възможно до същия). Оказало се, че за всеки два острова A и B , свързани с мост, получателите на писмата от A и B са на острови, които са свързани с мост или са на един и същи остров.

Да се докаже, че е в сила поне едно от следните две твърдения:

- (1) Има остров, от който е изпратено писмо до същия остров.
- (2) Има двойка острови, свързани с мост, които са си разменили писма.

Решение. Ще използваме терминологията от теорията на графите. Описаната в условието конфигурация от острови и мостове се нарича дърво, което ще разглеждаме в общия случай и ще означаваме с $T(n)$. Един връх на дърво се нарича краен, ако от него излиза само едно ребро и регулярен, ако от него излизат поне две ребра. Добре известно е¹, че всяко дърво с поне три върха има поне един краен връх и поне един регулярен връх. По индукция се доказва, че в $T(n)$ няма цикли.

¹И се доказва лесно с помощта на сумата от степените на върховете и факта, че имаме n върха и $n - 1$ ребра.

Нека X и Y са двама жители на островите, като X живее на остров A , а Y живее на острова (който ще означим с B), за който е адресирано писмото от A . Да разгледаме следната процедура:

- (i) ако X и Y живеят на един и същи остров (т.е. $A = B$), спираме;
- (ii) ако X и Y не живеят на един и същи остров (т.е. $A \neq B$), правим следното: преместваме X на остров C , съседен на A и разположен по маршрут от A до B , и едновременно преместваме Y на острова, за който е адресирано писмото от C ;
- (iii) ако след (2) се окаже, че X и Y са на съседни острови, спираме.

Ясно е, че в (2) новият остров на Y или е старият B , или е негов съседен. Ако новите острови на X и Y съвпадат или са съседни, получаваме съответно (1) или (2). Следователно е достатъчно да докажем, че разглежданата процедура е крайна.

Нека във всеки фиксиран момент V_{XY} е множеството от върхове, до които може да се стигне от острова на Y по маршрут, който не включва острова на X . Тъй като в $T(n)$ няма цикли, има точно един връх от V_{XY} , който е съседен на върха на X . Да означим този връх с D . Ако X и Y не се окажат на съседни върхове на следващата стъпка, то Y е на връх от V_{XY} , различен от D , а X отива на D . Следователно новото множество V_{XY} се съдържа в старото без върха D , т.е. има поне един връх по-малко. Това означава, че процедурата рано или късно ще приключи.

Забележка. По същество тази задача съвпада със задача 6 за 10-ти клас от миналогодишната Всерусийска олимпиада – вижте „Национални олимпиади по математика 2009“ и (различното) решение там.

Задача 4. Да се докаже, че за произволни реални положителни числа x , y и z е в сила неравенството

$$\frac{1 + xy + xz}{(1 + y + z)^2} + \frac{1 + yz + yx}{(1 + z + x)^2} + \frac{1 + zx + zy}{(1 + x + y)^2} \geq 1.$$

Решение. От неравенството на Коши-Буняковски имаме

$$\left(1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x}\right)(1 + xy + xz) \geq (1 + y + z)^2.$$

Следователно

$$\frac{1 + xy + xz}{(1 + y + z)^2} \geq \frac{x}{x + y + z}.$$

Събирайки почленно това и неравенство и двете му аналогични, получаваме исканото.

Задача 5. Даден е изпъкнал 2010-ъгълник, някои три диагонала на който не се пресичат в обща точка (различна от връх). Разглеждаме затворените зигзагообразни начупени линии (ЗЗОНЛ), които се състоят от диагонали и минават точно по веднъж през всеки от върховете на 2010-ъгълника. Да се намери максималният възможен брой точки на самопресичане на ЗЗОНЛ. (ЗЗОНЛ е начупена линия $P_1P_2 \dots P_nP_{n+1}$, за която $P_1 \equiv P_{n+1}$.)

Решение. Ще решим задачата в общи случай за изпъкнал $(2m)$ -ъгълник, като докажем, че търсеният максимум е $2m^2 - 4m + 1$, $m \geq 3$ (2016031 при $m = 1005$). Ще казваме, че един диагонал има дължина i , $1 \leq i \leq m$, ако по-късата линия от контура на многоъгълника, която свързва краищата му, има i страни.

(Конструкция) Нека многоъгълникът е $P_1P_2 \dots P_mQ_1Q_2 \dots Q_m$ и да разгледаме начупената линия, съставена от $P_1Q_2P_3Q_4 \dots$ (P_i е съединен с Q_{i+1} и Q_i е съединен с P_{i+1} , индексите са по модул m) и диагоналите P_1Q_1 и P_mQ_m . Лесно се вижда, че това е ЗЗОНЛ от $2m$ диагонала, която минава точно по веднъж през всеки от върховете на $(2m)$ -ъгълника. Ще докажем, че тази ЗЗОНЛ има $2m^2 - 4m + 1$ точки на самопресичане. Да отбележим, че диагоналите P_iQ_{i+1} и $P_{i+1}Q_i$ имат дължина $m - 1$, а P_1Q_1 и P_mQ_m имат дължина m .

Първо да преброим точките на самопресичане върху диагонала P_iQ_{i+1} . Този диагонал разделя многоъгълника на две части с по m и $m - 2$ върха. Няма диагонал от нашата ЗЗОНЛ с дължина поне $m - 1$, различен от $P_{i+1}Q_i$, който да лежи изцяло в някоя от тези две части. Следователно P_iQ_{i+1} има общи точки с $2m - 1$ диагонала, като махнем него самия и двата, с които има общи върхове, получаваме $2m - 4$ точки на самопресичане.

Аналогично се вижда, че и върху $P_{i+1}Q_i$ има $2m - 4$ точки на самопресичане, а по подобен начин се установява, че върху всеки от диагоналите P_1Q_1 и P_mQ_m има по $2m - 3$ точки на самопресичане. Окончателно, отчитайки, че всяка точка е преброена по два пъти, намираме

$$\frac{(2m - 2)(2m - 4) + 2(2m - 3)}{2} = 2m^2 - 4m + 1$$

точки на самопресичане върху разглежданата ЗЗОНЛ.

(Оценка) Да допуснем, че съществува ЗЗОНЛ от $2m$ диагонала, която минава точно по веднъж през всеки от върховете на $(2m)$ -ъгълника и има

повече от $2m^2 - 4m + 1$ точки на самопресичане. Както по-горе се вижда, че не е възможно да имаме повече от $2m - 3$ точки на самопресичане върху диагонал. Да наречем един диагонал добър, ако върху него има $2m - 3$ точки на самопресичане. Тогава нашата ЗЗОНЛ има поне три добри диагонала.

Да отбележим, че един добър диагонал трябва да има дължина m . Наистина, ако допуснем обратното, този диагонал разделя многоъгълника на две части, една от които има най-много $m - 2$ върха и следователно върху диагонала не може да има повече от $2(m - 2) = 2m - 4$ точки на самопресичане (всеки връх определя най-много по две такива точки).

Да разгледаме три добри диагонала A_1A_4 , A_2A_5 и A_3A_6 . Тъй като всеки от тези диагонали е с дължина m , те се пресичат два по два и можем да считаме, че точките $A_1, A_2, \dots, A_6$ са разположени по контура на многоъгълника в този ред.

Нека Q е връх и двата диагонала от нашата ЗЗОНЛ, излизащи от Q , да са QQ_1 и QQ_2 . Ако и двата върха Q_1 и Q_2 са различни от A_1 и A_4 (тогава и Q ще е различен от A_1 и A_4), то и двата диагонала QQ_1 и QQ_2 пресичат A_1A_4 . Следователно върховете Q_1 и Q_2 лежат от една и съща страна на A_1A_4 . Същото разсъждение може да се приложи за A_2A_5 и A_3A_6 и в заключение виждаме, че съществува $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, за което Q_1 и Q_2 лежат между A_i и A_{i+1} ($A_7 \equiv A_1$), като не изключваме възможността Q_1 и Q_2 да съвпадат с A_i или A_{i+1} .

Да оцветим върховете по нашата ЗЗОНЛ последователно в черно и бяло. Тогава във всяка двойка (A_1, A_4) , (A_2, A_5) и (A_3, A_6) има по един бял и един черен връх и можем без ограничение на общността да считаме, че е налице един от следните два случая:

- (1) A_1 , A_2 и A_3 са черни;
- (2) A_1 , A_3 и A_5 са черни.

В първия случай е невъзможно да стигнем по нашата ЗЗОНЛ от A_1 до A_3 (и от A_3 до A_1) без да минем през A_2 , противоречие. Във втория случай е невъзможно да започнем от A_1 и да излезем от частта от многоъгълника, ограничена от A_2 и A_6 , т.е. отново е невъзможно да стигнем от A_1 до A_3 , което е противоречие.

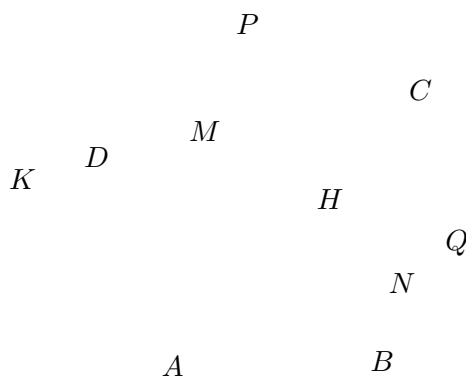
Казахстан (Жаутиков, 10 - 17 януари 2010 г.)

Задача 1. Да се реши в прости числа уравнението $p^3 - q^7 = p - q$.

Решение. Тъй като $p^3 - 1 > p^3 - p = q^7 - q = q(q^6 - 1) > q^6 - 1$, имаме $p > q^2$. Оттук и от представянето $p(p-1)(p+1) = q(q-1)(q+1)(q^2-q+1)(q^2+q+1)$ следва, че $p|q^2+q+1$. При $p \neq q^2+q+1$ имаме $q^2 < p \leq (q^2+q+1)/2$, което лесно дава противоречие. Следователно $p = q^2 + q + 1$ и след заместване и опростяване получаваме уравнението $q^3 - 3q^2 + q - 3 = 0$. Оттук $q = 3$ (например защото q е прост делител на свободния член) и $p = 3^2 + 3 + 1 = 13$.

Задача 2. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB = AD$ и точките M и N лежат съответно на страните CD и BC така, че $MN = BN + DM$. Правите AM и AN пресичат за втори път описаната около $ABCD$ окръжност съответно в точки P и Q . Да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle APQ$ лежи върху отсечката MN .

Решение. Да построим точка $K \in MD$ така, че $DK = BN$ и D е между M и K . Тогава от $DK = NB$, $AD = AB$ и $\angle ABN = \angle ADK$ следва $\triangle ADK \cong \triangle ABN$, откъдето $AN = AK$. Оттук и от $MK = MN$ следва $\triangle AMK \cong \triangle AMN$ и значи $\angle AMK = \angle AMN$.



Черт. 1

Нека H е точка върху MN , за която $MH = MD$. Тогава точките D и H са симетрични относно AM и следователно $\angle APD = \angle APH$ и $DH \perp AP$. Но

$\angle APD = \angle APB = \widehat{AD} = \widehat{AB}$ и заключаваме, че точките P , H и B лежат на една права. Аналогично се вижда, че $QH \perp AP$ и Q , H и D лежат на една права. Вече е очевидно, че H е ортоцентърът на $\triangle APQ$.

Задача 3. Правоъгълник е разбит на фигури от три вида: равнобедрени правоъгълни триъгълници с основа 2, единични квадрати и успоредници, определени от две страни и два диагонала на единични квадрати. Да се докаже, че броят на успоредниците е четно число.

Решение. Да оцветим правоъгълника шахматно. Тъй като единичните квадрати от разбиването покриват лице 0 или 1, а триъгълниците и успоредниците – лице 0.5, общият брой на триъгълниците и успоредниците трябва да бъде четно число. Следователно е достатъчно да докажем, че броят на триъгълниците е четно число.

Да разделим триъгълниците на два вида – хоризонтални (намиращи се в един ред) и вертикални (намиращи се в един стълб). Да оцветим правоъгълника още веднъж по следния начин – разделяме всеки единичен квадрат на 4 еднакви триъгълника и оцветяваме в черно горния, а останалите три оцветяваме в бяло. Тогава всеки единичен квадрат от разбиването, всеки успоредник и всеки вертикален триъгълник покриват точно по един черен триъгълник, а всеки хоризонтален триъгълник покрива 0 или 2 черни триъгълника. Да означим с a_1 вертикалните триъгълници, с a_2 хоризонталните, покриващи 2 и с a_3 хоризонталните, покриващи 0 черни триъгълника. Тогава имаме равенството $3(a_1 + 2a_2) = 3a_1 + 2a_2 + 4a_3$, откъдето $a_2 = a_3$, т.е. броят на хоризонталните триъгълници е четно число. Аналогично се вижда, че и броят на вертикалните триъгълници е четно число, с което доказателството е завършено.

Задача 4. На дъската са записани числата $1, 2, \dots, n$ ($n > 2$). На всяка минута две числа се изтриват и на тяхно място се записва най-малкият прост делител на сумата им. Да се намери най-малката стойност на n , за която е възможно накрая да остане само числото 97.

Решение. (Оценка) Да забележим, че сумата на числата, записани на дъската, не може да нарасне и следователно $97 \leq 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$, откъдето намираме $n \geq 14$. Не е трудно да се намери и инвариант – четността на сумата не се променя. Следователно числото $n(n+1)/2$ е четно, поради което отпадат възможностите $n = 15$ и $n = 16$. От наблюдението на четността виждаме и друго – не можем да избегнем комбинирането на две

нечетни числа (при което те се изтриват и на тяхно място се записва 2) и това става $\lceil (n-1)/4 \rceil$ пъти¹.

Поради горното получаваме следните максимално възможни числа в края ($S = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56$ за краткост):

$$\begin{aligned} 2 + 2 + 2 + 13 + S &= 75 \text{ при } n = 14, \\ 2 + 2 + 2 + 2 + 17 + S + 16 &= 97 \text{ при } n = 17, \\ 2 + 2 + 2 + 2 + 17 + S + 16 + 18 &= 115 \text{ при } n = 18. \end{aligned}$$

Случаят $n = 14$ очевидно отпада.

При $n = 17$, тъй като максималната сума е точно 97, всички суми трябва да са нечетни прости числа. Следователно трябва да започнем със 17 и за добавяме в някакъв ред числата 2, 2, 2, 2, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 така, че всеки път да "стъпваме" върху просто число. Простите числа между 17 и 97 са 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Двойките близнаци прости числа в този списък са точно 5 и следователно 5-те налични двойки трябва да бъдат използвани точно за тях. С оставащите на разположение "къси" стъпки 4, 6, 8, 10 трябва да покрием три интервала с дължина 10 ($19 - 29$, $31 - 41$ и $61 - 71$, което очевидно е невъзможно. Следователно $n = 17$ не е решение на задачата.

(Пример) При $n = 18$ е достатъчно да се посочи пример. Има много такива и оставаме на читателя да намери някой от тях, използвайки схемата от предишния параграф.

Задача 5. Във всеки връх на правилен n -ъгълник е поставен пул. Разрешено е за един ход да се разменят местата на два съседни пула. Да се намери минималният брой стъпки, необходими за достигане на ситуация, в която всеки пул е преместен на $\lceil n/2 \rceil$ позиции по посока на часовниковата стрелка, считано от първоначалната му позиция.

Решение. (Конструкция) Нека пуловете са номерирани последователно с числата $1, 2, \dots, n$ по посока на часовниковата стрелка. За всяко $k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil, \dots, 2, 1$ да преместим k -тия пул на $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ позиции по посока на часовниковата стрелка. (Едно преместване е размяна със съответния съсед). След преместването на k -тия пул нареждането е

$$1, 2, \dots, k-1, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 2, \dots, n, k, k+1, \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil.$$

¹Оттук и от изискването накрая да остане нечетно число също следва, че $n(n+1)/2$ е четно число.

Тогава след преместването на пул 1 ще получим исканото разположение. Направихме точно $\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]$ хода.

(Оценка) Да дефинираме изместване на пул като равно на 1 при размяна с пула, съседен по посока на часовниковата стрелка и -1 при размяна с пула, съседен по посока срещу часовниковата стрелка. Общото изместване на пуловете при един ход, оттам и за цялото движение, е 0. При крайната ситуация имаме изместване на $\left[\frac{n}{2}\right]$ по абсолютна стойност на всеки пул. Имаме поне $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ премествания в една от двете посоки. Остава да отбележим, че всеки ход дава принос 1 към тази посока. Следователно ходовете са поне $\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

Задача 6. Нека O , I и H са съответно центровете на описаната и вписаната окръжности и ортоцентъра на остроъгълен неравнобедрен $\triangle ABC$. Да се докаже, че:

- а) $\angle OIH > 90^\circ$; б) $\angle OIH > 135^\circ$.

Решение. б) Ще използваме стандартните означения за ъглите на $\triangle ABC$. Без ограничение на общостта можем да считаме, че $\alpha > \beta > \gamma$. Тогава е достатъчно да докажем, че $\angle OIH > 180^\circ - \alpha$.

Да построим височините AA_1 , $A_1 \in BC$, и CC_1 , $C_1 \in AB$. Тъй като $\angle BAO = 90^\circ - \gamma > 90^\circ - \beta = \angle BAA_1$ и $\angle ACO = 90^\circ - \beta > 90^\circ - \alpha = \angle ACC_1$, точка O се намира във вътрешността на $\triangle A_1HC$.

Тъй като $\angle BAA_1 = \angle OAC = 90^\circ - \beta$, правата AI е ъглополовяща и на $\angle HAO$. Аналогично правата CI е ъглополовяща на $\angle HCO$. Нека правите AI и CI да пресичат отсечката OH съответно в точки E и F , точка C_2 да е средата на AB и K да е пресечната точка на OC_2 и AI . Тъй като

$$\frac{HE}{EO} = \frac{AH}{AO} < \frac{CH}{AO} = \frac{CH}{CO} = \frac{HF}{FO}$$

и правите OC_2 и CI се пресичат върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност, точка I е вътрешна за отсечката EK .

Ще разгледаме два случая за β .

Случай 1. Ако $\beta \geq 60^\circ$, то $\angle AIC = 90^\circ + \beta/2 \geq 180^\circ - \beta = \angle AHC$. Тогава I се намира във вътрешността на окръжността, описана около $\angle AHC$ и $\angle AIH > \angle ACH = 90^\circ - \alpha$. Следователно

$$\angle OIH = \angle OIA + \angle AIH > \angle OKA + \angle AIH > 90^\circ + \frac{\alpha}{2} + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Случай 2. Ако $\beta < 60^\circ$, то $\sphericalangle AIC = 90^\circ + \beta/2 > 2\beta = \sphericalangle AOC$. Тогава I се намира във вътрешността на окръжността, описана около $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle IOA < \frac{\gamma}{2}$. Оттук

$$\sphericalangle OIA = 180^\circ - \sphericalangle IAO - \sphericalangle IOA > 180^\circ - \frac{\beta - \gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Следователно

$$\sphericalangle OIH > \sphericalangle OIA > 180^\circ - \frac{\beta}{2} > 180^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$