

НАЦИОНАЛНИ ОЛИМПИАДИ

ПО МАТЕМАТИКА 2011

Петър Бойваленов Емил Колев
Николай Николов

УНИМАТ СМБ
Съюз на Математиците в България

Настоящата книга съдържа условията и решенията на задачите от финалните етапи на националните олимпиади във водещи (по преценка на авторите) в “олимпийската“ математика страни. Текстът се основава на материалите, разпространявани между ръководствата на националните отбори по време на Международната олимпиада по математика (Амстердам, 13-24 юли 2011 г.), както и на материали от интернет. Авторите се надяват задачите от тази книга да послужат добре както на учениците с изявени интереси в областта на математиката, така и на специалистите, които се занимават с подготовка на олимпийци.

Материалите са подготвени както следва: Николай Николов – Русия, Емил Колев – Китай, САЩ и Тайван, Петър Бойваленов – Иран, Туймаада и Жаутиков.

Copyright © УНИМАТ СМБ
София 1113, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
тел. (02)979-28-06, e-mail: peter@math.bas.bg
София, октомври 2011 г.
ISBN: 978-954-8880-36-7

СЪДЪРЖАНИЕ

	Условия	Решения
Иран	3	23
Китай	5	35
Русия	8	49
САЩ	12	69
Тайван	13	75
Туймаада	17	81
Жаутиков	20	92

Иран

Задача 1. В неравностран $\triangle ABC$ точка M е средата на страната BC , а D и E са петите на височините съответно от върховете C и B . Нека L и K са средите съответно на отсечките MD и ME , а точка $T \in LK$ е такава, че $AT \parallel BC$. Да се докаже, че $TA = TM$.

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа n , за които съществуват числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, такива, че редицата $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_1$ е неконстантна аритметична прогресия.

Задача 3. Върху права са дадени n , $n > 1$, различни точки. Всяка отсечка между две от точките се нарича интервал. Нека $\mathcal{F}$ е фамилия от интервали, за която всеки елемент на $\mathcal{F}$ е подмножество на най-много един друг елемент на $\mathcal{F}$. Един интервал се нарича максимален, ако не е подмножество на нито един друг интервал от $\mathcal{F}$. Нека m е броят на максималните елементи на $\mathcal{F}$, а a е броят на тези, които не са максимални. Да се докаже, че $2m + a \leq 2n$.

Задача 4. Едно крайно множество $A \subset \mathbb{N}$ с поне три елемента се нарича добро, ако има следните две свойства:

- (1) за всеки три различни числа $a, b, c \in A$ е вярно, че $(a, b, c) = 1$;
- (2) за всеки две различни числа $b, c \in A$ съществува число $a \in A \setminus \{b, c\}$, такова, че $a \mid bc$.

Да се намерят всички добри множества.

Задача 5. Да се намерят всички сюрективни функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y)$$

за всички $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 6. Дадени са равностран $\triangle OBC$, $OB = OC$, и окръжност ω с център O и радиус OB . Допирателните към ω в точките B и C се пресичат в точка A . Окръжност ω_1 , която е вътрешна за $\triangle ABC$, се допира до ω и до AC в точка H . Окръжност ω_2 също е вътрешна за $\triangle ABC$ и се допира до ω , до ω_1 в точка J и до AB в точка K . Да се докаже, че ъглополовящата на $\angle KJH$ минава през центъра на вписаната в $\triangle OBC$ окръжност.

Задача 7. Да се намери геометричното място от точки P във вътрешността на равностранен триъгълник, за които $\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} = \sqrt{h_3}$, където h_1 , h_2 и h_3 са разстоянията от P до страните на триъгълника.

Задача 8. Нека p е просто число и $k \leq p$ е естествено число. За полинома с цели коефициенти $f(x)$ от степен, ненадминаваща $kp + p - 1$, е известно, че за всяко цяло число x , числото $f(x)$ се дели на p^k . Да се докаже, че съществуват полиноми с цели коефициенти $A_0(x), A_1(x), \dots, A_k(x)$, такива, че

$$f(x) = \sum_{i=0}^k (x^p - x)^i p^{k-i} A_i(x).$$

Задача 9. Дадени са n точки в равнината, като не всички са на една права. Права ℓ в равнината се нарича добра, ако е възможно точките да се разделят на две множества A и B ($A \cap B = \emptyset$) така, че сумите от разстоянията от точките от A до ℓ и от B до ℓ да са равни. Да се докаже, че съществуват безбройно много точки, през които минават $n + 1$ добри прави.

Задача 10. Да се намери минималното реално число k , за което неравенството

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} + \sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(d^2 + 1)} + \\ & + \sqrt{(a^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)} + \sqrt{(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1)} \geq \\ & \geq 2(ab + bc + cd + ac + bd + ad) - k \end{aligned}$$

е изпълнено за произволни реални числа a , b , c и d .

Задача 11. Нека A' , B' и C' са средите съответно на страните BC , AC и AB на $\triangle ABC$. Променливите точки P и P' са такива, че $PA = P'A'$, $PB = P'B'$ и $PC = P'C'$. Да се докаже, че правата PP' минава през постоянна точка.

Задача 12. Нека $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е функция, за която $af(a) + bf(b) + 2ab$ е точен квадрат за произволни $a, b \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че $f(a) = a$ за всяко $a \in \mathbb{N}$.

Китай

Задача 1. Да се докаже, че за произволни реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) е изпълнено неравенството

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil (M - m)^2,$$

където $a_{n+1} = a_1$, $M = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$ и $m = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$.

(С $[x]$ се означава най-голямото цяло число, ненадминаващо x .)

Задача 2. Точка D е средата на дъгата BC от описаната около $\triangle ABC$ окръжност, X е точка от дъгата BD , E е средата на дъгата AX , S лежи на дъгата AC , SD пресича BC в точка R , а SE пресича AX в точка T . Да се докаже, че ако $RT \parallel DE$, то центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност лежи на правата RT .

Задача 3. Дадено е множество A от реални числа. Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ са непразни подмножества на A , удовлетворяващи условията:

(1) сборът от елементите на A е равен на нула;

(2) сборът на произволни n числа, по едно от всяко от множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$, е положително число.

Да се докаже, че съществуват естествено число k и множества $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, за които

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}| < \frac{k}{n} |A|.$$

Задача 4. Дадено е множество $S = \{1, 2, \dots, n\}$, където n е естествено число. Да се намери минималната възможна стойност на

$$|A \triangle S| + |B \triangle S| + |C \triangle S|,$$

където A и B са множества от реални числа, $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ и $X \triangle Y = \{x | x \text{ принадлежи на точно едно от множествата } X \text{ и } Y\}$.

Задача 5. Дадено е цяло число $n \geq 4$ и неотрицателни реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, за които

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n > 0.$$

Да се намери най-голямата стойност на израза

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)}.$$

Задача 6. Да се докаже, че за всеки две естествени числа m и n съществуват безбройно много взаимно прости естествени числа a и b , за които $a + b$ дели $am^a + bn^b$.

Олимпиада за момичета

Задача 1. Дадено е естествено число $n > 2$ и нека $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ са две по две различни непразни подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$. Да се определи най-голямата стойност на

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|}$$

(Приемаме, че $A_{2n+1} = A_1$.)

Задача 2. В равнобедрен $\triangle ABC$, $AB = AC$, точка D е средата на страната BC . Точка E лежи извън $\triangle ABC$ и е такава, че $CE \perp AB$ и $BE = BD$. Точка M е среда на отсечката BE . Точка F от по-малката дъга $\widehat{AD}$ от описаната около $\triangle ABD$ окръжност е такава, че $MF \perp BE$. Да се докаже, че $ED \perp FD$.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват просто число p и цяло число m , за които

- (а) $p \equiv 5 \pmod{6}$;
- (б) p не дели n ;
- (в) $n \equiv m^3 \pmod{p}$.

Задача 4. Дадени са реални числа $x_2, x_3, \dots, x_n$, за които $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Да се докаже неравенството

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{\sum_{i=1}^n i x_i^2}\right)^2 \cdot \frac{x_k^2}{k} \leq \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 5. Дадени са строго растящи линейни функции $f(x)$ и $g(x)$ от множеството на реалните числа в множеството на реалните числа. Известно е, че $f(x)$ е цяло число тогава и само тогава, когато $g(x)$ е цяло число. Да се докаже, че за всяко реално число x числото $f(x) - g(x)$ е цяло.

Задача 6. Точката M е среда на страната BC на остроъгълен $\triangle ABC$, за който $AB > AC$. Външната ъглополовяща на $\angle BAC$ пресича лъча BC в точка P . Точките K и F лежат на правата PA и са такива, че $MF \perp BC$ и $MK \perp PA$. Да се докаже, че $BC^2 = 4PF \cdot AK$.

Задача 7. Дадено е естествено число $n \geq 3$. Ако $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ е пермутация на числата $(1, 2, \dots, n)$, ще казваме, че x_j лежи между x_i и x_k , ако $i < j < k$. (Например, в пермутацията $(1, 3, 2, 4)$ числото 3 лежи между 1 и 4, но 4 не лежи между 1 и 2.) Нека $S = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ е множество от различни пермутации на $(1, 2, \dots, n)$. Известно е, че измежду всеки три различни числа от $(1, 2, \dots, n)$ едно от тези числа не лежи между другите две за всяка пермутация от S . Да се определи най-голямата възможна стойност на m .

Задача 8. Да се намери най-малкото нечетно естествено число $a > 5$, за което съществуват положителни цели числа m_1, m_2, n_1 и n_2 , за които:

$$a = m_1^2 + n_1^2, \quad a^2 = m_2^2 + n_2^2 \quad \text{и} \quad m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

Русия, 26-27 април 2010

В края на април във Велики Новгород се проведе заключителният етап на 37. Всерусийска олимпиада по математика. Участниците бяха разделени в три групи: 9, 10 и 11 клас. България беше представена от 7 ученика. Призови дипломи за 10 клас завоюваха Тодор Марков (10 клас, ПМГ – Бургас) и Радослав Комитов (10 клас, МГ – Ямбол), а с похвална грамота бе удостоен Мартин Минчев (10 клас, СМГ). В 11 клас призови дипломи спечелиха Рафаел Рафаилов (11 клас, СМГ), Виктор Вълков (12 клас, СМГ) и Живко Жечев (12 клас, ПМГ – Шумен), а похвална грамота получи Младен Вълков (12 клас, ПМГ – Шумен). Ръководител на отбора бе доц. дмн Николай Николов (ИМИ – БАН).

Задача 9.1. (А. Храбров) Нека $P(x)$ е квадратен тричлен със старши коефициент 1, който има общ реален корен с полинома $P(P(P(x)))$. Да се докаже, че $P(0) \cdot P(1) = 0$.

Задача 9.2. (Т. Емелянова, Л. Емелянов) Окръжност през върха B на остроъгълен $\triangle ABC$ и центъра на описаната около него окръжност пресича за втори път страните BC и BA в точки P и Q . Да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle POQ$ лежи на правата AC .

Задача 9.3. (С. Берлов) Петя последователно построява диагонали в изпъкнал 2011-ъгълник така, че всеки нов диагонал пресича във вътрешна точка най-много един от построените по-рано диагонали. Колко най-много диагонали може да построи Петя?

Задача 9.4. (С. Берлов) Съществуват ли три взаимно прости естествени числа такива, че квадратът на всяко се дели на сумата на другите две?

Задача 9.5. (И. Богданов) Дадени са 2011 естествени числа. На дъската са написани всичките $2011 \cdot 2010 / 2$ суми на двойки от тези числа. Може ли точно три от тези суми да се делят на 3 и точно три от тях да дават остатък 1 при деление на 3?

Задача 9.6. (И. Богданов, А. Гарбер) В тетрадките на Петя и Коля са записани по две числа; отначало 1 и 2 при Петя, и 3 и 4 при Коля. Всяка минута Петя образува квадратен тричлен $f(x)$ с корени записаните в тетрадка му две числа, а Вася – квадратен тричлен $g(x)$ с корени записаните в неговата тетрадка две числа. Ако уравнението $f(x) = g(x)$ има два различни реални корена, то едно от момчетата заменя своята двойка от числа с тези корени (иначе нищо не се случва). Ако в някой момент се появи числото 5 в тетрадката на Петя, какво може да е другото число там?

Задача 9.7. (В. Шмаров) Точка T върху страната AC на равностранен $\triangle ABC$ и точки M и N съответно върху дъгите AB и BC от описаната около него окръжност са такива, че $MT \parallel BC$ и $NT \parallel AB$. Отсечките AN и MT се пресичат в точка X , а отсечките CM и NT – в точка Y . Да се докаже, че периметрите $AXYC$ и $XMBNY$ са равни.

Задача 9.8. (К. Кноп) В някои от клетките на дъска 100×100 са поставени пулове. Една клетка се нарича *красива*, ако има пулове в четен брой от съседните ѝ по страна клетки. Може ли точно една от клетките да е красива?

Задача 10.1. (Р. Карасьов) Във всяка клетка на таблица от 10 стълба и n реда е записана цифра. Известно е, че за всеки ред A и всеки два стълба съществува ред, който се различава от A точно в тези два стълба. Да се докаже, че $n \geq 512$.

Задача 10.2. (И. Богданов) Дадени са девет квадратни тричлена: $x^2 + a_1x + b_1, \dots, x^2 + a_9x + b_9$. Числата $a_1, \dots, a_9$ и $b_1, \dots, b_9$ образуват аритметични прогресии. Известно е, че сумата на деветте тричлена има реален корен. Колко най-много от тези тричлени могат да нямат реален корен?

Задача 10.3. (В. Долников) Група от хора се нарича k -неразбиваема, ако при всяко нейно разбиване на k групи съществува група с поне двама познати. Дадена е 3-неразбиваема група, в която няма четири човека, всеки двама от които се познават. Да се докаже, че тази група може да се раздели на две групи, едната от които е 2-неразбиваема, а другата – 1-неразбиваема.

Задача 10.4. (В. Шмаров) Даден е $\triangle ABC$ с периметър 4. Точки X и Y върху лъчите AB и AC са такива, че $AX = AY = 1$. Отсечките BC

и XU се пресичат в точка M . Да се докаже, че периметърът на един от триъгълниците ABM и ACM е равен на 2.

Задача 10.5. (С. Берлов) Дадени са 10 две по две различни числа. За всяка двойка от тях Вася записал квадрата на разликата им, а Петя – модула на разликата от техните квадрати. Може ли групата от 45 числа на Вася да съвпада с тази на Петя?

Задача 10.6. (А. Полянский) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Точки P и Q върху продълженията на височините BB_1 и CC_1 след точките B_1 и C_1 са такива, че $\sphericalangle PAQ = 90^\circ$. Нека AF е височина в $\triangle APQ$. Да се докаже, че $\sphericalangle BFC = 90^\circ$.

Задача 10.7. (В. Сендеров) За всеки две естествени числа $a > b > 1$ редицата $x_1, x_2, \dots$ се дефинира чрез равенството $x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}$. Да се намери най-малкото естествено число d такова, че за произволни a и b тази редица не съдържа d последователни члена, които са прости числа.

Задача 10.8. (И. Богданов, О. Подлипски) Квадрат 2010×2010 е разрязан на триклетъчни ъгълчета (т.е. L -образни фигури). Да се докаже, че във всяко ъгълче може да се отбележи по една клетка така, че във всеки ред и всеки стълб да има равен брой маркирани клетки.

Задача 11.1. (А. Голованов) Нека d и d' ($d' > d$) са естествени делители на естественото число n . Да се докаже, че $d' > d + \frac{d^2}{n}$.

Задача 11.2. (Т. Емелянова) Точка T от страната BC на успоредника $ABCD$ ($\sphericalangle A < 90^\circ$) е такава, че $\triangle ATD$ е остроъгълен. Нека O_1 , O_2 и O_3 са съответно центровете на описаните окръжности около $\triangle ABT$, $\triangle DAT$ и $\triangle CDT$ (вж. черт.) Да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle O_1O_2O_3$ лежи на правата AD .

Задача 11.3. (А. Магазинов) В Академията на науките има 999 академици. От всяка дисциплина се интересуват точно трима академици. За всяка двойка академици съществува точно една дисциплина, от която се интересуват и двамата. Да се докаже, че съществуват 250 дисциплини така,

че всеки академик се интересува от не повече от една от тях.

Задача 11.4. (С. Берлов) 10 автомобиля се движат по прав еднопосочен път. Пътят минава през няколко града. Всеки автомобил се движи с постоянна скорост в градовете и с постоянна скорост извън градовете (скоростите могат да бъдат различни за различните автомобили). По пътя са поставени 2011 знаменца. Всеки автомобил минава покрай всички знаменца, като няма изпреварвания покрай знаменцата. Да се докаже, че съществуват две знаменца така, че автомобилите минават покрай тези знаменца в един и същ ред.

Задача 11.5. (И. Богданов) Нека F и G са кубични полиноми със старши коефициенти 1. На дъската са написани всички реални корени на уравненията $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ и $F(x) = G(x)$. Оказало се, че са написани 8 различни числа. Да се докаже, че най-малкото и най-голямото от тях не могат да бъдат едновременно корени на F .

Задача 11.6. (С. Берлов) Дадена е купчинка с повече от n^2 камъчета. Петя и Вася един след друг вземат камъчета (Петя е първи). На всеки ход е разрешено да се взема или просто число камъчета, по-малко от n , или кратен на n брой камъчета, или едно камъче. Печели този, който вземе последното камъче. Да се докаже, че Петя има печеливша стратегия.

Задача 11.7. (А. Голованов) За всяко естествено число a с $P(a)$ е означен най-големият прост делител на числото $a^2 + 1$. Да се докаже, че съществуват безбройно много тройки от различни естествени числа a, b, c такива, че $P(a) = P(b) = P(c)$.

Задача 11.8. (М. Кунгожин) Нека N е средата на дъгата BAC от описаната около неравнобедрен $\triangle ABC$ окръжност, а M – средата на страната BC . С I_1 и I_2 са означени центровете на вписаните окръжности в $\triangle ABM$ и $\triangle ACM$. Да се докаже, че точките I_1 , I_2 , A и N лежат на една окръжност.

САЩ (27-28 април, 2011)

Задача 1. Нека a , b и c са положителни реални числа, за които е изпълнено неравенството $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$. Да се докаже, че

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(a+c)^2} \geq 3.$$

Задача 2. Във всеки връх на правилен петоъгълник е записано по едно цяло число така, че сборът на петте числа е равен на 2011. *Ход* наричаме изваждане на цяло число m от всяко от числата, записани в два съседни върха A и B и прибавяне на $2m$ към числото във върха, който не е съседен на никой от върховете A и B . (Стойността на m и изборът на върховете може да са различни за различни ходове.) Играта се печели в даден връх, ако в този връх е записано числото 2011, а във всички останали върхове са записани нули. Да се докаже, че при всеки избор на първоначалните числа съществува точно един връх, в който играта може да бъде спечелена.

Задача 3. Нека $ABCDEF$ е неизпъкнал, несамопресичащ се шестоъгълник, който няма двойка успоредни срещуположни страни. Вътрешните ъгли удовлетворяват $\sphericalangle A = 3\sphericalangle D$, $\sphericalangle C = 3\sphericalangle F$ и $\sphericalangle E = 3\sphericalangle B$. Освен това $AB = DE$, $BC = EF$ и $CD = FA$. Да се докаже, че диагоналите AD , BE и CF се пресичат в една точка.

Задача 4. Да се докаже или опровергае следното твърдение: За всяко естествено число $n \geq 2$ остатъкът при деление на 2^{2^n} с $2^n - 1$ е степен на 4.

Задача 5. Във вътрешността на четириъгълник $ABCD$ е избрана точка P . Точките Q_1 и Q_2 от вътрешността на $ABCD$ са такива, че

$$\sphericalangle Q_1BC = \sphericalangle ABP, \sphericalangle Q_1CB = \sphericalangle DCP, \sphericalangle Q_2AD = \sphericalangle BAP, \sphericalangle Q_2DA = \sphericalangle CDP.$$

Да се докаже, че $Q_1Q_2 \parallel AB$ тогава и само тогава, когато $Q_1Q_2 \parallel CD$.

Задача 6. Нека A е множество с 225 елемента, т.е. $|A| = 225$. Нека $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ са подмножества на A , за които $|A_i| = 45$ за $1 \leq i \leq 11$ и $|A_i \cap A_j| = 9$ за $1 \leq i < j \leq 11$. Да се докаже, че $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}| \geq 165$ и да се посочи пример, при който се достига равенство.

Тайван

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H . Точките Y и Z съответно от страните CA и AB са такива, че насочените ъгли между AC и HY и между AB и HZ са съответно равни на $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$. Нека U е центърът на описаната окръжност за $\triangle HYZ$.

Да се докаже, че точките A , N и U лежат на една права, където N е центърът на окръжността на деветте точки за $\triangle ABC$.

Задача 2. Дадени са положителни реални числа a , b и c , за които е изпълнено $abc = 1$. Да се докаже неравенството:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + 2c^2 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + 2a^2 + 6}} &\leq \\ &\leq \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + 4b + 4c}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^4 + 4c + 4a}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^4 + 4a + 4b}}. \end{aligned}$$

Задача 3. Точка I е центърът на вписаната окръжност за $\triangle ABC$. Права l , която не е страна на триъгълника, се допира до вписаната окръжност и пресича страните AB и BC и продължението на страната CA съответно в точки X , Y и Z . Правата AY пресича CX в точка P , а правите IP и BZ се пресичат в точка Q . Да се докаже, че ако точките A , C , Y и X лежат на една окръжност, то $ZI^2 = ZQ \cdot ZB$.

Задача 4. Функцията $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е такава, че

$$|f(x+y)| = |f(x) + f(y)|$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$, за който $AB < AC$. Точка P е вътрешна за ъглополовящата на $\angle BAC$. Точките D и E съответно от отсечките PC и

PB са такива, че $\sphericalangle PBD = \sphericalangle PCE$. Правите BD и AC се пресичат в точка X , а правата CE пресича AB в точка Y . Да се докаже, че $BX \leq CY$.

Задача 6. Функцията $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ е такава, че

$$f(x+y) = f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + f(xy)$$

за произволни $x, y \in (0, \infty)$. Да се докаже, че $f(xy) = f(x) + f(y)$ за произволни $x, y \in (0, \infty)$.

Якутия (Туймаада, 12-17 юли 2011 г.)

Задачите от Туймаада са включени в тази книга поради качеството им и факта, че тази олимпиада има всички характеристики на национална олимпиада с чуждестранно участие, макар и да се нарича международна. През юли 2011 г. в 18-тото издание на Туймаада взе участие и отбор от МГ "Петър Берон", Варна, в състав: Виктория Христова, Милена Великова и Йордан Йорданов с ръководител Силвия Захариева. Това беше шестото участие на български отбор в Туймаада. Нашите участници се представиха добре, като (Йордан спечели сребърен медал в младшата лига, а Виктория и Милена – бронзови медали в старшата лига.

Младша лига

Задача 1. (А. Голованов) Червени, сини и зелени деца са наредени в кръг. Когато учителят помолил червените деца, които имат зелен съсед, да вдигнат ръка, се вдигнали 20 ръце. След това учителят помолил сините деца, които имат зелен съсед, да вдигнат ръка, и се вдигнали 25 ръце. Да се докаже, че някое от децата, вдигнали ръка, има два зелени съседа.

Задача 2. (С. Волченков) По колко начина от квадрат с размери 2011×2011 може да се изреже квадрат 11×11 така, че оставащата част да може да се покрие с домина (правоъгълници с размери 1×2)?

Задача 3. (С. Берлов) Външновписаната окръжност към страната AB на $\triangle ABC$ се допира до AB в точка P и до правите BC и CA съответно в точки Q и R . Да се докаже, че ако средата на отсечката PQ лежи на окръжността, описана около $\triangle ABC$, то и средата на PR лежи на тази окръжност.

Задача 4. (А. Голованов) Да се докаже, че измежду кои да е 100000 последователни 100-цифрени числа съществува число n , за което периодът на дробта $\frac{1}{n}$ е по-голям от 2011.

Задача 5. (А. Голованов) Всички реални числа, по-големи от 1, са оцветени в два цвята, като са използвани и двата цвята. Да се докаже, че съществуват реални числа a и b , за които числата $a + b$ и ab са с различен цвят.

Задача 6. (А. Акопян) Окръжност минава през върховете A и B на вписан четириъгълник $ABCD$ и пресича диагоналите му AC и BD съответно в точки E и F . Правите AF и BC се пресичат в точка P , а правите BE и AD се пресичат в точка Q . Да се докаже, че правите PQ и CD са успоредни.

Задача 7. (А. Голованов) Дадена е дума с поне 10 букви, като всеки две съседни букви са различни. Да се докаже, че е възможно местата на някои две съседни букви да се разменят и в резултат на това новополучената дума да не е периодична (т.е. да не може да се раздели на еднакви поддуми).

Задача 8. (А. Акопян) Владетелят на Квадрия оставил в наследство на тримата си сина квадратен имот с размери 100×100 мили, разделен на 10000 квадратни участъка с размери 1×1 миля. Подялбата на имота станала по следния начин: всеки от синовете застанал в определена точка на имота и получил тези квадратни участъци, чиито центрове били поблизо до него, отколкото до който да е от двамата му братя. Вярно ли е, че независимо от избора на трите точки, чрез които е извършено разделянето, всеки е получил свързана част от имота (т.е. за всеки две точки от една част има път между тях, който не напуска частта)?

Старша лига

Задача 9. Виж Задача 1.

Задача 10. (А. Акопян) Окръжностите ω_1 и ω_2 се пресичат в точки A и B , а точка M е средата на AB . Точките S_1 и S_2 лежат върху правата AB и допирателните от S_1 към ω_1 се допират до ω_1 в точки X_1 и X_2 , а допирателните от S_2 към ω_2 се допират до ω_2 в точки Y_1 и Y_2 . Да се докаже, че ако правата X_1X_2 минава през M , то и правата Y_1Y_2 минава през M .

Задача 11. (А. Голованов) Дадена е безкрайна шахматна дъска и фиксирано поле A от нея. Във всяко поле на дъската е записан минималният брой ходове на коня, необходими за достигане на това поле от A . Едно поле се нарича правилно, ако в него е записано числото 100, а във всички негови съседи (по страна) е записано числото 101. Да се намери броят на правилните полета.

Задача 12. (А. Голованов) Множество от последователни естествени числа съдържа точно 10 четвърти степени и точно 100 куба на естествени

числа. Да се докаже, че това множество съдържа поне 2000 точни квадрата на естествени числа.

Задача 13. (А. Голованов) Всички реални числа, по-големи от 1, са оцветени в два цвята, като са използвани и двата цвята. Да се докаже, че съществуват реални числа a и b , за които числата $a + \frac{1}{b}$ и $b + \frac{1}{a}$ са с различен цвят.

Задача 14. Виж Задача 7.

Задача 15. (А. Акопян) Даден е изпъкнал шестоъгълник $AC'BA'SB'$ с равни срещуположни страни. Пресечната точка на BC и симетралата на AA' е означена с A_1 . Аналогично се дефинират и точките B_1 и C_1 . Да се докаже, че точките A_1 , B_1 и C_1 лежат на една права.

Задача 16. (А. Голованов) Известно е, че квадратният тричлен с цели коефициенти $P(n)$ е такъв, че за всяко естествено число n съществува естествен делител d_n на $P(n)$, за който $1 < d_n < P(n)$, и при това редицата $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща. Да се докаже, че $P(n)$ е произведение на два линейни полинома с цели коефициенти или всичките му стойности се делят на едно и също естествено число $m > 1$.

Казахстан (Жаутиков, 15-19 януари 2011 г.)

От 15 до 19 януари 2011 година в град Алмати – Република Казахстан, се проведе VII Международна Жаутиковска Олимпиада по математика, физика и информатика. На нея България бе представена от два отбора: от Софийска математическа гимназия и от Математическа гимназия "Петър Берон", град Варна. В олимпиадата взеха участие 46 отбора (296 участника) от 14 страни: Азербайджан, Армения, Белорусия, България, Грузия, Индонезия, Киргизстан, Монголия, Таджикистан, Румъния, Русия, Република Саха (Якутия), Туркмения, Турция и домакините от Казахстан. Характерно за тази олимпиада е, че отборите са представители на математически гимназии и лица към университети.

Отборът на СМГ зае второ място в комплексното отборно класиране. В индивидуалното състезание по математика бяха спечелени един златен медал от Виктор Вълов с втори резултат от 139 участника в област математика и два сребърни медала от Радослав Кафов и Даниел Добрев.

Отборът на МГ Варна също се представи добре, като Виктория Христова спечели сребърен медал, а Виктор Радивчев – бронзов.

Задача 1. В трапец $ABCD$ средите на основите AB и CD са съответно точките M и N .

а) Да се докаже, че трапецът е равнобедрен тогава и само тогава, когато пресечната точка на симетралите на бедрата лежи върху отсечката MN .

б) Вярно ли е твърдението от а), ако е известно само че пресечната точка на симетралите на бедрата лежи върху правата MN ?

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, които удовлетворяват равенството $f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y)$ за всички реални числа x и y .

Задача 3. Наредената двойка естествени числа (a, b) се нарича интересна, ако за всяко естествено число n съществува естествено число k , такова, че $a^k + b$ се дели на 2^n . Да се намерят всички интересни двойки.

Задача 4. Да се намери максималният възможен брой множества с по 4 елемента, които удовлетворяват едновременно следните две условия:

- (1) Всеки две различни множества имат точно по два общи елемента.
- (2) Не съществуват два елемента, които да са общи за всички множества.

Задача 5. Нека $n > 1$ е естествено число. Елемент a на множеството $M = \{1, 2, 3, \dots, n^2 - 1\}$ се нарича добър, ако съществува елемент b на M , за който $ab - b$ се дели на n^2 . Елемент a на M се нарича много добър, ако $a^2 - a$ се дели на n^2 . Нека броят на добрите елементи е g , а броят на много добрите елементи е v . Да се докаже, че

$$v^2 + v \leq g \leq n^2 - n.$$

Задача 6. Диагоналите на вписан четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка K . Средите на диагоналите AC и BD са съответно M и N . Окръжностите, описани около триъгълниците ADM и BCN , се пресичат в точки L и P . Да се докаже, че точките K , L , M и N лежат на една окръжност (предполага се, че всички изброени точки са различни).

Иран, Финален кръг

Задача 1. В неравнобедрен $\triangle ABC$ точка M е средата на страната BC , а D и E са петите на височините съответно от върховете C и B . Нека L и K са средите съответно на отсечките MD и ME , а точка $T \in LK$ е такава, че $AT \parallel BC$. Да се докаже, че $TA = TM$.

Решение. Нека H е ортоцентърът на $\triangle ABC$ и ω е окръжността с диаметър AH . Тъй като $TA \perp AH$, заключаваме, че TA се допира до ω в точка A . От друга страна имаме $\widehat{BM} = \widehat{EM}$ и следователно $\angle MEB = \angle MBE = 90^\circ - \angle ACB = \angle HAC = \widehat{EH} / 2$ (дъгата е от ω). Тогава ME и MD са допирателни до ω . Следователно правата LK е радикалната ос на M и ω , което означава, че степените на T относно M и ω са равни, т.е. $TM^2 = TA^2$.

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа n , за които съществуват естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, такива, че редицата $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_1$ е неконстантна аритметична прогресия.

Решение. Ако $n = 2k$ е четно, такива числа не съществуват, защото (без ограничение на общността) тогава $a_1 a_2 < a_2 a_3 < \dots < a_{2k-1} a_{2k} < a_{2k} a_1$ води до $a_1 < a_3 < \dots < a_{2k-1} < a_1$, противоречие.

При нечетно $n = 2k + 1$ ще конструираме исканата редица. Нека $b_1 = x$ (x е реално положително число, което ще определим след малко) и числата $b_2, b_3, \dots, b_{2k+1}$ са такива, че $b_1 b_2 = 1, b_2 b_3 = 2, \dots, b_{2k+1} b_1 = 2k + 1$. Тогава $b_2 = \frac{1}{x}, b_3 = 2x, b_4 = \frac{3}{2x}$ и т.н., изобщо $b_{2i} = \frac{(2i-1)!!}{(2i-2)!!x}$ и $b_{2i+1} = \frac{(2i)!!x}{(2i-1)!!}$. Оттук и от равенството $b_{2k+1} b_1 = 2k + 1$ определяме $x = \sqrt{\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}}$.

Да положим сега $a_i = b_i \sqrt{(2k+1)!}$. Лесно се вижда, че $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_n a_1$ е неконстантна аритметична прогресия. Освен това имаме

$$\begin{aligned} a_{2i+1} &= \frac{(2i)!!x\sqrt{(2k+1)!}}{(2i-1)!!} = (2i)!!(2i+1)(2i+3)\dots(2k+1), \\ a_{2i} &= \frac{(2i-1)!!\sqrt{(2k+1)!}}{(2i-2)!!x} = (2i-1)!!(2i)(2i+2)\dots(2k), \end{aligned}$$

т.е. $a_1, a_2, \dots, a_n$ са естествени числа.

Задача 3. Върху права са дадени n , $n > 1$, различни точки. Всяка отсечка между две от точките се нарича интервал. Нека $\mathcal{F}$ е фамилия от интервали, за която всеки елемент на $\mathcal{F}$ е подмножество на най-много един друг елемент на $\mathcal{F}$. Един интервал се нарича максимален, ако не е подмножество на нито един друг интервал от $\mathcal{F}$. Нека m е броят на максималните елементи на $\mathcal{F}$, а a е броят на тези, които не са максимални. Да се докаже, че $2m + a \leq 2n$.

Решение. Да означим точките с $1, 2, \dots, n$ отляво надясно. Ще означаваме интервалите с $[i, j]$, където $1 \leq i < j \leq n$. Нека

$$A = \{[x_1, y_1], [x_2, y_2], \dots, [x_m, y_m]\}$$

е множеството от максимални интервали от $\mathcal{F}$. Тогава $x_i \neq x_j$ за всички $i \neq j$, защото в противен случай единият интервал ще се съдържа в другия (т.е. няма да е максимален) и аналогично $y_i \neq y_j$ за всички $i \neq j$.

Нека X и Y са съответно мултимножествата¹ от левите и десните краища на интервалите от $\mathcal{F}$ и нека $I_1 = [x, y]$ е не-максимален интервал от $\mathcal{F}$.

Ще докажем, че е изпълнено поне едно от следните две твърдения: $x \notin X \setminus \{x\}$ или $y \notin Y \setminus \{y\}$ (т.е. поне една от точките x или y се среща еднократно съответно в X или Y). Да допуснем противното, т.е. едновременно имаме $x \in X \setminus \{x\}$ и $y \in Y \setminus \{y\}$. Това означава, че съществуват интервали $I_2 = [x, a]$ и $I_3 = [b, y]$ от $\mathcal{F}$, където $a \neq y$ и $b \neq x$. Не е възможно да имаме $I_1 \subset I_2$ и $I_1 \subset I_3$, защото тогава I_1 се съдържа в два интервала от $\mathcal{F}$, противоречие с условието. Ако $I_1 \not\subset I_k$ ($k = 2$ или 3), то $I_k \subset I_1$ и тъй като I_1 (който не е максимален) се съдържа в максимален интервал от $\mathcal{F}$, отново имаме противоречие – сега I_k се съдържа в два интервала от $\mathcal{F}$.

Нека A_i , $i = 1, 2$, е множеството от не-максимални интервали, чиито десни (леви) краища се срещат еднократно в Y (съответно в X). От доказаното по-горе следва, че $|A_1| + |A_2| \geq a$, което означава, че поне едно от числата $|A_1|$ и $|A_2|$ е по-голямо или равно на $a/2$. Остава да отбележим, че от доказаното в началото следва, че $|A| + |A_1| \leq n$ и $|A| + |A_2| \leq n$. Сега лесно се вижда, че $m + a/2 \leq n$.

¹В мултимножествата, за разлика от множествата, можем да имаме повтарящи се елементи.

Задача 4. Едно крайно множество $A \subset \mathbb{N}$ с поне три елемента се нарича добро, ако има следните две свойства:

- (1) за всеки три различни числа $a, b, c \in A$ е вярно, че $(a, b, c) = 1$;
- (2) за всеки две различни числа $b, c \in A$ съществува число $a \in A \setminus \{b, c\}$, такова, че $a|bc$.

Да се намерят всички добри множества.

Решение. Да отбележим първо, че $1 \notin A$, защото в противен случай за $a = \min A \setminus \{1\}$ съществува $b \in A \setminus \{1, a\}$, което дели $a \cdot 1 = a$, т.е. $b < a$, противоречие.

Да допуснем, че $|A| \geq 4$. Тъй като $\binom{n}{2} > n$, за някое $a \in A$ съществуват двойки (b, c) и (d, e) , за които $a|bc$ и $a|de$. Ако и четирите числа b, c, d и e са различни, то фиксиран прост делител на a дели (поне) две от тях и те ще образуват заедно с a тройка с общ делител, по-голям от 1, противоречие. Ако например $b = d$, то a дели bc, be и ba , т.е. a дели $b(a, c, e) = b$.

Ще докажем, че не е възможно a да дели b в добро множество. Да допуснем обратното. Тогава за всяко $c \in A \setminus \{a, b\}$ имаме $(a, c) = (a, b, c) = 1$. Ще докажем, че $b|ac$. Знаем, че съществува $d \in A \setminus \{a, c\}$, което дели ac . Ако $d = b$, имаме $b|ac$. Ако $d \neq b$, то $(d, a) = 1$ и значи $d|c$. Съществува $e \in A \setminus \{a, d\}$, което дели ad . Ако $e = b$, то $b|ad|ac$ и исканото е доказано. Ако $e \neq b$, то от $c|ad$ и $(c, a) = 1$ следва $c|d$, т.е. $c = d$, противоречие. Накрая², ако $e \in A \setminus \{a, b, c, d\}$, то $e|d|c$, откъдето $(e, d, c) = e > 1$, противоречие. Следователно $b|ac$ за всяко $c \in A \setminus \{a, b\}$. Сега от $b|ac, b|ad$ и $b|ab$ следва, че $b|a(b, c, d) = a$, противоречие.

Следователно $|A| = 3$ и нека $A = \{a, b, c\}$ е добро множество. От условието следва, че $(a, b, c) = 1$, $a|bc$, $b|ac$ и $c|ab$. Да означим $(a, b) = p$, $a = a_1p$, $b = b_1p$, където $(a_1, b_1) = 1$. Тогава от $a|bc$ следва $a_1|b_1c$, т.е. $a_1|c$. Следователно можем да запишем $a = pq$, където $p|b$, $q|c$, и аналогично $b = pr$, където $p|a$, $r|c$.

Нека $c = qr'$. Тогава от $c|ab$ следва $r'|p^2r$, откъдето $r'|r$ (имаме $(r', p) = 1$, защото в противен случай $(a, b, c) > 1$). Аналогично получаваме и $r|r'$ и следователно $r = r'$. Окончателно, получаваме $A = \{pq, qr, rp\}$, където $(p, q) = (q, r) = (r, p) = 1$, и това дава описание на всички добри множества.

Задача 5. Да се намерят всички сюрективни функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за

²Това не може да се случи при $|A| = 4$.

КОИТО

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y)$$

за всички $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Първо ще докажем, че $f(0) = 0$. Нека $t \in \mathbb{R}$ е такова, че $f(t) = 0$ (съществуването на t следва от сюрективността).

При $x = y = t$ от условието получаваме $f(t) = 2f(2t)$, откъдето $f(2t) = 0$. Сега при $x = t$ от условието следва, че $f(t + 2f(y)) = f(2y)$. Тъй като $f(f(0) + 2f(y)) = f(0) + f(2y)$ (от $x = 0$ в условието), след елиминиране на $f(2y)$ получаваме $f(f(0) + 2f(y)) - f(0) = f(t + 2f(y))$. Тъй като $2f(y)$ приема всички реални стойности, имаме

$$f(f(0) + z) - f(0) = f(t + z) \text{ за всяко } z \in \mathbb{R}.$$

От последното при $z = 0$, $z = t$ и $z = f(0)$ съответно получаваме $f(f(0)) = f(0)$, $f(f(0) + t) = f(0)$ и $f(2f(0)) = f(t + f(0)) + f(0) = 2f(0)$. Сега поради $f(3f(0)) = 2f(0)$ (от $x = y = 0$ в условието) и $f(3f(0)) = f(0) + f(2f(0)) = f(0) + 2f(0) = 3f(0)$ (от $x = 0$ и $y = f(0)$ в условието), достигахме до $2f(0) = 3f(0)$, т.е. $f(0) = 0$.

Полагаме $x = 0$ в условието и получаваме $f(2f(y)) = f(2y)$, откъдето следва, че $f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2f(y))$. Тъй като $2f(y)$ приема всички реални стойности, можем да запишем

$$f(x + y + f(x)) = f(2x) + f(y) \text{ за всички } x, y \in \mathbb{R}.$$

От последното при $y = 0$ получаваме³ $f(x + f(x)) = f(2x)$.

Сега пресмятаме $f(x + f(x) + y)$ при $y = f(x + f(x)) = f(2x)$ по два начина. От една страна имаме

$$f(x + f(x) + y) = f(x + f(x) + f(2x)) = f(2x) + f(f(2x))$$

а от друга, след заместване на x с $x + f(x)$ в равенството $f(x + f(x)) = f(2x)$, получаваме

$$\begin{aligned} f(x + f(x) + y) &= f(x + f(x) + f(x + f(x))) = f(2(x + f(x))) \\ &= f(x + f(x) + x + f(x)) \\ &= f(2x) + f(x + f(x)) = 2f(2x) \end{aligned}$$

³Същото се получава и от условието след като вече знаем, че $f(0) = 0$.

(предпоследното при $y = x + f(x)$). Следователно

$$f(2x) + f(f(2x)) = 2f(2x) \iff f(f(2x)) = f(2x)$$

и остава да отбележим, че $f(2x)$ приема всички реални стойности, т.е. $f(a) = a$ за всяко реално a . Тази функция очевидно е решение.

Задача 6. Дадени са равнобедрен $\triangle OBC$, $OB = OC$, и окръжност ω с център O и радиус OB . Допирателните към ω в точките B и C се пресичат в точка A . Окръжност ω_1 , която е вътрешна за $\triangle ABC$, се допира до ω и до AC в точка H . Окръжност ω_2 също е вътрешна за $\triangle ABC$ и се допира до ω , до ω_1 в точка J и до AB в точка K . Да се докаже, че ъглополовящата на $\angle KJH$ минава през центъра на вписаната в $\triangle OBC$ окръжност.

Решение. Ще използваме следния факт.

Лема. Нека BB' и CC' са диаметри в ω и E и F са среди съответно на дъгите $B'C$ и BC' . Точките $N \in BE$ и $P \in CF$ са такива, че $HN \perp BC$ и $K_1P \perp BC$. Тогава точка N лежи на правата K_1B' ($K_1 \in AB$ засега е някаква точка) тогава и само тогава, когато точка P лежи на правата HC' .

Фиг. 1

Доказателство. Нека $AB \cap B'C = Q$, $BE \cap B'C = T$, $BC' \cap CF = U$ и $AC \cap C'B = S$ (фиг. 1). Ако $N \in K_1B'$, то от теоремата на Менелай за



$\triangle BTQ$ и правата K_1B' имаме $\frac{BK_1 \cdot QB'TN}{K_1Q \cdot B'T \cdot NB} = 1$. Но $\frac{TN}{NB} = \frac{CH}{HS}$ от теоремата на Талес (имаме $BC' \parallel HN$) и следователно $\frac{BK_1}{K_1Q} \cdot \frac{CH}{HS} = \frac{B'T}{QB'}$.

Аналогично се вижда, че условието $P \in HC'$ е еквивалентно на $\frac{BK_1}{K_1Q} \cdot \frac{CH}{HS} = \frac{C'U}{SC'}$. Остава да отбележим, че $\frac{B'T}{QB'} = \frac{C'U}{SC'}$, с което доказателството на лемата е завършено.

Да запазим означенията от лемата по следния начин: N е пресечната точка на BE и перпендикуляра от H към BC , $B'N$ пресича AB в точка K_1 . Тогава при $P = HC' \cap CF$ от лемата следва, че $K_1P \perp BC$. Нека $B'N$ и $C'H$ да пресичат ω съответно в точки X и Y .

Имаме $\sphericalangle CHN = \sphericalangle CXN = \sphericalangle CIN = \widehat{CB'}/2$ и следователно петогълникът $INCHX$ е вписан. Аналогично се вижда, че петогълникът IYK_1PP също е вписан. Нека J_1 е втората пресечна точка на тези две окръжности. Тогава $\sphericalangle J_1HA = \sphericalangle J_1IC = \sphericalangle J_1YH$, което означава, че окръжността, описана около $\triangle YHJ_1$ се допира до AC в точка H .

От друга страна, ако окръжността ω_1 се допира до ω в точка Y_1 , то ω и ω_1 са съответни при хомотетия с център Y_1 и следователно C , H и Y_1 лежат на една права, т.е. $Y_1 \equiv Y$ и окръжността, описана около $\triangle YHJ_1$ е точно ω_1 . По подобен начин се вижда, че окръжността, описана около $\triangle K_1XJ_1$ се допира до AB и до ω .

Имаме

$$\sphericalangle K_1JH = \sphericalangle ACI + \sphericalangle ABI = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC = \sphericalangle BIC = \sphericalangle ANJ_1 + \sphericalangle AK_1J_1$$

и, тъй като AN и AK_1 са допирателни съответно към описаните около $\triangle J_1YH$ и J_1XK_1 окръжности, то тези две окръжности се допират и помежду си. Следователно окръжността, описана около $\triangle J_1XK$ е точно ω_2 , $J_1 \equiv J$ и $K_1 \equiv K$.

Остава да забележим, че $\sphericalangle IJH = 180^\circ - \sphericalangle ICH = 180^\circ - \sphericalangle IBK = \sphericalangle IJK$, т.е. IJ е ъглополовяща на $\sphericalangle KJH$.

Задача 7. Да се намери геометричното място от точки P във вътрешността на равностранен триъгълник, за които $\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} = \sqrt{h_3}$, където h_1 , h_2 и h_3 са разстоянията от P до страните на триъгълника.

Решение. Ще докажем, че търсеното геометрично място е вписаната в дадения равностранен $\triangle ABC$ окръжност. Нека X е точка от вписаната

окръжност, която да се допира до страните AB , BC и CD съответно в точки E , F и D и нека Q , R и S да са петите на перпендикулярите от X съответно към страните AB , BC и CA . Без ограничение на общността можем да считаме, че X лежи на малката дъга DE . Да означим $\angle XDS = \alpha$. Тогава лесно се вижда, че $\angle XEQ = 60^\circ - \alpha$ и $\angle XFR = 60^\circ + \alpha$.

С помощта на синусовата теорема пресмятаме съответно

$$\begin{aligned} XS &= XD \sin \alpha = 2r \sin^2 \alpha, \\ XR &= XF \sin(60^\circ + \alpha) = 2r \sin^2(60^\circ + \alpha), \\ XQ &= XE \sin(60^\circ - \alpha) = 2r \sin^2(60^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

Следователно

$$\sqrt{XR} = \sqrt{2r} \sin(60^\circ + \alpha) = \sqrt{2r}(\sin \alpha + \sin(60^\circ - \alpha)) = \sqrt{XQ} + \sqrt{XR},$$

т.е. X има исканото свойство.

Да допуснем сега, че X е точка от търсеното геометрично място, която не лежи на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Без ограничение на общността можем да считаме, че X лежи в четириъгълника $AEOD$. Нека X' е близката до A пресечната точка на AX и вписаната окръжност.

Да разгледаме хомотетията с център A , която изпраца X' в X . Нека B' и C' са образите съответно на B и C при тази хомотетия. Нека Q , R , S и R' да са петите на перпендикулярите от X съответно към страните AB , BC , CA и $B'C'$.

Тогава X лежи на окръжността, вписана в $\triangle AB'C'$ и съгласно доказаното по-горе имаме $\sqrt{XR'} = \sqrt{XQ} + \sqrt{XS}$. От друга страна, имаме $\sqrt{XR} = \sqrt{XQ} + \sqrt{XS}$ по условие. Следователно $XR = XR'$ и, тъй като $BC \parallel B'C'$, заключаваме, че $R \equiv R'$ и тогава $X \equiv X'$, противоречие.

Задача 8. Нека p е просто число и $k \leq p$ е естествено число. За полинома с цели коефициенти $f(x)$ от степен, ненадминаваща $kp + p - 1$, е известно, че за всяко цяло число x , числото $f(x)$ се дели на p^k . Да се докаже, че съществуват полиноми с цели коефициенти $A_0(x), A_1(x), \dots, A_k(x)$, такива, че

$$f(x) = \sum_{i=0}^k (x^p - x)^i p^{k-i} A_i(x).$$

Решение. Ще проведем индукция по k . Твърдението е добре известно при $k = 1$. Ще добавим условието $\deg(A_i) \leq p - 1$.

Нека

$$f(x) = (x^p - x)^k A_k(x) + g(x), \deg(g) \leq kp - 1$$

по теоремата за деление с частно и остатък. Тъй като $p|x^p - x$ за всяко цяло x , оттук $p^k|(x^p - x)^k$ за всяко цяло x , заключаваме, че $p^k|g(x)$ за всяко цяло x . Оттук и от индукционното предположение за $g(x)$ следва, че

$$f(x) = (x^p - x)^k A_k(x) + (x^p - x)^{k-1} A_{k-1}(x) + \cdots + p^{k-1} A_0(x).$$

Сега от $p^k|f(x)$ следва, че

$$p|h(x)^{k-1} A_{k-1}(x) + h(x)^{k-2} A_{k-2}(x) + \cdots + h(x) A_1(x) + A_0(x),$$

където сме положили $\frac{x^p - x}{p} = h(x)$. Ясно е, че $h(x)$ приема само цели стойности за цели x , но не е с цели коефициенти.

За произволни цели x и a имаме

$$h(x + ap) = \frac{(x + ap)^p - (x + ap)}{p} \equiv \frac{x^p - x - ap}{p} \equiv h(x) - a \pmod{p}$$

и $A_i(x + ap) \equiv A_i(x) \pmod{p}$. Следователно p дели

$$(h(x) - a)^{k-1} A_{k-1}(x) + \cdots + A_0(x)$$

при фиксирано x и променящо се a . Това означава, че за новата променлива $y = h(x) - a$ полиномът $y^{k-1} A_{k-1}(x) + \cdots + A_0(x)$ се дели на p за всяка стойност на y и понеже степента му е $k - 1 < p$, заключаваме, че всичките му коефициенти се делят на p (теорема на Лагранж).

Получихме, че $p|A_i(x)$ за всички $i = 0, 1, \dots, k - 1$ и всички цели x . Тъй като $\deg(A_i) \leq p - 1$, отново от теоремата на Лагранж следва, че $A_i(x) = pB_i(x)$, където $B_i(x)$ са полиноми с цели коефициенти. Следователно

$$f(x) = (x^p - x)^k A_k(x) + (x^p - x)^{k-1} pB_{k-1}(x) + \cdots + p^k B_0(x)$$

и остава да отбележим, че $\deg(A_k) \leq p - 1$ (иначе $\deg(f) \geq kp + p$).

Задача 9. Дадени са n точки в равнината, като не всички са на една права. Права ℓ в равнината се нарича добра, ако е възможно точките да се разделят на две множества A и B ($A \cap B = \emptyset$) така, че сумите от разстоянията от точките от A до ℓ и от B до ℓ да са равни. Да се докаже, че съществуват безбройно много точки, през които минават $n + 1$ добри прави.

Решение. Да напомним известния факт, че за фиксирано крайно множество от точки в равнината, всяка права през центъра на тежестта на множеството, е добра¹.

Нека даденото множество е $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и G да е центърът на тежестта на A . Дефинираме n точки $G_1, G_2, \dots, G_n$ по следния начин. Нека O е произволна точка в равнината и $A'_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, е симетрична на A_i относно O – тогава избираме G_i да бъде центърът на тежестта за множеството $\{A'_i\} \cup A \setminus \{A_i\}$ (в A сме заменили A_i с A'_i). Лесно се вижда, че всяка права OG_i е добра (докажете!).

Получихме $n+1$ добри прави през O и остава да покажем, че съществуват безбройно много точки O , за които съответните $n+1$ прави са две по две различни.

Ако правите OG и OG_i съвпадат за някое i , то

$$\vec{OG} - \vec{OG}_i = \frac{1}{n}(\vec{OA}_i - \vec{OA}'_i) = \frac{2}{n}\vec{OA}_i,$$

което показва, че точките O, G и A_i лежат на една права. Следователно е достатъчно O да не лежи на никоя от правите $GA_i, i = 1, 2, \dots, k$.

Фиг. 2

Да предположим сега, че някои две прави OG_i и OG_j съвпадат и нека $\vec{OG}_i = \frac{2}{n}\vec{OA}_i, \vec{OG}_j = \frac{2}{n}\vec{OA}_j$, но O да не лежи на никоя от правите GA_i и GA_j (Фиг. 2). Тогава триъгълниците OA_iA_j и GG_iG_j са с взаимноуспоредни страни и значи са хомотетични с коефициент на хомотетия $-\frac{2}{n}$. Ако T е

¹Лесно доказателство следва при въвеждане на координатна система, в която една от осите съвпада с дадената права.

центърът на тази хомотетия и S е пресечната точка на TG с A_iA_j (Фиг. 3), то $\frac{TG}{TO} = \frac{2}{n}$ и $\frac{TO}{TS} = \frac{2}{n}$, откъдето

$$\frac{GO}{GS} = \frac{GO/GT}{GS/GT} = \frac{n/2 + 1}{n^2/4 - 1} = \frac{2}{n - 2}.$$

Това означава, че O и S са хомотетични при хомотетия с център G и коефициент $-\frac{2}{n-2}$. Следователно е достатъчно O да не лежи на никоя от правите, които са хомотетични на прави A_iA_j относно G с коефициент $-\frac{2}{n-2}$.

Задача 10. Да се намери минималното реално число k , за което неравенството

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(d^2+1)} + \\ & + \sqrt{(a^2+1)(c^2+1)(d^2+1)} + \sqrt{(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)} \geq \\ & \geq 2(ab+bc+cd+ac+bd+ad) - k \end{aligned}$$

е изпълнено за произволни реални числа a, b, c и d .

Решение. С помощта на неравенството на Коши-Буняковски получаваме

$$\begin{aligned} \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} &= \sqrt{[(a+b)^2 + (ab-1)^2](c^2+1)} \\ &\geq (a+b)c + ab - 1, \end{aligned}$$

което, заедно с трите си циклично получени аналога, дава исканото неравенство с константа 4. Равенство се достига при $a = b = c = d = \sqrt{3}$ и следователно търсената стойност е $k = 4$.

Задача 11. Нека A', B' и C' са средите съответно на страните BC, AC и AB на $\triangle ABC$. Променливите точки P и P' са такива, че $PA = P'A', PB = P'B'$ и $PC = P'C'$. Да се докаже, че правата PP' минава през постоянна точка.

Решение. Нека G е медицентърът на $\triangle ABC$ и център на декартова координатна система. Ще работим с вектори, като за краткост ще означаваме с $\vec{m}$ вектора $\vec{GM}$.

От условието следва, че $\vec{a}' = -\frac{\vec{a}}{2}, \vec{b}' = -\frac{\vec{b}}{2}, \vec{c}' = -\frac{\vec{c}}{2}, (\vec{p} - \vec{a})^2 = (\vec{p}' - \vec{a}')^2, (\vec{p} - \vec{b})^2 = (\vec{p}' - \vec{b}')^2$ и $(\vec{p} - \vec{c})^2 = (\vec{p}' - \vec{c}')^2$. С помощта на тези равенства след елиминиране на $\vec{p}^2$ и $\vec{p}'^2$ получаваме

$$(2\vec{p} + \vec{p}')\vec{BA} = \frac{3}{4}(\vec{a}^2 - \vec{b}^2), \quad (2\vec{p} + \vec{p}')\vec{CB} = \frac{3}{4}(\vec{b}^2 - \vec{c}^2).$$

Тъй като векторите $\vec{BA}$ и $\vec{CB}$ са неколинеарни, скаларните произведения на $2\vec{p} + \vec{p}'$ с тях напълно определя последния вектор, т.е. векторът $2\vec{p} + \vec{p}'$ не зависи от точките P и P' . Това означава, че точката $X \in PP'$, за която $\vec{x} = \frac{1}{3}(2\vec{p} + \vec{p}')$ не зависи от P и P' .

Задача 12. Нека $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е функция, за която $af(a) + bf(b) + 2ab$ е точен квадрат за произволни $a, b \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че $f(a) = a$ за всяко $a \in \mathbb{N}$.

Решение. Да отбележим, че за нечетно просто число p полагането $a = b = p$ дава, че числото $2p(f(p) + p)$ е точен квадрат, откъдето $p|f(p)$ и, в частност, $p \leq f(p)$.

Първо ще докажем, че $af(a)$ е точен квадрат за всяко $a \in \mathbb{N}$. Да допуснем противното и нека за някое $a \in \mathbb{N}$ числото $af(a)$ не е точен квадрат. Тогава съществува просто число p , за което $p^{2k-1} \parallel af(a)$, $k \in \mathbb{N}$, т.е. $af(a) = p^{2k-1}s$, където $(s, p) = 1$. Полагаме $b = p^{2k}$ в условието и получаваме, че числото $x = p^{2k-1}s + p^{2k}(f(b) + 2a)$ е точен квадрат. Това е невъзможно, защото очевидно $p^{2k-1} \parallel x$.

Нека $p > f(1)$ е нечетно просто число. Тогава с полагане $a = p$ и $b = 1$ получаваме, че числото $y = pf(p) + f(1) + 2p$ е точен квадрат. Очевидно $y > pf(p) = (\sqrt{pf(p)})^2$. От друга страна, неравенството $y < (\sqrt{pf(p)} + 2)^2$ е еквивалентно на $f(1) + 2p < 4\sqrt{pf(p)} + 4$, което е изпълнено поради $f(1) < p$ и $p \leq f(p)$. Следователно $y = (\sqrt{pf(p)} + 1)^2$, откъдето

$$f(1) + 2p = 2\sqrt{pf(p)} + 1. \quad (1)$$

Тъй като $pf(p)$ е точен квадрат, имаме $f(p) = t^2p$, $t \in \mathbb{N}$. Ако $t \geq 2$, то от $p > f(1)$ и от (1) следва, че

$$3p > f(1) + 2p = 2\sqrt{pf(p)} + 1 = 2tp + 1 \geq 4p + 1,$$

което е невъзможно. Следователно $t = 1$ и $f(p) = p$ за всяко нечетно просто число $p > f(1)$. Нещо повече, сега от (1) виждаме, че $f(1) = 1$ и значи $f(p) = p$ за всяко нечетно просто число p .

Да допуснем сега, че за някое $a \in \mathbb{N}$ имаме $f(a) \neq a$. Полагането в условието на $b = p$, където p е нечетно просто число, дава, че числото $z = af(a) + p^2 + 2ap$ е точен квадрат, който е различен от $(a + p)^2$ поради нашето допускане. Тогава $|z - (a + p)^2| \geq 2(a + p) - 1$ (това е минималната

разлика между точния квадрат $(a + p)^2$ и най-близкия до него друг точен квадрат). Но $z - (a + p)^2 = af(a) - a^2$, т.е.

$$|af(a) - a^2| \geq 2(a + p) - 1,$$

което очевидно не може да бъде вярно за фиксирано a и за всяко просто число p . Следователно $f(a) = a$ за всяко $a \in \mathbb{N}$.

Китай

Задача 1. Да се докаже, че за произволни реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 3$) е изпълнено неравенството

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (M - m)^2,$$

където $a_{n+1} = a_1$, $M = \max_{1 \leq i \leq n} a_i$ и $m = \min_{1 \leq i \leq n} a_i$.

(С $[x]$ се означава най-голямото цяло число, ненадминаващо x .)

Решение. Ако $n = 2k$ е четно число, то

$$2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \right) = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \leq n(M - m)^2,$$

откъдето следва, че

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \leq \frac{n}{2} (M - m)^2 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (M - m)^2.$$

Нека $n = 2k + 1$ е нечетно число. Ще покажем, че ако по окръжност са разположени $2k + 1$ числа, то винаги съществуват 3 последователни числа, които образуват монотонна (растяща или намаляваща) редица. Наистина, ако между всеки две числа a_i и a_{i+1} запишем тяхната разлика $a_{i+1} - a_i$, ще получим $2k + 1$ числа. Между тях ще има две съседни, които не са с различни знаци. Съответните три числа ще образуват търсената редица. Без ограничение можем да считаме, че трите числа са a_1 , a_2 и a_3 (т.е. или $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ или $a_1 \geq a_2 \geq a_3$).

Тогава $(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 \leq (a_1 - a_3)^2$ (това неравенство е еквивалентно на $(a_1 - a_2)(a_2 - a_3) \geq 0$). Имаме

$$\begin{aligned} 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} \right) &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})^2 \leq (a_1 - a_3)^2 + \sum_{i=3}^n (a_i - a_{i+1})^2 \\ &\leq 2k(M - m)^2. \end{aligned}$$

Тъй като $\left[\frac{n}{2}\right] = k$, горното неравенство е еквивалентно на неравенството от условието на задачата.

Задача 2. Точка D е средата на дъгата BC от описаната около $\triangle ABC$ окръжност, X е точка от дъгата BD , E е средата на дъгата AX , S лежи на дъгата AC , SD пресича BC в точка R , а SE пресича AX в точка T . Да се докаже, че ако $RT \parallel DE$, то центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност лежи на правата RT .

Решение. Да означим пресечната точка на AD и RT с I . Тъй като D е среда на BC , то AI е ъглополовяща на $\angle BAC$. Понеже $RT \parallel DE$ имаме

$$\angle STI = \angle SED = \angle SAI,$$

откъдето следва, че точките A , T , I и S лежат на една окръжност ω_1 .

Ако J е пресечната точка на CE и RT , то

$$\angle SRJ = \angle SDE = \angle SCE$$

и следователно S , J , R и C лежат на една окръжност ω_2 .

Нека K е пресечната точка на ω_1 и ω_2 , различна от S . Ще докажем, че K е пресечна точка на AJ и CI .

Да означим с K_1 пресечната точка на ω_1 и AJ , различна от A . Имаме

$$\begin{aligned} \angle SK_1A &= \angle STA = \frac{1}{2}(\widehat{SA} + \widehat{XE}) = \frac{1}{2}(\widehat{SA} + \widehat{AE}) \\ &= \angle SDE = \angle SRT = \angle SRJ, \end{aligned}$$

което означава, че S , K_1 , J и R лежат на една окръжност, т.е. точката K_1 лежи на ω_2 .

По същия начин доказваме, че ако K_2 е пресечната точка на ω_2 и CI , различна от C , то K_2 лежи на ω_1 . Следователно K_1 и K_2 съвпадат, което означава, че K е пресечната точка на AJ и CI .

Тъй като $\angle CAD = \angle CAI$ и $\angle TJE = \angle CJR = \angle CED = \angle CAD$, то точките A , I , J и C лежат на една окръжност, откъдето $\angle ACI = \angle AJI$.

От друга, страна точките C , K , J и R лежат на една окръжност, т.е. $\angle BCI = \angle ICR = \angle AJI$, откъдето $\angle ACI = \angle BCI$. Следователно I е центърът на вписаната в ABC окръжност.

Задача 3. Дадено е множество A от реални числа. Нека $A_1, A_2, \dots, A_n$ са непразни подмножества на A , удовлетворяващи условията:

- (1) сборът от елементите на A е равен на нула;
- (2) сборът на произволни n числа, по едно от всяко от множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$, е положително число.

Да се докаже, че съществуват естествено число k и множества $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, за които

$$|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}| < \frac{k}{n}|A|.$$

Решение. Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, където $a_1 > a_2 > \dots > a_m$ и $a_1 + a_2 + \dots + a_m = 0$. Според условието сборът на най-малките елементи от всяко от множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$ е положителен. Нека имаме k_i множества, в които най-малкият елемент е равен на a_i . Тогава $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ и $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m > 0$.

За всяко $s = 1, 2, \dots, m-1$ има $k_1 + \dots + k_s$ множества с минимален елемент, който е по-голям или равен на a_s . Следователно обединенията на тези множества се съдържа в $\{a_1, \dots, a_s\}$ и броят на елементите не надминава s .

Ще покажем, че съществува $s \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ за което $k = k_1 + \dots + k_s > \frac{sn}{m}$. Да допуснем обратното, т.е.

$$k_1 + \dots + k_s \leq \frac{sn}{m}, \quad s = 1, 2, \dots, m-1.$$

Като използваме трансформацията на Абел и това, че $a_s - a_{s+1} > 0$, $1 \leq s \leq m-1$, получаваме

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{s=1}^{m-1} k_j a_j &= \sum_{s=1}^{m-1} (a_s - a_{s+1})(k_1 + \dots + k_s) + a_m(k_1 + \dots + k_m) \leq \\ &\leq \sum_{s=1}^{m-1} (a_s - a_{s+1}) \frac{sn}{m} + a_m n = \frac{n}{m} \sum_{j=1}^m a_j = 0, \end{aligned}$$

което е противоречие.

За така намереното s избираме онези множества измежду $A_1, \dots, A_n$, чиито най-малки елементи са по-големи от a_s . Нека това са $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ и

според горния резултат общият брой на такива множества е $k = k_1 + \dots + k_s > \frac{sn}{m}$ и броят на елементите в тяхното обединение не надминава s , т.е.

$$|A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}| \leq s < \frac{km}{n} = \frac{k}{n}|A|.$$

Задача 4. Дадено е множество $S = \{1, 2, \dots, n\}$, където n е естествено число. Да се намери минималната възможна стойност на

$$|A \triangle S| + |B \triangle S| + |C \triangle S|,$$

където A и B са множества от реални числа, $C = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ и $X \triangle Y = \{x | x \text{ принадлежи на точно едно от множествата } X \text{ и } Y\}$.

Решение. Ще докажем, че търсената минимална стойност е $n + 1$. За множествата $A = B = S$ имаме $|A \triangle S| = |B \triangle S| = 0$. Тъй като $C = \{2, 3, 4, \dots, 2n\}$, то $C \triangle S = \{1, n + 1, n + 2, \dots, 2n\}$ и тогава $|C \triangle S| = n + 1$. Следователно

$$|A \triangle S| + |B \triangle S| + |C \triangle S| = n + 1.$$

Остава да докажем, че $l = |A \triangle S| + |B \triangle S| + |C \triangle S| \geq n + 1$. Имаме

$$l = |A \setminus S| + |B \setminus S| + |C \setminus S| + |S \setminus A| + |S \setminus B| + |S \setminus C|,$$

където $X \setminus Y = \{x | x \in X, x \notin Y\}$. Ще докажем, че

$$(1) \quad |A \setminus S| + |B \setminus S| + |S \setminus C| \geq 1$$

$$(2) \quad |S \setminus A| + |S \setminus B| + |C \setminus S| \geq n,$$

откъдето ще следва исканото. Ако $|A \setminus S| = |B \setminus S| = 0$, то A и B са подмножества на S и тогава 1 не може да бъде елемент на C . Следователно $|S \setminus C| \geq 1$, което доказва (1).

Ако $A \cap S = \emptyset$ то $|S \setminus A| \geq n$ и (2) е в сила. Когато $A \cap S \neq \emptyset$ нека най-големият елемент на $A \cap S$ е равен на $n - k$ за $0 \leq k \leq n - 1$. Тогава $|S \setminus A| \geq k$. От друга страна, за $i = k + 1, k + 2, \dots, n$ имаме, че или $i \notin B$ (и тогава $i \in S \setminus B$), или $i \in B$ (и тогава $n - k + i \in C \setminus S$) и следователно

$$|S \setminus B| + |C \setminus S| \geq n - k.$$

Окончателно $|S \setminus A| + |S \setminus B| + |C \setminus S| \geq n$, което доказва (2).

Задача 5. Дадено е цяло число $n \geq 4$ и неотрицателни реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, за които

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n > 0.$$

Да се намери най-голямата стойност на израза

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)}.$$

Решение. Ще покажем, че търсената най-голяма стойност е $n-1$. Поради хомогенността, можем да считаме, че $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$. При $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ и $b_1 = 0, b_2 = b_3 = \dots = b_n = \frac{1}{n-1}$, получаваме $\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i) = 1$ и $\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i) = \frac{1}{n-1}$. Тогава

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)} = n - 1.$$

Остава да покажем, че за произволни неотрицателни числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, за които $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$, е изпълнено:

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(a_i + b_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(a_i + b_i)} \leq n - 1.$$

Това неравенство е еквивалентно на

$$(n-1) \sum_{i=1}^n b_i^2 + (n-2) \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Без ограничение приемаме, че b_1 е най-малкото от числата $b_1, b_2, \dots, b_n$.
Имаме

$$\begin{aligned}
 (n-1) \sum_{i=1}^n b_i^2 + (n-2) \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq (n-1)b_1^2 + (n-1) \sum_{i=2}^n b_i^2 + (n-2) \sum_{i=1}^n a_i b_i \\
 &\geq (n-1)b_1^2 + \left(\sum_{i=2}^n n b_i \right)^2 + (n-2)b_1 \\
 &= (n-1)b_1^2 + (1-b_1)^2 + (n-2)b_1 \\
 &= n b_1^2 + (n-4)b_1 + 1 \geq 1 = \sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n a_i^2.
 \end{aligned}$$

Задача 6. Да се докаже, че за всеки две естествени числа m и n съществуват безбройно много взаимно прости естествени числа a и b , за които $a+b$ дели $am^a + bn^b$.

Решение. Ако $m = n = 1$, то условието е изпълнено за всеки две взаимно прости естествени числа a и b . При $mn \geq 2$ тъй като

$$n^a(am^a + bn^b) = (a+b)n^{a+b} + a((mn)^a - n^{a+b}),$$

е достатъчно да докажем, че съществуват безбройно много двойки взаимно прости a и b , за които $a+b$ дели $(mn)^a - n^{a+b}$ и $(a+b, a) = 1$.

Да допуснем, че $p = a+b$ е просто число. Трябва да докажем, че съществуват безбройно много двойки (p, a) , където p е просто число и $1 \leq a \leq p-1$, за които p дели $(mn)^a - n^p$.

От теоремата на Ферма имаме, че ако $a_1 \equiv a_2 \pmod{p-1}$, $a_1 \geq 1$, $a_2 \geq 1$, то $(mn)^{a_1} \equiv (mn)^{a_2} \pmod{p}$.

Следователно е достатъчно да докажем, че съществуват безбройно много прости числа p и естествени числа a , за които p дели $(mn)^a - n$.

Да допуснем, че съществуват само краен брой прости числа $p_1, p_2, \dots, p_r$, които делят числата от вида $(mn)^a - n$. Тогава

$$(mn)^2 - n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}, \quad (1)$$

където α_i са цели неотрицателни числа. Също така, за

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_r - 1) + 2$$

имаме

$$(mn)^a - n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}, \quad (2)$$

където β_i са неотрицателни цели числа. Ще докажем, че $\beta_i \leq \alpha_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, r$.

Ако p_i дели n , то от (2) и $a \geq 2$ следва, че $p_i^{\beta_i}$ дели n и следователно $p_i^{\beta_i}$ дели $(mn)^2 - n$. Сега от (1) следва, че $\beta_i \leq \alpha_i$. Ако p_i не дели n , то p_i не дели и m . Тогава $(p_i^{\alpha_i+1}, mn) = 1$ и понеже $\varphi(p_i^{\alpha_i+1})$ е делител на $a - 2$, от теоремата на Ойлер следва, че

$$(mn)^a - n \equiv (mn)^2 - n \pmod{p_i^{\alpha_i+1}}.$$

Тъй като $p_i^{\alpha_i+1}$ не дели $(mn)^2 - n$, горното сравнение означава, че $p_i^{\alpha_i+1}$ не дели $(mn)^a - n$.

Следователно $\beta_i \leq \alpha_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, r$, откъдето намираме

$$(mn)^a - n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r} \leq p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} = (mn)^2 - n.$$

Горното неравенство е противоречие с $a > 2$. Следователно съществуват безбройно много прости числа p и естествени числа a , за които p дели $(mn)^a - n$.

Китай, олимпиада за момичета

Задача 1. Дадено е естествено число $n > 2$ и нека $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ са две по две различни непразни подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$. Да се определи най-голямата стойност на

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|}$$

(Приемаме, че $A_{2n+1} = A_1$.)

Решение. Ще докажем, че $\frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} \leq \frac{1}{2}$. Ако $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$, то $|A_i \cap A_{i+1}| = 0$ и неравенството е очевидно.

Ако $|A_i \cap A_{i+1}| = a \geq 1$, то или и двете множества имат повече от a елемента, или едното от двете множества има a елемента, а другото

множество има поне $a + 1$ елемента. И в двата случая $|A_i||A_{i+1}| \geq a(a + 1)$. Следователно

$$\frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} \leq \frac{a}{a(a + 1)} = \frac{1}{a + 1} \leq \frac{1}{2}.$$

Сега е очевидно, че

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{|A_i \cap A_{i+1}|}{|A_i| \cdot |A_{i+1}|} \leq \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2} = n.$$

Тази граница се достига с множествата $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$, $A_3 = \{2\}$, $\dots$, $A_{2n-2} = \{n-1, n\}$, $A_{2n-1} = \{n\}$, $A_{2n} = \{n, 1\}$.

Задача 2. В равнобедрен $\triangle ABC$, $AB = AC$, точка D е средата на страната BC . Точка E лежи извън $\triangle ABC$ и е такава, че $CE \perp AB$ и $BE = BD$. Точка M е среда на отсечката BE . Точка F от по-малката дъга $\widehat{AD}$ от описаната около $\triangle ABD$ окръжност е такава, че $MF \perp BE$. Да се докаже, че $ED \perp FD$.

Решение. Да разгледаме точка F_1 , за която $EF_1 = BF_1$ и лъчът DF_1 е перпендикулярен на правата ED . Достатъчно е да докажем, че $F = F_1$, т.е. $ABDF_1$ е вписан четириъгълник. За целта ще покажем, че

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BF_1D. \quad (1)$$

Ако $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD = x$, то поради $EC \perp AB$ и $AD \perp BC$, имаме

$$\sphericalangle ECB = 90^\circ - \sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD = x.$$

Тъй като MD е средна отсечка в триъгълник BCE , имаме $MD \parallel EC$, откъдето

$$\sphericalangle MDB = \sphericalangle ECD = x. \quad (2)$$

В равнобедрения $\triangle EF_1M$ да означим $\sphericalangle EF_1M = \sphericalangle BF_1M = y$. Тъй като $EM \perp MF_1$ и $MD \perp DF_1$, имаме $\sphericalangle EMF_1 = \sphericalangle EDF_1 = 90^\circ$. Следователно четириъгълникът $EMDF_1$ е вписан в окръжност, откъдето $\sphericalangle EDM = \sphericalangle EF_1M = y$. От това равенство и (2) намираме

$$\sphericalangle BDE = \sphericalangle EDM + \sphericalangle MDB = x + y.$$

Тъй като $BE = BD$ заключаваме, че $\sphericalangle MED = \sphericalangle BED = \sphericalangle BDE = x + y$. Остава да забележим, че $EMDF_1$ е вписан четириъгълник, откъдето следва $\sphericalangle MF_1D = \sphericalangle MED = x + y$ и отгук

$$\sphericalangle BF_1D = \sphericalangle MF_1D - \sphericalangle MF_1D = x = \sphericalangle BAD,$$

което е точно (1).

Задача 3. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват просто число p и цяло число m , за които

(а) $p \equiv 5 \pmod{6}$;

(б) p не дели n ;

(в) $n \equiv m^3 \pmod{p}$.

Решение. Съществуват безбройно много прости числа p от вида $6k + 5$. (Това твърдение е частен случай от теоремата на Дирихле, но лесно може да се докаже и директно.) Да изберем едно такова $p = 6k + 5$, което е по-голямо от n . Това p изпълнява условия (а) и (б). За $m = n^{4k+3}$, като използваме малката теорема на Ферма, намираме

$$m^3 \equiv n^{12k+9} \equiv (n^{6k+4})^2 \cdot n \equiv (n^{p-1})^2 n \equiv n \pmod{p}.$$

Задача 4. Дадени са реални числа $x_2, x_2, \dots, x_n$, за които $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$. Да се докаже неравенството:

$$\sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{\sum_{i=1}^n ix_i^2}\right)^2 \cdot \frac{x_k^2}{k} \leq \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k}.$$

Кога се достига равенство?

Решение. Преобразуваме лявата страна на даденото неравенство по следния начин:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{\sum_{i=1}^n ix_i^2}\right)^2 \frac{x_k^2}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{2x_k^2}{\sum_{i=1}^n ix_i^2} + \sum_{k=1}^n \frac{kx_k^2}{\left(\sum_{i=1}^n ix_i^2\right)^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \frac{2}{\sum_{i=1}^n ix_i^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n ix_i^2\right)^2} \sum_{k=1}^n kx_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n ix_i^2}. \end{aligned}$$

Следователно трябва да докажем, че

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n ix_i^2} \leq \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} - \frac{4n}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k},$$

което е еквивалентно на

$$\frac{4n}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n ix_i^2}.$$

Последното неравенство може да се запише във вида

$$4n \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} \right) \left(\sum_{k=1}^n kx_k^2 \right) \leq (n+1)^2. \quad (1)$$

От неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме

$$\begin{aligned} 4n \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k} \right) \left(\sum_{k=1}^n kx_k^2 \right) &= 4 \left(\sum_{k=1}^n \frac{nx_k^2}{k} \right) \left(\sum_{k=1}^n kx_k^2 \right) \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{nx_k^2}{k} + \sum_{k=1}^n kx_k^2 \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k} + k \right) x_k^2 \right)^2. \end{aligned}$$

За да докажем (1) е достатъчно да покажем, че за всяко $k, 1 \leq k \leq n$, е изпълнено неравенството $\frac{n}{k} + k \leq n+1$. То е еквивалентно на $0 \leq (n-k)(k-1)$, което очевидно е вярно.

Тъй като последното неравенство е строго за $1 < k < n$, за да имаме равенство трябва да е изпълнено $x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$. За да имаме равенство в неравенството между средното аритметично и средното геометрично, трябва да имаме

$$nx_1^2 + x_n^2 = x_1^2 + nx_n^2,$$

което заедно с $x_1^2 + x_n^2 = 1$ дава $x_1^2 = x_n^2 = \frac{1}{2}$. Следователно равенство имаме при $x_1^2 = x_n^2 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$.

Задача 5. Дадени са строго растящи линейни функции $f(x)$ и $g(x)$ от множеството на реалните числа в множеството на реалните числа. Известно

е, че $f(x)$ е цяло число тогава и само тогава, когато $g(x)$ е цяло число. Да се докаже, че за всяко реално число x числото $f(x) - g(x)$ е цяло.

Решение. Ако $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$ за реални числа a, b, c и d , то понеже двете функции са строго растящи, имаме $a > 0$ и $c > 0$.

Първо ще покажем, че $a = c$. Ако това не е така, без ограничение можем да считаме, че $a > c$. Тъй като двете функции приемат всички реални стойности, съществува x_0 , за което $f(x_0) = ax_0 + b$ и $g(x_0) = cx_0 + d$ са цели числа. Тогава $f(x_0 + \frac{1}{a}) = ax_0 + 1 + b$ е също цяло число и от условието следва, че $g(x_0 + \frac{1}{a}) = cx_0 + d + \frac{c}{a}$ е цяло число. Последното означава, че $\frac{c}{a}$ е цяло число, което е невъзможно поради $a > c$. Следователно $a = c$ и $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + d$. Тогава $b - d = f(x_0) - g(x_0)$ е цяло число, което означава, че $f(x) - g(x) = b - d$ е цяло число за всяко реално x .

Задача 6. Точката M е среда на страната BC на остроъгълен $\triangle ABC$, за който $AB > AC$. Външната ъглополовяща на $\angle BAC$ пресича лъча BC в точка P . Точките K и F лежат на правата PA и са такива, че $MF \perp BC$ и $MK \perp PA$. Да се докаже, че $BC^2 = 4PF \cdot AK$.

Решение. Да означим с ω описаната окръжност около $\triangle ABC$ и нека O е центърът на ω . Ако N е средата на дъгата $\widehat{BC}$ от ω , не съдържаща A , то MN е симетрала на BC . Освен това AN е ъглополовяща на $\angle BAC$, което означава, че $AN \perp FP$. Следователно NF е диаметър на ω . От $MK \parallel AN$ получаваме

$$\frac{AK}{MN} = \frac{FK}{FM},$$

откъдето намираме

$$AK = \frac{FK \cdot MN}{FM}.$$

Тъй като MK е височина в правоъгълния $\triangle FMP$, имаме $FM^2 = FK \cdot FP$. От последните две равенства намираме

$$PF \cdot AK = \frac{FM^2}{FK} \frac{FK \cdot MN}{FM} = FM \cdot MN.$$

Понеже FN и BC са хорди в ω , които се пресичат в точка M , имаме $FM \cdot MN = \frac{BC^2}{4}$. Последните две равенства доказват твърдението на задачата.

Задача 7. Дадено е естествено число $n \geq 3$. Ако $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ е пермутация на числата $(1, 2, \dots, n)$, ще казваме, че x_j лежи между x_i и x_k , ако $i < j < k$. (Например, в пермутацията $(1, 3, 2, 4)$ числото 3 лежи между 1 и 4, но 4 не лежи между 1 и 2.) Нека $S = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ е множество от различни пермутации на $(1, 2, \dots, n)$. Известно е, че измежду всеки три различни числа от $(1, 2, \dots, n)$ едно от тези числа не лежи между другите две за всяка пермутация от S . Да се определи най-голямата възможна стойност на m .

Решение. Ще докажем, че отговорът е 2^{n-1} .

Първо по индукция ще докажем, че $m \leq 2^{n-1}$. При $n = 3$ ако искаме 3 да не лежи между 1 и 2 за всяка от пермутациите в S можем да изберем само 4 такива пермутации:

$$S = \{(3, 1, 2)(3, 2, 1)(1, 2, 3)(2, 1, 3)\}.$$

Да допуснем, че твърдението е вярно за $n = k$ за $k \geq 3$. Нека $n = k + 1$ и множеството S_{k+1} удовлетворява условието на задачата. Ако от всяка пермутация в S_{k+1} изтрием елемента p_{k+1} , получените пермутации образуват множество S_k , което удовлетворява условието на задачата (за $n = k$). Следователно трябва да докажем, че има най-много две различни пермутации от S_k , от които чрез изтриване на елемента $k + 1$ може да се получи една и съща пермутация от S_k .

Да допуснем, че има три пермутации

$$p_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{k+1}), \quad p_2 = (y_1, y_2, \dots, y_{k+1}), \quad p_3 = (z_1, z_2, \dots, z_{k+1}),$$

от S_{k+1} от които след изтриване на елемента $k + 1$ се получава една и съща пермутация q от S_k . Без ограничение можем да приемем, че $q = (1, 2, \dots, k)$. Това означава, че p_1, p_2 и p_3 могат да бъдат получени от q чрез добавяне на $k + 1$ на позиции съответно a, b и c , като без ограничение $1 \leq a < b < c \leq k$. Следователно

$$p_1 = (1, 2, \dots, a - 1, k + 1, a, \dots, b, \dots, c, \dots, k);$$

$$p_2 = (1, 2, \dots, a, \dots, b - 1, k + 1, b, \dots, c, \dots, k);$$

$$p_3 = (1, 2, \dots, a, \dots, b, \dots, c - 1, k + 1, c, \dots, k).$$

Да разгледаме елементите a, b и $k + 1$. В p_1 елементът a е между $k + 1$ и b , в p_2 елементът $k + 1$ е между a и b и в p_3 елементът b е между a и

$k + 1$. Това означава, че всеки от елементите a , b и $k + 1$ е между другите два в някоя пермутация, което е противоречие. Следователно допускането не е вярно, т.е. най-много две пермутации от S_{k+1} е изобразяват в една и съща пермутация от S_k , което означава, че

$$|S_{k+1}| \leq 2|S_k| \leq 2^k.$$

Остава да докажем, че границата $m = 2^{n-1}$ се достига. Ще конструираме пермутациите от множеството S индуктивно. При $n = 3$ вече конструирахме множеството S_3 с $2^{3-1} = 4$ елемента. Ако вече имаме множество S_k с 2^{k-1} пермутации, от всяка пермутация p от S_k образуваме две нови пермутации, като поставяме елемента $k + 1$ веднъж преди p и веднъж след p . За всяка от така конструирани пермутации за всеки три числа $1 \leq a < b < c \leq n$ числото c не лежи между a и b .

Задача 8. Да се намери най-малкото нечетно естествено число $a > 5$, за което съществуват положителни цели числа m_1 , m_2 , n_1 и n_2 , за които:

$$a = m_1^2 + n_1^2, \quad a^2 = m_2^2 + n_2^2 \quad \text{и} \quad m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

Решение. Тъй като $261 = 15^2 + 6^2$, $261^2 = 189^2 + 180^2$ и $15 - 6 = 189 - 180$, то 261 удовлетворява условието на задачата. Ще докажем, че това е най-малкото такова число. Да допуснем, че $a < 261$ също удовлетворява условието на задачата. Тъй като a е нечетно и $a = m_1^2 + n_1^2$, то m_1 и n_1 са от различна четност. Следователно $d = m_1 - n_1$ е нечетно число. Освен това от $d < m_1 < \sqrt{a} < \sqrt{261} < 17$ следва, че възможните стойности на d са $d = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$.

Ще отхвърлим всяка една от тези възможности. Имаме $m_2 = n_2 + d$ и $a^2 = (n_2 + d)^2 + n_2^2$, откъдето

$$2a^2 - d^2 = (2n_2 + d)^2. \quad (1)$$

Ако $d = 1$ уравнението (1) става уравнение на Пел $x^2 - 2y^2 = -1$ (x, y) = $(2n_2 + 1, a)$. Това уравнение на Пел има минимално решение $(x, y) = (1, 1)$ и другите му решения с нечетно x се получават от равенството $x + y\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2k+1}$ за естествени стойности на k . Оттук намираме, че стойностите на y (т.е. на a), които са решения на това уравнение, са 5, 29, 169, 985, ...

Следователно възможните стойности за a са 29 и 169. Лесно се проверява, че 29 и 169 не могат да се представят във вида $(n_1 + 1)^2 + n_1^2$. Следователно $d \neq 1$.

Ако $d = 7$ тъй като $a < 261 = 15^2 + 6^2$, имаме, че $n_1 \leq 8$. Възможните стойности на a са 65, 85, 109, 137, 169, 205 и 245. Тогава (1) става

$$(2n_2 + 7)^2 = 2a^2 - 49$$

и с директно заместване се проверява, че това уравнение няма решение.

Останалите стойности на d се отхвърлят по подобен начин.

Следователно търсеното a е 261.

Русия

Задача 9.1. Нека $P(x)$ е квадратен тричлен със старши коефициент 1, който има общ реален корен с полинома $P(P(P(x)))$. Да се докаже, че $P(0) \cdot P(1) = 0$.

Решение. Нека t е общ корен на двата полинома. Тогава имаме $0 = P(P(P(t))) = P(P(0))$. Ако $P(x) = x^2 + ax + b$, то $P(0) = b$, $P(1) = a + b + 1$ и значи $0 = P(P(0)) = P(b) = ab + b^2 + b = b(a + b + 1) = P(0) \cdot P(1)$.

Задача 9.2. Окръжност през върха B на остроъгълен $\triangle ABC$ и центъра на описаната около него окръжност пресича за втори път страните BC и BA в точки P и Q . Да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle POQ$ лежи на правата AC .

Решение. Нека $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \angle OCB = \gamma$; тогава $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 90^\circ - \alpha$. Тъй като четириъгълникът $BPOQ$ е вписан в окръжност, то $\angle OPQ = \alpha$ и $\angle OQP = \gamma$. Нека OO_1 е височина в $\triangle OPQ$, а $H = OO_1 \cap AC$. Без ограничение на общността можем да считаме, че H лежи на лъча CA .

Тъй като $\angle POH$ е външен за $\triangle POO_1$, имаме $\angle POH = 90^\circ + \alpha = 180^\circ - \angle HCP$. Значи четириъгълникът $CHOP$ е вписан в окръжност и $\angle PHO = \angle PCO = \gamma$. Нека $P_1 = OQ \cap PH$. Пак от свойството на външните ъгли имаме, че

$$\angle QP_1H = \angle QPH + \angle PQO = \angle QPH + \angle PHO_1 = \angle HO_1Q = 90^\circ.$$

И така, $PH \perp OQ$, т. е. H е ортоцентърът на $\triangle OPQ$. При това той лежи на правата AC , което трябваше да се докаже.

Задача 9.3. Петя последователно построява диагонали в изпъкнал 2011-ъгълник така, че всеки нов диагонал пресича във вътрешна точка най-много един от построените по-рано диагонали. Колко най-много диагонали може да построи Петя?

Отговор. 4016.

Първо решение. Ще покажем, че в изпъкнал n -ъгълник максималният брой диагонали, които могат да се построят по описания начин, е равен на $2n - 6$; при $n = 2011$ получаваме посочения отговор. Нека $A_1A_2 \dots A_n$ е даден многоъгълник. Тогава Петя може да построи последователно диагоналите $A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, \dots, A_{n-2}A_n$ и след това $A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, \dots, A_1A_{n-1}$, т. е. общо $2n - 6$ диагонали.

Сега с индукция по n ще докажем, че по описания начин не могат да се построят повече от $2n - 6$ диагонала в изпъкнал n -ъгълник. Базата $n = 3$ е ясна. За да направим индукционната стъпка, да разгледаме процеса на построяване на диагонали в многоъгълника $A_1A_2 \dots A_n$. Нека за определеност A_1A_k е последният построен диагонал. По условия той пресича във вътрешна точка най-много един от построените по-рано диагонали; ако има такъв диагонал, означаваме го с d .

Да забележим, че всички диагонали, освен A_1A_k и, възможно, d са били построени или в k -ъгълника $A_1A_2 \dots A_k$, или в $(n + 2 - k)$ -ъгълника $A_kA_{k+1} \dots A_nA_1$, като във всеки от тези многоъгълници е следван описаният начин. Съгласно индукционното предположение тези диагонали са не повече от $(2k - 6) + (2(n + 2 - k) - 6) = 2n - 8$. Отчитайки и диагоналите A_1A_k и d , получаваме, че общият им брой е най-много $2n - 8 + 2 = 2n - 6$, което искахме да докажем.

Второ решение. Ще приведем друго доказателство на факта, че в изпъкнал n -ъгълник могат да се построят най-много $2n - 6$ диагонала по описания начин.

Ще отцветяваме построените диагонали в синьо и червено по следното правило. Отцветяваме първия диагонал в синьо. Ако някой построен диагонал пресича син, отцветяваме го в червено, а иначе в синьо. Ясно, е че едноцветните диагонали не се пресичат във вътрешни точки.

Ще докажем, диагоналите от всеки цвят са не повече от $n - 3$; следователно техният общ брой е най-много $2(n - 3)$. Наистина, нека имаме k едноцветни диагонали. Тъй като те нямат общи точки, те разделят n -ъгълника на $k + 1$ многоъгълници. Всеки от тези многоъгълници има поне три страни и значи общият брой S на техните страни е поне $3(k + 1)$. От друга страна, страните на тези многоъгълници са построените диагонали (всеки броен по два пъти) и страните на дадения n -ъгълник (броени по веднъж). Тогава $S = n + 2k$. И така, $n + 2k \geq 3(k + 1)$ или $k \leq n - 3$, което трябваше да докажем.

Задача 9.4. Съществуват ли три взаимно прости естествени числа, та-

кива, че квадратът на всяко се дели на сумата на другите две?

Отговор. Не съществуват.

Първо решение. Да допуснем противното, т. е. има такива числа a , b и c . Да забележим, че $a + b$, $b + c$ и $c + a$ са взаимно прости числа. Наистина, нека например $a + b$ и $b + c$ се делят на някое просто число p . Тъй като $c^2 \vdots (a + b)$ и $a^2 \vdots (b + c)$, то c и a също се делят на p , а тогава и $b = (a + b) - a$ се дели на p , което е противоречие.

По-нататък, понеже $a^2 \vdots (b + c)$, то числото $(a + b + c)^2 = a^2 + (b + c)(2a + b + c)$ се дели на $b + c$. Аналогично, това число се дели на $a + b$ и на $c + a$. Тъй като последните три числа са взаимно прости, то $(a + b + c)^2$ се дели на $(a + b)(a + c)(b + c)$; в частност, $(a + b + c)^2 \geq (a + b)(b + c)(c + a)$. От друга страна, ясно е, че числата a , b , c са не по-малки от 2 и значи

$$\begin{aligned}(a + b)(b + c)(c + a) &= (a^2b + b^2c + c^2a) + (ab^2 + bc^2 + ca^2) + 2abc > \\ &> (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) + (2ab + 2bc + 2ca) > (a + b + c)^2,\end{aligned}$$

което е противоречие.

Второ решение. Както в първото решение, да забележим, че числата $a + b$, $b + c$ и $c + a$ са взаимно прости. Нека $a \geq b \geq c$. Числото $b^2 + c^2 - a^2 = (b + a)(b - a) + c^2$ се дели на $b + a$; аналогично, то се дели и на $c + a$. Значи $b^2 + c^2 - a^2 \vdots (a + b)(a + c)$. От друга страна,

$$-(a + b)(a + c) < -a^2 < b^2 + c^2 - a^2 \leq a^2 < (a + b)(a + c).$$

Това е възможно само при $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, т. е. $a^2 = b^2 + c^2$.

И така, $a^2 = b^2 + c^2 \vdots (b + c)$. Тогава числото $2b^2 = (b^2 + c^2) + (b - c)(b + c)$ също се дели на $b + c$. Тъй като числа b и $b + c$ са взаимно прости числа, то $2 \vdots (b + c)$, откъдето $b = c = 1$. Тогава $1 = c^2$ не може да се дели на $a + b > 1$, което е противоречие.

Задача 9.5. Дадени са 2011 естествени числа. На дъската са написани всичките $2011 \cdot 2010 / 2$ суми на двойки от тези числа. Може ли точно три от тези суми да се делят на 3 и точно три от тях да дават остатък 1 при деление на 3?

Отговор. Може.

Решение. Нека a , b и c са броят на числата, които дават остатък 0, 1 и 2 при деление на 3. Тогава условието приема вида

$$\frac{a(a-1)}{2} + bc = \frac{b(b-1)}{2} + ca = \frac{c(c-1)}{2} + ab, \quad a + b + c = 2011.$$

Лесно се проверява, че например $a = b = 670$ и $c = 671$ изпълняват тези равенства.

Забележка. Пример за 2011 числа са числата от 1 до 2011.

Освен това, горната система може да реши напълно. Наистина, от първото равенство имаме, че $(a-b)(a+b-1-2c) = 0$ и понеже $a+b+c = 2011$, то $a = b$ или $c = 670$. Предвид и второто равенство получаваме, че решенията са $(670, 670, 671)$, $(670, 671, 670)$ и $(671, 670, 670)$.

Задача 9.6. В тетрадките на Петя и Коля са записани по две числа; отначало 1 и 2 при Петя, и 3 и 4 при Коля. Всяка минута Петя образува квадратен тричлен $f(x)$ с корени записаните в тетрадка му две числа, а Вася – квадратен тричлен $g(x)$ с корени записаните в неговата тетрадка две числа. Ако уравнението $f(x) = g(x)$ има два различни реални корена, то едно от момчетата заменя своята двойка от числа с тези корени (иначе нищо не се случва). Ако в някой момент се появи числото 5 в тетрадката на Петя, какво може да е другото число там?

Отговор. 14/5.

Първо решение. Към всяка от тетрадките ще добавяме някакъв квадратен тричлен с корени съответните числа. Нека в някой момент са записани тричлените $p(x)$ и $q(x)$. Тогава решаваното уравнение има вида $\alpha p(x) = \beta q(x)$, където α и β са ненулеви реални числа. Значи получените числа са корени на тричлена $\alpha p(x) - \beta q(x)$. Ако някое от момчетата смени числата си с тези корени, то можем да считаме, че заедно с тях е записан и тричлена $\alpha p(x) - \beta q(x)$.

Нека $p_0(x) = (x-1)(x-2)$ и $q_0(x) = (x-3)(x-4)$. От казаното по-горе следва, че на всеки ход във всяка от тетрадките е записан тричлен от вида $\alpha p_0(x) + \beta q_0(x)$.

И така, ако числото 5 се появи в някоя от тетрадките, то там е записан тричлена $a(x-5)(x-x_2) = \alpha(x-1)(x-2) + \beta(x-3)(x-4)$. При $x = 5$ следва, че $12\alpha + 2\beta = 0$, откъдето $\alpha(x-1)(x-2) + \beta(x-3)(x-4) = \alpha(-5x^2 + 39x - 70) = -\alpha(x-5)(5x-14)$. Значи другото число е равно на $x_2 = \frac{14}{5}$.

Второ решение. От числата във всяка от тетрадките ще изваждаме $\frac{5}{2}$. С други думи, въвеждаме новата променлива $t = x - \frac{5}{2}$. Тогава началните числа стават равни на $-\frac{3}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ в тетрадката на Петя, и $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$ в тетрадката на Вася, а тричлените $f(x)$ и $g(x)$ се заменят с нови тричлени $F(t)$ и $G(t)$.

Ще покажем, че сега произведението на двете числа във всяка от тетрадките винаги е равно на $\frac{3}{4}$. Това е вярно в началото. Да допуснем, че това е вярно и преди някоя смяна на числата. От формулите на Виет следва, че $F(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1$, където $\frac{c_1}{a_1} = \frac{3}{4}$, и $G(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2$, където $\frac{c_2}{a_2} = \frac{3}{4}$. Новата двойка числа t_1 и t_2 са корени на уравнението $F(t) = G(t)$, т. е. $(a_1 - a_2)t^2 + (b_1 - b_2)t + (c_1 - c_2) = 0$. Пак от формулите на Виет получаваме, че

$$t_1t_2 = \frac{c_1 - c_2}{a_1 - a_2} = \frac{\frac{3}{4}a_1 - \frac{3}{4}a_2}{a_1 - a_2} = \frac{3}{4},$$

което трябваше да докажем.

И така, ако в някой момент едно от числата е равно на $t_1 = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$, то другото е $t_2 = \frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \frac{3}{10}$, откъдето $x_2 = \frac{3}{10} + \frac{5}{2} = \frac{14}{5}$.

Забележка. Описаната ситуация може да се получи и след един ход; например, ако Петя образува тричлена $x^2 - 3x + 2$, а Вася – тричлена $6x^2 - 42x + 72$.

Задача 9.7. Точка T върху страната AC на равностраничен $\triangle ABC$ и точки M и N съответно върху дъгите AB и BC от описаната около него окръжност са такива, че $MT \parallel BC$ и $NT \parallel AB$. Отсечките AN и MT се пресичат в точка X , а отсечките CM и NT – в точка Y . Да се докаже, че периметрите $AXYC$ и $XMBNY$ са равни.

Първо решение. Нека ℓ е допирателната към описаната окръжност в точката B , а P и Q са пресечните точки на ℓ съответно с лъчите TM и TN . Да означим с K и L точките, в които съответно лъчите TM и TN пресичат страните на триъгълника.

Да забележим, че четириъгълниците $ABQT$ и $BCTP$ са успоредници, откъдето $AT = BQ$ и $CT = BP$. По-нататък, от успоредността следва, че $\sphericalangle KPB = \sphericalangle PBK = \sphericalangle LTC = 60^\circ$, т. е. триъгълниците BPK и CLT са равностранични. Тъй като $BP = CT$, то тези триъгълници са еднакви. От свойството на вписаните ъгли имаме, че $\sphericalangle KBM = \sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM = \sphericalangle TCU$. Значи точките M и Y са съответни в горните равностранични триъгълници, откъдето $BM = CY$ и $PM = LY$. Аналогично $BN = AX$ и $QN = KX$.

И така, $XM + YN = KX + KM + LY + LN = QN + KM + PM + LN = QL + KP$. Понеже $QL = BQ = AT$ и $KP = BP = CT$, следва, че $XM + YN = AT + CT = AC$.

Накрая получаваме, че $P_{XMBNY} = (XM + YN) + BM + BN + XY = AC + CY + AX + XY = P_{AXYC}$, което трябваше да се докаже.

Второ решение. Ще използваме следната известна лема, която следва от теоремата на Птолемей (за вписан четириъгълник).

Лема. Нека W е точка от по-малката дъга PR от описаната около равностраничен $\triangle PQR$ окръжност. Тогава $PW + RW = QW$.

Преминаваме към решението на задачата. От успоредността имаме, че $\sphericalangle ATX = \sphericalangle XTY = \sphericalangle CTY = 60^\circ$. Освен това, $\sphericalangle AMY = \sphericalangle ABC = 60^\circ$. Тогава $\sphericalangle AMY + \sphericalangle ATY = 180^\circ$ и значи точките A, M, Y, T лежат на една окръжност.

По-нататък, $\sphericalangle MAY = \sphericalangle MTY = 60^\circ$, което показва, че $\triangle MAY$ е равностраничен, а T е точка от дъгата AY на описаната около него окръжност. Тогава от лемата следва, че $AT + TY = MX + TX$. Аналогично $CT + TX = NY + TY$. Като съберем тези две равенства, получаваме, че $AC = AT + TC = MX + NY$.

За $\triangle ABC$ и точка M пак от лемата имаме, че $AM + MB = MY + YC$ и понеже $AM = MY$, то $CY = MB$. Аналогично $AX = BN$.

И така, $P_{AXYC} = AC + AX + CY + XY = (MX + NY) + BN + BM + XY = P_{XMBNY}$, с което задачата е решена.

Задача 9.8. В някои от клетките на дъска 100×100 са поставени пулове. Една клетка се нарича *красива*, ако има пулове в четен брой от съседните ѝ по страна клетки. Може ли точно една от клетките да е красива?

Отговор. Не може.

Решение. Ще използваме следната

Лема. За всяка клетка X от дъската съществува множество S от четен брой клетки, което съдържа X и такова, че всяка клетка от дъската има четен брой съседи от S .

Доказателство. Да оцветим дъската шахматно; можем да считаме, че X е черна клетка. Да разгледаме един от диагоналите през X . Нека A и B са центровете на двете крайни клетки от този диагонал, а C и D са симетричните им точки спрямо центъра на дъската. Означаваме с S

множеството от всички черни клетки, центровете на които лежат вътре или по контура на правоъгълника $ABCD$. Това множество съдържа четен брой клетки, тъй като броят на центровете на клетките, които лежат на AB е с различна четност от броя на тези на AD . По-нататък, черните клетки нямат съседни от S , всяка бяла клетка вътре в $ABCD$ граничи с четири клетки от S , а всяка бяла клетка вън от $ABCD$ клетка граничи с 0 или 2 клетки от S . И така, множеството S изпълнява всички условия. С това лемата е доказана.

Преминаваме към решението на задачата. Да допуснем, че съществува точно една красива клетка X . За тази клетка разглеждаме множеството S от лемата. Във всяка клетка от това множество записваме броя на пуловете в съседните ѝ клетки и с g означаваме сумата на написаните числа. Тъй като S съдържа четен брой клетки, точно една от които е красива, то g е нечетно число. От друга страна, всяка клетка с пул има четен брой съседни от S и значи нейният принос в g е четно число. Следователно и g е четно число, което е противоречие.

Задача 10.1. Във всяка клетка на таблица от 10 стълба и n реда е записана цифра. Известно е, че за всеки ред A и всеки два стълба съществува ред, който се различава от A точно в тези два стълба. Да се докаже, че $n \geq 512$.

Решение. Нека R_0 е първият ред на таблицата. Да разгледаме произволен набор от четен брой стълбове и да ги номерираме от ляво надясно: $C_1, \dots, C_{2m}$. Тогава в таблицата има ред R_1 , който се различава от R_0 само в стълбовете C_1 и C_2 ; по-нататък, има ред R_2 , който се различава от R_1 само в стълбовете C_3 и C_4 ; $\dots$; накрая, съществува ред R_m , който се различава от R_{m-1} само в стълбовете C_{2m-1} и C_{2m} (ако $m = 0$, то $R_m = R_0$). И така, редът R_m се различава от R_0 само в стълбовете $C_1, C_2, \dots, C_{2m}$. Значи редовете R_m , образувани от различните набори стълбове, са различни. Тъй като броят на наборите от четен брой стълбове е равен на $2^{10}/2 = 512$, то и броят на редовете в таблицата е не по-малък от 512.

Забележка. В таблицата може да има точно 512 реда – например, ако в тях са записани всички 512 редици от 10 нули и единици, като нулите са четен брой.

Задача 10.2. Дадени са девет квадратни тричлена: $x^2 + a_1x + b_1, \dots, x^2 + a_9x + b_9$. Числата $a_1, \dots, a_9$ и $b_1, \dots, b_9$ образуват аритметични прогресии.

Известно е, че сумата на деветте тричлена има реален корен. Колко най-много от тези тричлени могат да нямат реален корен?

Отговор. 4.

Решение. Нека $P_i(x) = x^2 + a_i x + b_i$, $P(x) = P_1(x) + \dots + P_9(x)$. Да забележим, че $P_i(x) + P_{10-i}(x) = 2x^2 + (a_i + a_{10-i})x + (b_i + b_{10-i}) = 2P_5(x)$. Значи $P(x) = 9P_5(x)$ и условието е еквивалентно на това, че $P_5(x)$ има поне един реален корен.

Да означим с x_0 някой от тези корени. Тогава $P_i(x_0) + P_{10-i}(x_0) = 2P_5(x_0) = 0$, т. е. или $P_i(x_0) \leq 0$, или $P_{10-i}(x_0) \leq 0$. Тъй като старшите коефициенти на тричлените са положителни, то във всяка от двойките (P_1, P_9) , (P_2, P_8) , (P_3, P_7) , (P_4, P_6) поне един от тричлените има поне един реален корен. Значи поне пет тричлена имат реален корен и следователно най-много четири тричлена нямат реален корен.

Остана да приведем пример, когато точно пет тричлена (като един от тях е P_5) имат реален корен. Можем да изберем, например, тричлените $x^2 - 4$, $x^2 - 3$, $x^2 - 2$, $\dots$, $x^2 + 4$.

Задача 10.3. Група от хора се нарича k -неразбиваема, ако при всяко нейно разбиване на k групи съществува група с поне двама познати. Дадена е 3-неразбиваема група, в която няма четири човека, всеки двама от които се познават. Да се докаже, че тази група може да се раздели на две групи, едната от които е 2-неразбиваема, а другата – 1-неразбиваема.

Решение. Да допуснем противното. Да разгледаме граф G , в който хората са върхове, като между двама има ребра, ако те са познати. Тогава графът е k -разбиваем, ако неговите върхове могат да бъдат оцветени правилно в k цвята (т. е. съседните върхове имат различни цветове). Ще използваме следната известна

Лема. Ако в даден граф няма цикъл с нечетна дължина, то той е 2-разбиваем.

Доказателство. Достатъчно е да докажем лемата за свързан граф.

Фиксираме връх A и оцветяваме върховете на нечетно разстояние от A в червено, останалите в синьо. При това оцветяване съседните върхове имат различни цветове. Да допуснем противното, т. е. съществува ребро между, например, червени върхове B и C . Да разгледаме пътища $A = B_0, B_1, \dots, B_{2n-1} = B$ и $A = C_0, C_1, \dots, C_{2m-1} = C$ с минимална дължина от A до B и до C . Избирайки максималния индекс i , за който $B_i = C_i$, получаваме

цикълът с нечетна дължина $B_i, B_{i+1}, \dots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, C_{2m-2}, \dots, C_i = B_i$, което е противоречие. С това лемата е доказана.

От лемата следва, че в нашия граф G има цикъл с нечетна дължина (иначе можем да го оцветим даже в два цвята). Да изберем в G цикъл C с минимална нечетна дължина n . Тогава няма ребра между върхове от цикъла, освен ребрата на самия цикъл. Наистина, ако има такова ребро, то ще разделя цикъла на два по-къси цикъла, като дължината на единия ще е нечетна – противоречие.

По-нататък, ще покажем, че всеки връх x , който не е от C , е свързан най-много с два върха от C . Това е вярно, ако C има точно три върха, защото иначе x и тези върхове образуват група от четири човека, всеки двама от които се познават.

Нека сега цикълът C има повече от три върха. Да допуснем, че x е съсед с върховете v_1, v_2, v_3 от C . Частта от цикъла между кои да е два от тези три върха, например между v_1 и v_2 , съдържа нечетен брой ребра d . Ако $d < n - 2$, то тази част и върхът x образуват цикъл с нечетна дължина $d + 2 < n$, което е противоречие. Следователно $d \geq n - 2$ и значи върховете v_1, v_3, v_2 са последователни в цикъла. Тогава v_1, v_3, x е цикъл с дължина 3, което е невъзможно.

Вече можем да построим исканото разделяне: в едната група поставяме върховете от C , а в другата (да я наречем D) – всички останали върхове. Цикълът C очевидно е 2-неразбиваем. Остава да покажем, че в D има ребро (т.е. D е 1-неразбиваема). Допускайки обратното, ще покажем, че G може да бъде оцветен правилно в три цвята, което ще е противоречие. Избираме връх на C и го оцветяваме в цвят 3, а останалите върхове на C – последователно в цветовете 1 и 2. Тъй като между върховете на C няма други ребра освен от самия цикъл, то това негово оцветяване е правилно. Накрая, понеже всеки връх от D няма съсед в D и има най-много двама съседа от C , той може да бъде оцветен в цвят различен от тези на съседите му, което осигурява желаното оцветяване.

Задача 10.4. Даден е $\triangle ABC$ с периметър 4. Точки X и Y върху лъчите AB и AC са такива, че $AX = AY = 1$. Отсечките BC и XY се пресичат в точка M . Да се докаже, че периметърът на един от триъгълниците ABM и ACM е равен на 2.

Решение. Тъй като отсечките BC и XY се пресичат, без ограничение можем да считаме, че $AB > AX$ и $AC < AY$.

Нека външноописаната окръжност ω за $\triangle ABC$ към страната BC се допира до нея в точка R и до продълженията на страните AB и AC съответно в точки P и Q . Нека J е центърът на ω , а r – нейният радиус. Да означим с N средата на отсечката XY ; по симетрия следва, че $N \in AJ$ и $AN \perp XY$. Имаме, че $AP = AQ = \frac{1}{2}(AP + AQ) = \frac{1}{2}(AB + BP + AC + CQ) = \frac{1}{2}(AB + BR + AC + CR) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 2$. Оттук $AY = YQ = 1$.

Сега от Питагоровата теорема получаваме, че $MR^2 = MJ^2 - JR^2 = (MN^2 + NJ^2) - r^2 = MN^2 + (YJ^2 - YN^2) - r^2 = MN^2 + (YQ^2 + r^2) - (YA^2 - AN^2) - r^2 = MN^2 + AN^2 = AM^2$ (тъй като $YA = YQ$).

Тогава $AM = MR$ и периметърът на $\triangle ACM$ е равен на $AC + CM + AM = AC + CM + MR = AC + CR = AC + CQ = AQ = 2$.

Забележка. Пресмятанията могат да бъдат съкратени, ако се използва, че правата XY е радикалната ос на окръжността ω и точката A . Тъй като M лежи на тази права, следва, че $MR = MA$.

Задача 10.5. Дадени са 10 две по две различни числа. За всяка двойка от тях Вася записал квадрата на разликата им, а Петя – модула на разликата от техните квадрати. Може ли групата от 45 числа на Вася да съвпада с тази на Петя?

Отговор. Не може.

Решение. Да допуснем противното. Ако някое от дадените числа е равно на нула, то за всяко друго число a имаме, че $a^2 - 0^2 = (a - 0)^2$. Значи, ако махнем нулата, то остават девет числа, изпълняващи даденото условие.

И така, можем да считаме, че имаме 9 или 10 ненулеви числа. Нека не всичките имат един и същ знак и нека $a < 0 < b$ са минималното и максималното измежду тях. Тогава Вася е записал числото $(b - a)^2$, което е по-голямо от a^2 и b^2 . Тъй като записаните от Петя числа не надминават a^2 и b^2 , стигаме до противоречие.

Значи всички дадени числа имат един и същ знак; сменяйки ги, ако е необходимо, с противоположните им, можем да считаме, че те са положителни. Отново означаваме с a и b съответно минималното и максималното измежду тях. Имаме, че $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) > (a - b)^2 \geq (c - d)^2$, където c и d са произволни две от дадените числа. Тогава числото $b^2 - a^2$ не може да е записано от Петя, но е записано от Вася, което е противоречие.

Задача 10.6. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Точки P и Q върху про-

дълженията на височините BB_1 и CC_1 след точките B_1 и C_1 са такива, че $\sphericalangle PAQ = 90^\circ$. Нека AF е височина в $\triangle APQ$. Да се докаже, че $\sphericalangle BFC = 90^\circ$.

Решение. Точките B_1 и C_1 лежат на окръжността с диаметър BC . За да решим задачата, достатъчно е да докажем, че F също лежи на тази окръжност, т. е. че четириъгълникът CB_1FC_1 е вписан в окръжност.

Тъй като $\sphericalangle AB_1P = \sphericalangle AFP = 90^\circ$, то точките B_1 и F лежат на окръжността с диаметър AP . Следователно $\sphericalangle PFB_1 = \sphericalangle PAB_1$. Аналогично $\sphericalangle QFC_1 = \sphericalangle QAC_1$. Имаме, че $\sphericalangle B_1FC_1 = 180^\circ - \sphericalangle PFB_1 - \sphericalangle QFC_1 = 180^\circ - \sphericalangle PAB_1 - \sphericalangle QAC_1 = 180^\circ - (\sphericalangle PAQ - \sphericalangle B_1AC_1) = 90^\circ + \sphericalangle B_1AC_1 = 90^\circ + (90^\circ - \sphericalangle ACC_1) = 180^\circ - \sphericalangle B_1CC_1$. Значи CB_1FC_1 е вписан в окръжност четириъгълник.

Задача 10.7. За всеки две естествени числа $a > b > 1$ редицата $x_1, x_2, \dots$ се дефинира чрез равенството $x_n = \frac{a^n - 1}{b^n - 1}$. Да се намери най-малкото естествено число d такова, че за произволни a и b тази редица не съдържа d последователни члена, които са прости числа.

Отговор. 2.

Решение. При $a = 4, b = 2$ имаме, че $\frac{a^1-1}{b^1-1} = 3, \frac{a^2-1}{b^2-1} = 5$. Остава да покажем, че не могат да се срещнат едно след друго повече от две прости числа.

Ще докажем по-силно твърдение: при $n \geq 2$ поне едно от числата $\frac{a^n-1}{b^n-1}$ и $\frac{a^{n+1}-1}{b^{n+1}-1}$ не е просто. Да допуснем противното; тогава

$$(a-1)(a^{n-1} + \dots + a + 1) = p(b-1)(b^{n-1} + \dots + b + 1), \quad (1)$$

$$(a-1)(a^n + \dots + a + 1) = q(b-1)(b^n + \dots + b + 1), \quad (2)$$

където p и q са прости числа.

Да предположим, че $a-1$ не се дели на $b-1$. Тогава някое просто число r участва в каноничното разлагане на $b-1$ със степен, по-голяма от тази в разлагането на $a-1$. От (1) и (2) получаваме, че r е общ делител на $a^{n-1} + \dots + a + 1$ и $a^n + \dots + a + 1$, но

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a^{n-1} + \dots + a + 1, a^n + \dots + a + 1) &= \\ &= \text{НОД}(a^{n-1} + \dots + a + 1, a^n) = 1, \end{aligned}$$

което е противоречие.

И така, числото $k = \frac{a-1}{b-1}$ е цяло. От (1) имаме, че

$$k(a^{n-1} + \dots + a + 1) = p(b^{n-1} + \dots + b + 1).$$

Да отбележим, че $1 < k < p$, понеже $b^{n-1} + \dots + b + 1 < a^{n-1} + \dots + a + 1$.

Значи $\text{НОД}(k, p) = 1$ и следователно $b^{n-1} + \dots + b + 1 \vdots k$. Аналогично от (2)

следва, че $k < q$ и $b^n + \dots + b + 1 \vdots k$. Това обаче противоречи на факта, че $\text{НОД}(b^{n-1} + \dots + b + 1, b^n + \dots + b + 1) = 1$.

Забележка. Две последователни прости числа в такава редица могат да бъдат всеки две прости числа от вида $p = b + 1$, $q = b^2 + 1$. Наистина, ако $a = b^2$, то $p = \frac{a-1}{b-1}$, $q = \frac{a^2-1}{b^2-1}$. Такива двойки са например $(7, 37)$, $(11, 101)$ и $(2^{2^3} + 1, 2^{2^4} + 1)$.

Задача 10.8. Квадрат 2010×2010 е разрязан на триклетъчни ъгълчета (т. е. L -образни фигури). Да се докаже, че във всяко ъгълче може да се отбележи по една клетка така, че във всеки ред и всеки стълб да има равен брой маркирани клетки.

Решение. Нека $n = 2010/3 = 670$. Линия ще наричаме кой да е ред или стълб; номерираме редовете отгоре надолу, а стълбовете – отляво надясно. Да забележим, че за да изпълним условието, достатъчно е, за всяко k левите k стълба и горните k реда да съдържат по kn маркирани клетки.

Ще казваме, че ъгълче *гледа от i -ия стълб наляво*, ако негови две клетки се намират в този стълб, а третата е по-наляво. Аналогично дефинираме погледи в другите три направления; така всяко ъгълче гледа в три направления.

Да отбележим отначало средната клетка във всяко ъгълче. Във всяко ъгълче можем да оставим тази клетка маркирана или да я придвижим в едно от направленията, в които гледа ъгълчето.

Сега ще видим как можем да направим тези придвижвания, за да изпълним условието.

Да наложим едно допълнително условие: придвижванията между две съседни линии да бъдат в една посока. Разглеждаме например два съседни стълба: k -ят и $(k+1)$ -ят. Да допуснем, че в даден момент в левите k стълба има $d_k \geq nk$ отбелязани клетки. По-нататък, нека в k -я стълб има a_k ъгълчета, гледащи надясно, а в $(k+1)$ -я – b_k ъгълчета, гледащи наляво.

Тогава в първите k стълба има $\frac{3kn-2a_k-b_k}{3}$ цели ъгълчета и значи $d_k = \frac{3kn-2a_k-b_k}{3} + a_k = kn + \frac{a_k-b_k}{3}$. Следователно, за да получим необходимия брой маркирани клетки, трябва да придвижим $s_k = \frac{a_k-b_k}{3} \leq \frac{a_k}{3}$ от маркираните клетки от k -я стълб надясно. В този случай отделяме $s_k = \frac{a_k-b_k}{3}$ непресичащи се двойки от a_k ъгълчета, гледащи от k -я стълб надясно и придвижваме надясно клетка от точно един ъгъл от всяка двойка. Аналогично, ако $d_k < nk$, то отделяме $\frac{b_k-a_k}{3}$ непресичащи се двойки от b_k ъгълчета, гледащи от $(k+1)$ -я стълб наляво.

Извършвайки тази операция със всяка двойка съседни линии, получаваме определен брой отделени двойки ъгълчета. Във всяка от тези двойки трябва да изберем по едно ъгълче така, че избраните ъгълчета да са различни. Остава да покажем, това е възможно.

Съединяваме две ъгълчета от една и съща двойка с ребро. Да забележим, че всяко ъгълче участва най-много в две двойки (по една във двете направления, в които то гледа). Получаваме граф, в който от всеки връх излизат най-много две ребра. Тогава той се разпада на цикли и пътища. За всеки цикъл $U_1 - U_2 - \dots - U_n - U_1$ във двойката (U_i, U_{i+1}) избираме ъгъла U_i ($1 \leq i \leq n$, $U_{n+1} = U_1$). Подобна операция извършваме и с пътищата. Сега е ясно, че всички условия са изпълнени, с което задачата е решена.

Задача 11.1. Нека d и d' ($d' > d$) са естествени делители на естественото число n . Да се докаже, че $d' > d + \frac{d^2}{n}$.

Решение. Тъй като числата $f = n/d$ и $f' = n/d'$ са цели, а $f > f'$, то $f - f' \geq 1$, т. е.

$$1 \leq \frac{n}{d} - \frac{n}{d'} = \frac{(d' - d)n}{dd'} < \frac{(d' - d)n}{d^2}.$$

Умножавайки по $\frac{d^2}{n}$, получаваме, че $d' - d > \frac{d^2}{n}$, което трябваше да докажем.

Задача 11.2. Точка T от страната BC на успоредника $ABCD$ ($\nexists A < 90^\circ$) е такава, че $\triangle ATD$ е остроъгълен. Нека O_1 , O_2 и O_3 са центровете на описаните окръжности около $\triangle ABT$, $\triangle DAT$ и $\triangle CDT$. Да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle O_1O_2O_3$ лежи на правата AD .

Първо решение. Ще използваме следния известен факт, доказателството на който предоставям на читателя.

Лема. Симетричната точка на ортоцентъра на триъгълник лежи на описаната около триъгълника окръжност.

Преминуваме към решението на задачата. Да забележим, че O_1O_2 и O_3O_2 са симетралите на отсечките AT и DT . Значи $\sphericalangle AO_1O_2 = \sphericalangle TO_1O_2 = \sphericalangle TBA$ (тъй като $\sphericalangle TO_1A$ е централен за описаната около $\triangle ABT$ окръжност). Аналогично $\sphericalangle DO_3O_2 = \sphericalangle TO_3O_2 = \sphericalangle TCD$. Оттук получаваме, че $\sphericalangle TO_1O_2 + \sphericalangle TO_3O_2 = 180^\circ$. И така, точките T, O_1, O_2, O_3 лежат на една окръжност ω . По симетрия $\sphericalangle O_1TO_2 = \sphericalangle O_1AO_2$. Значи окръжността α , описана около $\triangle AO_1O_2$, съвпада с ω . Аналогично окръжността δ , описана около $\triangle DO_3O_2$, също съвпада с ω .

Съгласно лемата ортоцентърът H на $\triangle O_1O_2O_3$ лежи на α и δ , т. е. е тяхната втора пресечна точка. Нека H' е втората пресечна точка на α и правата AD . Тогава $\sphericalangle AH'O_2 = 180^\circ - \sphericalangle AO_1O_2 = \sphericalangle DO_3O_2$ и значи $H' \in \delta$. Следователно $H' = H$ и $H \in AD$.

Второ решение. Отново ще използваме, че O_1O_2 и O_2O_3 са симетралите на отсечките AT и DT . Значи височините през върховете O_1 и O_3 на $\triangle O_1O_2O_3$ са успоредни на съответно на правите DT и AT . Нека H е пресечната точка на височината през O_1 със страната AD . Имаме да покажем, че $O_3H \parallel AT$.

Да означим с A_1, D_1 и T_1 средите съответно на страните DT, AT и AD на $\triangle ADT$, а с α, δ, τ – неговите ъгли съответно при върховете A, D, T . Тогава $\sphericalangle TO_1D_1 = 180^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle TO_3A_1$. Значи правоъгълните триъгълници TO_1D_1 и TO_3A_1 са подобни и $\frac{D_1O_1}{A_1O_3} = \frac{D_1T}{A_1T} = \frac{AT}{DT} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha}$.

По-нататък, тъй като $O_1H \parallel D_1T_1$, то разстоянията от точките O_1 и H до правата D_1T_1 са равни, т. е. $\frac{T_1H}{D_1O_1} = \frac{\sin O_1D_1T_1}{\sin HT_1D_1} = \frac{\cos \tau}{\sin \delta}$. И така,

$$\frac{T_1H}{A_1O_3} = \frac{T_1H}{D_1O_1} \cdot \frac{D_1O_1}{A_1O_3} = \frac{\cos \tau}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} = \frac{\cos \tau}{\sin \alpha},$$

или все едно $\frac{T_1H}{A_1O_3} = \frac{\sin O_3A_1T_1}{\sin A_1T_1H}$. Това означава, че точките O_3 и H са на равни разстояния от A_1T_1 , т. е. $O_3H \parallel A_1T_1$, което трябваше да докажем.

Задача 11.3. В Академията на науките има 999 академици. От всяка дисциплина се интересуват точно трима академици. За всяка двойка академици съществува точно една дисциплина, от която се интересуват и двамата. Да се докаже, че съществуват 250 дисциплини така, че всеки академик се интересува от не повече от една от тях.

Решение. Ще казваме, че две дисциплини се *пресичат* по академик, ако той се интересува и от двете (от условието следва, че има най-много един такъв академик).

Да разгледаме максималния брой непресичащи се дисциплини; нека те са $T_1, \dots, T_k$. Да допуснем, че $k \leq 249$. Да означим с S множеството на всички академици, които не се интересуват от тези теми; броят на академиките от S е $s = 999 - 3k \geq 252$.

За всяка двойка академици $a, b \in S$ съществува точно една дисциплина $T(a, b)$, от която се интересуват и двамата. Друг академик, който се интересува от нея, не може да е от S (иначе можем да добавим дисциплината към горните k дисциплини). Значи този академик се интересува от някаква дисциплина T_i . Да съпоставим на тази дисциплина (и академика) двойката (a, b) .

Понеже дисциплините са k на брой, а двойките академици — $\frac{s(s-1)}{2}$, то на някоя дисциплина T_i са съпоставени поне $\frac{s(s-1)}{2k} > \frac{s}{2}$ двойки. Да ги означим с $(a_1, b_1), \dots, (a_d, b_d)$. Нека от дисциплината T_i се интересуват академиците x, y, z . Тъй като $d > \frac{s}{2} > 6$, то на някой от тях са съпоставени поне три двойки (a_j, b_j) ; нека например на x са съпоставени точно двойките $(a_1, b_1), \dots, (a_p, b_p)$ ($p \geq 3$).

Да забележим, че всички двойки $(a_1, b_1), \dots, (a_p, b_p)$ не се пресичат (ако един академик a е общ за две от тях, то a и x ще се интересуват от поне две общи теми). Значи $p \leq \frac{s}{2} < d$. Тогава двойката (a_{p+1}, b_{p+1}) съществува и не се пресича с една от двойките $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$, например с (a_1, b_1) . Следователно можем да махнем T_i от нашите дисциплини и да добавим непресичащите си дисциплини $T(a_1, b_1)$ и $T(a_{p+1}, b_{p+1})$, което е противоречие с максималността на k .

Задача 11.4. 10 автомобиля се движат по прав еднопосочен път. Пътят минава през няколко града. Всеки автомобил се движи с постоянна скорост в градовете и с постоянна скорост извън градовете (скоростите могат да бъдат различни за различните автомобили). По пътя са поставени 2011 знаменца. Всеки автомобил минава покрай всички знаменца, като няма изпреварвания покрай знаменцата. Да се докаже, че съществуват две знаменца така, че автомобилите минават покрай тези знаменца в един и същ ред.

Решение. Въвеждаме в пространството координатна система $Oxyt$. Да означим с M точката на пътя, където отначало се е намирал първият автомобил. На всяка точка A от пътя съпоставяме точката T_A от равнината Oxy с координата $T_A(x_A, y_A)$, където x_A е общата дължина на участъците от пътя AM в градовете, а y_A — извън градовете. Тогава пътят се изобразява като начупена линия в тази равнина.

По-нататък, за i -ия автомобил да начертаем графиката на движението му, която се състои от всички точки $X_{i,A} = (x_A, y_A, t_{i,A})$, където $t_{i,A}$ е моментът, в който автомобилът се е намирал в точка A . Ако този автомобил е бил в точка M в момента t_i , а неговите скорости в градовете и извън тях са съответно u_i и v_i , то $t_{i,A} = t_i + x_A/u_i + y_A/v_i$; значи графиката на движението на i -ия автомобил лежи в равнината α_i с уравнение $t = t_i + x/u_i + y/v_i$.

Да разгледаме сега реда, в който автомобилите минават покрай някое знаменце F . Той съвпада с реда, в който равнините α_i пресичат правата, успоредна на Ot и минаваща през точката T_F . Нека за две знаменца F и G този ред е различен (например, първите два автомобила са минали в различен ред). Тогава отсечките $X_{1,F}X_{1,G}$ и $X_{2,F}X_{2,G}$ се пресичат. Ако проектираме пресечната права на равнините α_1 и α_2 в равнината Oxy , то точките T_F и T_G ще лежат от различни страни на получената проекция ℓ_{12} .

Да разгледаме накрая всички прави ℓ_{ij} . Не е трудно да се докаже с индукция по n , че n прави разделят равнината на най-много $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ части. Тъй като нашите прави са не повече от $C_{10}^2 = 45$, то те разделят равнината на най-много $\frac{45 \cdot 46}{2} + 1 = 1036$ части. Значи за някои две от 2011-те знаменца, например F и G , точките T_F и T_G ще бъдат в една и съща част. Тогава никоя проекция на правите не ги разделя и следователно редът на преминаване на автомобилите покрай F и G е един и същ.

Забележка. Да отбележим, че 45 прави разделят равнината на точно 1036 части само когато някои две от тях не са успоредни и някои три не минават през една точка. В нашия случай пресечните прави на кои да е три равнини α_i , α_j , α_k са или успоредни, или минават през една точка. Значи техните проекции имат същото свойство и следователно равнината се разделя на по-малко от 1036 части.

Задача 11.5. Нека F и G са кубични полиноми със старши коефициенти 1. На дъската са написани всички реални корени на уравненията $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ и $F(x) = G(x)$. Оказало се, че са написани 8 различни числа. Да се докаже, че най-малкото и най-голямото от тях не могат да бъдат едновременно корени на F .

Решение. Да забележим, че полиномите $F(x)$ и $G(x)$ имат най-много по три корена, а полиномът $F(x) - G(x)$ (от степен, по-малка от 3) – не повече от два корена. Тъй като числата са общо 8, то $F(x)$ и $G(x)$ имат по три различни реални корени, а $F(x) - G(x)$ – два.

Да допуснем, че твърдението на задачата не е вярно. Нека a и b са

съответно минималното и максималното от написаните числа. Тогава $F(a) = F(b) = 0$. Тъй като корените на $G(x)$ лежат в интервала (a, b) , то $G(a) < 0$ и $G(b) > 0$. От друга страна, квадратният тричлен $F(x) - G(x)$ има два корена в този интервал и значи числата $F(a) - G(a) = -G(a)$ и $F(b) - G(b) = -G(b)$ имат един и същ знак, което е противоречие.

Задача 11.6. Дадена е купчинка с повече от n^2 камъчета. Петя и Вася един след друг вземат камъчета (Петя е първи). На всеки ход е разрешено да се взема или просто число камъчета, по-малко от n , или кратен на n брой камъчета, или едно камъче. Печели този, който вземе последното камъче. Да се докаже, че Петя има печеливша стратегия.

Решение. Да допуснем противното, т.е. Вася може винаги да пречи на Петя да вземе последното камъче. Понеже във всяка ситуация без крайната може да се направи ход, това означава, че Вася има стратегия при която със сигурност той взема последното камъче. Нека d е броят на камъчетата отначало, а r е остатъкът на d при деление на n . Ясно е, че $r \neq 0$, иначе Петя може да вземе на първия ход всички камъчета.

За всяко $0 \leq k \leq n - 1$ на първия си ход Петя може да вземе такъв кратен на n брой камъчета, че да останат $a_k = r + nk$ на брой камъчета ($a_k < n^2$). Нека вземането на c_k камъчета е стратегията на Вася при останали a_k камъчета. Тогава c_k не се дели на n , тъй като иначе след хода на Вася остават $r + n(k - \frac{c_k}{n})$ камъчета и Петя може да победи като действа по стратегията на Вася за този брой камъчета. Значи $c_k < n$ за всяко $0 \leq k \leq n - 1$, а тогава две от тези числа са равни, например $c_k = c_\ell$ при $0 \leq k < \ell \leq n - 1$. Да припомним, че Вася има стратегия как да вземе последното камъче, ако са останали $a_k - c_k$ и на ход е Петя.

Нека първият ход на Петя е такъв, че след него остават a_ℓ камъчета; след него Вася взема c_ℓ камъчета. Сега Петя може да вземе $n(\ell - k)$ камъчета, оставайки $a_\ell - c_\ell - n(\ell - k) = a_k - c_k$ камъчета и след това да следва споменатата по-горе стратегия на Вася. Следователно Петя печели, което е противоречие.

Задача 11.7. За всяко естествено число a с $P(a)$ е означен най-големият прост делител на числото $a^2 + 1$. Да се докаже, че съществуват безбройно много тройки от различни естествени числа a, b, c такива, че $P(a) = P(b) = P(c)$.

Отначало ще наравим забележка, обща и за трите решения. Нека p е

нечетно просто число и $a < p$ е такова естествено число, че $a^2 + 1 \vdots p$. Тогава числата a и $p - a$ са различни и $P(a) = P(p - a) = p$. Наистина, числата $a^2 + 1$ и $(p - a)^2 + 1 = (a^2 + 1) + p(p - 2a)$ се делят на p и са по-малки p^2 ; значи не могат да се делят на прости числа, по-големи от p .

Първо решение. Да допуснем противното. Тогава съществуват краен брой прости числа p , за които уравнението $P(x) = p$ има поне три решения в естествени числа. Да означим с s максималното такова просто число (ако няма такива прости числа, полагаме $s = 2$), а с S – произведението на всички прости числа, ненадминаващи s .

Нека $p = P(S)$; тогава p е взаимно просто със S и значи $p > s$. Да означим с a остатък на S при деление на p ; имаме, че $a^2 + 1 \vdots p$ и следователно $P(a) = P(p - a) = p$. Ясно е, че едно от числата a и $p - a$ е четно; да го означим с b .

По-нататък, числото $(b + p)^2 + 1$ се дели на $2p$ (тъй като b е четно, а p – нечетно) и значи $P(b + p) \geq p$. Ако $P(b + p) = p$, то уравнението $P(x) = p$ има три решения: b , $p - b$, $p + b$; това е невъзможно съгласно нашето предположение. Тогава $P(b + p) = q > p$, числото $(b + p)^2 + 1$ се дели на $2pq$ и, в частност, е не по-малко от $2pq$. Това означава, че $q < b + p$ (иначе $(b + p)^2 + 1 \leq (2p - 1)q + 1 < 2pq$).

Накрая, ако c е остатъкът на $b + p$ при деление на q , то $P(c) = P(q - c) = P(b + p) = q > p > s$, което е противоречие с избора на s .

Второ решение. Ще използваме тъждеството

$$(m^2 + 1)((m - 1)^2 + 1) = (m^2 - m + 1)^2 + 1 \quad (*)$$

(което следва, например, след разкриване на скобите). Оттук следва, че $P(m^2 - m + 1) = \max(P(m), P(m + 1))$.

Както в предното решение, да допуснем противното. Нека N е най-голямото число, което се среща в описаните тройки; ако няма такива тройки, то полагаме $N = 3$. Понеже редицата от естествени числа $P(N + 1), P(N + 2), \dots$ не може да намалява строго, то за някое $n > N + 1$ имаме, че $P(n - 1) \leq P(n)$. Тогава $P(n^2 - n + 1) = \max(P(n), P(n - 1)) = P(n)$. Значи съществува число $n \leq m \leq n^2 - n + 1$ такава, че $P(m - 1) \leq P(m) \geq P(m + 1)$ (в противен случай $P(n - 1) \leq P(n) < P(n + 1) < \dots < P(n^2 - n + 1)$, което не е вярно).

Сега от $(*)$ следва, че $P(m^2 - m + 1) = \max(P(m), P(m - 1)) = P(m)$ и $P(m^2 + m + 1) = \max(P(m), P(m + 1)) = P(m)$. И така, тройката $m, m^2 -$

$m+1, m^2+m+1$ изпълнява условието и $m > N$, което противоречи на избора на N .

Трето решение. За всяко естествено число $n \geq 1$ разглеждаме числото $(2 + \sqrt{5})^{2n+1}$, което има вида $a_n + b_n\sqrt{5}$, където a_n и b_n са естествени числа (ясно е, че $a_n < a_{n+1}$). Да забележим, че $(2 - \sqrt{5})^{2n+1} = a_n - b_n\sqrt{5}$ и значи

$$a_n^2 - 5b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{5})(a_n - b_n\sqrt{5}) = ((2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}))^{2n+1} = -1.$$

Тогава $a_n^2 + 1 = 5b_n^2$, като е ясно, че $b_n < a_n$ и $a_n \geq 2^{2n+1} \geq 8$. Следователно всички прости делители на $a_n^2 + 1$ не надминават $\max(5, b_n) < a_n$.

И така, $p_n = P(a_n) < a_n$. От друга страна, $a_n^2 + 1 \leq 5a_n$, и значи $p_n \geq 5$. Ако c_n е остатъкът на a_n при деление на p_n , то числата $c_n, p_n - c_n, a_n$ са различни и $P(c_n) = P(p_n - c_n) = P(a_n)$. По този начин получихме безбройно много различни тройки с исканото свойство.

Забележка. Уравнението от вида $x^2 - Dy^2 = a$ се нарича *уравнение на Пел*. Добре е известно, че ако D не е точен квадрат и това уравнение има поне едно решение в естествени числа, то има безбройно много решения в естествени числа.

Задача 11.8. Нека N е средата на дъгата BAC от описаната около неравнобедрен $\triangle ABC$ окръжност, а M – средата на страната BC . С I_1 и I_2 са означени центровете на вписаните окръжности в $\triangle ABM$ и $\triangle ACM$. Да се докаже, че точките I_1, I_2, A и N лежат на една окръжност.

Първо решение. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, а J_1 и J_2 са центровете на външновписаните окръжности ω_1 и ω_2 , които се допират съответно до страните AB и AC . Правата AN е външна ъглополовяща на $\angle BAC$ и значи точките J_1 и J_2 лежат на нея. Нека K_1 и K_2 са допирните точки съответно на ω_1 и ω_2 с правата BC ; тогава правите NM, J_1K_1 и J_2K_2 са перпендикулярни на BC . Освен това, $BK_1 = \frac{AB+AC-BC}{2} = CK_2$ и значи $MK_1 = MK_2$. От теоремата на Талес следва, че $NJ_1 = NJ_2$.

По-нататък, $\angle J_1BJ_2 = \angle J_1CJ_2 = 90^\circ$ (като ъгли между вътрешна и външна ъглополовяща). Следователно точките B и C лежат на окръжността с диаметър J_1J_2 , откъдето имаме $\angle BCJ_1 = \angle BJ_2J_1$. Тогава $\triangle IBC \sim \triangle IJ_1J_2$ (по два ъгъла), а точките M и N са съответни в тези триъгълници като среди на страни.

Нека описаните около $\triangle AI_1I_2$ окръжност γ пресича за втори път правите CI и BI съответно в точки P_1 и P_2 . Да забележим, че $\angle I_1P_1I_2 = \angle I_1P_2I_2 =$

$\sphericalangle I_1 A I_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle B A C$. От друга страна, имаме $\sphericalangle B I P_1 = \sphericalangle I B C + \sphericalangle I C B = \frac{1}{2}(\sphericalangle A B C + \sphericalangle A C B) = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle B A C = 90^\circ - \sphericalangle I_1 P_1 I$; значи $\sphericalangle P_1 I_1 P_2 = \sphericalangle P_1 I_2 P_2 = 90^\circ$ и точките P_1 и P_2 са диаметрално противоположни върху γ . Освен това, правите $P_1 I_1$ и $B J_1$ са перпендикулярни на $B J_2$. Следователно $\frac{I I_1}{I P_1} = \frac{I B}{I J_1}$ и точките I_1 и P_1 са съответни в $\triangle I B C$ и $\triangle I J_1 J_2$. Аналогично точките I_2 и P_2 също са съответни, откъдето $\sphericalangle P_1 N P_2 = \sphericalangle I_1 M I_2 = 90^\circ$. Това означава, че точката N лежи на окръжността с диаметър $P_1 P_2$, т. е. на γ , което трябваше да докажем.

Второ решение. Да забележим, че правоъгълните триъгълници $B M N$ и $C M N$ са симетрични спрямо $M N$. Нека I'_2 е симетричната точка на I_2 спрямо $M N$. Имаме, че $\sphericalangle B M I_1 + \sphericalangle B M I'_2 = \sphericalangle B M I_1 + \sphericalangle C M I_2 = \frac{1}{2}(\sphericalangle B M A + \sphericalangle C M A) = 90^\circ = \sphericalangle B M N$ и значи лъчите $M I_1$ и $M I'_2$ са симетрични спрямо ъглополовящата на $\sphericalangle B M N$. По-нататък, имаме последователно $\sphericalangle M B I_1 + \sphericalangle M B I'_2 = \sphericalangle M B I_1 + \sphericalangle M C I_2 = \frac{1}{2}(\sphericalangle M B A + \sphericalangle M C A) = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle B A C = 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle B N C = 90^\circ - \sphericalangle B N M = \sphericalangle M B N$ и следователно лъчите $B I_1$ и $B I'_2$ са симетрични относно ъглополовящата на $\sphericalangle M B N$.

Оттук получаваме, че точките I_1 и I'_2 са *изогонално спрегнати* спрямо $\triangle B M N$ и значи лъчите $N I_1$ и $N I'_2$ са симетрични относно ъглополовящата на $\sphericalangle M N B$. Тогава $\sphericalangle B N M = \sphericalangle M N I_1 + \sphericalangle M N I'_2$ и $\sphericalangle I_1 A I_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle B A C = \sphericalangle B N M = \sphericalangle M N I_1 + \sphericalangle M N I'_2 = \sphericalangle M N I_1 + \sphericalangle M N I_2 = \sphericalangle I_1 N I_2$. Това означава, че точките I_1, I_2, A, N лежат на една окръжност.

САЩ

Задача 1. Нека a , b и c са положителни реални числа, за които е изпълнено неравенството $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$. Да се докаже, че

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(a+c)^2} \geq 3.$$

Решение. Даденото условие е еквивалентно на $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 2$. Ще докажем, че

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} + \frac{2bc+2}{(b+c)^2} + \frac{2ca+2}{(a+c)^2} \geq 3.$$

Имаме

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} \geq \frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{(a+b)^2} = 1 + \frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2}.$$

Като съберем това неравенство със съответните неравенства за другите две събираеми, получаваме

$$\frac{2ab+2}{(a+b)^2} + \frac{2bc+2}{(b+c)^2} + \frac{2ca+2}{(a+c)^2} \geq 3 + \frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} + \frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2}.$$

Следователно остава да докажем, че

$$\frac{(c+a)(c+b)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} + \frac{(b+c)(b+a)}{(c+a)^2} \geq 3.$$

Това неравенство следва директно от неравенството между средното аритметично и средното геометрично на три числа.

Задача 2. Във всеки връх на правилен петоъгълник е записано по едно цяло число така, че сборът на петте числа е равен на 2011. *Ход* наричаме изваждане на цяло число m от всяко от числата, записани в два съседни върха A и B и прибавяне на $2m$ към числото във върха, който не е съседен на никой от върховете A и B . (Стойността на m и изборът на върховете

може да са различни за различни ходове.) Играта се печели в даден връх, ако в този връх е записано числото 2011, а във всички останали върхове са записани нули. Да се докаже, че при всеки избор на първоначалните числа съществува точно един връх, в който играта може да бъде спечелена.

Решение. Да означим с a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 числата съответно във върховете v_1, v_2, v_3, v_4 и v_5 в началото на играта. Първо ще покажем, че играта може да бъде спечелена най-много в един връх. Да забележим, че

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \pmod{5}$$

е инвариант при всеки ход. Например, ако на някой ход сме заменили a_1 , a_3 и a_5 съответно с $a'_1 = a_1 - m$, $a'_3 = a_3 + 2m$ и $a'_5 = a_5 - m$, то стойността на израза $a'_1 + 2a_2 + 3a'_3 + 4a_4$ става

$$(a_1 - m) + 2a_2 + 3(a_3 + 2m) + 4a_4 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5m,$$

което означава, че сборът е инвариантен по модул 5. Останалите 5 хода се проверяват директно.

Сега да допуснем, че играта се печели във връх v_j . Стойността на инварианта в крайната позиция е $2011j \pmod{5}$. Ако началната стойност на инварианта е n , трябва да имаме $2011j \equiv n \pmod{5}$ или $j \equiv n \pmod{5}$. Следователно играта може да бъде спечелена само във върха v_j , където j е остатъкът при деление на n с 5.

Без ограничение можем да считаме, че печелившият връх е v_5 (това означава, че $n \equiv 5 \equiv 0 \pmod{5}$). Ще докажем, че играта може да се спечели с 4 хода, като прибавяме $2m_j$ към връх v_j и изваждаме m_j от двата срещуположни върха, за $j = 1, 2, 3, 4$. Промяната във връх v_1 е $2m_1 - m_3 - m_4$ и понеже искаме да получим 0 в този връх, това число трябва да е равно на $-a_1$. Като запишем съответните уравнения за останалите върхове, получаваме системата:

$$\begin{cases} 2m_1 - m_3 - m_4 &= -a_1 \\ 2m_2 - m_4 &= -a_2 \\ 2m_3 - m_1 &= -a_3 \\ 2m_4 - m_1 - m_2 &= -a_4 \\ -m_2 - m_3 &= -a_5 + 2011 \end{cases}$$

Тази система има целочислено решение тогава и само тогава, когато играта може да се спечели във връх v_5 . Сборът на първите 4 уравнения е уравнение, еквивалентно на петото уравнение. Следователно можем да разглеждаме само първите 4 уравнения.

Като умножим първите 4 уравнения съответно с $-1, 3, -3, 1$ и съберем почленно, получаваме $5m_2 - 5m_3 = a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4$. Освен това

$$a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 \equiv a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 \equiv n \equiv 5 \equiv 0 \pmod{5},$$

откъдето намираме $m_2 - m_3 = \frac{1}{5}(a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4)$. Знаем, че

$$m_2 + m_3 = 2011 - a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

и директно се проверява, че десните страни на последните две равенства са цели числа с една и съща четност. Следователно решенията m_2 и m_3 са цели числа. Второто и третото уравнение на системата означават, че и стойностите на m_1 и m_4 са цели числа.

Следователно играта може да бъде спечелена във връх v_5 .

Задача 3. Нека $ABCDEF$ е неизпъкнал, несамопресичащ се шестоъгълник, който няма двойка успоредни срещуположни страни. Вътрешните ъгли удовлетворяват $\sphericalangle A = 3\sphericalangle D$, $\sphericalangle C = 3\sphericalangle F$ и $\sphericalangle E = 3\sphericalangle B$. Освен това $AB = DE$, $BC = EF$ и $CD = FA$. Да се докаже, че диагоналите AD , BE и CF се пресичат в една точка.

Решение. Първо ще построим шестоъгълник, който изпълнява условието на задачата. Да разгледаме триъгълник ACE , всички ъгли на който са по-малки от 120° . Нека D е симетричната точка на A спрямо правата CE ; F е симетричната точка на C спрямо правата EA и B е симетричната точка на E спрямо правата AC . Тогава

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAE + \sphericalangle EAF = 3\sphericalangle CAE = 3\sphericalangle CDE$$

и аналогично се доказват и останалите равенства за ъглите. Следователно така построеният шестоъгълник $ABCDEF$ удовлетворява условието на задачата. При това диагоналите AD , BE и CF са височини на триъгълника ACE и се пресичат в ортоцентъра на този триъгълник.

Сега ще покажем, че всички шестоъгълници, които удовлетворяват условието на задачата, се конструират по описания начин.

Нека $ABCDEF$ е шестоъгълник от условието на задачата и β , δ и φ са ъглите съответно при върховете B , D и F . Тъй като

$$4(\sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F) = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F = 4\pi,$$

получаваме $\beta + \delta + \varphi = \pi$. Понеже срещуположните страни не са успоредни, имаме $\pi + 2\beta = \sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F \neq 2\pi$, откъдето $\beta \neq \frac{\pi}{2}$ и аналогично $\delta, \varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

Образуваме шестоъгълник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, удовлетворяващ условията на задачата с ъгли $\angle B_1 = \beta$, $\angle D_1 = \delta$ и $\angle F_1 = \varphi$, като избираме триъгълник $A_1C_1E_1$ с ъгли β , δ и φ и отразим симетрично всеки от върховете спрямо съответната срещуположна страна. Искаме да докажем, че $ABCDEF \sim A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Разглеждаме върховете A и B и ъглите β , δ и φ като фиксирани. Това е достатъчно да определим еднозначно ориентацията на всяка от страните на шестоъгълника. Нека $a = AB = DE$, $y = BC = EF$ и $z = CD = FA$. Ще покажем, че тези дължини са еднозначно определени (с точност до множител) от дадените ъгли.

Нека a , b , c , d , e и f са единични вектори по посока на страните от A към B ; от B към C ; от C към D ; от D към E ; от E към F и от F към A . Тогава е изпълнено

$$x(a + d) + y(b + e) + z(c + f) = 0. \quad (1)$$

Без ограничение да допуснем, че върховете на $ABCDEF$ са означени по посока обратна на часовниковата стрелка. Ъглите, които всеки от векторите b , c , d , e и f сключват с a по посока обратна на часовниковата стрелка, са

$$\begin{aligned} b &: \pi - \beta \\ c &: -\beta - 3\varphi \\ d &: -2\varphi \\ e &: \pi + 2\delta - \beta \\ f &: 2\delta - \varphi - \beta \end{aligned}$$

Когато два единични вектора имат посоки θ и ψ , които не се различават с π , тогава техният сбор е ненулав вектор с посока $\frac{\theta+\psi}{2}$ или $\frac{\theta+\psi}{2} + \pi$. Следователно векторите $a + d$, $b + e$ и $c + f$ са ненулеви и имат посока (по модул 2π):

$$\begin{aligned} a + d &: \varphi \\ b + e &: \delta - \beta \\ c + f &: \delta - 2\varphi - \beta \end{aligned}$$

Нито една от разликите на горните ъгли не е кратна на π (това следва от факта, че $\beta, \delta, \varphi \neq \frac{\pi}{2}$). Следователно $a + d$, $b + e$ и $c + f$ са ненулеви вектори, никои два от които не са колинеарни.

Това означава, че уравнението (1) определя коефициентите x , y и z еднозначно с точност до множител.

Следователно $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ са подобни, с което доказателството е завършено.

Задача 4. Да се докаже или опровергае следното твърдение: За всяко естествено число $n \geq 2$ остатъкът при деление на 2^{2^n} с $2^n - 1$ е степен на 4.

Решение. Твърдението не е вярно за $n = 25$, като може да се докаже, че това е най-малкото n за което то не е вярно. Да означим с r остатъка от делението на 2^n с n . Тогава $2^n = kn + r$ за някое естествено k и $0 \leq r < n$. Следователно

$$2^{2^n} = 2^{kn+r} \equiv 2^r \pmod{2^n - 1},$$

и $2^r < 2^n - 1$, което означава, че 2^r е остатък при деление на 2^{2^n} с $2^n - 1$. Ако r е четно, то 2^r е степен на 4. За да опровергаем твърдението трябва да намерим n , за което съответното r е нечетно. Ако n е четно, то $r = 2^n - kn$ е също четно. Ако n е нечетно просто, то от теоремата на Ферма имаме $2^n \equiv 2 \pmod{n}$, т.е. $r \equiv 2^n \equiv 2 \pmod{n}$. Тъй като $r < n$, получаваме $r = 2$.

Следователно трябва да търсим контрапример, когато n е нечетно и съставно. При $n = 25$ лесно пресмятаме

$$2^{25} = (2^{10}) \cdot 2^5 \equiv (-1)^2 \cdot 2^5 \equiv 2^5 \equiv 7 \pmod{25},$$

което означава, че 2^7 е остатъкът при деление на $2^{2^{25}}$ с $2^{25} - 1$.

Задача 5. Във вътрешността на четириъгълник $ABCD$ е избрана точка P . Точките Q_1 и Q_2 от вътрешността на $ABCD$ са такива, че

$$\sphericalangle Q_1BC = \sphericalangle ABP, \quad \sphericalangle Q_1CB = \sphericalangle DCP, \quad \sphericalangle Q_2AD = \sphericalangle BAP, \quad \sphericalangle Q_2DA = \sphericalangle CDP.$$

Да се докаже, че $Q_1Q_2 \parallel AB$ тогава и само тогава, когато $Q_1Q_2 \parallel CD$.

Решение. Ще докажем, че правите AB , CD и Q_1Q_2 или са успоредни или се пресичат в една точка. Да означим с X и Y симетричните точки на P спрямо правите AB и CD . Ще покажем, че $XQ_1 = YQ_1$ и $XQ_2 = YQ_2$. Ако Z е симетричната точка на Q_1 спрямо BC , то $XB = PB$, $BQ_1 = BZ$ и

$$\sphericalangle XBQ_1 = \sphericalangle XBA + \sphericalangle ABQ_1 = \sphericalangle ABC = \sphericalangle PBC + \sphericalangle CBZ = \sphericalangle PBZ.$$

Следователно $\triangle XBQ_1 \cong \triangle PBZ$, т.е. $XQ_1 = PZ$. Аналогично $YQ_1 = PZ$, откъдето $XQ_1 = YQ_1$. По същия начин намираме $XQ_2 = YQ_2$.

От тези равенства следва, че Q_1Q_2 е симетрала на отсечката XY . Ако $AB \parallel CD$, то $XY \perp AB$ и следователно $Q_1Q_2 \parallel AB$. Ако правите AB и CD не са успоредни, да означим с R тяхната пресечна точка. Тъй като $RX = RP = RY$, то R лежи върху симетралата на XY , което означава, че R , Q_1 и Q_2 лежат на една права.

Задача 6. Нека A е множество с 225 елемента, т.е. $|A| = 225$. Нека $A_1, A_2, \dots, A_{11}$ са подмножества на A , за които $|A_i| = 45$ за $1 \leq i \leq 11$ и $|A_i \cap A_j| = 9$ за $1 \leq i < j \leq 11$. Да се докаже, че $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}| \geq 165$ и да се посочи пример, при който се достига равенство.

Решение. Да означим с S допълнението на $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}$ в A . Искаме да докажем, че $|S| \leq 60$. За $l \geq 0$ да означим

$$\theta(l) = \left(1 - \frac{l}{2}\right) \left(1 - \frac{l}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3}l + \frac{1}{3}\binom{l}{2}.$$

Имаме $\theta(0) = 1$ и $\theta(l) \geq 0$ за $l > 0$. Тъй като S е сечение на допълненията на A_i , имаме

$$|S| \leq \sum_{n \in A} \theta(l(n)).$$

От друга страна

$$\sum_{n \in A} \theta(l(n)) = \sum_{n \in A} \left(1 - \frac{2}{3}l(n) + \frac{1}{3}\binom{l(n)}{2}\right) = |A| = \frac{2}{3} \sum_i |A_i| + \frac{1}{3} \sum_{i < j} |A_i \cap A_j|$$

и следователно

$$|S| \leq 225 - \frac{2}{3} \cdot 11 \cdot 45 + \frac{1}{3} \binom{11}{2} \cdot 5 = 60.$$

Това означава, че $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}| \geq 165$.

Ще построим пример, при който имаме равенство. Нека $p_1, p_2, \dots, p_{11}$ са 11 различни прости числа и нека A' е множеството от всички произведения по тройки на тези числа. Да изберем множество $A'' = \{q_1, q_2, \dots, q_{60}\}$ от 60 различни естествени числа, всяко от които е взаимно просто с $p_1, p_2, \dots, p_{11}$. Нека $A = A' \cup A''$ да означим

$$A_i = \{n \in A : p_i | n\}.$$

Имаме $|A_i| = \binom{10}{2} = 45$, $|A_i \cap A_j| = \binom{9}{1} = 9$ и

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{11}| = |A'| = \binom{11}{3} = 165.$$

Остана да отбележим, че $|A| = |A'| + |A''| = 165 + 60 = 225$.

Тайван

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H . Точките Y и Z съответно от страните CA и AB са такива, че насочените ъгли между AC и HY и между AB и HZ са съответно равни на $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$. Нека U е центърът на описаната окръжност за $\triangle HYZ$.

Да се докаже, че точките A , N и U лежат на една права, където N е центърът на окръжността на деветте точки за $\triangle ABC$.

Решение. Да означим с O_A симетричната точка на центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност точка O спрямо страната BC . Тъй като $AH = OO_A$, то AOO_AH е успоредник и понеже N е среда на HO , то точките A , N и O_A лежат на една права. Ще докажем, че точките A , U и O_A лежат на една права. Първо ще покажем, че точките H , U и A^+ лежат на една права, където A^+ е точката, която лежи в една и съща полуравнина с A спрямо правата BC и $\triangle A^+BC$ е равностраничен.

Ще разгледаме само случая, когато $\angle BAC \neq 60^\circ$ (случаят $\angle BAC = 60^\circ$ се разглежда аналогично). В този случай $AZHY$ не е успоредник. Нека Y' и Z' са пресечните точки съответно на AY и HZ и на AZ и HU . Ако V е ортоцентърът на $\triangle HYZ$, то правите HU и HV са изогонално спрегнати за ъгъл $\angle ZHY$. Понеже $\angle Y'ZZ' = \angle Y'YZ'$, то четириъгълникът $YZY'Z'$ е вписан и тъй като $HV \perp YZ$, то $HU \perp Y'Z'$. Да означим с C' симетричната точка на C спрямо правата HY' . Имаме

$$(\angle HY', \angle HC) = (\angle HY', \angle CA) + (\angle CA, \angle HC) = (\angle AB, \angle AC) - 60^\circ + 90^\circ - (\angle AB, \angle AC) = 30^\circ.$$

Това означава, че $\triangle HCC'$ е равностраничен и $\triangle HCC' \sim \triangle A^+BC$.

Освен това, от $\angle HY'C = \angle HZ'B$ и $\angle HCY' = \angle HBZ' = 90^\circ - \angle BAC$ следва, че $\triangle Y'HC \sim \triangle Z'HB$. Тъй като $\triangle Y'HC'$ е симетричен на $\triangle Y'HC$, то $\triangle Y'HC' \sim \triangle Z'HB$. Следователно $\triangle Z'HY' \sim \triangle BHC'$, и имаме

$$(\angle Y'Z', \angle A^+H) = (\angle Y'Z', \angle BC') + (\angle BC', \angle A^+H) = (\angle Z'H, \angle BH) + (\angle BC, \angle A^+C) = 90^\circ.$$

Това означава, че $HA^+ \perp Y'Z'$, т.е. H , U и A^+ лежат на една права.

За да докажем, че A , U и O_A лежат на една права, е достатъчно да покажем, че $\triangle AHU \sim \triangle A^+O_AU$. Тъй като $A^+O \perp BC$, то A^+ лежи на OO_A и $AH \parallel A^+O_A$. Следователно трябва да докажем, че $\frac{AH}{HU} = \frac{A^+O_A}{A^+U}$. Понеже

$\triangle HCC'$ и $\triangle A^+CB$ са равнострани с общ връх C , лесно се вижда, че $\triangle HYZ \sim \triangle HY'Z'$. От подобията $\triangle Z'HY' \sim \triangle BC'H$ и $\triangle HYZ \sim \triangle HY'Z'$ имаме

$$A^+H = BC' = Y'Z' \frac{BH}{Z'H} = YZ \frac{Y'H \cdot BH}{ZH \cdot Y'H} = YZ \frac{\cos 30^\circ}{|\cos(A)|} = YZ \frac{\sqrt{3}}{2|\cos(A)|},$$

$$\frac{UH}{A^+H} = \frac{|\cos(A)|}{\sqrt{3} \sin(120^\circ - A)}.$$

Тъй като $AH = 2R \cos A$ (R е радиусът на описаната окръжност за $\triangle ABC$),

$$AH + A^+O_A = 3R \cos A + BC \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}R \sin(120^\circ - A).$$

Следователно

$$\frac{AH}{AH + A^+O_A} = \frac{|\cos(A)|}{\sqrt{3} \sin(120^\circ - A)} = \frac{UH}{A^+H} = \frac{UH}{A^+U + UH},$$

откъдето намираме $\frac{AH}{HU} = \frac{A^+O_A}{A^+U}$, с което доказателството е завършено.

Задача 2. Дадени са положителни реални числа a , b и c , за които е изпълнено $abc = 1$. Да се докаже неравенството:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + 2c^2 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + 2a^2 + 6}} \leq$$

$$\leq \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + 4b + 4c}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^4 + 4c + 4a}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^4 + 4a + 4b}}.$$

Решение. Ще докажем, че изразът от дясната страна на неравенството е не по-малък от 1, докато изразът от лявата страна на неравенството не надминава 1. Като използваме, че $abc = 1$ и неравенството между средното аритметично и средното геометрично, получаваме

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4 + 4b + 4c}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + 4ab^2c + 4abc^2}} \geq$$

$$\geq \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + b^4) + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + c^4)}} =$$

$$= \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Аналогично получаваме

$$\frac{b^2}{\sqrt{b^4 + 4c + 4a}} \geq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \frac{c^2}{\sqrt{c^4 + 4a + 4b}} \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Като съберем трите неравенства, получаваме

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^4 + 4b + 4c}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^4 + 4c + 4a}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^4 + 4a + 4b}} \geq 1.$$

Остава да докажем, че изразът от лявата страна на неравенството не надминава 1. Като използваме неравенството между средното аритметично и средното геометрично, намираме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 6}} &\leq \frac{1}{\sqrt{3ab^2 + 6}} = \sqrt{\frac{abc}{3ab^2 + 6abc}} = \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{c}{b + 2c} \right)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{c}{b + 2c} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{3} - \frac{a}{a + 2b} \right). \end{aligned}$$

От това неравенство и неравенството на Коши получаваме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + 2c^2 + 6}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + 2a^2 + 6}} &\leq \\ &\leq \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{b + 2c} + \frac{c}{c + 2a} + \frac{a}{a + 2b} \right) \leq \\ &\leq \frac{5}{4} - \frac{(a + b + c)^2}{4(b(b + 2c) + c(c + 2a) + a(a + 2b))} = 1, \end{aligned}$$

с което неравенството от условието е доказано.

Задача 3. Точка I е центърът на вписаната окръжност за $\triangle ABC$. Права l , която не е страна на триъгълника, се допира до вписаната окръжност и пресича страните AB и BC продължението на страната CA съответно в точки X , Y и Z . Правата AY пресича CX в точка P , а правите IP и BZ се пресичат в точка Q . Да се докаже, че ако точките A , C , Y и X лежат на една окръжност, то $ZI^2 = ZQ \cdot ZB$.

Решение. Достатъчно е да докажем, че $IQ \perp BZ$ и $\angle BIZ = 90^\circ$, защото тогава ZI ще е допирателна към описаната около $\triangle RIQ$ окръжност и степента на точката Z е $ZI^2 = ZQ \cdot ZB$.

За да докажем, че $\sphericalangle BIZ = 90^\circ$ да разгледаме допирателните ZS , ZT , BU и BV . Директно се проверява, че $AXYC$ е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато $ST \perp UV$. Като използваме, че $IB \perp UV$ и $IZ \perp ST$, получаваме че $\sphericalangle BIZ = 90^\circ$.

Ще използваме теоремата на Брианшон (ако $A_1A_2 \dots A_6$ е описан около окръжност, то диагоналите A_1A_4 , A_2A_5 и A_3A_6 се пресичат в една точка) за шестоъгълниците $AXSYCT$ и $AUXYVC$. Получаваме, че ST , UV , AU и CX се пресичат в една точка.

Условието $IQ \perp RZ$ следва от теоремите на Паскал и Брокар.

Наистина, от теоремата на Брокар следва, че $IP \perp ML$.

От друга страна, от теоремата на Паскал за шестоъгълниците $USSVTT$ и $UUSVVT$ следва, че M , Z и L и B , M и L лежат на една права. Тъй като и двете прави съдържат точките M и L , те съвпадат.

Следователно IP пресича BZ в точка Q и $IQ \perp BZ$.

Задача 4. Функцията $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ е такава, че

$$|f(x+y)| = |f(x) + f(y)|$$

за произволни $x, y \in \mathbf{R}$. Да се докаже, че $f(x+y) = f(x) + f(y)$ за произволни $x, y \in \mathbf{R}$.

Решение. Да допуснем, че съществуват a и b , за които

$$f(a+b) \neq f(a) + f(b).$$

От условието на задачата имаме $f(a+b) = -f(a) - f(b)$. Ако $f(a+b) = 0$, то $f(a) + f(b) = 0$ и тогава $f(a+b) = f(a) + f(b)$, което е противоречие с избора на a и b . Следователно $f(a+b) \neq 0$.

Имаме:

$$\begin{aligned} |f(2a+2b)| &= |f(a+(a+b+b))| = |f(a) + f((a+b)+b)| = \\ &= |f(a) + f(a+b) + f(b)| \text{ или } |f(a) - f(a+b) - f(b)| = \\ &= 0 \text{ или } |f(a) - (-f(a) - f(b)) - f(b)| = \\ &= 0 \text{ или } 2|f(a)| \end{aligned}$$

Освен това:

$$|f(2a+2b)| = |f((a+b)+(a+b))| = |2f(a+b)| = 2|f(a+b)| \neq 0$$

и следователно $2|f(a)| = |f(2a + 2b)| = 2|f(a + b)|$, т.е. $|f(a + b)| = |f(a)|$. Аналогично $|f(a + b)| = |f(b)|$, откъдето $|f(a)| = |f(b)|$.

Ако $f(a) = f(b)$, то

$$2|f(a)| = |f(a) + f(a)| = |f(a) + f(b)| = |f(a + b)| = |f(a)|$$

и следователно $f(a) = 0$. Сега получаваме

$$f(a + b) = -f(a) - f(b) = -2f(a) = 0,$$

което е противоречие. Следователно $f(a) = -f(b)$ и тогава

$$0 = |f(a) + f(b)| = |f(a + b)|,$$

противоречие.

Получихме, че допускането за съществуване на a и b , за които

$$f(a + b) \neq f(a) + f(b)$$

води до противоречие, което доказва твърдението на задачата.

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$, за който $AB < AC$. Точка P е вътрешна за ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$. Точките D и E от отсечките съответно PC и PB са такива, че $\sphericalangle PBD = \sphericalangle PCE$. Правите BD и AC се пресичат в точка X , а правата CE пресича AB в точка Y . Да се докаже, че $BX \leq CY$.

Решение. Ще използваме следната лема:

Лема. В $\triangle ABC$ чевианите BE и CF са такива, че $\sphericalangle CBE \geq \sphericalangle BCF$ и $\sphericalangle ABE \geq \sphericalangle ACF$. Тогава $BE \leq CF$.

Доказателство: Да изберем точка Q върху отсечката AB , за която $\sphericalangle QBE = \sphericalangle QCP$. Нека CF пресича BE и BQ съответно в P и Q . Понеже в $\triangle QBC$ имаме $\sphericalangle QBC \geq \sphericalangle QCB$, то $QC \geq QB$. Тъй като $\sphericalangle QBE \sim \triangle QCR$ от $BQ \leq CQ$ следва $BE \leq CR$. Освен това $CR \leq CF$, т.е. $BE \leq CF$.

За да приложим горната лема за дадената задача, трябва да покажем, че

$$\sphericalangle DBC \geq \sphericalangle ECB \quad \text{и} \quad \sphericalangle ABP \geq \sphericalangle ACP.$$

Нека C' е симетрична на C спрямо AP . Тогава $\sphericalangle ABP \geq \sphericalangle AC'P \sphericalangle ACP$. Освен това

$$BP = AP \frac{\sin(A/2)}{\sin \sphericalangle ABP}, \quad CP = AP \frac{\sin(A/2)}{\sin \sphericalangle ACP},$$

откъдето $BP \leq CP$. Следователно $\sphericalangle PCB \leq \sphericalangle PBC$, т.е. $\sphericalangle DBC \geq \sphericalangle ECB$, с което доказателството е завършено.

Задача 6. Функцията $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ е такава, че

$$f(x+y) = f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + f(xy)$$

за произволни $x, y \in (0, \infty)$. Да се докаже, че $f(xy) = f(x) + f(y)$ произволни $x, y \in (0, \infty)$.

Решение. Първо ще покажем, че за произволне реални числа $a, b \in (0, \infty)$, за които $a^2b \geq 4$, е изпълнено $f(a+b) = f(a) + f(b)$. При $a^2b \geq 4$ и $a, b > 0$ числата

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{4}{b}}}{\frac{2}{b}} \text{ и } y = \frac{a - \sqrt{a^2 - \frac{4}{b}}}{\frac{2}{b}}$$

са положителни и изпълняват условията $x+y = ab$ и $xy = b$. Замествайки във функционалното уравнение с дадените стойности на x и y , получаваме

$$f(ab) = f(x+y) = f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + f(xy) = f(a) + f(b).$$

Нека $x, y > 0$ и

$$z = \max\left\{\frac{4}{x^2y^2}, \frac{4}{x^2y}, \frac{4}{y^2}\right\} > 0.$$

Тогава $(xy)^2z \geq 4$, $x^2(yz) \geq 4$ и $y^2z \geq 4$, което означава, че

$$f(xyz) = f(xy) + f(z), f(xyz) = f(x) + f(yz) \text{ и } f(yz) = f(y) + f(z).$$

Следователно

$$\begin{aligned} f(xy) &= f(xyz) - f(z) = f(x) + f(yz) - f(z) = \\ &= f(x) + (f(y) + f(z)) - f(z) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Якутия (Туймаада, 12-17 юли 2011 г.)**Младша лига**

Задача 1. Червени, сини и зелени деца са наредени в кръг. Когато учителят помолил червените деца, които имат зелен съсед, да вдигнат ръка, се вдигнали 20 ръце. След това учителят помолил сините деца, които имат зелен съсед, да вдигнат ръка и се вдигнали 25 ръце. Да се докаже, че някое от децата, вдигнали ръка, има два зелени съседа.

Решение. Ще казваме, че няколко (може и едно) зелени деца, разположени последователно по кръга, образуват група, ако от двете им страни стоят деца от други цветове. Тогава децата, които са вдигали ръка, са точно съседите на групи. Ако няма (червени или сини) деца, които имат двама зелени съседа, броят на вдигналите ръка е четен (по двама за всеки интервал между групи). Това е противоречие, защото по условие този брой е $20 + 25 = 45$.

Задача 2. По колко начина от квадрат с размери 2011×2011 може да се изреже квадрат 11×11 така, че оставащата част да може да се покрие с домина (правоъгълници с размери 1×2)?

Решение. Отговор: $2 \cdot 1000^2 + 2 \cdot 1000 + 1 = 2002001$. Да оцветим голямата дъска шахматно, като (съгласно стандартната конвенция) полето долу вляво е черно. Тогава черните полета са с едно повече и ако отрежем малката дъска така, че и в нея черните полета да са с едно повече, не е трудно да запълним останалата част с домина (докажете!). В противен случай запълването е невъзможно, защото ще ни останат с две черни полета повече от белите, а всяко домино запълва по едно бяло и едно черно поле. Оставаме на читателя да преброи подходящите малки дъски по техния черен долен десен ъгъл.

Задача 3. Външноописаната окръжност към страната AB на $\triangle ABC$ се допира до AB в точка P и до правите BC и CA съответно в точки Q и R . Да се докаже, че ако средата на отсечката PQ лежи на окръжността, описана около $\triangle ABC$, то и средата на PR лежи на тази окръжност.

Решение. Да означим с I центъра на разглежданата външноописана окръжност и с T и S съответно средите на PQ и PR . Тъй като $\angle API = \angle ATP = 90^\circ$, от правоъгълния $\triangle API$ имаме $IA \cdot IT = IP^2$. Аналогично се вижда, че $IB \cdot IS = IP^2$. Следователно точките A , B , T и S лежат на една окръжност, което означава, че T лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност тогава и само тогава, когато и S лежи на същата окръжност.

Задача 4. Да се докаже, че измежду кои да е 100000 последователни 100-цифрени числа съществува число n , за което периодът на дробта $\frac{1}{n}$ е по-голям от 2011.

Решение. Да отбележим, че ако $n = 2^a 5^b t$, където $(t, 10) = 1$, $t > 1$, то периодът на дроб от вида $\frac{m}{n}$ е кратен на показателя на 10 по модул t . Следователно е достатъчно да намерим число $t < 100000$, за което показателят на 10 по модул t е по-голям от 2011. Едно такова число е $7^4 = 2401$. Действително, показателят на 10 по модул 7^4 е $\varphi(7^4) = 7^3 \cdot 6 = 2058$ (проверете!).

Забележка. Горното кратко решение се основава на факта, че 10 е примитивен корен по модул $7^4 = 2401$. Освен от директна проверка (която може би някои читатели ще направят, както ги посъветвахме малко по-горе), това следва и от общото твърдение, че ако g е примитивен корен по модул p (p е нечетно просто число) и $g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, то g е примитивен корен по модул p^k за всяко естествено k . Нашият случай е $p = 7$, $g = 10$ и $k = 4$. Изборът на 7^4 не е неестествен – това е първата степен на малко нечетно просто число, която е по-голяма от 2011 и върши работа.

Задача 5. Всички реални числа, по-големи от 1, са оцветени в два цвята, като са използвани и двата цвята. Да се докаже, че съществуват реални числа a и b , за които числата $a + b$ и ab са с различен цвят.

Решение. Нека $d_1 = ab > 1$ е число от първия цвят и да означим $x = a + b > 1$. Тогава a и b са корените на квадратното уравнение $t^2 - xt + d_1 = 0$, което означава, че $x^2 \geq 4d_1$, т.е. $x \geq 2\sqrt{d_1}$. Ако твърдението на задачата не е вярно, всички числа, по-големи от $2\sqrt{d_1}$ ще са от първия цвят. Но аналогично се вижда, че ако d_2 е число от втория цвят, то всички числа, по-големи от $2\sqrt{d_2}$ ще са от първия цвят. Тогава всяко число, по-голямо от $\max\{2\sqrt{d_1}, 2\sqrt{d_2}\}$ трябва да е и от двата цвята, което е абсурдно.

Задача 6. Окръжност минава през върховете A и B на вписан чети-

риъгълник $ABCD$ и пресича диагоналите му AC и BD съответно в точки E и F . Правите AF и BC се пресичат в точка P , а правите BE и AD се пресичат в точка Q . Да се докаже, че правите PQ и CD са успоредни.

Решение. Ще означаваме с $\sphericalangle(a, b)$ ъгълът между правите a и b . От условието следва, че $\sphericalangle(FA, AE) = \sphericalangle(FB, BE)$ и $\sphericalangle(DA, AC) = \sphericalangle(DB, BC)$. Изваждаме тези две равенства и получаваме $\sphericalangle(DA, AF) = \sphericalangle(EB, BC)$, откъдето $\sphericalangle(QA, AP) = \sphericalangle(QB, BP)$, т.е. точките A, Q, P и D лежат на една окръжност. Тогава $\sphericalangle(AB, BP) = \sphericalangle(AQ, QP)$.

От друга страна, пак от условието имаме $\sphericalangle(AB, BP) = \sphericalangle(AQ, CD)$ и следователно $\sphericalangle(AQ, QP) = \sphericalangle(AQ, CD)$, което означава, че $CD \parallel PQ$.

Задача 7. Дадена е дума с поне 10 букви, като всеки две съседни букви са различни. Да се докаже, че е възможно местата на някои две съседни букви да се разменят и в резултат на това новополучената дума да не е периодична (т.е. да не може да се раздели на еднакви поддуми).

Решение. Нека дадената дума е W с дължина n с букви от азбука A . Очевидно $|A| \geq 2$. Ако след размяна на местата на две съседни букви получим периодична дума с (главен) период p , то $1 < p < n$, $p|n$ и всяка буква участва в нашата дума поне $\frac{n}{p} \geq 2$ пъти. Ясно е, че $p \geq 3$, защото $p = 2$ означава, че в W е имало две съседни еднакви букви.

Нека a е буква от W , за която минималното разстояние между две нейни (различни) появявания, е минимално и нека това разстояние е m . Тогава $m > 1$ и нека $W = \dots aw_1w_2 \dots w_m a \dots$. Размяната на местата на a и w_1 дава нова дума W' с по-малко минимално разстояние $m - 1$, което при това е уникално (т.е. не среща на друго място в W'). Последното дава противоречие при $p \geq 3$.

Задача 8. Владетелят на Квадрия оставил в наследство на тримата си сина квадратен имот с размери 100×100 мили, разделен на 10000 квадратни участъка с размери 1×1 миля. Подялбата на имота станала по следния начин: всеки от синовете застанал в определена точка на имота и получил тези квадратни участъци, чиито центрове били по-близо до него, отколкото до кой да е от двамата му братя. Вярно ли е, че независимо от избора на трите точки, чрез които е извършено разделянето, всеки е получил свързана част от имота (т.е. за всеки две точки от една част има път между тях, който не напуска частта)?

Фиг. 1

Решение. Отговор: Не! Ще означаваме с (i, j) участъка в ред i и стълб j . Да разгледаме центровете на участъците $(1, 2)$ и $(100, 100)$. Тъй като на правата през тези два центъра не лежи нито един друг център, можем да построим достатъчно малък ъгъл, който съдържа във вътрешността си само тези два центъра (Фиг. 1). Да изберем точка O във вътрешността на този ъгъл и на квадрата и нека точките O_1 и O_2 са симетрични на O относно раменете на ъгъла. Тогава не е трудно да се види, че ако синовете на владетеля на Квадрия са разположени в точките O , O_1 и O_2 , то този от точка O ще получи единствено участъците с центрове $(1, 2)$ и $(100, 100)$, т.е. неговата част от имота няма да е свързана.

Старша лига

Задача 9. Виж Задача 1.

Задача 10. Окръжностите ω_1 и ω_2 се пресичат в точки A и B , а точка M е средата на AB . Точките S_1 и S_2 лежат върху правата AB и допирателните от S_1 към ω_1 се допират до ω_1 в точки X_1 и Y_1 , а допирателните от S_2 към ω_2 се допират до ω_2 в точки X_2 и Y_2 . Да се докаже, че ако правата X_1X_2 минава през M , то и правата Y_1Y_2 минава през M .



Фиг. 2

Решение. Нека O_1 и O_2 са съответно центровете на ω_1 и ω_2 (Фиг. 2). Тъй като $\sphericalangle O_1X_1S_1 = \sphericalangle O_1MS_1 = 90^\circ$, точките O_1 , S_1 , M и X_1 лежат на една окръжност. Тогава $\sphericalangle O_1MX_1 = \sphericalangle O_1S_1X_1$. Аналогично се вижда, че $\sphericalangle O_2MY_1 = \sphericalangle O_1S_1Y_1$. Тъй като $\sphericalangle O_1S_1X_1 = \sphericalangle O_1S_1Y_1$, получаваме $\sphericalangle O_1MX_1 = \sphericalangle O_2MY_1$. Последното означава, че правите MX_1 и MY_1 са симетрични относно правата AB . Аналогично се доказва, че правите MX_2 и MY_2 са симетрични относно правата AB . Оттук следва, че ако X_1 , M и X_2 лежат на една права, то и Y_1 , M и Y_2 лежат на една права.

Забележка. Използвахме конкретното разположение на Фиг. 2, но е ясно, че другите случаи са аналогични. Описание, което не се влияе от чертежа, изисква работа с ъгли между прави както в Задача 6.

Задача 11. Дадена е безкрайна шахматна дъска и фиксирано поле A от нея. Във всяко поле на дъската е записан минималният брой ходове на коня, необходими за достигане на това поле от A . Едно поле се нарича правилно, ако в него е записано числото 100, а във всички негови съседи (по страна) е записано числото 101. Да се намери броят на правилните полета.

Решение. Отговор: 800. Шахматното оцветяване показва, че съседните полета съдържат числа от различна четност.

Да въведем координатна система с център полето A . Ще намерим броя на правилните полета в долната половина на първи квадрант, т.е. тези с координати (a, b) , $a, b \geq 0$, $a \geq b$. Ще разгледаме два случая.

Случай 1. Нека $b \leq a \leq 2b$. Тъй като сумата на координатите нараства на всеки ход с не повече от 3, числото, записано в полето (a, b) , е по-голямо или равно на $\frac{a+b}{3}$. Ако $a + b$ се дели на 3, то $\frac{2a-b}{3}$ хода от вида $(2, 1)$ и $\frac{2b-a}{3}$ хода от вида $(1, 2)$, общо $\frac{a+b}{3}$ хода, довеждат коня от A в полето (a, b) . Следователно в този случай при $a + b = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, в полето (a, b) е записано числото k .

Нека (x, y) е правилно поле в разглежданата област. Тогава или сумата от координатите на това поле или на някой от съседите му се дели на 3. Да допуснем, че това се случва за съседна клетка (x_1, y_1) . Тогава $x_1 + y_1 = 303$, а $\frac{x+y}{3} \geq \frac{x_1+y_1-1}{3} = 100\frac{2}{3} > 100$, което е противоречие с факта, че в полето (x, y) е записано числото 100. Следователно $x + y$ се дели на 3 и значи $x + y = 300$.

Нека B е поле от вида $(x, 300 - x)$, $150 \leq x \leq 200$. Ще докажем, че B наистина е правилно поле. Числата в съседните на B полета са нечетни и по-големи от 99, защото $\frac{x+300-x-1}{3} > 99$. Следователно е достатъчно да укажем път от A до B с дължина 101. Такъв път е следният – достигахме до поле с 3 в него, което е съсед на поле с 2 (като всички съседи на последното са попълнени с 3), и оттам копираме най-краткия път до $(x, 300 - x)$.

Окончателно, преброихме 51 правилни полета в този случай.

Случай 2. Нека $a \geq 2b$. Тъй като координатата a нараства с не повече от 2 на всеки ход, числото, записано в полето (a, b) , е по-голямо или равно на $\frac{a}{2}$. Ако $a + 2b$ се дели на 4, то $\frac{a+2b}{4}$ хода от вида $(2, 1)$ и $\frac{a-2b}{4}$ хода от вида $(1, 2)$, общо $\frac{a}{2}$ хода, довеждат коня от A в полето (a, b) . Следователно в този случай при $a = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, в полето (a, b) е записано числото k .

Нека (x, y) е правилно поле в разглежданата област. Тогава или $x + 2y$, или съответната сума за някой от съседите му, се дели на 4. Да допуснем, че това се случва за съседна клетка (x_1, y_1) . Тогава $x_1 = 202$, а $\frac{x}{2} \geq \frac{x_1-1}{2} = 100\frac{1}{2} > 100$, което е противоречие с факта, че в полето (x, y) е записано числото 100. Следователно $x + 2y$ се дели на 4 и $x = 200$.

Нека C е поле от вида $(200, 2z)$, $0 \leq z \leq 50$. Ще докажем, че C наистина е правилно поле. Числата в съседните на B полета са нечетни и по-големи

от 99, защото $\frac{200-1}{2} > 99$. Път от A до C с дължина 101 се конструира както в Случай 1.

Окончателно, преброихме 51 правилни полета и в този случай, като едно от тези, $(200, 100)$, е преброено и в двата случая.

Остава да отбележим, че равнината се разделя на 16 сектора (като двата разгледани по-горе) и във всеки от тях имаме по 51 правилни полета, като 16 гранични полета се броят и в двата сектора. Следователно търсеният брой е $16 \cdot 51 - 16 = 16 \cdot 50 = 800$.

Задача 12. Множество от последователни естествени числа съдържа точно 10 четвърти степени и точно 100 куба на естествени числа. Да се докаже, че това множество съдържа поне 2000 точни квадрата на естествени числа.

Решение. Нека четвъртите степени са $n^4, (n+1)^4, \dots, (n+9)^4$. Тогава нашето множество съдържа точните квадрати $(n^2)^2, (n^2+1)^2, \dots, (n^2+18n+81)^2$, които са точно $18n+82$ на брой. Следователно е достатъчно да докажем, че $18n+82 \geq 2000$, т.е. $n \geq 107$.

Кубовете в нашето множество са между $(n-1)^{\frac{4}{3}}$ и $(n+10)^{\frac{4}{3}}$. Тогава

$$(n+10)^{\frac{4}{3}} - (n-1)^{\frac{4}{3}} \geq 99.$$

От друга страна, имаме последователно

$$\begin{aligned} (n+10)^{\frac{4}{3}} - (n-1)^{\frac{4}{3}} &= (n+10)^{\frac{4}{3}} \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+10} \right)^{\frac{4}{3}} \right) \\ &= (n+10)^{\frac{4}{3}} \left(1 - \left(1 - \frac{11}{n+10} \right)^{\frac{4}{3}} \right) \\ &\leq (n+10)^{\frac{4}{3}} \left(1 - \left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{11}{n+10} \right) \right) \\ &= \frac{44(n+10)^{\frac{1}{3}}}{3} \end{aligned}$$

(използвахме неравенството на Бернули). Следователно $n > \left(\frac{297}{44} \right)^3 - 10 > 6^3 - 10 = 206$, с което доказателството е завършено.

Задача 13. Всички числа, по-големи от 1, са оцветени в два цвята, като са използвани и двата цвята. Да се докаже, че съществуват реални числа a и b , за които числата $a + \frac{1}{b}$ и $b + \frac{1}{a}$ са с различен цвят.

Решение. Нека $a + \frac{1}{b} = x$ и $b + \frac{1}{a} = y$. Елиминираме $b = y - \frac{1}{a}$ и получаваме квадратното относно a уравнение $a^2y - axy + x = 0$, което трябва да има реален ненулев корен. Следователно $x^2y^2 - 4xy \geq 0$, откъдето получаваме $xy \geq 4$.

Ако твърдението на задачата не е вярно, то всеки две числа x и y с произведение $xy \geq 4$ трябва да са с еднакъв цвят (иначе намираме a и b от горната система и имаме противоречие). Това означава, че всяко число, по-голямо от 1, трябва да има същия цвят, както числото 4, противоречие.

Задача 14. Виж Задача 7.

Задача 15. Даден е изпъкнал шестоъгълник $AC'BA'CB'$ с равни срещуположни страни. Пресечната точка на BC и симетралата на AA' е означена с A_1 . Аналогично се дефинират и точките B_1 и C_1 . Да се докаже, че точките A_1 , B_1 и C_1 лежат на една права.

Решение. Да означим с D средата на AA' и нека M и N са петите на перпендикулярите съответно от B и C към AA' (Фиг. 3). От $A_1D \parallel BM \parallel CN$ и свойствата на проекциите следва, че $\frac{A_1B}{DM} = \frac{A_1C}{DN}$.

Фиг. 3

От друга страна, от питагоровата теорема имаме $AB^2 - AM^2 = BM^2 = A'B^2 - A'M^2$, откъдето

$$|AB^2 - A'B^2| = |AM^2 - A'M^2| = |AM - A'M|(AM + A'M) = 2DM \cdot AA'.$$

Следователно $DM = \frac{|AB^2 - A'B^2|}{2AA'}$. Аналогично се получава $DN = \frac{|AC^2 - A'C^2|}{2AA'}$.

Тогава

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{DM}{DN} = \frac{|AB^2 - A'B^2|}{|AC^2 - A'C^2|}.$$

По същия начин се получават и аналогичните равенства за отношенията $\frac{B_1C}{B_1A}$ и $\frac{C_1A}{C_1B}$. Остава да приложим теоремата на Менелай за $\triangle ABC$ и точките A_1 , B_1 и C_1 и да използваме равенството на срещуположните страни в дадения шестоъгълник.

Задача 16. Известно е, че квадратният тричлен с цели коефициенти $P(n)$ е такъв, че за всяко естествено число n съществува естествен делител d_n на $P(n)$, за който $1 < d_n < P(n)$, и при това редицата $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща. Да се докаже, че $P(n)$ е произведение на два линейни полинома с цели коефициенти или всичките му стойности се делят на едно и също естествено число $m > 1$.

Решение. Нека $P(n) = an^2 + bn + c = d_n e_n$, където d_n и e_n са естествени числа и редицата $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща. От последното в частност следва, че $d_n \geq n$, което означава, че $e_n \leq 2an$ за достатъчно всички големи n . Да допуснем, че не съществува естествено число $m > 1$, което да дели всички стойности $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ще докажем, че $P(n)$ се разлага в произведение на два линейни полинома с цели коефициенти.

Лема 1. Съществува положителна константа s , за която неравенството $d_n \leq sn$ е в сила за всички достатъчно големи стойности на n .

Доказателство. Ще докажем твърдението на лемата за $s = 3a$.

Ако предположим, че $d_n > 3an$ за някое (голямо) n , то

$$\begin{aligned} e_{n+1} - e_n &= \frac{P(n+1)}{d_{n+1}} - \frac{P(n)}{d_n} \leq \frac{P(n+1)}{d_n+1} - \frac{P(n)}{d_n} \\ &= \frac{d_n[P(n+1) - P(n)] - P(n)}{d_n(d_n+1)} = \frac{P(n+1) - P(n)}{d_n+1} - \frac{P(n)}{d_n(d_n+1)} \\ &= \frac{2an + a + b}{d_{n+1}} - \frac{P(n)}{d_n(d_n+1)}. \end{aligned}$$

Ясно е, че последното е по-малко от 1 при достатъчно голямо n и тогава

имаме $e_{n+1} - e_n \leq 0$, т.е. $e_{n+1} \leq e_n$. Тогава

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \frac{P(n+1)}{e_{n+1}} \geq \frac{P(n+1)}{e_n} = d_n + \frac{2an + a + b}{e_n} \\ &= d_n + \frac{d_n(2an + a + b)}{P(n)} > d_n + \frac{3an(2an + a + b)}{P(n)} \\ &> d_n + 3a > 3a(n+1) \end{aligned}$$

и значи можем да повторим разсъждението от по-горе и за d_{n+1} (като n вече е достатъчно голямо).

Следователно редицата $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена и всъщност става константна от някое място нататък, като константата не е 1. Това означава, че всички стойности $P(n)$ от някое място нататък, оттам и всички $P(n)$ се делят на едно и също естествено число $m > 1$, противоречие. С това лемата е доказана.

Да разгледаме разликите $D_n = d_{n+1} - d_n$ и $E_n = e_{n+1} - e_n$. От Лема 1 следва, че за безбройно много n две последователни разлики D_{n-1} и D_n не надминават $2s$. Действително, в противен случай имаме $D_{n-1} + D_n > 2s$ от някое място нататък, което означава, че $d_n > sn$ за достатъчно голямо n .

Лема 2. Стойностите на разликите E_n , които съответстват на фиксирана разлика $D_n = d_{n+1} - d_n = k$, са краен брой.

Доказателство. Имаме последователно

$$\begin{aligned} E_n &= e_{n+1} - e_n = \frac{P(n+1)}{d_n + k} - \frac{P(n)}{k} = \frac{d_n[P(n+1) - P(n)]}{d_n(d_n + k)} - \frac{kP(n)}{d_n(d_n + k)} \\ &= \frac{2an + a + b}{d_n + k} - \frac{k(an^2 + bn + c)}{d_n(d_n + k)}. \end{aligned}$$

Тъй като $0 < \frac{2an+a+b}{d_n+k} < 3a$ и $0 < \frac{k(an^2+bn+c)}{d_n(d_n+k)} < 2ak$ за достатъчно големи n (проверете!), получаваме искания резултат.

От Лема 1 и 2 следва, че за безбройно много стойности на n (измежду тези, за които $D_{n-1} \leq 2s$ и $D_n \leq 2s$) четворката $(D_{n-1}, E_{n-1}, D_n, E_n)$ принадлежи на фиксирано крайно множество (от четворки естествени числа). Следователно една такава четворка се появява безбройно много пъти и нека това е $(u, v, w, z) = (D_{n-1}, E_{n-1}, D_n, E_n)$. Ще разгледаме два случая.

Случай 1. Нека $\frac{u}{v} \neq \frac{w}{z}$. В този случай d_n и e_n могат да бъдат намерени от системата $P(n+1) - P(n) = (d_n + w)(e_n + z) - d_n e_n$, $P(n) - P(n-1) =$

$d_n e_n - (d_n - u)(e_n - v)$ (проверете, че тази система е линейна относно d_n и e_n и я решете!). Получаваме $P(n) = d_n e_n$, където d_n и e_n са линейни функции на n с рационални коефициенти, в безбройно много точки, оттам и навсякъде. Остава да отбележим, че ако полином с цели коефициенти се разлага на произведение от два полинома с рационални коефициенти, то той се разлага и на произведение от два полинома с цели коефициенти (лема на Гаус).

Случай 2. Нека $\frac{u}{v} = \frac{w}{z}$. За достатъчно големи n частното

$$\frac{P(n+1) - P(n)}{P(n) - P(n-1)} = \frac{(d_n + w)(e_n + z) - d_n e_n}{d_n e_n - (d_n - w)(e_n - v)} = \frac{z d_n + w e_n + z w}{v d_n + u e_n - u v}$$

става произволно близко до $\frac{z}{v} = \frac{w}{u}$. От друга страна, имаме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n+1) - P(n)}{P(n) - P(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a(n+1) + a + b}{2an + a + b} = 1.$$

Следователно $z = v$ и $w = u$. Последното означава, че $P(t)$ съвпада с $[d_n + u(t-n)][e_n + v(t-n)]$ в точките $n-1$, n и $n+1$, оттам и навсякъде.

Казахстан (Жаутиков)

Задача 1. В трапец $ABCD$ средите на основите AB и CD са съответно точките M и N .

а) Да се докаже, че трапецът е равнобедрен тогава и само тогава, когато пресечната точка на симетралите на бедрата лежи върху отсечката MN .

б) Вярно ли е твърдението от а), ако е известно само че пресечната точка на симетралите на бедрата лежи върху правата MN ?



Решение. Нека P е пресечната точка на продълженията на бедрата AD и BC . От теоремата на Шайнер следва, че точките P , M и N лежат на една права. Нека E и F са средите на бедрата и симетралите на бедрата да се пресичат в точка S върху (отсечката или правата) MN . Правата PS определя диаметър в окръжността, описана около $\triangle EFP$ и медиана в същия триъгълник. Това е възможно само в два случая: когато $\triangle EFP$ е равнобедрен (тогава и трапецът е равнобедрен) или когато и EF е диаметър. Във втория случай $EPFS$ е правоъгълник и точките P , N , K , M и S са в този ред върху диагонала PS , т.е. S е извън отсечката MN . Следователно отговорът за б) е отрицателен.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, които удовлетворяват равенството $f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y)$ за всички реални числа x и y .

Решение. Ясно е, че функцията $f \equiv 0$ е решение. Нека $f \not\equiv 0$ и да изберем y така, че $f(y) \neq 0$. Тогава $4xf(y)$ пробягва всички реални стойности и

следователно всяко реално число се представя във вида $f(a) - f(b)$ за подходящи a и b . Ще използваме това във вида $x = 2f(y) - 2f(z)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и подходящи y и z .

Да положим в условието $x = -f(z)$ и $y = z$. Получаваме

$$f(0) = f(-2f(z)) - 4f(z)^2. \quad (1)$$

Полагаме $x = f(y) - 2f(z)$ в условието и получаваме

$$f(2f(y) - 2f(z)) = f(-2f(z)) + 4f(y)^2 - 8f(y)f(z). \quad (2)$$

От (1) и (2) получаваме $f(2f(y) - 2f(z)) = (2f(y) - 2f(z))^2 + f(0)$, което означава, че $f(x) = x^2 + c$ за всяко реално x . Непосредствено се проверява, че това действително е решение.

Забележка. На БОМ през 2007 г. беше предложено (като втора задача) функционалното уравнение $f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4yf(x)$. Размяната на местата на x и y води до току-що разгледаното уравнение с малка разлика, която обаче не води до съществени различия при решението.

Задача 3. Наредената двойка естествени числа (a, b) се нарича интересна, ако за всяко естествено число n съществува естествено число k , такова, че $a^k + b$ се дели на 2^n . Да се намерят всички интересни двойки.

Решение. Очевидно a и b са с еднаква четност. Ако и двете са четни, степента на 2 в a^k може да става произволно голяма (защото от $2^n | a^k + b$ следва $a^k \geq 2^n - b \iff k \geq \log_a(2^n - b)$), а в b си остава постоянна и е ясно, че няма как да имаме $2^n | a^k + b$ за всяко n .

Нека a и b са нечетни и $m = v_2(a - 1)$ и $\ell = v_2(a^2 - 1)$ са степенните показатели на 2 в каноничното разлагане на съответно на $a - 1$ и $a^2 - 1$.

Лема 1. Ако $b \equiv 1 \pmod{2^m}$, то за всяко естествено число n съществува естествено число k , такова, че $a^k - b$ се дели на 2^n .

Доказателство. Нека $a = 2^m t + 1$ и $b = 2^m r + 1$, където t е нечетно, $t, r \in \mathbb{N}$. Очевидно $2^n | a^k + b$ при $n \leq m$ и затова ще предполагаме, че $n > m$. Тогава $a^{2^{n-m}} - 1$ се дели на $2^{m+(n-m)} = 2^n$ съгласно лемата за повишаване на експонентата (lifting the exponent lemma). От същата лема следва и че $a^{2^{n-m-1}} - 1$ не се дели на 2^n . Тогава показателят на a по модул 2^n е 2^{n-m} и следователно числата $a, a^2, a^3, \dots, a^{2^{n-m}}$ дават всички възможни остатъци от вида $2^m s + 1$, а един от тези остатъци е $b = 2^m r + 1$, т.е. имаме $a^k \equiv b \pmod{2^n}$ за някое k . С това лемата е доказана.

Лема 2. Имаме $2^\ell | b + 1$ или $2^\ell | a + b$.

Доказателство. Условието трябва да бъде изпълнено за $n = \ell$, т.е. имаме $a^k \equiv -b \pmod{2^\ell}$ за някое k . Тъй като $a^2 - 1$ дели $a^k - 1$ или $a^k - a = a(a^{k-1} - 1)$ (в зависимост от четността на k), заключаваме, че $2^\ell | (a^k + b) - (a^k - 1) = b + 1$ или $2^\ell | (a^k + b) - (a^k - a) = a + b$.

Условието от Лема 2 е достатъчно за описание на всички интересни двойки.

Случай 1. Нека $a \equiv 1 \pmod{4}$. Имаме $m \geq 2$ и $a^2 - 1 = 2^{2m}t^2 + 2^{m+1}t$, откъдето следва, че $\ell = m + 1$. Тогава от Лема 2 следва, че $2^{m+1} | b + 1$, т.е. $b = 2^{m+1}s_1 - 1$ или $2^{m+1} | a + b = 2^mt + 1 + b$, т.е. $b = 2^ms_2 - 1$. При всички случаи имаме $b = 2^mq - 1$, където q е естествено число. Сега от Лема 1, приложена за a и $-b$ следва, че двойката $(a, b) = (2^mt + 1, 2^mq - 1)$, $m, t, q \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, t нечетно, е интересна.

Случай 2. Нека $a \equiv -1 \pmod{4}$. Сега $m = 1$ и нека $a = 2^uv - 1$, където $u, v \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$, v е нечетно. Имаме $a^2 - 1 = 2^{2u}v^2 + 2^{u+1}t$, откъдето $\ell = u + 1$. Тогава от Лема 2 следва, че $2^{u+1} | b + 1$, т.е. $b = 2^{u+1}s_1 - 1$ или $2^{u+1} | a + b = 2^uv - 1 + b$, т.е. $b = 2^us_2 + 1$, където s_2 е нечетно. В първия случай отново от Лема 1, приложена за a^2 и $-b$ следва, че двойката $(a, b) = (2^uv - 1, 2^{u+1}s_1 - 1)$, $u, v, s_1 \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$, v нечетно, е интересна.

Остана да докажем, че двойката $(a, b) = (2^uv - 1, 2^us_2 + 1)$, $u, v, s_2 \in \mathbb{N}$, $u \geq 2$, v, s_2 нечетни, е интересна. Нека n е достатъчно голямо и a' е такова естествено число, че $aa' \equiv 1 \pmod{2^n}$. Лесно се вижда, че $a' = 2^uv_1 - 1$, където v_1 е нечетно естествено число. Тогава $-ba' \equiv 1 \pmod{2^{u+1}}$ и от Лема 1, приложена за a^2 и $-ba'$ следва, че съществува $k \in \mathbb{N}$, за което $(a^2)^k \equiv -ba' \pmod{2^n}$. Умножаваме двете страни на последното сравнение с a и получаваме $a^{2k+1} \equiv -b \pmod{2^n}$.

Задача 4. Да се намери максималният възможен брой множества с по 4 елемента, които удовлетворяват едновременно следните две условия:

- (1) Всеки две различни множества имат точно по два общи елемента.
- (2) Не съществуват два елемента, които да са общи за всички множества.

Решение. (Оценка) Ще докажем, че търсеният брой не надминава 7. Да предположим, че някои два елемента (например 1 и 2) се срещат в три от множествата и нека това са $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 5, 6\}$ и $\{1, 2, 7, 8\}$. Всяко друго множество съдържа поне един от елементите 1 и 2 (Защо?), но има множество, което не ги съдържа едновременно и без ограничение на общ-

ността можем да считаме, че това е $\{2, 3, 5, 7\}$. Сега от условието следва, че по-нататък можем да имаме само множествата $\{1, 4, 5, 7\}$, $\{1, 3, 6, 7\}$, $\{1, 3, 5, 8\}$, $\{2, 3, 6, 8\}$, $\{2, 4, 5, 8\}$ и $\{2, 4, 6, 7\}$. Тези множества се групират в три двойки без общи елементи и значи най-много три от тях могат да участват. Получихме най-много $3 + 1 + 3 = 7$ множества. Ако никои два елемента не се срещат в три от множествата, имаме най-много $1 + \binom{4}{2} = 7$ множества.

(Конструкция) Множествата, получени от $\{1, 2, 3, 5\}$ и неговите циклични завъртания по модул 7 $\{2, 3, 4, 6\}$ и т.н., са 7 на брой и имат исканото свойство.

Забележка. Задачата е добре известно и лесно упражнение в курсовете за комбинаторни дизайни. Конструирахме $(7, 4, 2)$ симетричен блок-дизайн (symmetric BIBD – balanced incomplete block design). Всяка двойка елементи принадлежи точно на две множества.

Задача 5. Нека $n > 1$ е естествено число. Елемент a на множеството $M = \{1, 2, 3, \dots, n^2 - 1\}$ се нарича добър, ако съществува елемент b на M , за който $ab - b$ се дели на n^2 . Елемент a на M се нарича много добър, ако $a^2 - a$ се дели на n^2 . Нека броят на добрите елементи е g , а броят на много добрите елементи е v . Да се докаже, че

$$v^2 + v \leq g \leq n^2 - n.$$

Решение. Ще докажем, че $a \in M$ е добър елемент тогава и само тогава, когато $(a - 1, n^2) > 1$. Ако $(a - 1, n^2) = 1$, от $n^2 | ab - b = b(a - 1)$ следва, че $n^2 | b$, което е невъзможно при $b \leq n^2 - 1$. Ако $(a - 1, n^2) = d > 1$, то при $b = \frac{n^2}{d} < n^2 - 1$ имаме $n^2 | ab - b$. Следователно

$$g = g(n) = n^2 - 1 - (\varphi(n^2) - 1) = n^2 - \varphi(n^2).$$

Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ е каноничното разлагане на n . Ще докажем, че $v = v(n) = 2^k - 1$. Не е трудно да се види, че сравнението $a^2 - a \equiv 0 \pmod{n^2}$ е еквивалентно на системата $a^2 - a \equiv 0 \pmod{p_i^{2\alpha_i}}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Всяко от сравненията в тази система има точно по две решения ($a = 0$ и $a = 1$) и от Китайската теорема за остатъците следва, че системата има 2^k решения (всъщност получаваме 2^k "китайски" системи, всяка с единствено решение). Остава да отбележим, че и $a = n^2$ е решение, което не се брой в нашата задача.

Получихме, че разглежданите неравенства са еквивалентни на

$$v^2 + v = 4^k - 2^{k+1} + 2^k \leq g = n^2 - \varphi(n^2) \leq n^2 - n.$$

Дясното неравенство следва от $\varphi(n^2) = n\varphi(n) \geq n$ с равенство само при $n = 2$. За лявото ще отбележим, че $n^2 - \varphi(n^2) \geq n^2 - n(n-1) = n$ (с равенство точно когато n е просто число) и ще докажем, че $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \geq 4^k$ с малки изключения. Лесно се вижда, че ако числото n не удовлетворява последното неравенство, то има прости делители 2 и 3 най-много в първа степен (поне един от тях със сигурност в първа степен) и това оставя малък брой случаи, които оставяме на читателя.

Задача 6. Диагоналите на вписан четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка K . Средите на диагоналите AC и BD са съответно M и N . Окръжностите, описани около триъгълниците ADM и BCN се пресичат в точки L и P . Да се докаже, че точките K , L , M и N лежат на една окръжност (предполага се, че всички изброени точки са различни).

Решение. Нека правите AD и BC се пресичат в точка E . Тогава от теоремата за радикалните оси следва, че точките E , M и L лежат на една права. Аналогично, ако F е втората пресечна точка на окръжностите, описани около триъгълниците ADK и BCN , то точките E , K и F лежат на една права.

Тъй като $EM.EL = EB.EC = EK.EF$, четириъгълникът $MLFK$ е вписан. Лесно се вижда, че $\triangle FBC \sim \triangle FDA$ и аналогично $\triangle FBD \sim \triangle FCA$. Тъй като M и N са среди съответно на AC и BD , от подобията следва, че $\sphericalangle NFM = \sphericalangle DFA = \sphericalangle DKA$. Тогава четириъгълникът $NFKM$ е вписан, откъдето следва, че и $KLMN$ е вписан.

Забележка. Задачата е предлагана на известната и много престижна олимпиада на 239-то училище в Санкт Петербург през 2007 г. като трета задача за 10-11 клас.