

НАЦИОНАЛНИ ОЛИМПИАДИ ПО МАТЕМАТИКА ~~2011~~

Петър Бойваленков Емил Колев
Николай Николов

УНИМАТ СМБ
Съюз на Математиците в България

Настоящата книга съдържа условията и решенията на задачите от финалните етапи на националните олимпиади във водещи (по преценка на авторите) в “олимпийската“ математика страни. Текстът се основава на материалите, разпространявани между ръководствата на националните отбори по време на Международната олимпиада по математика (Мар дел Плата, Аржентина, 4-16 юли 2012 г.), както и на материали от интернет. Авторите се надяват задачите от тази книга да послужат добре както на учениците с изявени интереси в областта на математиката, така и на специалистите, които се занимават с подготовка на олимпийци.

Copyright © УНИМАТ СМБ
София 1113, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
тел. (02)979-28-06, e-mail: peter@math.bas.bg
София, октомври 2012 г.
ISBN: 978-954-8880-39-8

СЪДЪРЖАНИЕ

	Условия	Решения
Иран	3	17
Китай	7	34
Русия	8	40
САЩ	12	57
Сингапур	13	66
Южна Корея	14	70
Жаутиков	15	77

Иран

На МОМ ръководителите на иранския отбор разпространяват брошура, в която задачите по-долу са представени като трети кръг на тяхната национална олимпиада. В същото време от сайта на Art of Problem Solving става ясно, че това всъщност са контролните за определяне на национален отбор. Предпочетохме да се съобразим с формулировката на колегите от Иран. Сигурни сме, че читателите ще се съгласят, на това състезание се предлагат задачи, които са изключително богати на идеи и изискват много знания.

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа $n \geq 2$ със следното свойство: за всяка двойка числа $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ числата $i + j$ и $\binom{n}{i} + \binom{n}{j}$ имат еднаква четност.

Задача 2. Нека ω е описаната около остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност, D е средата на дъгата $\widehat{BAC}$ и I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Нека DI да пресича BC в точка E и за втори път ω в точка F , а правата през E , успоредна на AI , да пресича AF в точка P . Да се докаже, че PE е ъглополовяща на $\angle BPC$.

Задача 3. Нека n е естествено число и S е множество от точки в равнината със следните свойства:

(1) Не съществуват n прави в равнината, такива, че всяка точка от S да лежи на поне една от тези прави.

(2) За всяка точка $X \in S$ съществуват n прави в равнината, такива, че всяка точка от $S \setminus \{X\}$ лежи на поне една от тези прави.

Да се намери максималната възможна мощност на S .

Задача 4. Дадена е правоъгълна мрежа $m \times n$, $m, n \geq 4$, и затворен несамопресичащ се маршрут върху нея, който минава през всичките $(m - 1)(n - 1)$ вътрешни върхове и не минава през нито един от върховете по контура. Нека A е броят на върховете, в които маршрутът не прави завои, B е броят на клетките с точно две противоположни страни, участващи в маршрута, и C е броят на клетките с нито една страна в маршрута. Да се докаже, че $A = B - C + m + n - 1$.

Задача 5. Нека $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ е функция, за която:

$$(1) f(a) = 0 \iff a = 0; \quad (2) f(ab) = f(a)f(b);$$

$$(3) f(a+b) \leq 2 \max\{f(a), f(b)\}.$$

Да се докаже, че $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ за всички $a, b \in [0, +\infty)$.

Задача 6. Даден е петоъгълник $ABCDE$, вписан в окръжност ω . Нека окръжностите $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ и ω_e са симетрични на ω съответно относно правите AB, BC, CD, DE и EA . Нека A_1 е втората пресечна точка на ω_a и ω_e . Аналогично се дефинират и точките B_1, C_1, D_1 и E_1 . Да се докаже, че

$$2 \leq \frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}} \leq 3,$$

където с S_X е означено лицето на фигурата X .

Задача 7. Възможно ли е $\binom{n}{2}$ последователни естествени числа да бъдат записани по ребрата на пълен граф с n върха така, че за всеки път (или цикъл) с дължина 3, съставен от ребра с числа a, b и c върху тях (b е написано между a и c) най-големият общ делител на a и c да дели b ?

Задача 8. Нека g е полином от степен поне 2 с неотрицателни коефициенти. Да се намерят всички функции $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, за които

$$f(f(x) + g(x) + 2y) = f(x) + g(x) + 2f(y)$$

за всички $x, y \in (0, +\infty)$.

Задача 9. Даден е успоредник $ABCD$. Окръжността ω_1 се допира до отсечките AB и AD , а окръжността ω_2 се допира до отсечките BC и CD . Известно е, че съществува окръжност, която се допира до правите AD и DC и външно до окръжностите ω_1 и ω_2 . Да се докаже, че съществува окръжност, която се допира до правите AB и BC и външно до окръжностите ω_1 и ω_2 .

Задача 10. Нека a, b и c са реални положителни числа, за които $ab + bc + ca = 1$. Да се докаже неравенството

$$\sqrt{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq \frac{a\sqrt{a}}{bc} + \frac{b\sqrt{b}}{ca} + \frac{c\sqrt{c}}{ab}.$$

Задача 11. Нека A и B са различни точки върху окръжност ω с център O , като $60^\circ \leq \angle AOB \leq 120^\circ$. Нека C е центърът на описаната около

$\triangle AOB$ окръжност, а ℓ е права през C , която сключва с OC ъгъл 60° . Допирателните към ω в точките A и B пресичат ℓ съответно в точки M и N , а описаните около $\triangle CAM$ и $\triangle CBN$ окръжности пресичат за втори път ω съответно в точки Q и R и се пресичат (за втори път) в точка P . Да се докаже, че $OP \perp QR$.

Задача 12. Нека Q е фамилията от всички крайни множества, съставени от последователни естествени числа. За всяко подмножество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, дефинираме

$$g(A) = \max_{B \subset A, B \in Q} |B|, \quad f(A) = \max_{1 \leq i \leq k-1} a_{i+1} - a_i.$$

Дефинираме още и

$$G(n) = \sum_A g(A), \quad F(n) = \sum_A f(A).$$

Да се докаже, че съществува естествено число m , такова че за всяко естествено число $n > m$ е изпълнено неравенството $F(n) > G(n)$.

Задача 13. Даден е правилен 2^k -ъгълник M с център O . Нека $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2^k}$ са правите, определени от страните на M , отчетени по посока на часовниковата стрелка. Да отразим симетрично O относно ℓ_1 , получената точка относно ℓ_2 и т.н. до последната страна. Да се докаже, че разстоянието от O до последната точка е по-малко от периметъра на M .

Задача 14. Съществуват ли 2000 реални числа (не непременно различни), не всичките равни на 0, със следното свойство: ако кои да е 1000 от тях са корени на полином със старши коефициент 1 от степен 1000, то неговите коефициенти (освен този пред x^{1000}) са някаква пермутация на останалите 1000 числа?

Задача 15. Да се реши в цели числа уравнението

$$(y^3 + xy - 1)(x^2 + x - y) = (x^3 - xy + 1)(y^2 + x - y).$$

Задача 16. Дадено е нечетно просто число p . Полиномът $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ се нарича i -остатъчен, ако $\sum_{p-1|k, k>0} a_k \equiv i \pmod{p}$. Да се докаже, че числата $f(1), f(2), \dots, f(p-1)$ дават всички възможни ненулеви остатъци при деление на p тогава и само тогава, когато полиномът $f^{p-1}(x)$ е 1-остатъчен, а полиномите $f(x), \dots, f^{p-2}(x)$ са 0-остатъчни.

Задача 17. Нека $n \geq 4$ е естествено число, а A и B са множества от точки в равнината, никои три от които не лежат на една права. Нека $T(A)$ е броят на несамопресичащите се начупени линии с $n - 1$ сегмента и върхове точките от A . Аналогично се дефинира $T(B)$. Да се докаже, че ако точките от B определят изпъкнал n -ъгълник, а тези от A – не, то $T(B) < T(A)$.

Задача 18. Даден е $\triangle ABC$ с център на описаната окръжност O . Нека точките A_1 , B_1 и C_1 са вътрешни съответно за страните BC , CA и AB и са такива, че окръжностите, описани около $\triangle AB_1C_1$, $\triangle BC_1A_1$ и $\triangle CA_1B_1$ минават през точка O . Нека ℓ_a е радикалната ос на окръжността с център B_1 и радиус B_1C и на окръжността с център C_1 и радиус C_1B . Правите ℓ_b и ℓ_c се дефинират аналогично. Да се докаже, че правите ℓ_a , ℓ_b и ℓ_c определят триъгълник, чийто ортоцентър съвпада с ортоцентъра на $\triangle ABC$.

Китай

Задача 1. Около $\triangle ABC$ с най-голям ъгъл при върха A е описана окръжност. Точките D и E са среди съответно на дъгите $\widehat{ABC}$ и $\widehat{ACB}$. Окръжността, през точките A и B , която се допира до правата AC , и окръжността през точките A и E , която се допира до правата AD , се пресичат в точки A и P . Да се докаже, че AP е ъглополовяща на $\angle BAC$.

Задача 2. Дадено е просто число p . В квадратна таблица A с размери $p \times p$ са записани числата $1, 2, \dots, p^2$ в някакъв ред. Разрешено е да прибавяме 1 или да изваждаме 1 от всички числа в даден ред или даден стълб. Таблицата се нарича *добра*, ако е възможно по този начин да получим таблица само с нули. Да се намери броят на добрите таблици.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко реално число $M > 2$ съществува строго растяща безкрайна редица от естествени числа $a_1, a_2, \dots$, която удовлетворява следните две условия:

а) $a_i > M^i$ за всяко естествено i ;

б) едно цяло число n е различно от нула тогава и само тогава, когато съществува естествено число m и $b_1, b_2, \dots, b_m \in \{-1, 1\}$ за които

$$n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_m a_m.$$

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е цяло число и $f(x) = (x+a)(x+b)$, където a и b са положителни реални числа. Да се намери най-голямата стойност на

$$F = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\},$$

където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са неотрицателни реални числа със сума 1.

Задача 5. Нека n е свободно от квадрати, положително четно число, k е цяло число, а p е просто число, за което $p < 2\sqrt{n}$, p не дели n и p дели $n + k^2$. Да се докаже, че съществуват различни естествени числа a, b, c , за които $n = ab + bc + ca$.

Задача 6. Да се намери най-малкото естествено число k със следното свойство: за всяко k -елементно подмножество A на множеството $S = \{1, 2, \dots, 2012\}$ съществуват три два по два различни елемента $a, b, c \in S$, за които числата $a + b$, $b + c$ и $c + a$ са от A .

Русия

Задача 9.1. Дадени са различни естествени числа $a_1, \dots, a_{11}$ не по-малки от 2 със сбор равен на 407. Съществува ли естествено число n , за което сборът от остатъците при деление на n с числата $a_1, a_2, \dots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \dots, 4a_{11}$ да е равен на 2012?

Задача 9.2. Върху окръжност са избрани 2012 точки, които я разделят на равни дъги. Избрани са k от тези точки и от тях е построен изпъкнал k -ъгълник. Кое е най-голямото число k , за което може този многоъгълник да няма успоредни страни?

Задача 9.3. Даден е успоредник $ABCD$ с тъп ъгъл при върха A . Точка H е петата на перпендикуляра от точка A към страната BC . Продължението на медианата от върха C на $\triangle ABC$, пресича описаната около него окръжност в точка K . Да се докаже, че точките K, H, C и D лежат на една окръжност.

Задача 9.4. Положителните реални числа $a_1, \dots, a_n$ и k са такива, че

$$a_1 + \dots + a_n = 3k, \quad a_1^2 + \dots + a_n^2 = 3k^2 \quad \text{и} \quad a_1^3 + \dots + a_n^3 > 3k^3 + k.$$

Да се докаже, че разликата на някои две от числата $a_1, \dots, a_n$ е по-голяма от 1.

Задача 9.5. В кръг са разположени 101 мъдреци. Всеки от тях смята, че или Земята се върти около Юпитер или че Юпитер се върти около Земята. Веднъж на всяка минута всеки мъдрец казва своето мнение. Веднага след това всеки мъдрец, чийто двама съседни не са на неговото мнение, си сменя мнението, а никой от останалите мъдреци не си сменя мнението. Да се докаже, че след известно време мненията ще спрат да се променят.

Задача 9.6. Върху страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ са избрани съответно точки A_1, B_1 и C_1 така, че са изпълнени равенствата

$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1.$$

Нека I_A , I_B и I_C са центровете на вписаните окръжности за триъгълниците AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C . Да се докаже, че центърът на окръжността, описана около $\triangle I_AI_BI_C$ съвпада с центъра на окръжността, вписана в $\triangle ABC$.

Задача 9.7. Първоначално на дъската са записани 10 последователни естествени числа. За един ход се разрешава да се изберат произволни две числа (да ги означим с a и b) и вместо тях да запишем числата $a^2 - 2011b^2$ и ab . След няколко хода на дъската не останало нито едно от първоначалните числа. Може ли получените 10 нови числа да са последователни естествени числа (записани в някакъв ред)?

Задача 9.8. Автобусните линии в един град са такива, че всеки две линии имат точна една обща спирка и на всяка линия има поне 4 спирки. Да се докаже, че всички спирки могат да се разпределят между две фирми така, че на всяка линия да има спирки и на двете фирми.

Задача 10.1. Дадени са различни естествени числа $a_1, \dots, a_{10}$ не по-малки от 3, със сбор, равен на 678. Съществува ли естествено число n , за което сборът от остатъците при деление на n с числата $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ да е равен на 2012?

Задача 10.2. В остроъгълен неравностранен $\triangle ABC$ е вписана окръжност ω с център I , която се допира до страната BC в точка D . Нека O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Описаната около $\triangle AID$ окръжност пресича за втори път правата AO в точка E . Да се докаже, че дължината на отсечката AE е равна на радиуса на окръжността ω .

Задача 10.3. Всеки две от реалните числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 се различават поне с 1. За някое реално k са изпълнени равенствата

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k \quad \text{и} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$

Да се докаже, че $k^2 \geq \frac{25}{3}$.

Задача 10.4. Първоначално на дъската са написани $n + 1$ едночлена $1, x, x^2, \dots, x^n$. Всяка минута k ученици едновременно пресмятат сбора на два от записаните на дъската полиноми и записват получените резултати на дъската. След m минути на дъската били написани някакви полиноми,

между които и полиномите $S_1 = 1 + x$, $S_2 = 1 + x + x^2$, $S_3 = 1 + x + x^2 + x^3$, $\dots$, $S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. Да се докаже, че $m \geq \frac{2n}{k+1}$.

Задача 10.5. Виж Задача 9.5.

Задача 10.6. Съществуват ли естествени числа a, b, c , по-големи от 10^{10} и такива, че произведението им се дели на всяко от тях, увеличено с 2012?

Задача 10.7. Дадена е правоъгълна координатна система спрямо която са построени графиките на n квадратни тричлена. Никои две от построените параболи не се допират. Тези параболи разделят равнината на няколко области, една от които се намира над всички останали. Да се докаже, че на границата на тази област има не повече от $2(n-1)$ пресечни точки на параболи.

Задача 10.8. Точка E е средата на отсечката, свързваща ортоцентъра на неравнобедрен остроъгълен $\triangle ABC$ с върха A . Вписаната в този триъгълник окръжност допира страните AB и AC съответно в точки C' и B' . Да се докаже, че точката F , която е симетрична на точката E спрямо правата $B'C'$, лежи на правата, определена от центровете на вписаната и описаната окръжност на $\triangle ABC$.

Задача 11.1. Първоначално на масата са поставени 111 парчета пластилин с еднакво тегло. За един ход можем да изберем няколко групи (може и само една) с равен брой парчета във всяка и от всяка група да образуваме едно парче, като слепим всички парчета в нея. За колко най-малко хода можем да получим 11 парчета, всеки две от които имат различно тегло?

Задача 11.2. Виж Задача 10.3.

Задача 11.3. Клетките на безкрайна шахматна дъска са оцветени по стандартния начин в бяло и черно. След това всички бели клетки са преоцветени в червен и син цвят така, че съседни по ъгъл клетки да са разноцветни. Нека ℓ е произволна права, която не е успоредна на страните на клетките. За всяка отсечка I , която е успоредна на ℓ , пресмятаме разликата от сбора на червените и сините участъци от I . Да се докаже, че съществува такова число C , което зависи само от правата ℓ , че всички получени разлики не надминават C .

Задача 11.4. Основата на пирамидата $SA_1A_2 \dots A_n$ е изпъкналият многоъгълник $A_1 \dots A_n$. За всяко $i = 1, 2, \dots, n$ в равнината на основата е построен $\triangle X_i A_i A_{i+1}$, еднакъв на $\triangle S A_i A_{i+1}$, който лежи в една и съща полуравнина с основата спрямо правата $A_i A_{i+1}$ (полагаме $A_{n+1} = A_1$). Да се докаже, че така построените триъгълници покриват цялата основа.

Задача 11.5. Даден е полином $P(x)$ и числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, за които $a_1 a_2 a_3 \neq 0$. Ако за всяко реално число x е изпълнено равенството

$$P(a_1 x + b_1) + P(a_2 x + b_2) = P(a_3 x + b_3),$$

да се докаже, че $P(x)$ има поне един реален корен.

Задача 11.6. Върху страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$ са избрани съответно точки A_1 , B_1 , C_1 , като са изпълнени равенствата

$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1.$$

Нека O_A , O_B и O_C са центровете на описаните окръжности съответно за триъгълниците AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C . Да се докаже, че центърът на вписаната окръжност за $\triangle O_A O_B O_C$ съвпада с центъра на вписаната окръжност за $\triangle ABC$.

Задача 11.7. Върху окръжност са избрани $2n+1$, $n \geq 2$ точки, които я разделят на равни дъги. Двама последователно изтриват по една точка. Ако след ход на някой от двамата всички триъгълници с върхове в останалите точки са тъпоъгълни, той печели и играта завършва. Кой печели при правилна игра – първият или неговият противник?

Задача 11.8. За произволно естествено число n нека $S_n = 1! + 2! + \dots + n!$. Да се докаже, че съществува n , за което числото S_n има прост делител, по-голям от 10^{2012} .

САЩ

Задача 1. Да се намерят всички цели числа $n \geq 3$ със следното свойство: за всеки n реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, за които

$$\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n \cdot \min(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

съществуват три, които са страни на остроъгълен триъгълник.

Задача 2. Окръжност е разделена на 432 еднакви дъги от 432 точки. Точките са оцветени в четири цвята така, че има 108 червени точки, 108 зелени точки, 108 сини точки и останалите 108 точки са жълти. Да се докаже, че могат да се изберат по три точки от всеки цвят така, че четирите триъгълника с едноцветни върхове са еднакви.

Задача 3. Да се намерят всички цели числа $n > 1$, за които съществува безкрайна редица $a_1, a_2, a_3, \dots$ от ненулеви цели числа, за която равенството

$$a_k + 2a_{2k} + \dots + na_{nk} = 0$$

е изпълнено за всяко естествено число k .

Задача 4. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за които $f(n!) = f(n)!$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и $m - n$ дели $f(m) - f(n)$ за всеки две различни положителни цели числа m, n .

Задача 5. Точка P е от равнината на $\triangle ABC$ и γ е права през P . Правите, симетрични на PA, PB и PC относно γ пресичат съответно BC, AC и AB в точките A', B', C' . Да се докаже, че точките A', B', C' лежат на една права.

Задача 6. За цялото число $n \geq 2$, нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са реални числа, за които

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \text{ и } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

За всяко подмножество $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ нека $S_A = \sum_{i \in A} x_i$.

(Ако A е празното множество, то $S_A = 0$.)

Да се докаже, че за всяко положително λ броят на множествата A , за които $S_A \geq \lambda$ е най-много $\frac{2^{n-3}}{\lambda^2}$. За какви стойности на $x_1, x_2, \dots, x_n$ се достига равенство?

Сингапур

През последните две години Сингапур се представя блестящо на MOM без да има традиции в това отношение – допреди 2011 г. те имат класирания между 14-то и 41-во място, с единствен златен медал през 1996 г. (интересна дискусия по този повод има на <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=728&t=419552>). Представените по-долу задачи от националния кръг на Сингапур ще подкрепят не особено популярната у нас, а и в повечето водещи страни, теза, че високи резултати могат да се постигат и като на национален кръг се предлагат известни задачи (вж. коментарите при решенията).

Задача 1. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с център I , която се допира до страните BC , CA и AB съответно в точки D , E и F . Правата ID пресича отсечката EF в точка K . Да се докаже, че точките A , K и M лежат на една права, където M е средата на BC .

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които

$$(x+y)(f(x)-f(y)) = (x-y)f(x+y)$$

за всички реални x и y .

Задача 3. Нека a_i, b_i, c_i , $i = 1, 2, \dots, N$, са цели числа, като във всяка тройка (a_i, b_i, c_i) поне едно от числата е нечетно. Да се докаже, че съществуват цели числа x , y и z , такива, че поне $\frac{4N}{7}$ от числата $xa_i + yb_i + zc_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, са нечетни.

Задача 4. Нека p е нечетно просто число. Да се докаже, че

$$1^{p-2} + 2^{p-2} + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2} \equiv \frac{2-2^p}{p} \pmod{p}.$$

Задача 5. В равнината са дадени 2012 точки, всяка оцветена в един от дадени n цвята. Известно е, че няма два цвята, в които да са оцветени еднакъв брой точки. Да се намери това n , за което броят на множествата с по n точки, по една от всеки цвят, е максимален.

Южна Корея

Задача 1. Нека x , y и z са положителни реални числа. Да се докаже неравенството

$$\frac{2x^2 + xy}{(y + \sqrt{zx} + z)^2} + \frac{2y^2 + yz}{(z + \sqrt{xy} + x)^2} + \frac{2z^2 + zx}{(x + \sqrt{yz} + y)^2} \geq 1.$$

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$, за който $AB \neq AC$, $\angle B \neq 90^\circ$. Точките D , E и F са петите на перпендикулярите от центъра на вписаната окръжност I на $\triangle ABC$ съответно към BC , CA и AB . Точката S е пресечната точка на AB и DI , точката T е пресечната точка на DE и правата през F , която е перпендикулярна на DF и точка R е пресечната точка на ST и EF . Нека P_{ABC} е пресечната точка на окръжността с диаметър IR и вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, която се намира в различни полуравнини с точката A по отношение на правата IR .

Нека XYZ е равнобедрен триъгълник, за който $XZ = YZ > XY$ и W е точка върху страната YZ , за която $WY < XY$. За точките $K = P_{YXW}$ и $L = P_{ZXW}$ да се докаже, че $2KL \leq XY$.

Задача 3. Дадени са множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$. За подмножество X на $\{1, 2, \dots, n\}$ означаваме

$$N(X) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} - X \mid A_i \cap A_j \neq \emptyset \text{ за всяко } j \in X\}.$$

Да се докаже, че за всяко цяло число $3 \leq m \leq n - 2$ съществува подмножество X на $\{1, 2, \dots, n\}$, за което $|X| = m$ и $|N(X)| \neq 1$.

Задача 4. За остроъгълен $\triangle ABC$ точка H е петата на перпендикуляра от A към BC . За точки D и E съответно от страните AB и AC нека F и G са петите на перпендикулярите съответно от D и E към BC . Ако правите DG , EF и AH се пресичат в една точка, да се докаже, че $\angle APE = \angle CPE$.

Задача 5. Нека n е цяло положително число. Да се докаже, че съществуват безбройно много тройки от две по две взаимнопрости цели числа (x, y, z) , за всяка от които е изпълнено равенството $nx^2 + y^3 = z^4$.

Задача 6. Нека M е множество от естествени числа, всяко от които не се дели на просто число, по-голямо от 3. Да се докаже, че за произволни подмножества $A_1, A_2, A_3, \dots$ на M съществуват две различни естествени числа i и j , за които всяко $x \in A_i$ има делител в A_j .

Казахстан (Жаутиков, 15-19 януари 2011 г.)

От 15 до 21 януари 2012 година в град Алмати – Република Казахстан, се проведе IX Международна Жаутиковска Олимпиада по математика, физика и информатика. На нея участваха 54 отбора (343 ученика) от 18 страни, като България бе представена от три отбора: от Софийска математическа гимназия, Математическа гимназия "Петър Берон", Варна, и Образцова математическа гимназия, Пловдив. Характерно за тази олимпиада е, че отборите са представители на математически гимназии и лица към университети.

В индивидуалното състезание по математика бяха спечелени два златни медала от Рафаел Рафаилов (СМГ) и Богдан Станков (СМГ), три сребърни медала от Мартин Минчев (СМГ), Йордан Йорданов (МГ Варна) и Николай Каракехайов (ОМГ) и един бронзов от Милена Великова (МГ Варна).

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Нека D е произволна вътрешна точка от страната AB , а M и N са петите на перпендикулярите от D съответно към BC и AC . Нека H_1 и H_2 са съответно ортоцентровете на триъгълниците MNC и MND . Да се докаже, че лицето на четириъгълника AH_1BH_2 не зависи от разположението на точката D върху AB .

Задача 2. Множество от клетки на таблица $n \times n$, $n \geq 5$, се нарича *удобно*, ако всеки ред и всеки стълб на таблицата съдържа поне по две клетки от това множество. Да се намери максималното m със следното свойство: съществува удобно множество с m клетки, което престава да бъде удобно при премахване на коя да е от клетките му.

Задача 3. Нека $Q(x)$ и $R(x)$ са полиноми с реални коефициенти, за които е известно, че съществува полином $P(x)$ също с реални коефициенти, такъв, че $P(Q(x)) + P(R(x))$ е константа за всяко x . Да се докаже, че поне един от полиномите $P(x)$ и $Q(x) + R(x)$ е константа за всяко x .

Задача 4. Съществуват ли естествени числа m и n и функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива, че са изпълнени едновременно следните две условия

- (i) $f(f(x)) = 2f(x) - x - 2$ за всяко реално x ; (ii) $m \leq n$ и $f(m) = n$.

Задача 5. Върху диагоналите на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са построени равностранни триъгълници ACB' и BDC' така, че B и B' са от една и съща страна на AC , а C и C' са от една и съща страна на BD . Да се намери $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA$, ако е известно, че $B'C' = AB + CD$.

Задача 6. Да се реши в цели числа уравнението

$$2x^2 - y^{14} = 1.$$

Иран

Задача 1. Да се намерят всички естествени числа $n \geq 2$ със следното свойство: за всяка двойка числа $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ числата $i+j$ и $\binom{n}{i} + \binom{n}{j}$ имат еднаква четност.

Решение. Първо ще докажем, че всички биномни коефициенти $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ са нечетни тогава и само тогава, когато $n = 2^k - 1$ за някое естествено число $k \geq 2$.

Нека $n = 2^m + s$, където $s < 2^m$ е цяло неотрицателно число (т.е. $2^m \leq n < 2^{m+1}$). Ако биномният коефициент

$$\binom{n}{2^m - 1} = \frac{(2^m + s)(2^m + s - 1) \dots (2^m + 1)2^m}{s!(s + 1)}$$

е нечетно число, то $2^m | s+1$ (защото степента на 2 в $2^m + i$ и i , $1 \leq i \leq 2^m - 1$, е една и съща; докажете!). Но $s + 1$ е естествено число, ненадминаващо 2^m и следователно $s + 1 = 2^m$, откъдето $n = 2^{m+1} - 1$. Обратно, ако $n = 2^k - 1$ за някое естествено число $k \geq 2$, то от формулата

$$\binom{n}{i} = \frac{(2^k - 1)(2^k - 2) \dots (2^k - i)}{i!}$$

и факта, че степента на 2 в $2^k - i$ и i е една и съща (вж. по-горе!) следва, че $\binom{n}{i}$ е нечетно число.

Нека сега $n \geq 2$ има свойството от условието на задачата. Това е еквивалентно на изискването числата $\binom{n}{i} - i$ да имат една и съща четност за $i = 0, 1, \dots, n$ (в противен случай, ако $\binom{n}{i} - i$ и $\binom{n}{j} - j$ имат различна четност, то сумата им ще е нечетна и това е противоречие). Следователно всеки два съседни биномни коефициента $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{i+1}$ имат различна четност. Тогава всички биномни коефициенти

$$\binom{n+1}{i+1} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

са нечетни. Последното означава, че $n+1 = 2^k - 1$, т.е. $n = 2^k - 2$ за някое естествено число $k \geq 2$.

Задача 2. Нека ω е описаната около остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност, D е средата на дъгата $\widehat{BAC}$ и I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Нека DI да пресича BC в точка E и за втори път ω в точка F , а правата през E , успоредна на AI , да пресича AF в точка P . Да се докаже, че PE е ъглополовяща на $\angle BPC$.

Решение. Ще използваме следния добре известен факт: Ако A, B, C и D лежат на една права в посочения ред и $\angle APC = 90^\circ$, то PC е ъглополовяща на $\angle BPD$ тогава и само тогава, когато $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$. Ще записваме последното като $(ACBD) = -1$.

Нека T е пресечната точка на симетралата на BC и ω . Тогава DT е диаметър в ω и $\angle DFT = 90^\circ$. Освен това FD е ъглополовяща на $\angle BFC$. Следователно $(JEBC) = -1$, където J е пресечната точка на TF и продължението на BC .

Имаме

$$\angle E J F = \frac{\widehat{CT} - \widehat{BF}}{2} = \frac{\widehat{BT} - \widehat{BF}}{2} = \frac{\widehat{FT}}{2} = \angle T A F = \angle E P F.$$

Оттук следва, че четириъгълникът $PEFJ$ е вписан и значи $\angle JPE = 90^\circ$. Последното заедно с $(JEBC) = -1$ означава, че PE е ъглополовяща на $\angle BPC$.

Задача 3. Нека n е естествено число и S е множество от точки в равнината със следните свойства:

(1) Не съществуват n прави в равнината, такива, че всяка точка от S да лежи на поне една от тези прави.

(2) За всяка точка $X \in S$ съществуват n прави в равнината, такива, че всяка точка от $S \setminus \{X\}$ лежи на поне една от тези прави.

Да се намери максималната възможна мощност на S .

Решение. Нека за точка $P = (x_p, y_p) \in S$ правите $L_{i,p}$, $i = 1, 2, \dots, n$, с уравнения съответно $a_{i,p}x + b_{i,p}y + c_{i,p} = 0$, покриват множеството $S \setminus \{P\}$. Да разгледаме полинома на две променливи

$$F_p(x, y) = \prod_{i=1}^n \frac{a_{i,p}x + b_{i,p}y + c_{i,p}}{a_{i,p}x_p + b_{i,p}y_p + c_{i,p}}$$

(знаменателите не се анулират, защото $P \notin L_{i,p}$ за никое i). Всички такива полиноми са $|S|$ на брой, степените им не надминават n и те са линейно

независими във векторното пространство на полиномите на две променливи от степен, ненадминаваща n . Следователно техният брой не надминава размерността на това пространство, т.е. $|S| \leq \binom{n+2}{2}$.

Пример за множество S с $\binom{n+2}{2}$ точки, което има исканите свойства, се дава от триъгълна решетка, зададена от равнобедрен триъгълник със страна n . Не е трудно да се докаже по индукция, че свойствата (1) и (2) са налице.

Задача 4. Дадена е правоъгълна мрежа $m \times n$, $m, n \geq 4$, и затворен несамопресичащ се маршрут върху нея, който минава през всичките $(m-1)(n-1)$ вътрешни върхове и не минава през нито един от върховете по контура. Нека A е броят на върховете, в които маршрутът не прави завой, B е броят на клетките с точно две противоположни страни, участващи в маршрута, и C е броят на клетките с нито една страна в маршрута. Да се докаже, че $A = B - C + m + n - 1$.

Решение. Нека n_i , $i = 0, 1, 2, 3$, е броят на клетките с точно i страни, участващи в маршрута, а е съответното множество от тези клетки. Тогава

$$\sum_i n_i = mn.$$

Нещо повече, тъй като всеки от вътрешните върхове отговаря точно на две звена от маршрута, имаме равенството

$$\sum_i i n_i = 2(m-1)(n-1).$$

За всеки завой на 90° по маршрута да разгледаме клетката, която отговаря на този завой. Нека тези завойи са A' на брой. В A' броим клетките от N_3 , всяка по два пъти, и тези клетки от N_2 , които не участват с две противоположни страни, всяка по веднъж. Следователно е изпълнено равенството

$$A' = 2n_3 + n_2 - B.$$

Оттук и от горните равенства получаваме

$$A' = n_0 - B + 2(m-1)(n-1) - mn$$

и следователно

$$A = (m-1)(n-1) - A' = B - C + m + n - 1.$$

Задача 5. Нека $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ е функция, за която:

- (1) $f(a) = 0 \iff a = 0$; (2) $f(ab) = f(a)f(b)$;
 (3) $f(a + b) \leq 2 \max\{f(a), f(b)\}$.

Да се докаже, че $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$ за всички $a, b \in [0, +\infty)$.

Решение. С индукция по k лесно следва, че $f(a_1 + a_2 + \dots + a_{2^k}) \leq 2^k \max\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{2^k})\}$. Действително, базата всъщност е условието (3), а индукционният преход следва непосредствено от индукционното предположение и от (3).

Нека $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Тогава

$$\begin{aligned} f(a_1 + a_2 + \dots + a_n) &= f(a_1 + a_2 + \dots + a_n + 0 + 0 + \dots + 0) \leq \\ &\leq 2^k \max\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n), f(0)\} = \\ &= 2^k \max\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} \leq \\ &\leq 2n \max\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} \end{aligned}$$

(нулите на първия ред са $2^k - n$, третият ред следва от (1) и накрая имаме очевидно $2^k \leq 2n$ поради избора на k).

Полагаме в горното неравенство $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ и получаваме $f(n) \leq 2nf(1)$. Сега имаме последователно

$$\begin{aligned} (f(a + b))^n &= f((a + b)^n) = f\left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}\right) \leq \\ &\leq 2(n+1) \max_{0 \leq i \leq n} \left\{f\left(\binom{n}{i} a^i b^{n-i}\right)\right\} = \\ &= 2(n+1) \max_{0 \leq i \leq n} \left\{f\left(\binom{n}{i}\right) f(a)^i f(b)^{n-i}\right\} \leq \\ &\leq 2(n+1) \sum_{i=0}^n f\left(\binom{n}{i}\right) f(a)^i f(b)^{n-i} \leq \\ &\leq 4(n+1)f(1) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f(a)^i f(b)^{n-i} = \\ &= 4(n+1)f(1) (f(a) + f(b))^n. \end{aligned}$$

Тогава $f(a + b) \leq \sqrt[n]{4(n+1)f(1)(f(a) + f(b))}$, откъдето твърдението на задачата следва с граничен преход поради $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4(n+1)f(1)} = 1$.

Задача 6. Даден е петоъгълник $ABCDE$, вписан в окръжност ω . Нека окръжностите ω_a , ω_b , ω_c , ω_d и ω_e са симетрични на ω съответно относно правите AB , BC , CD , DE и EA . Нека A_1 е втората пресечна точка на ω_a и ω_e . Аналогично се дефинират и точките B_1 , C_1 , D_1 и E_1 . Да се докаже, че

$$2 \leq \frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}} \leq 3,$$

където с S_X е означено лицето на фигурата X .

Решение. Окръжностите ω , ω_a и ω_e са еднакви и, освен в A , те се пресичат в точките A_1 , B и E . Добре известно е (и се доказва лесно с използване на ъгли), че точките A , A_1 , B и E образуват ортоцентрична система, т.е. всяка от тях е ортоцентър на триъгълника, определен от другите три. В частност, A_1 е ортоцентър на $\triangle ABE$. Аналогично се вижда, че B_1 , C_1 , D_1 и E_1 са ортоцентрове съответно на $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$ и $\triangle DEA$.

Правите A_1E и B_1C са перпендикулярни на AB и значи са успоредни, а отсечките A_1E и B_1C са и равни. От друга страна, имаме $AA_1 \perp BE$ и следователно $\angle A_1AE = 90^\circ + \angle AEB = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{AB}$. Аналогично $\angle B_1BC = 90^\circ + \frac{1}{2} \widehat{AB}$, т.е. $\angle A_1AE = \angle B_1BC$.

Тъй като A_1E и B_1C са успоредни и равни, заключаваме, че A_1B_1 и CE са успоредни и равни. Аналогично се вижда, че двойките отсечки B_1C_1 и AD , C_1D_1 и BE , D_1E_1 и CA , E_1A_1 и DB са съответно успоредни и равни (т.е. страните на $A_1B_1C_1D_1E_1$ са съответно успоредни и равни на диагоналите на $ABCDE$).

Не е трудно да се види, че след удвояване (с хомотетия от вътрешна точка и коефициент 2) на $ABCDE$, петоъгълникът, определен от средите на страните на удвояния, е еднакъв на $A_1B_1C_1D_1E_1$. Следователно (тъй като се интересуваме вече само от отношението на лицата) можем да считаме, че $A_1B_1C_1D_1E_1$ е именно този петоъгълник. Тогава имаме

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1} = 4S_{ABCDE} - S_{CDE} - S_{DEA} - S_{EAB} - S_{ABC} - S_{BCD}$$

(разгледайте отново удвояния петоъгълник).

Да означим за краткост $S = S_{ABCDE}$ и нека S_1 е сумата на лицата на петте триъгълника по-горе. Тогава неравенството от условието е еквивалентно на

$$S \leq S_1 \leq 2S.$$

Дясното неравенство следва веднага, защото всяка точка на $ABCDE$ е покрита най-много от два от петте триъгълника.

Остава да докажем лявото неравенство за произволен петъгълник. Очевидно има два съседни ъгъла на $ABCDE$ със сума, по-голяма от 180° . Нека това са ъглите при C и D . Можем да считаме, че точките B , C , D и E са фиксирани, а A се мени в изпъкналото безкрайно множество, дефинирано от отсечката BE и лъчите $DE^\rightarrow$ и $CB^\rightarrow$. Достатъчно е да докажем, че функцията

$$f(A) = S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDE} + S_{DEA} - S_{BCDE}$$

приема само неотрицателни стойности. Последното следва от факта, че тази функция е линейна по A , дефинирана в горното изпъкнало множество и приемаща стойности

$$f(\infty) = \infty,$$

$$f(B) = 0 + S_{BCD} + S_{CDE} + S_{DEB} - S_{BCDE} \geq 0,$$

$$f(E) = S_{EBC} + S_{BCD} + S_{CDE} + 0 - S_{BCDE} \geq 0$$

в крайните си точки.

Задача 7. Възможно ли е $\binom{n}{2}$ последователни естествени числа да бъдат записани по ребрата на пълен граф с n върха така, че за всеки път (или цикъл) с дължина 3, съставен от ребра с числа a , b и c върху тях (b е написано между a и c) най-големият общ делител на a и c да дели b ?

Решение. Исканите графи очевидно съществуват при $n = 2$ и $n = 3$. Нека $n \geq 4$.

Множеството от ребра с числа, които се делят на k задава пълен граф. Действително, ако числата върху две ребра се делят на k , то числото върху ребро, което ги свързва, също се дели на k .

Нека p е прост делител на n . Тогава по ребрата има точно p кратни на числото $\frac{1}{p}\binom{n}{2}$. Следователно $p = \binom{m}{2}$ за някое естествено m . Лесно се вижда, че оттук следва $p = 3$. Тогава $\binom{n}{2} = 3^a$, което (също лесно) дава $n = 3$, противоречие.

Задача 8. Нека g е полином от степен поне 2 с неотрицателни коефициенти. Да се намерят всички функции $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, за които

$$f(f(x) + g(x) + 2y) = f(x) + g(x) + 2f(y)$$

за всички $x, y \in (0, +\infty)$.

Решение. Да разгледаме функцията $h(x) = f(x) - x$. Имаме

$$h(h(x) + g(x) + x + 2y) = 2h(y).$$

Оттук следва, че за произволни $x, y, z \in (0, +\infty)$ имаме

$$h(h(x) + g(x) + x + 2y) = h(h(z) + g(z) + z + 2y).$$

Функцията $h(x) + g(x) + x$ не е константа, защото в противен случай (ако е равна на константата c) $f(x) = -g(x) + c$ ще приема и отрицателни стойности, тъй като $g(x) \rightarrow \infty$, когато $x \rightarrow \infty$. Следователно съществуват положителни числа x и z , за които числото

$$T = h(x) + g(x) + x - (h(z) + g(z) + z)$$

е положително. Тогава това число е период на функцията h . Нещо повече, всяко число от вида

$$\begin{aligned} S(x) &= h(x+T) + g(x+T) + x+T - h(x) - g(x) - x = \\ &= g(x+T) - g(x) + T \end{aligned}$$

е период за h . Но тъй като $g(x)$ е полином от степен поне 2, $S(x)$ не е константа и множеството от нейните стойности съдържа интервал от вида $[a, +\infty)$. Това означава, че $h(x) = k$ е константа. Сега лесно се вижда, че $k = 0$ и следователно $f(x) = x$. Очевидно тази функция е решение на задачата.

Задача 9. Даден е успоредник $ABCD$. Окръжността ω_1 се допира до отсечките AB и AD , а окръжността ω_2 се допира до отсечките BC и CD . Известно е, че съществува окръжност, която се допира до правите AD и DC и външно до окръжностите ω_1 и ω_2 . Да се докаже, че съществува окръжност, която се допира до правите AB и BC и външно до окръжностите ω_1 и ω_2 .

Решение. Нека ω_1 се допира до AB и AD съответно в точките P_1 и Q_1 , а ω_2 се допира до CD и BC съответно в точките P_2 и Q_2 . Ще използваме следната лема.

Лема. Окръжност ω се допира до лъчите $BA^\rightarrow$ и $BC^\rightarrow$ съответно в точки и тогава и само тогава, когато $\sqrt{BP} = \sqrt{AB} \pm \sqrt{AP_1}$ за някой избор на знака.

Доказателство. Тъй като PP_1 е обща допирателна за ω и ω_1 , условието за допиране е еквивалентно на $PP_1 = 2\sqrt{rr_1}$, където r и r_1 са радиусите на ω и ω_1 . Лесно се вижда, че $rr_1 = BP \cdot AP_1$. Следователно $AB - AP_1 - BP = \pm\sqrt{BP \cdot AP_1}$, откъдето следва твърдението на лемата.

От условието на задачата и от лемата следват равенствата $\sqrt{DQ} = \sqrt{AD} \pm \sqrt{AQ_1}$ и $\sqrt{DP} = \sqrt{CD} \pm \sqrt{CP_1}$ за някой избор на знаците. Тъй като $DP = DQ$, $CP_2 = CQ_2$, $AD = BC$ и $AB = CD$, получаваме

$$\sqrt{BC} \pm \sqrt{AP_1} = \sqrt{AB} \pm \sqrt{CQ_2} \iff \sqrt{BC} \pm \sqrt{CQ_2} = \sqrt{AB} \pm \sqrt{AP_1} = d.$$

Сега е достатъчно да дефинираме точката $P' \in AB$ така, че $\sqrt{BP'} = d$ и да приложим лемата за окръжност ω' , която се допира до лъчите $BA^\rightarrow$ и $BC^\rightarrow$ съответно в точки P' и Q' .

Задача 10. Нека a , b и c са реални положителни числа, за които $ab + bc + ca = 1$. Да се докаже неравенството

$$\sqrt{3}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \leq \frac{a\sqrt{a}}{bc} + \frac{b\sqrt{b}}{ca} + \frac{c\sqrt{c}}{ab}.$$

Решение. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a \geq b \geq c$. Тогава $\frac{a}{bc} \geq \frac{b}{ca} \geq \frac{c}{ab}$ и от неравенството на Чебишев следва

$$\frac{a\sqrt{a}}{bc} + \frac{b\sqrt{b}}{ca} + \frac{c\sqrt{c}}{ab} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ba} \right) (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}),$$

а поради добре известното неравенство $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$ имаме

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ba} \geq \frac{(a + b + c)^2}{3abc}.$$

Следователно е достатъчно да докажем, че $(a + b + c)^2 \geq 9\sqrt{3}abc$. Последното следва от хомогенната си форма $(a + b + c)^2 \sqrt{ab + bc + ca} \geq 9\sqrt{3}abc$ и неравенството между средното аритметично и средното геометрично.

Задача 11. Нека A и B са различни точки върху окръжност ω с център O , като $60^\circ \leq \angle AOB \leq 120^\circ$. Нека C е центърът на описаната около $\triangle AOB$ окръжност, а ℓ е права през C , която сключва с OC ъгъл 60° . Допирателните към ω в точките A и B пресичат ℓ съответно в точки M и N , а описаните около $\triangle CAM$ и $\triangle CBN$ окръжности пресичат за втори

път ω съответно в точки Q и R и се пресичат (за втори път) в точка P . Да се докаже, че $OP \perp QR$.

Решение. Можем да считаме, че ъгълът от 60° между ℓ и лъча $OC \rightarrow$ е същата полуравнина относно CO както и точката B . Ще работим с ориентирани ъгли и ще смятаме по модул 180° . Да означим $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COB = \alpha$. Тогава $\sphericalangle CMA = 360^\circ - (90^\circ + \alpha + 120^\circ) = 150^\circ - \alpha$, откъдето $\sphericalangle APC = 30^\circ + \alpha$. Освен това $\sphericalangle CNB = (60^\circ + \alpha) - 90^\circ = \alpha - 30^\circ$, откъдето $\sphericalangle CPB = \alpha - 30^\circ$. Следователно $\sphericalangle APB = 2\alpha = \sphericalangle AOB$, което означава, че P лежи на описаната около $\triangle AOB$ окръжност и $CP = CA = CO$.

Последното дава $\sphericalangle CAP = \sphericalangle APC = 30^\circ + \alpha$, откъдето поради $\sphericalangle CAO = \sphericalangle AOC = \alpha$ получаваме $\sphericalangle OAP = 30^\circ$. Тогава $\sphericalangle OCP = 2\sphericalangle OAP = 60^\circ$ и триъгълникът OCP е равностранен, т.е. $OC = OP$. Следователно ω и окръжностите, описани около $\triangle ACM$ и $\triangle BCN$ са симетрични относно симетралата на CP . Оттук $PQ = CA$ и $PR = CB$, т.е. $PQ = PR$. Получихме, че OP е симетрала на QR .

Забележка. Условието $60^\circ \leq \sphericalangle AOB \leq 120^\circ$ осигурява "правилното" разположение на точките.

Задача 12. Нека Q е фамилията от всички крайни множества, съставени от последователни естествени числа. За всяко подмножество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, дефинираме

$$g(A) = \max_{B \subset A, B \in Q} |B|, \quad f(A) = \max_{1 \leq i \leq k-1} a_{i+1} - a_i.$$

Дефинираме още и

$$G(n) = \sum_A g(A), \quad F(n) = \sum_A f(A).$$

Да се докаже, че съществува естествено число m , такова че за всяко естествено число $n > m$ е изпълнено неравенството $F(n) > G(n)$.

Решение. За всяко множество A да означим с A_s множеството със същите минимален и максимален елемент, но всички елементи между тях да са от допълнението на A в $\{1, 2, \dots, n\}$. Ако $|A| = 1$, то $A_s = A$. Ясно е, че $(A_s)_s = A$, т.е. тази операция е обратима.

За $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ нека $B \in Q$ е максимално. Множеството B съответства на най-голямата разлика $a_{i+1} - a_i$ в A_s , като $a_{i+1} - a_i = |B| + 1, |B|$,

или $|B| - 1$ в зависимост от това дали $k = |B \cap \{\min(A), \max(A)\}| = 0, 1$ или 2 . Тогава $f(A_s) - g(A) = 1 - k$.

Нека S_n е множеството от всички подмножества на $\{1, 2, \dots, n\}$, съдържащи 1 и n . Да означим

$$s_n = \sum_{A \in S_n} (f(A) - g(A)) = \sum_{A \in S_n} (f(A_s) - g(A)).$$

Не е трудно да се пресметне, че $s_0 = 0, s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = -1$. От друга страна, при $n \geq 6$ имаме $s_n \geq 2^{n-6} - 1$. Действително, да разгледаме множествата $A \in S_n$, за които $3, 4 \in A$, но $2, n-1 \notin A$. Всички такива множества са 2^{n-6} на брой и за всяко от тях имаме $f(A_s) - g(A) = 1$. Единственото множество от S_n с $f(A_s) - g(A) = -1$ е самото $\{1, 2, \dots, n\}$. Следователно $s_n \geq 2^{n-6} - 1$.

Да разгледаме сега $F(n) - G(n)$. Ако $T_{i,j}$ е множеството от всички подмножества с минимален елемент i и максимален елемент j , то сумата на $f(A) - g(A)$ по множествата от $T_{i,j}$ е равна на s_{j-i} . В частност, тази сума зависи само от разликата $j - i$. Фиксирана разлика $j - i$ може да бъде избрана по $n + 1 - (j - i)$ начина. Следователно

$$F(n) - G(n) = ns_1 + (n-1)s_2 + (n-2)s_3 + \dots + 2s_{n-1} + s_n.$$

Оттук и от направените по-горе оценки следва, че

$$F(n) - G(n) \geq 2^{n-6} - 5n - 11.$$

Лесно се доказва по индукция, че $2^{n-6} - 5n - 11 > 0$ при $n \geq 13$.

Забележка. Дефинираното в началото множество A_s се получава като симетрична разлика на A и множеството $\{\min(A), \min(A) + 1, \dots, \max(A)\}$.

Задача 13. Даден е правилен 2^k -ъгълник M с център O . Нека $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2^k}$ са правите, определени от страните на M , отчетени по посока на часовниковата стрелка. Да отразим симетрично O относно ℓ_1 , получената точка относно ℓ_2 и т.н. до последната страна. Да се докаже, че разстоянието от O до последната точка е по-малко от периметъра на M .

Решение. Да напомним следните факти:

(1) Композицията на две осев симетрии относно пресичащи се прави, сключващи ъгъл α , е ротация на ъгъл 2α и център пресечната точка на правите;

(2) Композицията на две ротации с центрове O_1 и O_2 и различни (ориентирани) ъгли α и β е ротация на ориентиран ъгъл $\alpha + \beta$ и център O , определен от $2\angle OO_1O_2 = \alpha$ и $2\angle OO_2O_1 = \beta$, когато $\alpha + \beta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, и е трансляция, когато $\alpha + \beta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

(3) Периметърът на правилен 2^k -ъгълник е $r2^{k+1} \sin \frac{\pi}{2^k}$, където r е радиусът на описаната около многоъгълника окръжност.

Ще използваме следната лема.

Лема. Нека R_i е ротацията с център A_i и ъгъл $\frac{2\pi}{2^k}$ по посока на часовниковата стрелка и $R_{2^k} \circ R_{2^k-1} \circ \dots \circ R_1(O) = O_1$. Тогава $OO_1 = 2^{k+1}r \sin \frac{\pi}{2^k}$, където r е радиусът на описаната около многоъгълника окръжност.

Доказателство. Ще проведем индукция по $k \geq 2$. При $k = 2$ лесно се вижда, че $OO_1 = 4r\sqrt{2} = 2^{2+1}r \sin \frac{\pi}{2^2}$.

Нека $A_1A_2 \dots A_{2^{k+1}}$ е правилен 2^{k+1} -ъгълник с радиус на описаната окръжност r и R_i да е ротацията с център A_i и ъгъл $\frac{2\pi}{2^{k+1}}$. Тогава композициите $S_i = R_{2^i} \circ R_{2^i-1}$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, са ротации на ъгли $\frac{2\pi}{2^k}$ и центрове B_i , където $\angle B_iA_{2^i}A_{2^i-1} = \angle B_iA_{2^i-1}A_{2^i} = \frac{2\pi}{2^{k+2}}$. Тогава

$$\angle B_iOB_{i+1} = \angle B_iA_{2^i-1}O = \frac{\pi}{2}$$

и значи $B_iO = A_{2^i}O / \cos \frac{2\pi}{2^{k+2}} = r / \cos \frac{2\pi}{2^{k+2}}$. Освен това

$$\begin{aligned} \angle B_iOB_{i+1} &= \angle B_iOA_{2^i} + \angle A_{2^i}OA_{2^i+1} + \angle A_{2^i+1}OB_{i+1} = \\ &= \frac{2\pi}{2^{k+2}} + \frac{2\pi}{2^{k+1}} + \frac{2\pi}{2^{k+1}} = \frac{2\pi}{2^k}. \end{aligned}$$

Следователно $B_1B_2 \dots B_{2^k}$ е правилен 2^k -ъгълник с център O и радиус на описаната окръжност $r' = r / \cos \frac{2\pi}{2^{k+2}}$. Оттук и от индукционното предположение имаме

$$OO_1 = 2^{k+1}r' \sin \frac{\pi}{2^k} = 2^{k+2}r \sin \frac{\pi}{2^{k+1}},$$

като $O_1 = S_{2^k} \circ S_{2^k-1} \circ \dots \circ S_1(O) = R_{2^{k+1}} \circ R_{2^{k+1}-1} \circ \dots \circ R_1(O)$. С това лемата е доказана.

В нашата задача композициите на последователните осев симетрии дава ротации $R_1, R_2, \dots, R_{2^k-1}$ с центрове $A_2, A_4, \dots, A_{2^k}$, които образуват правилен 2^{k-1} -ъгълник. Тогава от лемата имаме

$$OO_1 = 2^k r \sin \frac{\pi}{2^{k-1}} < 2^{k+1} r \sin \frac{\pi}{2^k}.$$

Задача 14. Съществуват ли 2000 реални числа (не непременно различни), не всичките равни на 0, със следното свойство: ако кои да е 1000 от тях са корени на полином със старши коефициент 1 от степен 1000, то неговите коефициенти (освен този пред x^{1000}) са някаква пермутация на останалите 1000 числа?

Решение. Отговор – Не! Да допуснем, че такива числа съществуват. Ако точно $k > 0$ от тези числа са равни на 0, при $k \geq 1000$ полиномът x^{1000} показва, че всъщност всичките 2000 числа са равни на 0, а при $k < 1000$ полином с корени тези k нули и $1000 - k$ от останалите числа има свободен коефициент 0, т.е. имаме още една 0, противоречие и в двата случая. Следователно всичките 2000 числа са различни от 0.

Ако 1000 от числата са отрицателни, останалите 1000 са коефициенти на полином от степен 1000 с отрицателни корени и значи са положителни. Следователно със сигурност имаме 1000 положителни числа. Ако останалите 1000 са корени, полученият полином има само положителни коефициенти и тогава корените му са отрицателни, т.е. имаме 1000 положителни и 1000 отрицателни числа. Отново имаме противоречие, защото от формулите на Виет следва, че коефициентите на полинома с 1000 положителни корена са с алтернативно сменящи се знаци.

Задача 15. Да се реши в цели числа уравнението

$$(y^3 + xy - 1)(x^2 + x - y) = (x^3 - xy + 1)(y^2 + x - y).$$

Решение. Да представим уравнението във вида

$$x - y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - y} + \frac{y^2 - 1}{y^2 + y - x},$$

оставяйки случаите $x^2 + x = y$ и/или $y^2 + y = x$ за лесно упражнение на читателя. При $x = y$ получаваме $x^2 = 1$, откъдето намираме решенията $(1, 1)$ и $(-1, -1)$. При $|x| \leq 1$ и/или $|y| \leq 1$ получаваме още решенията $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$ и $(-2, -1)$ (някои от тях вече са намерени). Оттук нататък ще считаме, че $|x|, |y| \geq 2$ и $x \neq y$.

Нека $k = x - y > 0$, $k = \frac{x^2-1}{x^2+k} + \frac{y^2-1}{y^2+k}$. Очевидно и двете дроби са между 0 и 1, което означава, че $k = 1$ и $\frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{y^2-1}{y^2+1} = 1$. Но сега и двете дроби са в интервала $(\frac{1}{2}, 1)$, противоречие.

Нека $t = y - x > 0$ и да запишем уравнението във вида

$$t + 2 = \frac{t - 1}{t - x^2} + \frac{t - 1}{t - y^2}.$$

Ако едновременно $t > x^2$ и $t > y^2$, то $2(y - x) = 2t > x^2 + y^2$, откъдето $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 < 2$, което е невъзможно поради $|x|, |y| \geq 2$. Следователно една от дробите е неположителна. Но очевидно другата не надминава $t - 1$ и значи сумата им е най-много $t - 1$, противоречие.

Задача 16. Дадено е нечетно просто число p . Полиномът $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$ се нарича i -остатъчен, ако $\sum_{p-1|k, k>0} a_k \equiv i \pmod{p}$. Да се докаже, че числата $f(1), f(2), \dots, f(p-1)$ дават всички възможни ненулеви остатъци при деление на p тогава и само тогава, когато полиномът $f^{p-1}(x)$ е 1-остатъчен, а полиномите $f(x), \dots, f^{p-2}(x)$ са 0-остатъчни.

Решение. Да отбележим, че ако k е естествено число, то числото $\sum_{i=0}^{p-1} i^k$ е сравнимо с -1 по модул p , ако $p-1$ дели k и с 0 , ако $p-1$ не дели k . Първото следва директно от малката теорема на Ферма. За второто, ако вземем примитивен корен g по модул p , получаваме

$$\sum_{i=0}^{p-1} i^k = \sum_{i=1}^{p-1} g^{ik} = \frac{g^{k(p-1)} - 1}{g^k - 1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

От горното следва, че за всеки полином $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ с цели коефициенти имаме

$$\sum_{i=1}^{p-1} f(i) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^n a_k i^k = \sum_{i=0}^{p-1} a_k \sum_{k=0}^n i^k \equiv - \sum_{p-1|k, k>0} a_k \pmod{p}.$$

Ако $f(0), f(1), f(2), \dots, f(p-1)$ дават пълна система остатъци по модул p , то $\sum_{i=0}^{p-1} f(i)^s \equiv 0 \pmod{p}$ за $s = 1, 2, \dots, p-2$, т.е. $f^s(x)$ е 0-остатъчен, и $\sum_{i=0}^{p-1} f(i)^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$, т.е. $f^{p-1}(x)$ е 1-остатъчен.

За обратната посока е достатъчно да докажем, че ако $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ са цели числа, за които $a_0^i + a_1^i + \dots + a_{p-1}^i \equiv 0 \pmod{p}$ за $i = 1, 2, \dots, p-2$ и $a_0^{p-1} + a_1^{p-1} + \dots + a_{p-1}^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$, то $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ са пълна система остатъци по модул p .

Нека $g(x) = (x - a_0)(x - a_1) \dots (x - a_{p-1}) = x^p + b_1x^{p-1} + \dots + b_{p-1}x + b_p$ и $S_i = a_0^i + a_1^i + \dots + a_{p-1}^i$, $i \in \mathbb{N}$, като горните условия са $S_i \equiv 0 \pmod{p}$ за $i = 1, 2, \dots, p-2$ и $S_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$.

От $a_0^{p-1} + a_1^{p-1} + \dots + a_{p-1}^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$ очевидно следва с помощта на малката теорема на Ферма, че някое (всъщност точно едно) от числата a_j се дели на p . Тогава $b_p \equiv 0 \pmod{p}$.

От формулите на Нютон имаме

$$\begin{aligned} S_1 + b_1 &= 0 \\ S_2 + b_1S_1 + 2b_2 &= 0 \\ S_3 + b_1S_2 + b_2S_1 + 3b_3 &= 0 \\ &\vdots \\ S_{p-1} + b_1S_{p-2} + \dots + b_{p-2}S_1 + (p-1)b_{p-1} &= 0 \end{aligned}$$

Оттук и от сравненията за сумите S_i последователно и лесно получаваме $b_1 \equiv b_2 \equiv \dots \equiv b_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$ и $b_{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$. Следователно редукция по модул p на полинома $g(x)$ го преобразува в полинома $\bar{g}(x) = x^p - x$. От голямата теорема на Ферма следва, че корените на $\bar{g}(x)$ по модул p (т.е. в полето $\mathbb{Z}_p$) образуват пълна система остатъци по модул p , с което доказателството е завършено.

Задача 17. Нека $n \geq 4$ е естествено число, а A и B са множества от точки в равнината, никои три от които не лежат на една права. Нека $T(A)$ е броят на несамопресичащите се начупени линии с $n-1$ сегмента и върхове точките от A . Аналогично се дефинира $T(B)$. Да се докаже, че ако точките от B определят изпъкнал n -ъгълник, а тези от A – не, то $T(B) < T(A)$.

Решение. Ще наричаме интересуващите ни начупени линии добри пътища. Ще използваме следната лема.

Лема. Нека $C = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ е множество от n точки в общо положение в равнината и x_0 е връх от изпъкналата обвивка на C . Тогава броят на добрите пътища, започващи от x_0 , е поне 2^{n-2} , като равенство се достига точно когато C съвпада с изпъкналата си обвивка.

Доказателство. Ще проведем индукция по $n \geq 2$. Случаят $n = 2$ е тривиален. Нека твърдението е вярно за множества с $n-1$ точки. Да построим права ℓ така, че множеството $C \setminus \{x_0\}$ да е в едната полуравнина относно ℓ . Тогава можем да подредим точките от C така, че ъглите $\sphericalangle(\ell, x_0x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, да са подредени в нарастващ ред. С други думи, множеството $C \setminus \{x_0, x_1, x_{n-1}\}$ лежи във вътрешността на $\sphericalangle x_1x_0x_{n-1}$.

От индукционното предположение следва, че поне $2 \cdot 2^{n-3} = 2^{n-2}$ добри пътя започват от x_1 и x_{n-1} . Добавянето на звената x_0x_1 и x_0x_{n-1} не намалява този брой и това завършва доказателството на оценката.

Ако C е изпъкнало, не можем да имаме друг добър път, започващ от x_0 освен тези с първо звено x_0x_1 или x_0x_{n-1} . Оттук и от индукционното предположение следва равенство за изпъкнало C .

Ако C не е изпъкнало, имаме две възможности. Ако в триъгълника $x_0x_1x_{n-1}$ има други точки от C , можем да построим поне още един добър път, започващ със звено x_0y , където y е най-близката до x_0 точка от C в триъгълника. Ако пък в триъгълника $x_0x_1x_{n-1}$ няма други точки от C , множеството $C \setminus \{x_0\}$ не съвпада с изпъкналата си обвивка и в него по индукционно предположение имаме повече от 2^{n-2} добри пътя, започващи от x_1 и x_{n-1} . С това доказателството на лемата е завършено.

От лемата следва, че $T(B) = n2^{n-3}$. Ще докажем, че $T(A) > n2^{n-3}$. Нека върховете са сортирани както в лемата. За всяко $i = 1, 2, \dots, n-2$ можем да слепим в x_0 два добри пътя, започващи от x_0 и обхождащи съответно множествата $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i$ и $x_0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n-1}$. Така получаваме

$$\sum_{i=1}^{n-2} 2^{i-1} \cdot 2^{n-i-2} = (n-2)2^{n-3}$$

добри пътя, които не започват от x_0 . Добавяме повече от 2^{n-2} пътя, започващи от x_0 и получаваме повече от $n2^{n-3}$ добри пътя в A .

Задача 18. Даден е $\triangle ABC$ с център на описаната окръжност O . Нека точките A_1 , B_1 и C_1 са вътрешни съответно за страните BC , CA и AB и са такива, че окръжностите, описани около $\triangle AB_1C_1$, $\triangle BC_1A_1$ и $\triangle CA_1B_1$ минават през точка O . Нека ℓ_a е радикалната ос на окръжността с център B_1 и радиус B_1C и на окръжността с център C_1 и радиус C_1B . Правите ℓ_b и ℓ_c се дефинират аналогично. Да се докаже, че правите ℓ_a , ℓ_b и ℓ_c определят триъгълник, чийто ортоцентър съвпада с ортоцентъра на $\triangle ABC$.

Решение. Ще използваме следните две леми.

Лема 1. Триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са подобни, като при това съответните страни заключват един и същи ъгъл. Освен това O е ортоцентър на $\triangle A_1B_1C_1$.

Доказателство. Имаме $\angle OB_1C_1 = \angle OAC_1 = 90^\circ - \angle ACB$ и $\angle OB_1A_1 =$

$\sphericalangle OCA_1 = 90^\circ - \sphericalangle BAC$, откъдето

$$\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle OB_1A_1 + \sphericalangle OB_1C_1 = 180^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ACB = \sphericalangle ABC.$$

Останалите равенства на ъгли се доказват аналогично. Оттук следва, че триъгълниците са подобни и O е ортоцентър на $\triangle A_1B_1C_1$. Тъй като височините на $\triangle A_1B_1C_1$ сключват един и същи ъгъл със страните на $\triangle ABC$ (например $\sphericalangle OB_1A = \sphericalangle OC_1B$ от вписания четириъгълник AC_1OB_1), същото е вярно и за съответните страни.

Лема 2. Нека B' и C' са такива точки съответно върху AC и AB , че четириъгълникът $AB'OC'$ е вписан. Тогава окръжностите ω_1 и ω_2 с центрове B' и C' и радиуси съответно $B'C$ и $C'B$ се пресичат в точки P и Q , такива, че $Q \in BC$, а P лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Освен това PQ и височината от A се пресичат върху описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Доказателство. Нека P е втората пресечна точка на описаните около $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ окръжности. Тогава P лежи едновременно върху ω_1 и ω_2 . Действително, имаме

$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle PCA = \frac{1}{2} \widehat{PA} = \frac{1}{2} \sphericalangle POA, \quad \sphericalangle PC'A = \sphericalangle PB'A = \sphericalangle POA,$$

откъдето лесно следва, че $\triangle C'PB$ и $\triangle B'PC$ са равнобедрени и подобни, в частност P лежи едновременно върху ω_1 и ω_2 . Да означим за краткост $\frac{1}{2} \sphericalangle POA = \alpha$.

Лесно се вижда, че $\triangle PBC \sim \triangle PB'C'$ (разгледайте ъглите при P и отношенията на съответните страни) с коефициент на подобие $2 \cos \alpha$ и съответните страни на тези триъгълници сключват помежду си ъгъл α . Следователно, ако D и D' са ортогоналните проекции на P съответно върху BC и $B'C'$, то $\frac{PD}{PD'} = 2 \cos \alpha$ и $\sphericalangle DPD' = \alpha$. Тогава $\triangle PDD' \sim \triangle PBC'$ и $PD' = DD'$. От последното следва, че D' е средата на хипотенузата в правоъгълния $\triangle DPQ$, където Q е пресечната точка на PD' и AB . Тогава $B'C'$ е симетрала на PQ и Q е втората пресечна точка на ω_1 и ω_2 .

Нека успоредните прави PD и AH (H е ортоцентърът на $\triangle ABC$) да пресичат за втори път описаната около $\triangle ABC$ окръжност съответно в точки E и A_1 . Тъй като

$$\sphericalangle QPE = \sphericalangle DPD' = \alpha = \frac{1}{2} \widehat{PA} = \frac{1}{2} \widehat{A_1E} = \sphericalangle A_1PE,$$

правата PQ минава през A_1 и доказателството на лемата е завършено.

От Лема 2 следва, че ъгълът между ℓ и ℓ' е равен на ъгъла между ℓ и ℓ'' . Тогава от Лема 1 следва, че интересующите ни радикални оси се получават с еднакво ориентирани ротации на един и същи ъгъл (но с различни центрове) на височините на $\triangle ABC$. Следователно триъгълникът, образуван от радикалните оси, е подобен на $\triangle ABC$.

За съвпадането на ортоцентровете е достатъчно да докажем, че отношенията на разстоянията от H до радикалните оси е равно на съответните отношения на разстоянията от H до страните на $\triangle ABC$. Нека F и A_2 да са ортогоналните проекции на H върху PQ и BC както в Лема 2. Тогава

$$\frac{HF}{HA_2} = 2 \frac{HF}{HA_1} = 2 \sin \alpha,$$

което е същото и за другите две отношения.

Китай

Задача 1. Около $\triangle ABC$ с най-голям ъгъл при върха A е описана окръжност. Точките D и E са среди съответно на дъгите $\widehat{ABC}$ и $\widehat{ACB}$. Окръжността, през точките A и B , която се допира до правата AC , и окръжността през точките A и E , която се допира до правата AD , се пресичат в точки A и P . Да се докаже, че AP е ъглополовяща на $\angle BAC$.

Решение. Нека X и Y са точки на продълженията съответно на CA и DA . От условието имаме $AD = DC$ и $AE = EB$. Тъй като A, B, C, D и E лежат на една окръжност, намираме

$$\begin{aligned}\angle BAE &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AEB = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} \\ \angle CAD &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ADC = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.\end{aligned}$$

Понеже AC и AD са допирателни към двете окръжности, получаваме

$$\angle APB = \angle BAX = 180^\circ - \angle A, \quad \angle ABP = \angle CAP$$

и

$$\begin{aligned}\angle APE &= \angle EAY = 180^\circ - \angle DAE = 180^\circ - (\angle BAE + \angle CAD - \angle A) = \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle C}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\angle B}{2}\right) = \left(90^\circ + \frac{\angle A}{2}\right).\end{aligned}$$

Освен това

$$\angle BPE = 360^\circ - \angle APB - \angle APE = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} = \angle APE.$$

Прилагаме синусовата теорема за $\triangle APE$ и $\triangle BPE$, като използваме, че $AE = BE$ и получаваме

$$\frac{\sin \angle PAE}{\sin \angle APE} = \frac{PE}{AE} = \frac{PE}{BE} = \frac{\sin \angle PBE}{\sin \angle BPE}.$$

Следователно $\sin \angle PAE = \sin \angle PBE$, като $\angle PAE$ и $\angle PBE$ са остри (защото $\angle APE$ и $\angle BPE$ са тъпи), т.е. $\angle PAE = \angle PBE$. Оттук получаваме

$$\angle BAP = \angle BAE - \angle PAE = \angle ABE - \angle PBE = \angle ABP = \angle CAP.$$

Задача 2. Дадено е просто число p . В квадратна таблица A с размери $p \times p$ са записани числата $1, 2, \dots, p^2$ в някакъв ред. Разрешено е да прибавяме 1 или да изваждаме 1 от всички числа в даден ред или даден стълб. Таблицата се нарича *добра*, ако е възможно по този начин да получим таблица само с нули. Да се намери броят на добрите таблици.

Решение. Крайният резултат от многократното прилагане на разрешените операции е изваждане на цяло число x_i от i -ия ред и изваждане на цяло число y_j от j -ия стълб. Следователно една матрица A е добра, ако съществуват x_i и y_j , за които $a_{ij} = x_i + y_j$ за $1 \leq i, j \leq p$.

Ако $x_i = x_k$, то $a_{ij} = x_i + y_j = x_k + y_j = a_{kj}$, което е противоречие (тъй като елементите на A са различни). Следователно $x_1, x_2, \dots, x_p$ и аналогично $y_1, y_2, \dots, y_p$ са различни цели числа. Без ограничение можем да считаме, че $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ и $y_1 < y_2 < \dots < y_p$. Оттук следва, че $a_{11} = 1$ и едно от числата a_{12} и a_{21} е равно на 2. Поради симетрията можем да разгледаме само случая $a_{12} = 2$.

Ще покажем, че първият ред на добра матрица A е $1, 2, \dots, p$. Да допуснем обратното, т.е. за някое $2 \leq k < p$ числата $1, 2, \dots, k$ са в първия ред, но числото $k+1$ не е. Тогава $a_{21} = k+1$. Ще наричаме група от k последователни числа *блок* и ще докажем, че първият ред състои от няколко блока. Да допуснем обратното, т.е. имаме n групи от по k числа, като всяка група е блок, но следващите k числа не образуват блок (или не остават k числа).

Следователно за $j = 1, 2, \dots, n$ числата $y_{(j-1)k+1}, y_{(j-1)k+2}, \dots, y_{jk}$ образуват блок и първите nk стълба на матрицата могат да бъдат разделени на pn матрици $1 \times k$

$$a_{i,(j-1)k+1}, a_{i,(j-1)k+2}, \dots, a_{i,jk}, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

като всяка подматрица е блок. Да допуснем, че $a_{1,nk+1} = a$ и нека b е най-малкото естествено число, за което $a+b$ не е в първия ред. Тогава $b \leq k-1$ и тъй като $a_{2,nk+1} - a_{1,nk+1} = x_2 - x_1 = a_{21} - a_{11} = k$, получаваме $a_{2,nk+1} = a+k$ и следователно $a+b$ е в някоя от дадените по-горе $1 \times k$ подматрици, всяка от които е блок. Но a и $a+k$ не са в този блок, противоречие.

Тъй като първият ред се състои от блокове, то k дели p . Но ако $1 < k < p$, то тъй като p е просто число, това е невъзможно. Следователно $k = p$ и първият ред е $1, 2, \dots, p$, откъдето следва, че i -ия ред е точно $(i-1)p+1, (i-1)p+2, \dots, ip$. Следователно с точност до пермутация на редовете и стълбовете и транспониране на матрицата имаме единствена добра матрица. Получаваме, че добрите матрици са $2(p!)^2$.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко реално число $M > 2$ съществува строго растяща безкрайна редица от естествени числа $a_1, a_2, \dots$, която удовлетворява следните две условия:

а) $a_i > M^i$ за всяко естествено i ;

б) едно цяло число n е различно от нула тогава и само тогава, когато съществува естествено число m и $b_1, b_2, \dots, b_m \in \{-1, 1\}$ за които

$$n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_m a_m.$$

Решение. Ще построим индуктивно търсената редица за всяко $M > 2$. Избираме a_1 и a_2 за които $a_2 - a_1 = 1$ и $a_1 > M^2$. Да допуснем, че вече сме избрали $a_1, a_2, \dots, a_{2k}$, за които $a_i > M^i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, 2k$ и множеството

$$A_k = \{b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_m a_m \mid b_1, \dots, b_m = \pm 1, 1 \leq m \leq 2k\}$$

не съдържа 0. Очевидно множеството A_k е симетрично и $\pm 1 \in A_1$. Нека n е най-малкото естествено число, което не е елемент на A . За $N = \sum_{i=1}^{2k} a_i$ да изберем естествени числа a_{2k+1} и a_{2k+2} , за които $a_{2k+2} - a_{2k+1} = N + n$, $a_{2k+1} > M^{2k+2}$ и $a_{2k+1} > \sum_{i=1}^{2k} a_i$.

Ще покажем, че A_{k+1} не съдържа 0 и $n \in A_{k+1}$. Тъй като

$$n = - \sum_{i=1}^{2k} a_i - a_{2k+1} + a_{2k+2},$$

то $n \in A_{k+1}$. Ако $\sum_{i=1}^m b_i a_i = 0$, то трябва $m = 2k + 1$ или $m = 2k + 2$. Ако $m = 2k + 1$, то

$$\left| \sum_{i=1}^{2k+1} b_i a_i \right| \geq a_{2k+1} - \sum_{i=1}^{2k} a_i > 0.$$

Ако $m = 2k + 2$ и b_{2k+1} и b_{2k+2} имат един и същи знак, то

$$\left| \sum_{i=1}^{2k+2} b_i a_i \right| \geq a_{2k+1} + a_{2k+2} - \sum_{i=1}^{2k} a_i > 0.$$

Ако $m = 2k + 1$ и b_{2k+1} и b_{2k+2} са с различни знаци, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{2k+2} b_i a_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^{2k} b_i a_i \pm (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \right| \geq \\ &\geq |a_{2k+1} - a_{2k+2}| - \sum_{i=1}^{2k} a_i = N + n - N = n > 0. \end{aligned}$$

Тъй като $0 \notin A_k$ и всяко различно от нула цяло число между $-k$ и k е от A_k , така конструираната редица удовлетворява условието на задачата

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е цяло число и $f(x) = (x+a)(x+b)$, където a и b са положителни реални числа. Да се намери най-голямата стойност на

$$F = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\},$$

където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са неотрицателни реални числа със сума 1.

Решение. Тъй като

$$\begin{aligned} \min\{f(x_i), f(x_j)\} &= \min\{(x_i+a)(x_i+b), (x_j+a)(x_j+b)\} \leq \\ &\leq \sqrt{(x_i+a)(x_i+b)(x_j+a)(x_j+b)} \leq \\ &\leq \frac{1}{2}((x_i+a)(x_i+b) + (x_j+a)(x_j+b)) = \\ &= x_i x_j + \frac{1}{2}(x_i + x_j)(a+b) + ab, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} F &\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \frac{a+b}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j) + \binom{n}{2} ab = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] + \frac{a+b}{2} (n-1) \sum_{i=1}^n x_i + \binom{n}{2} ab = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) + \frac{n-1}{2} (a+b) + \binom{n}{2} ab \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) + \frac{n-1}{2} (a+b) + \binom{n}{2} ab = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{n-1}{2} (a+b) + \frac{n(n-1)}{2} ab = \\ &= \frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{n} + a + b + nab \right). \end{aligned}$$

Равенство се достига при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$. Следователно най-голямата стойност на F е $\frac{n-1}{2} \left(\frac{1}{n} + a + b + nab \right)$

Задача 5. Нека n е свободно от квадрати положително четно число, k е цяло число, а p е просто число, за което $p < 2\sqrt{n}$, p не дели n и p дели $n + k^2$. Да се докаже, че съществуват различни естествени числа a, b, c , за които $n = ab + bc + ca$.

Решение. Тъй като n е четно, то $p \neq 2$, като p не дели k . Без ограничение можем да считаме, че $0 < k < p$. За $a = k$ и $b = p - k$ от равенството $n = ab + bc + ca$ имаме

$$c = \frac{n - k(p - k)}{p} = \frac{n + k^2}{p} - k.$$

Следователно c е цяло число и остава да докажем, че $c > 0$ и $c \neq a, b$. Тъй като $\frac{n}{k} + k \geq 2\sqrt{n} > p$, то $n + k^2 > pk$, откъдето $c > 0$.

Ако $c = a$, то $\frac{n + k^2}{p} - k = k$, т.е. $n = k(2p - k)$. Понеже n е четно, то и k е четно, откъдето n се дели на 4, което е противоречие на условието, че n е свободно от квадрати. Ако $c = b$, то $n = p^2 - k^2$ и отново от n четно и p нечетно следва, че k е нечетно. Сега $n = p^2 - k^2$ се дели на 4, противоречие.

Следователно a, b, c са различни естествени числа, за които е изпълнено равенството $n = ab + bc + ca$.

Задача 6. Да се намери най-малкото естествено число k със следното свойство: за всяко k -елементно подмножество A на множеството $S = \{1, 2, \dots, 2012\}$ съществуват три два по два различни елемента $a, b, c \in S$, за които числата $a + b$, $b + c$ и $c + a$ са от A .

Решение. Без ограничение можем да считаме, че $a < b < c$. Ако $x = a + b$, $y = a + c$ и $z = b + c$, то $x < y < z$, $x + y > z$ и $x + y + z$ е четно. Обратно, ако x, y и z са елементи на A , за които $x < y < z$, $x + y > z$ и $x + y + z$ е четно, то

$$a = \frac{x + y - z}{2}, \quad b = \frac{x + z - y}{2}, \quad c = \frac{y + z - x}{2}$$

са два по два различни елемента на S и $x = a + b$, $y = a + c$ и $z = b + c$.

Следователно задачата е еквивалентна на следното: за всяко k -елементно подмножество A на S съществуват три елемента на A , за които

$$(1) \quad x < y < z, \quad x + y > z \text{ и } x + y + z \text{ е четно.}$$

За множеството $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, \dots, 2011\}$ имаме $|A| = 1007$ и лесно се вижда, че A не съдържа три елемента с исканото свойство. Следователно $k \geq 1008$.

Ще докажем, че всяко 1008 елементно подмножество на S притежава исканото свойство (1).

С индукция по n ще докажем следното твърдение: за всяко $n \geq 4$ всяко $n + 2$ елементно подмножество на $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ съдържа три елемента, удовлетворяващи (1).

При $n = 4$ нека A е 6-елементно подмножество на $\{1, 2, \dots, 8\}$. Тъй като тройката 4, 6, 8 има исканото свойство, то поне един от елементите 4, 6, 8 не е в A . Ако $4 \notin A$, то разглеждаме тройките 3, 6, 7, 5, 6, 7, 5, 7, 8 и 3, 5, 6 всяка от които удовлетворява (1). Тъй като тези тройки нямат общ елемент, то в A винаги има тройка, удовлетворяваща (1). Аналогично се разглеждат и случаите, когато $6 \notin A$ и $8 \notin A$.

Да допуснем, че твърдението е вярно за някое $n \geq 4$ и нека A е $n + 3$ -елементно подмножество на $\{1, 2, \dots, 2n + 2\}$. Ако $|A \cap \{1, 2, \dots, 2n\}| \geq n + 2$, то твърдението следва от индукционното допускане. Остава да разгледаме случая $|A \cap \{1, 2, \dots, 2n\}| = n + 1$ и $2n + 1, 2n + 2 \in A$. Ако A съдържа нечетно число $x > 1$ от множеството $\{1, 2, \dots, 2n\}$, то тройката $x, 2n + 1, 2n + 2$ удовлетворява (1). В противен случай имаме

$$A = \{1, 2, 4, 6, \dots, 2n, 2n + 1, 2n + 2\}$$

и тройката 4, 6, 8 удовлетворява (1).

Следователно търсеното k е 1008.

Русия

Задача 9.1. Дадени са различни естествени числа $a_1, \dots, a_{11}$ не по-малки от 2 със сбор равен на 407. Съществува ли естествено число n , за което сборът от остатъците при деление на n с числата $a_1, a_2, \dots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \dots, 4a_{11}$ да е равен на 2012?

Решение. Отговор – Не! Да допуснем противното, т.е. че такова n съществува.

Тъй като най-големият остатък при деление с естествено число m е равен на $m - 1$, то сборът от остатъците от делението на произволно число с числата $a_1, \dots, a_{11}$ е не по-голям от $407 - 11 = 396$, а сборът от остатъците при деление на това число с $4a_1, \dots, 4a_{11}$ е не по-голям от $4 \cdot 407 - 11 = 1617$. Ако всички остатъци са максималните възможни, то сборът им е равен на $396 + 1617 = 2013$. Тъй като за даденото число n този сбор е 2012, то всички остатъци, без един са максималните възможни, а един остатък е с едно по-малък от максимално възможния.

Следователно за някое k един от остатъците при деление на n на числата a_k и $4a_k$ е най-големият възможен, а другият е с едно по-малък от максимално възможния. Тогава едно от числата $n + 1$ и $n + 2$ се дели на a_k , а другото се дели на $4a_k$. Това означава, че две взаимнопрости числа $n + 1$ и $n + 2$ се делят на $a_k \geq 2$, което е невъзможно.

Задача 9.2. Върху окръжност са избрани 2012 точки, които я разделят на равни дъги. Избрани са k от тези точки и от тях е построен изпъкнал k -ъгълник. Кое е най-голямото число k , за което може този многоъгълник да няма успоредни страни?

Решение. Отговор: $k = 1509$. Нека отбелязаните точки са $A_1, A_2, \dots, A_{2012}$. Разглеждаме четворките точки $(A_1, A_2, A_{1007}, A_{1008})$, $(A_3, A_4, A_{1009}, A_{1010})$, $\dots$, $(A_{1005}, A_{1006}, A_{2011}, A_{2012})$.

Ако измежду избраните k точки се срещат всички точки от някоя четворка $(A_{2i-1}, A_{2i}, A_{2i+1005}, A_{2i+1006})$ (считаме, че $A_{2013} = A_1$ и $A_{2014} = A_2$), то в получения многоъгълник ще има две страни $A_{2i-1}A_{2i}$ и $A_{2i+1005}A_{2i+1006}$, които са симетрични спрямо центъра на окръжността и следователно са успоредни. Това означава, че от всяка от горните 503 четворки могат да се изберат не повече от три точки, т.е. $k \leq 503 \cdot 3 = 1509$.

Остава да покажем пример на 1509-ъгълник с върхове в отбелязаните точки без успоредни страни. Такъв е например многоъгълникът

$$A_1 A_2 \dots A_{1006} A_{1008} A_{1010} \dots A_{2012}$$

(върховете са всички точки с номера от 1 до 1006 и всички точки с четни номера от 1008 до 2012). Наистина, страните $A_{2012}A_1, A_1A_2, \dots, A_{1005}A_{1006}$ са от една и съща страна на диаметъра $A_{2012}A_{1006}$ и не могат да бъдат успоредни. Аналогично, страните $A_{1006}A_{1008}, \dots, A_{2010}A_{2012}$ са две по две неуспоредни. Накрая, диагонален $A_j A_{j+2}$ на правилния 2012-ъгълник не е успореден на никоя негова страна и следователно никои две страни от вида $A_i A_{i+1}$ и $A_j A_{j+2}$ не са успоредни.

Задача 9.3. Даден е успоредник $ABCD$ с тъп ъгъл при върха A . Точка H е петата на перпендикуляра от точка A към страната BC . Продължението на медианата от върха C на $\triangle ABC$, пресича описаната около него окръжност в точка K . Да се докаже, че точките K, H, C и D лежат на една окръжност.

Решение. Нека E е петата на перпендикуляра от точка B към AD . Тогава четириъгълникът $AHBE$ е правоъгълник. Следователно

$$\sphericalangle HED = \sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle BCD,$$

т.е. точките D, C, H, E лежат на една окръжност ω .

Ако M е пресечната точка на диагоналите на правоъгълника $AHBE$, то $MA = MB = MH = ME$ (по условие точка M лежи на CK). Тъй като точките A, K, B, C лежат на една окръжност, имаме

$$MK \cdot MC = MA \cdot MB = MH \cdot ME.$$

Това равенство означава, че точките C, K, H и E лежат на една окръжност. Тази окръжност е описана за триъгълника CHE , т.е. тя съвпада с ω . Следователно четирите точки K, H, C, D лежат на ω .

Задача 9.4. Положителните реални числа $a_1, \dots, a_n$ и k са такива, че

$$a_1 + \dots + a_n = 3k, \quad a_1^2 + \dots + a_n^2 = 3k^2 \quad \text{и} \quad a_1^3 + \dots + a_n^3 > 3k^3 + k.$$

Да се докаже, че разликата на някои две от числата $a_1, \dots, a_n$ е по-голяма от 1.

Решение. Умножаваме равенството

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3k \quad (1)$$

и неравенството

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 > 3k^3 + k,$$

и получаваме неравенството

$$\begin{aligned} a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + a_1^3 a_2 + a_1 a_2^3 + a_1^3 a_3 + a_1 a_3^3 + \cdots + a_{n-1}^3 a_n + a_{n-1} a_n^3 > \\ > 9k^4 + 3k^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Повдигаме на втора степен равенството

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 3k^2. \quad (3)$$

и получаваме

$$a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + 2a_1^2 a_2^2 + 2a_1^2 a_3^2 + \cdots + 2a_{n-1}^2 a_n^2 = 9k^4. \quad (4)$$

Изваждаме от неравенство (2) равенство (4) и получаваме

$$(a_1^3 a_2 - 2a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2^3) + \cdots + (a_{n-1}^3 a_n - 2a_{n-1}^2 a_n^2 + a_{n-1} a_n^3) > 3k^2,$$

или

$$a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 + a_1 a_3 (a_1 - a_3)^2 + \cdots + a_{n-1} a_n (a_{n-1} - a_n)^2 > 3k^2. \quad (5)$$

Да допуснем, че разликата на всеки две числа е не по-голяма от 1. Тогава квадратът на тяхната разлика е не по-голям от 1, и от (5) получаваме неравенството

$$a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n > 3k^2. \quad (6)$$

Ако извадим равенството (3) от квадрата на равенството (1), ще получим равенството

$$2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + \cdots + 2a_{n-1} a_n = 6k^2,$$

което противоречи на (6). Следователно разликата на някои две от числата $a_1, \dots, a_n$ е по-голяма от 1.

Задача 9.5. В кръг са разположени 101 мъдреци. Всеки от тях смята, че или Земята се върти около Юпитер или че Юпитер се върти около Земята.

Веднъж на всяка минута всеки мъдрец казва своето мнение. Веднага след това всеки мъдрец, чийто двама съседни не са на неговото мнение, си сменя мнението, а никой от останалите мъдреци не си сменя мнението. Да се докаже, че след известно време мненията ще спрат да се променят.

Решение. Да съпоставим на всеки мъдрец с дадено мнение знака «+», а на всеки мъдрец с противоположното мнение – знак «-». Разположението на мъдреците съответства на разположението на 101 знака по кръг.

Нека в даден момент имаме един до друг два еднакви знака. В следващия момент те няма да се променят и затова ще останат еднакви. Следователно те никога няма да се променят.

Да наречем един знак *стабилен*, ако до него има поне един равен на него. Тъй като броят на знаците е нечетен, то ще има поне един стабилен знак. Освен това всеки стабилен знак няма да се променя, а всеки нестабилен ще се промени на следващата минута.

Да допуснем, че в даден момент някой знак се променя. Тогава не всички знаци са били стабилни и ще има стабилен знак a , който е съседен на нестабилен знак b . Това означава, че a няма да се промени на следващата минута, а b ще се промени и ще стане същия като знака на a и следователно стабилен.

Следователно броят на стабилните знаци се увеличава и след известно време този брой ще стане равен на 101 и няма да има повече промени.

Забележка. Може да се докаже, че знаците могат да се променят само в първите 50 минути.

Задача 9.6. Върху страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$ са избрани съответно точки A_1 , B_1 и C_1 така, че са изпълнени равенствата

$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1.$$

Нека I_A , I_B и I_C са центровете на вписаните окръжности за триъгълниците AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C . Да се докаже, че центърът на окръжността, описана около $\triangle I_AI_BI_C$ съвпада с центъра на окръжността, вписана в $\triangle ABC$.

Решение. Нека I е центърът на вписаната окръжност за ABC , а A_0 , B_0 , C_0 са допирните ѝ точки съответно със страните BC , CA и AB . Ще считаме, че точката A_1 лежи на отсечката A_0B . Да забележим, че

$$CA_0 + AC_0 = CB_0 + AB_0 = CA.$$

От условието следва, че $CA_1 + AC_1 = CB_1 + AB_1 = CA$, откъдето $CA_0 - CA_1 = AC_1 - AC_0$, т.е. $A_1A_0 = C_1C_0$ и следователно C_1 лежи на отсечката C_0A . Сега правоъгълните триъгълници IA_0A_1 и IC_0C_1 са еднакви по два катета и $\sphericalangle IA_1C = \sphericalangle IC_1B$. Това означава, че четириъгълникът BC_1IA_1 е вписан. Аналогично, четириъгълниците AB_1IC_1 и CA_1IB_1 са също вписани.

Точките B , I_B и I лежат на една права (ъглополовящата на $\sphericalangle A_1BC_1$), откъдето

$$\begin{aligned}\sphericalangle A_1IBI &= \sphericalangle BA_1I_B + \sphericalangle A_1BI_B = \sphericalangle I_BA_1C_1 + \sphericalangle C_1BI = \\ &= \sphericalangle I_BA_1C_1 + \sphericalangle C_1A_1I = \sphericalangle I_BA_1I.\end{aligned}$$

Следователно II_BA_1 е равнобедрен, т.е. $II_B = IA_1$. Аналогично получаваме, че $II_B = IC_1 = II_A = IB_1 = II_C = IA_1$. Следователно I е център на описаната около $\triangle I_AIBIC$ окръжност.

Задача 9.7. Първоначално на дъската са записани 10 последователни естествени числа. За един ход се разрешава да се изберат произволни две числа (да ги означим с a и b) и вместо тях да запишем числата $a^2 - 2011b^2$ и ab . След няколко хода на дъската не останало нито едно от първоначалните числа. Може ли получените 10 нови числа да са последователни естествени числа (записани в някакъв ред)?

Решение. Отговор – Не може! Да допуснем, че след няколко хода на дъската са записани десет последователни естествени числа, като всяко от първоначалните числа е участвало в поне един ход.

Лема. За всяко естествено число k , след извършване на един ход, броят на числата, които се делят на k не намалява.

Доказателство. Ако в операцията са участвали числата a и b , едно от които се дели на k , то и тяхното произведение се дели на k . Освен това, ако и двете числа се делят на k , то и числото $a^2 - 2011b^2$ се дели на k .

Да забележим, че в началната и в крайната позиции има по пет числа, които се делят на 2 и по едно число, което се дели на 10. От лемата следва, че броят на числата, които се делят на 2 (или на 10) не се променя при прилагане на ходовете.

В изходните 10 числа е имало число a , което завършва на 5. Да разгледаме първия ход, в който участва числото a . Ако второто число в този ход е b и то е нечетно, то едно от получените числа ще е четно и броят на

четните числа ще се увеличава, което е невъзможно. Значи b е четно и на дъската се е появило числото ab , което се дели на 10. Ако при това b не се дели на 10, то броят на числата, които се делят на 10 се увеличава, което е невъзможно.

Следователно b се дели на 10, и тогава и двете числа в този ход се делят на 5. Новите две числа ще се делят на 25 и според лемата в последните 10 числа ще има поне две, които се делят на 25. Това е невъзможно за 10 последователни естествени числа, противоречие.

Задача 9.8. Автобусните линии в един град са такива, че всеки две линии имат точна една обща спирка и на всяка линия има поне 4 спирки. Да се докаже, че всички спирки могат да се разпределят между две фирми така, че на всяка линия да има спирки и на двете фирми.

Решение. Да разгледаме произволни две линии ℓ_1 и ℓ_2 и нека A е тяхната обща спирка. Ако A е спирка на всички линии, то можем да я дадем на едната фирма, а всички други спирки на другата. Ясно е, че на всяка линия ще има спирки и на двете фирми.

Да допуснем, че има линия ℓ_3 , която не минава през спирката A . Нека B и C са нейните общи спирки съответно с ℓ_1 и ℓ_2 . Ясно е, че B и C са различни от A и също така $B \neq C$, защото в противен случай ℓ_1 и ℓ_2 имат две общи спирки.

Да разпределим спирките по следния начин: спирките A , B и C даваме на първата фирма, всички спирки на линиите ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 даваме на втората фирма и всички останали спирки (които не са на линиите ℓ_1 , ℓ_2 или ℓ_3) отново на първата фирма. Ще покажем, че това разпределение има исканото свойство. Ясно е, че всяка от линиите ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 минава през спирки и на двете фирми.

Да разгледаме произволна линия ℓ от останалите. С всяка от линиите ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 тя има само една обща спирка. Значи на ℓ има не повече от три спирки на втората фирма и следователно там има спирка на първата фирма. Освен това ℓ не може да минава през две от спирките A , B и C , защото иначе ще има две общи спирки с някоя от линиите ℓ_1 , ℓ_2 или ℓ_3 . Без ограничение нека ℓ не минава през B и C . Тогава общата спирка на ℓ и ℓ_3 е някоя спирка X , различна от B и C . Тази спирка принадлежи на втората фирма. С това доказателството е завършено.

Задача 10.1. Дадени са различни естествени числа $a_1, \dots, a_{10}$ не по-

малки от 3, със сбор, равен на 678. Съществува ли естествено число n , за което сборът от остатъците при деление на n с числата $a_1, a_2, \dots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ да е равен на 2012?

Решение. Отговор – Не съществува! Да допуснем противното, т.е. че такава число съществува.

Тъй като най-големият остатък при деление с естествено число m е равен на $m - 1$, то сборът от остатъците от делението на произволно число с числата $a_1, \dots, a_{10}$ е не по-голям от $678 - 10 = 668$, а сборът от остатъците при деление на това число с $2a_1, \dots, 2a_{10}$ е не по-голям от $2 \cdot 678 - 10 = 1346$. Ако всички остатъци са максималните възможни, то сборът им е равен на $668 + 1346 = 2014$.

Тъй като за даденото число n този сбор е 2012, то са възможни само два случая:

Случай 1. Само един остатък е с 2 по-малък от максималния, а всички останали остатъци са максимални.

Случай 2. Точно два остатъка са с 1 по-малки от максималните възможни.

В *случай 1* получаваме, че за някое k един от остатъците при деление на n на числата a_k и $2a_k$ е максимално възможния, а другият е с 2 по-малък от максимално възможния. Тогава едно от числата $n + 1$ и $n + 3$ се дели на a_k , а другото на $2a_k$ и следователно и двете числа се делят на a_k . Това е невъзможно, тъй като $(n + 3) - (n + 1) = 2$ не се дели на $a_k > 2$.

В *Случай 2* също имаме противоречие. Наистина, измежду остатъците при деление на n на четните числа $2a_1, 2a_2, \dots, 2a_{10}$ поне осем са максимално възможни, т.е. нечетни числа. Следователно n също е нечетно число и следователно всички остатъци от делението му на числата $2a_1, \dots, 2a_{10}$ са също нечетни. Следователно те са максималните възможни. Това означава, че $n + 1$ се дели на всяко от числата $2a_1, \dots, 2a_{10}$ и следователно, $n + 1$ се дели на всички числа $a_1, \dots, a_{10}$, т. е. всички 20 остатъка са максимално възможни, противоречие.

Задача 10.2. В остроъгълен неравнобедрен $\triangle ABC$ е вписана окръжност ω с център I , която се допира до страната BC в точка D . Нека O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Описаната около $\triangle AID$ окръжност пресича за втори път правата AO в точка E . Да се докаже, че дължината на отсечката AE е равна на радиуса на окръжността ω .

Решение. Без ограничение можем да считаме, че $AB < AC$. Нека лъчът $DI \rightarrow$ пресича отсечките AO и AC съответно в точки P и Q . Имаме

$$\begin{aligned}\angle AIP &= \angle DQC - \angle IAC = 90^\circ - \angle C - \frac{1}{2} \angle A, \\ \angle IAP &= \angle OAB - \angle IAB = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} - \frac{1}{2} \angle A = \\ &= 90^\circ - \angle C - \frac{1}{2} \angle A.\end{aligned}$$

Следователно $\triangle API$ е равнобедрен ($AP = PI$), т.е. точката P е от симетралата ℓ на AI , а лъчите PA и PI са симетрични спрямо ℓ . Описаната около триъгълник AID окръжност също е симетрична спрямо ℓ . Следователно отсечките AE и ID са симетрични, а оттук и равни.

Задача 10.3. Всеки две от реалните числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 се различават поне с 1. За някое реално k са изпълнени равенствата

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k \quad \text{и} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$

Да се докаже, че $k^2 \geq \frac{25}{3}$.

Решение. Без ограничение на общноста можем да считаме, че $a_1 < \dots < a_5$. По условие $a_{i+1} - a_i \geq 1$ за всяко $i = 1, 2, 3, 4$. Следователно $a_j - a_i \geq j - i$ при $1 \leq i < j \leq 5$. Повдигаме на квадрат всяко от получените неравенства и ги събираме. Получаваме

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 5} (a_j - a_i)^2 \geq \sum_{1 \leq i < j \leq 5} (j - i)^2 = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 4^2 = 50,$$

откъдето

$$4 \sum_{i=1}^5 a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} a_i a_j \geq 50. \quad (1)$$

От друга страна, по условие имаме

$$\sum_{i=1}^5 a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} a_i a_j = (a_1 + \dots + a_5)^2 = 4k^2. \quad (2)$$

Събирайки (1) и (2), получаваме

$$5 \sum_{i=1}^5 a_i^2 = 10k^2 \geq 50 + 4k^2,$$

откъдето $6k^2 \geq 50$, или $k^2 \geq 25/3$.

Забележка. Условието на задачата се удовлетворява от числата $a_i = 3 - i + \frac{2}{\sqrt{3}}$ и $k = \frac{5}{\sqrt{3}}$. Следователно числото $\frac{25}{3}$ в условието не може да се замени с по-малко.

Задача 10.4. Първоначално на дъската са написани $n + 1$ едночлена $1, x, x^2, \dots, x^n$. Всяка минута k ученици едновременно пресмятат сбора на два от записаните на дъската полиноми и записват получените резултати на дъската. След m минути на дъската били написани някакви полиноми, между които и полиномите $S_1 = 1 + x, S_2 = 1 + x + x^2, S_3 = 1 + x + x^2 + x^3, \dots, S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. Да се докаже, че $m \geq \frac{2n}{k+1}$.

Решение. Да разгледаме всички полиноми след последната минута. Ако полинома P се е появил като сбор на полиномите Q и R , то прекарваме стрелка от P в Q и от P в R . Ако от полинома F до полинома G има ориентиран път, то ще казваме, че G *участва* в F (в частност, полиномът F участва в F). Не е трудно да се види, че всички коефициенти на полиноме $F - G$ са неотрицателни.

Можем да считаме, че всеки полином на дъската е сбор на различни степени на x . Наистина, ако имаме коефициент, по-голям от 2, то във всички полиноми, в които участва този полином ще има коефициент, по-голям от 2. Следователно, този полином не участва в полиномите от вида S_i .

Ще оценим общия брой на полиномите на дъската. Всеки от полиномите $S_1, \dots, S_n$ ще наричаме *краен*. Всеки от полиномите, участващи в S_n (т.е. в сбора на всички изходни едночлени), ще наричаме *съществен*. Ясно е, че има n крайни полинома.

С индукция по p ще покажем, че в полином с p ненулеви коефициенти участват точно $2p - 1$ полинома (от които p едночлена). Оттук ще следва, че броят на съществените полиноми е равен на $2n + 1$. Базата при $p = 1$ е очевидна. Нека полиномът P е получен на някоя стъпка като сбор на Q и R , като броят на ненулевите коефициенти в P, Q и R са съответно равни на p, q и r и $p = q + r$. Според индукционното предположение в Q и R участват $2q - 1$ и $2r - 1$ полинома, сред които няма съвпадащи (тъй като в Q и R

няма общи едночлени). Тогава в P участват $(2q - 1) + (2r - 1) + 1 = 2p - 1$ полинома.

Накрая, ще покажем, че всяка минута на дъската се появява не повече от един краен съществен полином. Наистина, нека в някоя минута се появяват едновременно съществени полиноми S_p и S_q ($p < q$). Да разгледаме първият момент, в който на дъската се е появил полином P , в който едновременно участват и S_p и S_q . Тогава P се е появил като сбор на два полинома, всеки от които съдържа едночлен x^p . Но тогава коефициентът пред x^p в P е не по-малък от 2, което е невъзможно.

Следователно на дъската има n крайни и $2n + 1$ съществени полинома, като не повече от m от тях са едновременно и крайни и съществени. Това означава, че общият брой на полиномите на дъската е не по-малък от $n + (2n + 1) - m$. От друга страна на дъската първоначално е имало $n + 1$ полинома, а са добавени не повече от mk . Следователно

$$(n + 1) + mk \geq n + (2n + 1) - m \text{ или } m(k + 1) \geq 2n,$$

което трябваше да се докаже.

Задача 10.5. Виж Задача 9.5.

Решение. Виж Задача 9.5.

Задача 10.6. Съществуват ли естествени числа a, b, c , по-големи от 10^{10} и такива, че произведението им се дели на всяко от тях, увеличено с 2012?

Решение. Отговор – Съществуват!

Да изберем $t > 10^{10}$ и да положим $a = b = 2012t$, $c = 2012(t^2 - 1)$. Тогава c се дели на $2012(t + 1) = a + 2012 = b + 2012$, и $ab = 2012^2 t^2$ се дели на $2012t^2 = c + 2012$. Следователно a, b, c имат исканото свойство.

Задача 10.7. Дадена е правоъгълна координатна система спрямо която са построени графиките на n квадратни тричлена. Никои две от построените параболи не се допират. Тези параболи разделят равнината на няколко области, една от които се намира над всички останали. Да се докаже, че на границата на тази област има не повече от $2(n - 1)$ пресечни точки на параболи.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по n . При $n = 1$ то е очевидно. Нека $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, ($n \geq 2$) са дадените квадратни

тричлени, като при това $f_n(x)$ е с най-малък старши коефициент (ако има няколко с най-малък такъв, избираме произволен от тях). Да означим границата на разглежданата област с T . Можем да считаме, че T съдържа части от всички параболи.

Нека S е множеството от всички точки a такива, че точка от T с абсциса a е от графиката на $f_n(x)$. С други думи числото a е от множеството S тогава и само тогава, когато са изпълнени неравенствата $f_n(a) \geq f_i(a)$ за $i = 1, 2, \dots, n-1$. Да означим с S_i множеството от решенията на i -то неравенство. Тогава $S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_{n-1}$. Тъй като $f_n(x) - f_i(x)$ е или квадратен тричлен с отрицателен старши коефициент, или е линеен, то S_i е или отсечка (възможно изродена), или лъч, или цялата права. Следователно и самото S е множество от този вид.

Следователно в T има не повече от две пресечни точки от графиката на $f_n(x)$. Ако изтрием тази графика, тези две пресечни точки ще изчезнат (като могат да се появят нови). При това от индукционното предположение границата на новата област има не повече от $2(n-2)$ пресечни точки. Това означава, че границата на първоначалната област има не повече от $2(n-2) + 2 = 2(n-1)$ пресечни точки, което трябваше да се докаже.

Забележка. Оценката, получена в задачата, се достига за квадратните тричлени $2x^2$, $2x^2 - (x-1)(x-2)$, $2x^2 - (x-3)(x-4)$, $2x^2 - (x-5)(x-6)$, $\dots$

Задача 10.8. Точка E е средата на отсечката, свързваща ортоцентъра на неравнобедрен остроъгълен $\triangle ABC$ с върха A . Вписаната в този триъгълник окръжност допира страните AB и AC съответно в точки C' и B' . Да се докаже, че точката F , която е симетрична на точката E спрямо правата $B'C'$, лежи на правата, определена от центровете на вписаната и описаната окръжност на $\triangle ABC$.

Решение. Без ограничение можем да считаме, че $AB > AC$. Нека BB_1 и CC_1 са височините на триъгълника $\triangle ABC$, H е ортоцентъра му, O и I са центровете на описаната и вписаната окръжност за триъгълника ABC , а r е радиуса на вписаната окръжност. Ако $\angle BAC = \alpha$, то $AB_1 = AB \cos \alpha$ и $AC_1 = AC \cos \alpha$. Следователно $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ с коефициент на подобие $k = \cos \alpha$.

Нека точка L е симетричната на точка I спрямо правата $B'C'$. Ще използваме следната лема.

Лема. Точките L и I са съответни точки в триъгълниците AB_1C_1 и ABC .

Доказателство. Тъй като $AI \perp B'C'$, то точка L лежи на ъглополовя-

щата AI . Следователно е достатъчно да докажем, че $\frac{AL}{AI} = k$. Да означим с M средата на отсечката $B'C'$. Тъй като правоъгълните триъгълници $AC'I$ и $C'MI$ са подобни, то $\sphericalangle MC'I = \sphericalangle C'AI = \alpha/2$. Имаме $AI = \frac{r}{\sin(\alpha/2)}$ и

$$AL = AI - LI = AI - 2MI = \frac{r}{\sin(\alpha/2)} - 2r \sin(\alpha/2),$$

откъдето $\frac{AL}{AI} = 1 - 2\sin^2(\alpha/2) = \cos \alpha = k$, с което лемата е доказана.

Точките A , B_1 , C_1 и H лежат на окръжност с диаметър AH , като E е център на тази окръжност. Следователно точките E и O в триъгълниците AB_1C_1 и ABC са също съответни, откъдето $\sphericalangle OIA = \sphericalangle ELA$. Понеже точката F е симетрична на точката E спрямо правата $B'C'$, то отсечките FI и EL също са симетрични и $\sphericalangle FIA = \sphericalangle ELI$. Оттук

$$\sphericalangle OIA + \sphericalangle FIA = \sphericalangle ELA + \sphericalangle ELI = 180^\circ,$$

което означава, че точките O , I и F лежат на една права.

Задача 11.1. Първоначално на масата са поставени 111 парчета пластилин с еднакво тегло. За един ход можем да изберем няколко групи (може и само една) с равен брой парчета във всяка и от всяка група да образуваме едно парче, като слепим всички парчета в нея. За колко най-малко хода можем да получим 11 парчета, всеки две от които имат различно тегло?

Решение. Отговор – За два хода! Нека теглото на едно от първоначалните парчета е 1. Ако при първия ход във всяка група има по k парчета, то след него всяко парче ще има тегло 1 или k . Следователно след първия ход не е възможно да се получат 11 парчета с различни тегла.

Ще покажем, че два хода са достатъчни. На първия ход да изберем 37 групи по 2 парчета. Тъй като $111 = 3 \cdot 37$, ще получим 37 парчета с тегло 1 и 37 парчета с тегло 2. На втория ход да изберем 9 групи с по 8 парчета във всяка по следния начин: в i -та група ($1 \leq i \leq 9$) избираме $i - 1$ парчета с тегло 2 и $9 - i$ парчета с тегло 1. При това няма да сме използвали две парчета с тегла съответно 1 и 2. В i -та група се получава парче с тегло $9 - i + 2(i - 1) = 7 + i$ и следователно получаваме 11 парчета с тегла $1, 2, 8, 9, \dots, 16$, което трябваше да се докаже.

Задача 11.2. Виж Задача 10.3.

Решение. Виж Задача 10.3.

Задача 11.3. Клетките на безкрайна шахматна дъска са оцветени по стандартния начин в бяло и черно. След това всички бели клетки са преоцветени в червен и син цвят така, че съседни по ъгъл клетки да са разноцветни. Нека ℓ е произволна права, която не е успоредна на страните на клетките. За всяка отсечка I , която е успоредна на ℓ , пресмятаме разликата от сбора на червените и сините участъци от I . Да се докаже, че съществува такова число C , което зависи само от правата ℓ , че всички получени разлики не надминават C .

Решение. Ще използваме следната лема.

Лема. Да оцветим клетките на таблицата в два цвята по следния начин: нечетните стълбова в зелен цвят, а четните в жълт. За всяка успоредна на правата ℓ отсечка разликата между зелените и жълтите участъци е не по-голяма от някое число D , което зависи само от ℓ .

Доказателство. Правата ℓ се разделя от вертикалните прави на отсечки с равни дължини. Да означим тази дължина с F . За всяка успоредна на ℓ отсечка с дължина $2F$, сбора на зелените (съответно жълтите) участъци е равен на F . Тъй като всяка успоредна на ℓ отсечка се разделя на няколко отсечки с дължина $2F$, като остава отсечка с дължина по-малка от $2F$, то разликата между зелените и жълтите участъци не надминава $D = 2F$.

Ч	К	Ч	К
Р	С	Р	С
Ч	К	Ч	К
Р	С	Р	С

Да оцветим всички черни клетки в розов и кафяв цвят така, че розовите клетки да са в стълбовете на червените, а кафявите клетки да са в стълбовете на сините клетки. Да разгледаме успоредна на ℓ отсечка и да означим с r, b, r', b' съответно сборът от неговите червени, сини, розови и кафяви части. Според лемата съществуват числа D_1, D_2 , зависещи само от ℓ , за които $|(r + r') - (b + b')| \leq D_1, |(r + b') - (r' + b)| \leq D_2$. Следователно

$$\begin{aligned}
 2|r - b| &= |(r + r') - (b + b') + (r + b') - (r' + b)| \leq \\
 &\leq |(r + r') - (b + b')| + |(r + b') - (r' + b)| \leq \\
 &\leq D_1 + D_2,
 \end{aligned}$$

т.е. $|r - b| \leq \frac{D_1 + D_2}{2}$, което трябваше да се докаже.

Задача 11.4. Основата на пирамидата $SA_1A_2 \dots A_n$ е изпъкналият многоъгълник $A_1 \dots A_n$. За всяко $i = 1, 2, \dots, n$ в равнината на основата е построен $\triangle X_iA_iA_{i+1}$, еднакъв на $\triangle SA_iA_{i+1}$, който лежи в една и съща полуравнина с основата спрямо правата A_iA_{i+1} (полагаме $A_{n+1} = A_1$). Да се докаже, че така построените триъгълници покриват цялата основа.

Решение. Ще докажем, че произволна точка P от основата се покрива от някой от триъгълниците.

Да разгледаме сфера, която се допира до основата в точка P и лежи изцяло в пирамидата (такава сфера очевидно съществува). Увеличавайки радиуса на тази сфера, като запазваме допирната точка P , в даден момент тя ще се допре до някоя от околните стени. Нека тя се е допряла до стената SA_1A_2 в точка Q . Тогава $PA_1 = QA_1$ и $PA_2 = QA_2$ като допирателни от една и съща точка. Следователно триъгълниците PA_1A_2 и QA_1A_2 са еднакви, т.е. при завъртане около A_1A_2 , при което стената SA_1A_2 се изобразява в $X_1A_1A_2$, точка Q се изобразява в P . Това означава, че P се намира във вътрешността на триъгълника $X_1A_1A_2$.

Задача 11.5. Даден е полином $P(x)$ и числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, за които $a_1a_2a_3 \neq 0$. Ако за всяко реално число x е изпълнено равенството

$$P(a_1x + b_1) + P(a_2x + b_2) = P(a_3x + b_3),$$

да се докаже, че $P(x)$ има поне един реален корен.

Решение. Да допуснем, че $P(x)$ няма реални корени. Тогава степента на $P(x)$ е четна и е поне 2. Наистина, всеки полином от нечетна степен има реален корен, а ако $P(x) = \text{const}$, то от условието следва, че $P(x) \equiv 0$.

Понеже $P(x)$ няма реален корен, то стойностите на $P(x)$ са с еднакви знаци. Можем да считаме, че $P(x)$ приема само положителни стойности (в противен случай ще умножим $P(x)$ с -1), т.е. за всяко x е изпълнено $P(x) > 0$. Тъй като $P(x)$ има четна степен, ще има точка t_0 , в която $P(x)$ достига глобален минимум, т.е. за всяко x е изпълнено неравенството $P(x) \geq P(t_0) = A > 0$. Да изберем x_0 за което $t_0 = a_3x_0 + b_3$. Тогава

$$P(a_1x_0 + b_1) + P(a_2x_0 + b_2) \geq 2A > A = P(t_0) = P(a_3x_0 + b_3),$$

което е противоречие. Следователно $P(x)$ има поне един реален корен.

Задача 11.6. Върху страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$ са избрани съответно точки A_1 , B_1 , C_1 , като са изпълнени равенствата

$$AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1.$$

Нека O_A , O_B и O_C са центровете на описаните окръжности съответно за триъгълниците AB_1C_1 , A_1BC_1 и A_1B_1C . Да се докаже, че центърът на вписаната окръжност за $\triangle O_A O_B O_C$ съвпада с центъра на вписаната окръжност за $\triangle ABC$.

Решение. Нека I е центърът на вписаната в триъгълник ABC окръжност, а A_0 , B_0 и C_0 са допирните ѝ точки съответно със страните BC , CA , AB . Без ограничение можем да приемем, че A_1 е на отсечката A_0B . Имаме $CA_0 + AC_0 = CB_0 + AB_0 = CA$, а от условието следва, че

$$CA_1 + AC_1 = CB_1 + AB_1 = CA.$$

Следователно $CA_0 - CA_1 = AC_1 - AC_0$, откъдето $A_1A_0 = C_1C_0$ и точката C_1 е на отсечката C_0A . Правоъгълните триъгълници IA_0A_1 и IC_0C_1 са еднакви по два катета, откъдето $\sphericalangle IA_1C = \sphericalangle IC_1B$ и $IA_1 = IC_1$. Това означава, че BC_1IA_1 е вписан четириъгълник. Аналогично, четириъгълниците AB_1IC_1 и CA_1IB_1 са вписани и $IA_1 = IB_1 = IC_1$.

Централите O_BO_C , O_CO_A и O_AO_B са перпендикулярни съответно към общите хорди IA_1 , IB_1 и IC_1 , като тези хорди имат равни дължини. Следователно разстоянията от I до страните на $\triangle O_A O_B O_C$ са равни на $\frac{IA_1}{2} = \frac{IB_1}{2} = \frac{IC_1}{2}$. Накрая, тъй като ъглите $\sphericalangle IBA_1$, $\sphericalangle IAC_1$ и $\sphericalangle ICB_1$ са остри, то отсечките O_BO_C , O_CO_A и O_AO_B пресичат съответно лъчите IA_1 , IB_1 и IC_1 . Следователно точката I е вътрешна за $\triangle O_A O_B O_C$, т.е. I е център на вписаната окръжност за $\triangle O_A O_B O_C$.

Задача 11.7. Върху окръжност са избрани $2n+1$, $n \geq 2$ точки, които я разделят на равни дъги. Двама последователно изтриват по една точка. Ако след ход на някой от двамата всички триъгълници с върхове в останалите точки са тъпоъгълни, той печели и играта завършва. Кой печели при правилна игра – първият или неговият противник?

Решение. Отговор – Печели вторият! Ще покажем стратегия, при която вторият играч печели винаги. С индукция по броя на ходовете ще докажем, че вторият може да играе така, че преди всеки ход на първия, ако са останали $2k+1 \geq 5$ точки, то на всяка полуокръжност има останали не по-малко от k точки.

В началото на играта това условие е изпълнено. Нека то е изпълнено и преди даден ход на първия играч. Да номерираме останалите точки последователно $A_0, \dots, A_{2k}$. За определеност нека първият изтрива точка A_0 .

Да забележим, че триъгълникът $A_{k+1}A_1A_{k+2}$ е остроъгълен и следователно играта не е завършила. Вторият играч трябва да изтрие точка A_k . Ако на някоя полуокръжност е изтрита не повече от една точка, на нея са останали не по-малко от $k - 1$ точки. В противен случай от тази полуокръжност са изтрити две точки A_0 и A_k и върху нея са останали или точките $A_1, \dots, A_{k-1}$, или точките $A_{k+1}, \dots, A_{2k}$. И в двата случая условието е изпълнено.

Ако първият играч не е загубил по-рано, то след $2n - 4$ хода на окръжността ще останат 4 точки A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 . Без ограничение можем да считаме, че първият изтрива точка A_0 , като остава остроъгълен триъгълник $A_1A_2A_4$. С последния си ход вторият играч изтрива A_4 и останалият триъгълник $A_1A_2A_3$ ще бъде тъпоъгълен (в противен случай ще се намери полуокръжност, която съдържа само точка A_2). Следователно печели вторият играч.

Задача 11.8. За произволно естествено число n нека $S_n = 1! + 2! + \dots + n!$. Да се докаже, че съществува n , за което числото S_n има прост делител, по-голям от 10^{2012} .

Решение. За просто число p и естествено число n да означим с $\nu_p(n)$ степента на p в каноничното разлагане на n на прости множители. Да отбележим, че ако $\nu_p(n) \neq \nu_p(k)$, то $\nu_p(n \pm k) = \min(\nu_p(n), \nu_p(k))$.

Да допуснем обратното и нека $P = 10^{2012}$. Тогава всички прости делители на числа от вида S_n не са по-големи от P .

Лема. Нека за някое n имаме $\nu_p(S_n) < \nu_p((n+1)!)$. Тогава $\nu_p(S_k) = \nu_p(S_n)$ за всяко $k \geq n$.

Доказателство. Ако $a = \nu_p(S_n)$, $b = \nu_p((n+1)!)$, то $b \geq a + 1$. Да отбележим, че $S_k = S_n + (n+1)! + \dots + k!$, като в този сбор всички събираеми без първото се делят на p^{a+1} , а първото събираемо се дели на p^a , но не се дели на p^{a+1} . Следователно S_k се дели на p^a , но не се дели на p^{a+1} , с което доказателството на лемата е завършено.

Да разгледаме просто число $p \leq P$. Според лемата, ако $\nu_p(S_n) < \nu_p((n+1)!)$ за някое n , то съществува такова число a_p , че $\nu_p(S_n) \leq a_p$ за всяко естествено n . Ще наричаме просто число p с това свойство *малко*. Всички останали прости числа, които са по-малки от P , ще наричаме *големи*. Тъй като малките прости числа са краен брой, то съществува естествено число M , което е по-голямо от всяко число от вида p^{a_p} , където p е малко.

Да разгледаме голямо просто число p и нека n е такова число, че $n + 2$

се дели на p . От лемата сега имаме, че

$$\nu_p(S_{n+1}) \geq \nu_p((n+2)!) > \nu_p((n+1)!)$$

и следователно

$$\nu_p(S_n) = \nu_p(S_{n+1} - (n+1)!) = \nu_p((n+1)!) = \nu_p(n!)$$

(последното равенство е вярно тъй като $n+1$ не се дели на p).

Да разгледаме числото $N = MP! - 2$. Според доказаното по-горе $\nu_p(S_N) = \nu_p(N!)$ за всяко голямо просто число p . Освен това тъй като $N \geq M$, то $\nu_p(S_N) \leq \nu_p(p^{a_p}) \leq \nu_p(N!)$ за всяко малко просто число p . Понеже всички прости делители на S_N са или малки или големи, то $S_N \leq N!$, което не е вярно. Полученото противоречие показва, че съществува n , за което числото S_n има прост делител, по-голям от 10^{2012} .

САЩ

Задача 1. Да се намерят всички цели числа $n \geq 3$ със следното свойство: за всеки n реални числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, за които

$$\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n \cdot \min(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

съществуват три, които са страни на остроъгълен триъгълник.

Решение. Първо ще докажем, че всяко $n \geq 13$ е решение на задачата. Нека $n \geq 13$ и да допуснем, че числата $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяват условието $\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n \cdot \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$, като не съществуват три числа, които са дължини на страните на остроъгълен триъгълник.

Без ограничение на общността можем да считаме, че $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Тогава $a_{i+2}^2 \geq a_i^2 + a_{i+1}^2$ за всяко $i \leq n-2$. Да разгледаме редицата на Фибоначи $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Лесно се проверява, че $F_n < n^2$ за $n \leq 11$, $F_{12} = 12^2$ и $F_n \geq n^2$ за $n > 12$ (последното равенство следва по индукция). Неравенството $a_{i+2}^2 \geq a_i^2 + a_{i+1}^2$ и $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ показват, че $a_i^2 \geq F_i a_i^2$ за всяко $i \leq n$. Следователно, ако $n \geq 13$ получаваме $a_n^2 > n a_1^2$, което е противоречие на допускането. Това означава, че всяко $n \geq 13$ е решение на задачата.

Ако изберем $a_i = \sqrt{F_i}$ за $1 \leq i \leq n$, имаме

$$\max(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq n \cdot \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

за всяко $n < 13$. Лесно се вижда, че няма три числа, които са страни на остроъгълен триъгълник. Следователно отговорът на задачата е $n \geq 13$.

Задача 2. Окръжност е разделена на 432 еднакви дъги от 432 точки. Точките са оцветени в четири цвята така, че има 108 червени точки, 108 зелени точки, 108 сини точки и останалите 108 точки са жълти. Да се докаже, че могат да се изберат по три точки от всеки цвят така, че четирите триъгълника с едноцветни върхове са еднакви.

Решение. Нека с R, G, B, Y означим съответно множествата от червените, зелените, сините и жълтите точки. За всяко $0 \leq k \leq 421$ да означим с T_k ротация по посока обратна на часовниковата стрелка на ъгъл $\frac{360k}{432}$ и център, център на окръжността.

Първо ще докажем, че съществува индекс i_1 , за който $|T_{i_1}(R) \cap G| \geq 28$. Наистина, за всяко k множеството $T_k(R) \cap G$ се състои от всички зелени точки, които са образ на червени точки при ротацията T_k . Следователно сборът

$$s_1 = |T_0(R) \cap G| + |T_1(R) \cap G| + \dots + |T_{431}(R) \cap G|$$

е равен на броят на двойките точки (r, g) , за които $g = T_k(r)$ за някое k . От друга страна за всеки две точки r и g съществува единствена ротация T_k , за която $T_k(r) = g$ и следователно $s_1 = 108^2 = 11664$. Освен това $|T_0(R) \cap G| = |R \cap G| = 0$ (защото $R \cap G = \emptyset$). От принципа на Дирихле следва, че съществува индекс i_1 , за който

$$|T_{i_1}(R) \cap G| = \left\lceil \frac{s_1}{431} \right\rceil = \left\lceil \frac{s_1}{11664} \right\rceil = \lceil 27,06 \rceil = 28$$

и твърдението е доказано.

Да означим с RG множеството $T_{i_1}(R) \cap G$ и нека rg означава елемент на RG .

Ще докажем, че съществува индекс i_2 , за който $|T_{i_2}(RG) \cap B| \geq 8$. Както по-горе, за всяко k , множеството $T_k(RG) \cap B$ се състои от всички сини точки, които са образи на точки от RG при ротацията T_k . Следователно сборът

$$s_2 = |T_0(RG) \cap B| + |T_1(RG) \cap B| + \dots + |T_{431}(RG) \cap B|$$

е равен на броят на двойките точки (rg, b) , за които $b = T_k(rg)$ за някое k . От друга страна, за всяко rg и всяко b съществува единствена ротация T_k , за която $T_k(rg) = b$. Следователно $s_2 \geq 28 \cdot 108 = 3024$. Ясно е, че RG няма общи елементи с B , откъдето $|T_0(RG) \cap B| = 0$. Тъй като $T_{432-i_1}(T_{i_1})$ е идентитета, то $T_{432-i_1}(T_{i_1}(R)) = R$ и $T_{432-i_1}(RG)$ е подмножество на R , което няма общи елементи с B . В частност $|T_{432-i_1}(RG) \cap B| = 0$. От принципа на Дирихле следва, че съществува индекс i_2 , за който

$$|T_{i_2}(RG) \cap B| \geq \left\lceil \frac{s_2}{430} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{3024}{430} \right\rceil = \lceil 7,0325\dots \rceil = 8,$$

откъдето следва твърдението.

Нека RGB означава множеството $T_{i_2}(RG) \cap B$ и нека rgb означава точка от RGB .

Както по-горе доказваме, че съществува индекс i_3 , за който е изпълнено $|T_{i_3}(RGB) \cap Y| = 3$.

Нека y_1, y_2, y_3 са три точки от $T_{i_2}(RGB) \cap Y$. Тогава

$$\begin{aligned}(y_1, y_2, y_3), (b_1, b_2, b_3) &= T_{432-i_3}(y_1, y_2, y_3), (g_1, g_2, g_3) = \\ &= T_{432-i_3-i_2}(y_1, y_2, y_3), (r_1, r_2, r_3) = \\ &= T_{432-i_3-i_2-i_1}(y_1, y_2, y_3)\end{aligned}$$

са търсените 12 точки.

Задача 3. Да се намерят всички цели числа $n > 1$, за които съществува безкрайна редица $a_1, a_2, a_3, \dots$ от ненулеви цели числа, за която равенството

$$a_k + 2a_{2k} + \dots + na_{nk} = 0$$

е изпълнено за всяко естествено число k .

Решение. Ще докажем, че такава редица съществува за всяко $n \geq 3$. Ако такава редица съществува за $n = 2$, то $a_k = -2a_{2k}$ за всяко k , откъдето по индукция следва че $a_1 = (-2)^r a_{2^r}$ за всяко r . Тогава a_1 се дели на 2^r за всяко r , което е невъзможно при $a_1 \neq 0$. Ще докажем, че за фиксирано $n \geq 3$ такава редица съществува.

Ще използваме следните две лема.

Лема 1. Множеството на естествените числа може да се разбие на подмножества $S_1, S_2, S_3, \dots$ така, че за всяко естествено число k

а) числата $(n-1)k$ и nk са в едно и също множество и

б) числата $k, 2k, \dots, (n-2)k$ са в множества с по-малък индекс от индекса на множеството на елемента $(n-1)k$.

Доказателство. Дефинираме функцията $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, +\infty)$ по следния начин. Нека P_n е множеството от всички прости делители на n . Елементите на P_n не делят $n-1$. За всяко k с канонично разлагане $k = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_r^{e_r}$ нека

$$f(k) = \prod_{p_i \notin P_n} p_i^{e_i} \prod_{p_i \in P_n} (p_i^{e_i})^{\log_n(n-1)}.$$

За всяко естествено k имаме

$$(1) \quad f((n-1)k) = (n-1)f(k) = f(nk),$$

а за всяко $t = 1, 2, \dots, n-2$ имаме

$$(2) \quad f(tk) \leq tf(k) < f((n-1)k).$$

Да забележим, че за всяко k имаме $f(k) \geq k^{\log_n(n-1)}$, което означава, че за всяко фиксирано C съществуват краен брой k , за които $f(k) < C$. Следователно елементите от образа на f могат да се наредят в нарастващ ред $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$. Сега избираме $S_i = f^{-1}(x_i)$ за всяко i . Множествата S_i задават разбиране на естествените числа, а (1) и (2) доказват, че са в сила твърдения а) и б) от лемата.

Лема 2. Дадени са взаимнопрости естествени числа p и q и произволни естествени числа $t_1, \dots, t_r$. Тогава съществуват ненулеви цели числа $b_1, b_2, \dots, b_{r+1}$, за които

$$(3) \quad pb_i + qb_{i+1} = t_i \text{ за } i = 1, 2, \dots, r.$$

Доказателство. С индукция по r първо ще покажем, че съществува редица от цели числа, удовлетворяваща (3) за всяко i . За $r = 1$ тъй като p и q са взаимно прости, то съществуват c и d , за които $pc + qd = 1$. Тогава $b_1 = ct_1$ и $b_2 = dt_1$ удовлетворяват (3).

Да допуснем, че сме намерили $b_1, \dots, b_r$, удовлетворяващи (3) за $i = 1, 2, \dots, r-1$. Ако изберем произволно цяло k и заменим b_i с $b'_i = b_i + (-1)^i p^{i-1} q^{r-i} k$, то (3) е изпълнено за $i = 1, 2, \dots, r-1$ и $pb'_r = pb_r + (-1)^r p^{r-1} k$. Тъй като p и q са взаимно прости, можем да изберем k така, че pb'_r да е сравнимо с t_r по модул q след което избираме $b_{r+1} = \frac{t_r - pb'_r}{q}$. Сега числата $b'_1, b'_2, \dots, b'_r, b_{r+1}$ удовлетворяват (3) за $i = 1, 2, \dots, r$.

Това означава, че можем да намерим $b_1, b_2, \dots, b_{r+1}$ удовлетворяващи (3), като някои от тях може да са равни на 0. Тъй като за всяко цяло ik можем да направим полагането $b'_i = b_i + (-1)^i p^{i-1} q^{r-i} k$ (като новата редица удовлетворява (3)), то за подходящ избор на k можем да си осигурим, че всички новополучени числа са различни от 0. С това доказателството на лемата е завършено.

Ще конструираме членовете на търсената редица индуктивно, но не в реда $a_1, a_2, \dots$. Нека S е множество от естествени числа и за всяко $k \in S$ сме избрали съответно a_k . Ще казваме, че в S има конфликт, ако съществува k за което $k, 2k, \dots, nk$ са елементи на S и

$$a_k + 2a_{2k} + \dots + na_{nk} \neq 0.$$

Нека $S_1, S_2, \dots$ изпълняват условието на Лема 1. Дефинираме индуктивно търсената редица по следния начин:

Стъпка 1. За всяко $k \in S_1$ избираме ненулеви a_k , без да създаваме конфликт в S .

Стъпка $t \geq 1$. Използвайки избраните на предните стъпки стойностите на a_k за $k \in S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{t-1}$ избираме ненулеви a_k за всяко $k \in S_t$ без да създаваме конфликт в $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_t$.

Ако покажем, че тези две стъпки могат да бъдат изпълнявани, то ще дефинираме a_k за всяко k , които изпълняват условието

$$(4) \quad a_k + 2a_{2k} + \dots + na_{nk} = 0.$$

Лема 1 показва, че при стъпка 1 за всяко $k \in S_1$ числото a_k може да се избере произволно без конфликт, тъй като $(n-1)k, nk \notin S_1$ за всяко k . За стъпка $t \geq 1$ да допуснем, че вече сме избрали a_k за всяко $k \in S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{t-1}$. Трябва да изберем a_k за $k \in S_t$ без да създаваме конфликти. Това означава, че новото a_k трябва да удовлетворява (4) за всички k , за които $(n-1)k$ и nk са в S_t . За останалите стойности на k или $k, 2k, \dots, nk \notin S_1 \cup \dots \cup S_t$ и няма конфликт, или от Лема 1 следва, че $k, 2k, \dots, nk \subset S_1 \cup \dots \cup S_{t-1}$ и равенството (4) е изпълнено на някоя от предните стъпки.

За всяко k , за което $(n-1)k, nk \in S_t$, изпълнено равенството

$$(5) \quad (n-1)a_{(n-1)k} + na_{nk} = X_k,$$

където $X_k = -(a_k + \dots + (n-2)a_{(n-2)k})$ се пресмята от стойности, определени на предните стъпки. Трябва да покажем, че е възможно да изберем a_k за всяко k , така че всички тези равенства да са изпълнени.

Да разгледаме насочен граф с върхове елементите на S_t и ребро от $(n-1)k$ към nk само когато и двете числа са елементи на S_t . Всяка компонента на този граф е или един връх, или насочен път. Искаме да съпоставим на всеки елемент на S_t по едно цяло неотрицателно число така, че съответните равенства (5) да са изпълнени. Достатъчно е да направим това за всяка компонента на графа. Ако компонентата е един връх, то всяка ненулева стойност върши работа. Ако компонентата е път $k_1, k_2, \dots, k_{r+1}$, Лема 2 показва, че могат да се изберат ненулеви $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{r+1}}$, които да удовлетворяват (5) за всяко ребро.

Следователно всяка стъпка може да бъде успешно извършена и така намираме всички членове на редицата.

Задача 4. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за които $f(n!) = f(n)!$ за всяко $n \in \mathbb{Z}^+$ и $m - n$ дели $f(m) - f(n)$ за всеки две различни естествени числа m и n .

Решение. Задачата има три решения: константите 1 и 2 и идентитета.

Първи начин. Нека f е функция, удовлетворяваща условието на задачата. Първо да допуснем, че съществува $a > 2$ за което $f(a) = a$. Тогава $a!, (a!)!, \dots$ са неподвижни точки за f . Следователно съществува растяща редица $(a_n)_{n \geq 0}$ от неподвижни точки на f . За всяко естествено число n числото $a_k - n$ дели $a_k - f(n) = f(a_k) - f(n)$ за всяко k и то също дели $f(n) - n$ за всяко k . Оттук следва, че $f(n) = n$ за всяко n .

Сега да допуснем, че f няма фиксирани точки, по-големи от 2. За просто $p > 3$ имаме $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$ (теорема на Уилсън), откъдето

$$f(p-2)! - f(1) = f((p-2)!) - f(1)$$

се дели на p . Ясно е, че $f(1)$ е 1 или 2. Тъй като $p > 3$ и p дели $f(p-2)! - f(1)$, то $f(p-2) < p$. Понеже $(p-1)! - f(1)$ не се дели на p (следва отново от теоремата на Уилсън), следва че $f(p-2) = p-2$. От друга страна $p-3$ дели $f(p-2) - f(1) = f(p-2) - 1$. Следователно или $f(p-2) = f(1)$ или $f(p-2) = p-2$. Тъй като $p-2 > 2$, вторият случай е невъзможен и остава $f(p-2) = f(1)$ за всички прости числа $p > 3$. За произволно естествено число n имаме че $p-2-n$ дели $f(1) - f(n)$ и това е вярно за всички големи прости числа p . Следователно $f(n) = f(1)$, т.е. f е константа. Директно се проверява, че тази константа е 1 или 2.

Втори начин. Да отбележим, че от $f(n_0) = n_0$ за някое $n_0 \geq 3$ следва $f(n_k) = n_k$ за всяко цяло $k \geq 0$, където $n_k = n_{k-1}!$. От друга страна, $m - n_k | f(m) - f(n_k) = f(m) - n_k = f(m) - m + m - n_k$, откъдето $m - n_k | f(m) - m$. Следователно $f(m) - m$ има безбройно много делители, т.е. $f(m) = m$ за всяко m .

От $f(1) = f(1!) = f(1)!$ и $f(2) = f(2!) = f(2)!$ следва, че $f(1), f(2) \in \{1, 2\}$. Оттук и от $4 = 3! - 2 | f(3!) - f(2) = f(3)! - f(2)$ следва, че $f(3) \leq 3$.

Ако $f(3) = 3$, то $f(m) = m$ за всяко m .

Нека $f(3) \in \{1, 2\}$ и $n > 3$ е произволно. Тогава от $n! - 3 | f(n!) - f(3) = f(n)! - f(3)$ следва, че $f(n)!$ не се дели на 3, т.е. $f(n) \in \{1, 2\}$.

Ако f не е константа, съществуват естествени числа m и n , за които $f(n) = 1$ и $f(m) = 2$. Тогава за $k = 2 + \max\{m, n\}$ от $k - m | f(k) - f(m) \in \{-1, 0, 1\}$ следва, че $f(k) = f(m) = 2$ и аналогично $f(k) = 1$, противоречие.

Забележка. Същата задача беше предложена три дни по-късно като четвърта задача на БОМ в Турция. Читателите могат да намерят коментар по въпроса в статията за БОМ в брой 5/2012 на сп. Математика.

Задача 5. Точка P е от равнината на $\triangle ABC$ и γ е права през P . Правите, симетрични на PA , PB и PC относно γ пресичат съответно BC ,

AC и AB в точките A', B', C' . Да се докаже, че точките A', B', C' лежат на една права.

Решение. Разглеждаме следните два случая:

Случай 1. Точка P е от описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Тогава P е точката на Микел за A', B', C' по отношение на $\triangle ABC$. Наистина, от $\sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CPA = \sphericalangle A'PC'$ следва, че точките P, A', B', C' лежат на една окръжност. Същото е в сила и за P, A, B', C' и P, A', B', C . Следователно $\sphericalangle CA'B' = \sphericalangle CPB' = \sphericalangle BPC' = \sphericalangle BA'C'$, т.е. A', B', C' лежат на една права.

Случай 2. Точка P не е от описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Нека Q е изогонално спрегнатата на P спрямо $\triangle ABC$.

Ще докажем, че ако Q' е изогонално спрегнатата на P спрямо $AB'C'$, то точките Q и Q' съвпадат. Имаме

$$\begin{aligned}\sphericalangle BQC &= \sphericalangle BAC + \sphericalangle CPB = \sphericalangle C'AB' + \sphericalangle CPB = \\ &= \sphericalangle C'AB' + \sphericalangle B'PC' = \sphericalangle C'Q'B'.\end{aligned}$$

Нека X, Y, Z са съответно симетрични на P спрямо страните BC, CA и AB а X' е симетричната точка на P спрямо страната $B'C'$. Тъй като $QC \perp XY$ и $QB \perp XZ$, то $\sphericalangle ZXY = \sphericalangle BQC$ и аналогично от $Q'B' \perp X'Y$ и $Q'C' \perp X'Z$ получаваме $\sphericalangle ZX'Y' = \sphericalangle C'Q'B'$. От $\sphericalangle C'Q'B' = \sphericalangle BQC$ получаваме $\sphericalangle ZXY = \sphericalangle ZX'Y'$, т.е. точките X, Y, Z, X' лежат на една окръжност. Понеже центърът на описаната окръжност за $\triangle XYZ$ е точка Q , а центърът на описаната окръжност за $\triangle X'Y'Z$ е точка Q' , то Q и Q' съвпадат.

По същия начин доказваме, че Q е изогонално спрегната на P спрямо триъгълниците $A'BC$ и $A'B'C$. Следователно

$$\begin{aligned}\sphericalangle BC'A' &= \sphericalangle AC'A' = \sphericalangle AC'P + \sphericalangle PC'Q + \sphericalangle QC'A' = \\ &= \sphericalangle QC'B' + \sphericalangle PC'Q + \sphericalangle BC'P = \\ &= \sphericalangle BC'B' = \sphericalangle AC'B'.\end{aligned}$$

Това означава, че точките A', B' и C' лежат на една права.

Забележка. Интересно е да се отбележи, че журито на USAMO прилага стриктно следното изрично записано условие за геометричните задачи: първа страница на решението трябва да се състои от "голям, правилно мащабиран и ясно означен чертеж, направен със съответните чертожни инструменти". Нарушението на кое да е от горните изисквания се "наказва

автоматично с изваждане на една точка”. Предполагаме обаче, че наличието на добър чертеж не води до точка, ако няма други приноси към решението.

Задача 6. За цялото число $n \geq 2$, нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са реални числа, за които

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \text{ и } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

За всяко подмножество $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$ нека $S_A = \sum_{i \in A} x_i$.

(Ако A е празното множество, то $S_A = 0$.)

Да се докаже, че за всяко положително λ броят на множествата A , за които $S_A \geq \lambda$ е най-много $\frac{2^{n-3}}{\lambda^2}$. За какви стойности на $x_1, x_2, \dots, x_n$ се достига равенство?

Решение. Тази задача е частен случай на неравенството на Чебишев за случайни величини. За произволно множество $A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ дефинираме

$$\delta_A = 2S_A = \sum_{i \in A} x_i - \sum_{i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus A} x_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_A(i) x_i$$

където $\varepsilon_A(i) = 1$ когато $i \in A$ и -1 в противен случай.

Повдигаме горното равенство на квадрат и получаваме

$$(6) \quad \delta_A^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j} \varepsilon_A(i) \varepsilon_A(j) x_i x_j$$

Сумираме δ_A^2 при всички 2^n възможни избора на A . За всяка двойка $i \neq j$ имаме 2^{n-2} множества с $i, j \in A$ и 2^{n-2} множества с $i, j \notin A$. Всяко такова множество дава събираемо $+x_i x_j$ в (6). За всяка двойка $i \neq j$ имаме 2^{n-2} множества с $i \in A, j \notin A$ и 2^{n-2} множества с $i \notin A, j \in A$. Всяко такова множество дава събираемо $-x_i x_j$ в (6).

Следователно $x_i x_j$ се появява 2^{n-1} пъти със знак $+$ и също толкова пъти със знак $-$. Получаваме

$$(7) \quad \sum_{A \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \delta_A^2 = 2^n (x_1^2 + \dots + x_n^2) = 2^n.$$

При $\lambda > 0$ не може да имаме повече от $\frac{2^{n-2}}{\lambda^2}$ събираеми δ_A^2 със стойност поне $4\lambda^2$. В противен случай сборът на тези събираеми ще бъде по-голям

от 2^n и сборът в (7) ще е по-голям от 2^n . Следователно има най-много $\frac{2^{n-2}}{\lambda^2}$ множества A , за които $|S_A| \geq \lambda$ (тъй като $\delta_A = 2S_A$). Освен това всички такива множества могат да се подредят по двойки, тъй като $S_A = -S_{\{1, \dots, n\} \setminus A}$. Точно един от двата члена във всяка такава двойка е положителен. Следователно съществуват най-много $\frac{2^{n-3}}{\lambda^2}$ множества A , за които $S_a \geq \lambda$.

За да имаме равенство, трябва всички положителни стойности на δ_A^2 да бъдат равни на $4\lambda^2$, защото в противен случай имаме противоречие със (7). В частност всички положителни стойности на δ_A^2 трябва да бъдат равни и следователно всички положителни стойности на x_A трябва да бъдат равни. Това може да стане само ако най-много едно от x_i е положително и най-много едно от x_i е отрицателно. Тъй като трябва да имаме поне по едно положително и едно отрицателно число, то за някои $j \neq k$ имаме $x_k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x_j = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, а всички останали елементи са равни на нула. Сега допускането, че $\delta_A^2 = 4\lambda^2$ означава, че $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Обратно за намерените по-горе стойности на x_i и λ имаме точно $2^{n-2} = \frac{2^{n-3}}{\lambda^2}$ множества A за които $x_A \geq \lambda$ (това са точно множествата, които съдържат $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и не съдържат $-\frac{\sqrt{2}}{2}$). Следователно получаваме равенство.

Сингапур

Задача 1. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с център I , която се допира до страните BC , CA и AB съответно в точки D , E и F . Правата ID пресича отсечката EF в точка K . Да се докаже, че точките A , K и M лежат на една права, където M е средата на BC .

Решение. Да построим права през K , успоредна на BC и нека тази права да пресича AB и AC съответно в точки P и Q . Тъй като $IK \perp PQ$, точките I , K , F и P лежат на една окръжност (с диаметър IP). Аналогично I , K , E и Q лежат на една окръжност. Следователно

$$\sphericalangle FIP = \sphericalangle FKP = \sphericalangle EKQ = \sphericalangle EIQ,$$

откъдето $\triangle FIP \cong \triangle EIQ$ и $IP = IQ$. Получихме, че $\triangle IPQ$ е равнобедрен, а IK е височина и медиана в него, т.е. $KP = KQ$. Последното означава, че K лежи на медианата AM .

Забележка. Задачата е добре известна – вж. например <http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=479138> и препратките там.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x + y)$$

за всички реални x и y .

Решение. При $x \neq 0$ да разгледаме последователно даденото равенство при замените на (x, y) съответно с $(\frac{x}{2} - 1, \frac{x}{2} + 1)$, $(\frac{x}{2} + 1, -\frac{x}{2})$ и $(-\frac{x}{2}, \frac{x}{2} - 1)$. Получаваме равенствата

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2} - 1\right) - f\left(\frac{x}{2} + 1\right) &= -\frac{2}{x}f(x), \\ f\left(\frac{x}{2} + 1\right) - f\left(-\frac{x}{2}\right) &= (x + 1)f(x), \\ f\left(-\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2} - 1\right) &= (x - 1)f(x). \end{aligned}$$

Събираме тези равенства и получаваме

$$f(x) = \frac{f(1) + f(-1)}{2}x^2 + \frac{f(1) - f(-1)}{2}x = ax^2 + bx,$$

което е вярно и при $x = 0$, защото $f(0) = 0$ (от полагането $(x, y) = (1, 0)$). Обратно, лесно се проверява, че всяка функция от вида $f(x) = ax^2 + bx$ удовлетворява условието.

Задача 3. Нека $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, N$, са цели числа, като във всяка тройка (a_i, b_i, c_i) поне едно от числата е нечетно. Да се докаже, че съществуват цели числа x, y и z , такива, че поне $\frac{4N}{7}$ от числата $xa_i + yb_i + zc_i, i = 1, 2, \dots, N$, са нечетни.

Решение. Без ограничение на общостта можем да считаме, че $x, y, z \in \{0, 1\}$, като $x + y + z > 0$. Това дава 7 възможности за тройката (x, y, z) . Тези 4 от тях, в които единицата отговаря на нечетното число в (a_i, b_i, c_i) , а останалите са произволни, дават искания нечетен резултат. Следователно за поне една от седемте тройки поне $\frac{4N}{7}$ от числата $xa_i + yb_i + zc_i, i = 1, 2, \dots, N$, са нечетни.

Забележка. Това лесно упражнение за усредняване (или т.нар. вероятностен метод) е предлагано като Задача В1 на студентското състезание Putnam през 2000 г.

Задача 4. Нека p е нечетно просто число. Да се докаже, че

$$1^{p-2} + 2^{p-2} + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2} \equiv \frac{2-2^p}{p} \pmod{p}.$$

Решение. Нека $(a, p) = 1$, a е фиксирано, и за всяко $v \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ да разделим av на p с частно и остатък и да положим $av = pq_{v,a} + r_{v,a}$. Добре известно е (а и лесно се вижда), че остатъците $r_{v,a}$ са ненулеви и два по два различни и следователно те пробягват, заедно с v , множеството $\{1, 2, \dots, p-1\}$.

Нека $T(a) = \frac{a^{p-1}-1}{p}$ за $(a, p) = 1$. Имаме

$$T(av) = \frac{(av)^{p-1} - 1}{p} = \frac{(pq_{v,a} + r_{v,a})^{p-1} - 1}{p} \equiv T(r_{v,a}) - q_{v,a}(va)^{p-2} \pmod{p}.$$

Следователно

$$\sum_{v=1}^{p-1} T(av) \equiv \sum_{v=1}^{p-1} (T(r_{v,a}) - q_{v,a}(va)^{p-2}) \equiv \sum_{v=1}^{p-1} T(v) - \sum_{v=1}^{p-1} q_{v,a}(va)^{p-2} \pmod{p}.$$

От друга страна, лесно се вижда, че $T(ab) - T(a) - T(b) = pT(a)T(b)$, т.е. $T(ab) \equiv T(a) + T(b) \pmod{p}$. Тогава

$$\sum_{v=1}^{p-1} T(av) \equiv (p-1)T(a) + \sum_{v=1}^{p-1} T(v) \pmod{p}$$

и следователно

$$T(a) \equiv \sum_{v=1}^{p-1} q_{v,a}(va)^{p-2} \pmod{p}.$$

В частност, при $a = 2$ имаме

$$\frac{2^p - 2}{p} = 2T(2) \equiv \sum_{v=1}^{p-1} q_{v,2}v^{p-2} \equiv \sum_{v > p/2} v^{p-2} \equiv - \sum_{v=1}^{(p-1)/2} v^{p-2} \pmod{p},$$

с което твърдението е доказано.

Задача 5. В равнината са дадени 2012 точки, всяка оцветена в един от дадени n цвята. Известно е, че няма два цвята, в които да са оцветени еднакъв брой точки. Да се намери това n , за което броят на множествата с по n точки, по една от всеки цвят, е максимален.

Решение. Нека имаме съответно по $x_1, x_2, \dots, x_n$ точки от всеки цвят, като без ограничение на общостта можем да считаме, че $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Броят на множествата с по n точки, по една от всеки цвят, е $x_1 x_2 \dots x_n$. Следователно задачата се свежда до намирането на това n , за което $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 2012$ и произведението $x_1 x_2 \dots x_n$ е максимално.

Ако за някои i, j , $1 \leq i < j - 1 \leq n$ имаме $x_i \leq x_{i+1} - 2$ и $x_j \geq x_{j-1} + 2$, можем да заменим x_i и x_j съответно с $x_i + 1$ и $x_j - 1$, получавайки същата сума, но увеличавайки произведението (Проверете!). Следователно числата $x_1, x_2, \dots, x_n$ са последователни, с изключение най-много на едно.

Нека числата са $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \{x, x+1, \dots, x+\ell, x+\ell+k, x+\ell+k+1, \dots, x+n+k-2\}$, като $n = k+\ell-2$. Ако $k \geq 3$, както по-горе заместваем $x+\ell$ и $x+\ell+n$ съответно с $x+\ell+1$ и $x+\ell+n-1$, и получаваме по-голямо произведение при същата сума. Ако $x \geq 5$, можем да заменим x с $x-2$ и 2, увеличавайки произведението, защото $2(x-2) > x$. Следователно $x \leq 4$ и $k = 1$ или 2.

Ако $k = 1$, директна проверка на равенството $\frac{n(n+1)}{2} - x + 1 = 2012$ за $1 \leq x \leq 4$ показва, че нямаме решение в този случай.

Остава да разгледаме случая $k = 2$, като числата са всички от x до $x + n$ с изключение на $x + \ell + 1$. Следователно

$$\begin{aligned} \frac{(n+x)(n+x+1)}{2} - \frac{x(x-1)}{2} &= 2012 + x + \ell + 1 \iff \\ \iff (n+x)(n+x+1) &= 2[2013 + \ell + \frac{x(x+1)}{2}], \end{aligned}$$

където $1 \leq x \leq 4$ и $0 \leq \ell \leq n - 2$. Тъй като дясната страна в последното уравнение е между 4028 и $4052 + 2\ell \leq 4048 + 2n$, не е трудно да се види, че $n + x = 63$. Тогава $2\ell + x(x+1) = 6$, откъдето лесно получаваме $x = 1, \ell = 2$ и съответно $n = 62$ или $x = 2, \ell = 0$ и съответно $n = 61$. В първия случай произведението е $\frac{63!}{4}$, а във втория то е $\frac{63!}{3}$. Следователно търсеното число е $n = 61$.

Забележка. Съществената част на тази задача е използвана у нас през 2004 г. в контролно (първа задача във второто контролно) за определяне на отбора за МОМ в Гърция. Съответната задача (за сума 2004, разбира се) и решението ѝ са публикувани в книгата Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, която е достъпна свободно в интернет след МОМ във Виетнам.

Южна Корея

Задача 1. Нека x , y и z са положителни реални числа. Да се докаже неравенството

$$\frac{2x^2 + xy}{(y + \sqrt{zx} + z)^2} + \frac{2y^2 + yz}{(z + \sqrt{xy} + x)^2} + \frac{2z^2 + zx}{(x + \sqrt{yz} + y)^2} \geq 1.$$

Решение. От неравенството на Коши-Шварц имаме

$$(yx + x^2 + x^2) \left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2} \right) \geq (y + \sqrt{zx} + z)^2,$$

откъдето

$$\frac{2x^2 + xy}{(y + \sqrt{zx} + z)^2} \geq \frac{x^2}{xy + xz + z^2}.$$

Аналогично се получават неравенствата

$$\frac{2y^2 + yz}{(z + \sqrt{xy} + x)^2} \geq \frac{y^2}{yz + yx + x^2} \quad \frac{2z^2 + zx}{(x + \sqrt{yz} + y)^2} \geq \frac{z^2}{zx + zy + y^2}.$$

Следователно е достатъчно да докажем, че

$$M = \frac{x^2}{xy + xz + z^2} + \frac{y^2}{yz + yx + x^2} + \frac{z^2}{zx + zy + y^2} \geq 1.$$

Отново от неравенството на Коши-Шварц имаме

$$M((xy + xz + z^2) + (yz + yx + x^2) + (zx + zy + y^2)) \geq (x + y + z)^2$$

и понеже

$$(xy + xz + z^2) + (yz + yx + x^2) + (zx + zy + y^2) = (x + y + z)^2,$$

получаваме $M \geq 1$.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$, за който $AB \neq AC$, $\angle B \neq 90^\circ$. Точките D , E и F са петите на перпендикулярите от центъра на вписаната окръжност I на $\triangle ABC$ съответно към BC , CA и AB . Точката S е пресечната точка на AB и DI , точката T е пресечната точка на DE и правата през F , която

е перпендикулярна на DF и точка R е пресечната точка на ST и EF . Нека P_{ABC} е пресечната точка на окръжността с диаметър IR и вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, която се намира в различни полуравнини с точката A по отношение на правата IR .

Нека XYZ е равнобедрен триъгълник, за който $XZ = YZ > XY$ и W е точка върху страната YZ , за която $WY < XY$. За точките $K = P_{YXW}$ и $L = P_{ZXW}$ да се докаже, че $2KL \leq XY$.

Решение. Ще използваме следните три леми.

Лема 1. Ако точка Q е пресечната точка на DI и вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, то A , Q и P_{ABC} лежат на една права.

Доказателство. От теоремата на Паскал за шестоъгълника $QQDEFF$ получаваме, че точката R е пресечна точка на правата EF и допирателната към вписаната окръжност в точка Q . Тъй като Q лежи на окръжността k , то образът на k при инверсия спрямо вписаната окръжност I е правата QP_{ABC} . Освен това образът на A при тази инверсия е средата A' на EF .

Тъй като $\angle IA'Q = 90^\circ$, точката A' лежи на окръжността k . Следователно точките A , Q и P_{ABC} лежат на една права.

Лема 2. Ако точка U е пресечната точка на BC и правата AQP_{ABC} , то $BD = UC$.

Доказателство. Да означим с I_a центърът на външновписаната окръжност към страната BC , а с r_a радиусът на тази окръжност. Нека J и K са петите на перпендикулярите от I_a съответно към AB и BC . Тогава

$$IQ : I_aK = r : r_a = IF : I_aJ = AI : AI_a.$$

Тъй като $IQ \parallel I_aK$, то точките A , Q и K лежат на една права и следователно $U = K$. Получаваме $BD = UC = \frac{c + a - b}{2}$.

Лема 3. Ако точка M е среда на BC , то $MP_{ABC} = \frac{|b - c|}{2}$.

Доказателство. От Лема 1 и Лема 2 директно се вижда, че имаме $MD = MU = \frac{|b - c|}{2}$ и $MP_{ABC} = \frac{|b - c|}{2}$, с което лемата е доказана.

Нека N е среда на XW . От Лема 3 ($XY > YW, XZ > ZW$) имаме

$$NP_{YWX} = \frac{XY - YW}{2}, \quad NP_{ZXW} = \frac{XZ - ZW}{2}.$$

Тъй като $YW + ZW = YZ = XZ$ получаваме

$$P_{YWX}P_{ZXW} \leq NP_{YWX} + NP_{ZXW} = \frac{XY}{2}.$$

Задача 3. Дадени са множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$. За подмножество X на $\{1, 2, \dots, n\}$ означаваме

$$N(X) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} - X \mid A_i \cap A_j \neq \emptyset \text{ за всяко } j \in X\}.$$

Да се докаже, че за всяко цяло число $3 \leq m \leq n - 2$ съществува подмножество X на $\{1, 2, \dots, n\}$, за което $|X| = m$ и $|N(X)| \neq 1$.

Решение. Нека G е граф с върхове $v_1, v_2, \dots, v_n$, като два върха v_i и v_j са съседни тогава и само тогава, когато $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ и $i \neq j$. За множество X от върхове на G нека $N(X)$ е множеството от върхове, които са съседни на всеки връх от X .

Да допуснем, че $n \geq m + 2$, $m \geq 3$ и $|N(X)| = 1$ за всички подмножества $X \subseteq \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, за които $|X| = m$. Нека T да е максималната клика в G (множеството T е клика, ако всеки два върха от T са съседни). Ясно е, че $|T| < m + 2$.

Ще докажем, че $|T| = m + 1$. Да допуснем обратното. Нека T' е множество от m върха, за което $T \subset T'$. Тогава $N(T') \neq \emptyset$ и следователно съществува връх v , който е съседен на всички върхове от T . Тогава $T \cup \{v\}$ е клика, което е противоречие с допускането, че T е максимална клика.

Всеки връх $v \notin T$ има най-много един съсед в T , защото в противен случай, ако $x, y \in T$ са съседни на v , то $x, y \in N((T - \{x, y\}) \cup \{v\})$.

Нека $v \notin T$ и нека $w_1, w_2 \in T$ са два върха, които не са съседни на v . Тъй като $N((T - \{w_1, w_2\}) \cup \{v\})$ не съдържа w_1 или w_2 , това множество съдържа $y \notin T$. Тогава y е съседен на поне $m - 1$ върха от T , което е противоречие (тъй като $m \geq 3$).

Задача 4. За остроъгълен $\triangle ABC$ точка H е петата на перпендикуляра от A към BC . За точки D и E съответно от страните AB и AC нека F и G са петите на перпендикулярите съответно от D и E към BC . Ако правите DG , EF и AH се пресичат в една точка, да се докаже, че $\angle APE = \angle CPE$.

Решение. Първо ще докажем, че правите AH , CD и BE се пресичат в една точка. Съгласно теоремата на Чева това означава, че е достатъчно да

покажем, че

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BD}{DA} = 1.$$

Тъй като $\frac{AE}{EC} = \frac{GH}{CG}$ и $\frac{BD}{DA} = \frac{FB}{HF}$, достатъчно е да покажем, че

$$\frac{GH}{CG} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{FB}{HF} = 1.$$

Ако $DG \cap EF = Q$, то от $\triangle DFQ \sim \triangle DGQ$ имаме $\frac{GH}{HF} = \frac{EG}{DF}$ и следователно

$$\frac{GH}{CG} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{FB}{HF} = \frac{EG}{CG} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{FB}{DF}.$$

От $\frac{EG}{CG} = \operatorname{tg} \angle C$, $\frac{FB}{DF} = \operatorname{ctg} \angle B$ и $\frac{CH}{HB} = \frac{\operatorname{tg} \angle B}{\operatorname{tg} \angle C}$ сега получаваме

$$\frac{EG}{CG} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{FB}{DF} = \operatorname{tg} \angle C \cdot \frac{\operatorname{tg} \angle B}{\operatorname{tg} \angle C} \operatorname{ctg} \angle B = 1.$$

Ще докажем, че триъгълниците AXP и CZP са подобни. Нека X , Y и Z са петите на перпендикулярите към DH съответно от A , B и C . Тъй като $\frac{CZ}{BY} = \frac{CH}{HB}$ и $\frac{BY}{AX} = \frac{BD}{DA}$, имаме

$$\frac{CZ}{AX} = \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BD}{DA} = \frac{EC}{AE},$$

където последното равенство следва от теоремата на Чева. Следователно $\frac{EC}{AE} = \frac{PZ}{PX}$ и AXP и CZP са подобни. Тогава $\angle AXP = \angle CZP$, откъдето $\angle APE = \angle CPE$.

Задача 5. Нека n е цяло положително число. Да се докаже, че съществуват безбройно много тройки от две по две взаимнопрости цели числа (x, y, z) , за всяка от които е изпълнено равенството $nx^2 + y^3 = z^4$.

Решение. Имаме

$$y^3 = z^4 - nx^2 = (z^2 - \sqrt{nx})(z^2 + \sqrt{nx})$$

и ако изберем $y = s^2 - nt^2$ за $(n, t) = 1$, получаваме

$$\begin{aligned} y^3 &= (s^3 - 3\sqrt{n}s^2t + 3nst^2 - n\sqrt{nt}^3)(s^3 + 3\sqrt{n}s^2t + 3nst^2 + n\sqrt{nt}^3) = \\ &= (z^2 - \sqrt{nx})(z^2 + \sqrt{nx}). \end{aligned}$$

Директно се проверява, че $z^2 = s^2 + 3nst^2$ и $x = 3s^2t + nt^3$ удовлетворяват горното равенство. Тъй като винаги съществува цяло число $x = 3s^2t + nt^3$, остава да докажем, че съществуват безбройно много z , удовлетворяващи уравнението

$$(1) \quad z^2 = s^2 + 3nst^2.$$

Случай 1. Ако $3n$ не е точен квадрат, да изберем $s = 1$. Тогава (1) се преобразува в уравнение на Пел $z^2 - 3nt^2 = 1$. Известно е, че това уравнение има безбройно много решения и ако (z_1, t_1) е решението с най-малката положителна стойност на z_1 (а следователно и на t_1), то k -то решение се дава от

$$z_k + \sqrt{3nt_k} = (z_1 + \sqrt{3nt_1})^k.$$

Лесно се проверява, че ако k е четно, то t_k е също четно.

Остава да докажем, че съществуват безбройно много двойки (z_k, t_k) , за които числата

$$x_k = 3t_k + nt_k^3, \quad y_k = 1 - nt_k^2, \quad z_k = 1 + 3nt_k^2$$

са две по две взаимнопрости. Ще разглеждаме само четни стойности на t_k . Имаме

$$(x_k, z_k) = (t_k(3 + nt_k^2), 1 + 3nt_k^2) = (3 + nt_k^2, 1 + 3nt_k^2) = (3 + nt_k^2, -8) = 1$$

и аналогично $(y_k, z_k) = (1 - nt_k^2, 4) = 1$ и $(x_k, y_k) = (4, 1 - nt_k^2) = 1$.

Случай 2. Ако $3n = m^2$ за някое естествено m , да изберем $s = u^2$ и $z = uv$. Тогава (1) се преобразува в $u^4 = v^2 - 3nt^2 = (v - mt)(v + mt)$. Директно се проверява, че за всяко естествено k числата

$$u_k = 2mk + 1, \quad t_k = \frac{u_k^4 - 1}{m}, \quad v_k = mt_k + 1$$

са решение на горното уравнение. Освен това u_k е нечетно, а t_k е четно. Имаме $(u_k, 3nt_k) = (u_k, mu_k^4 - m) = (u_k, m) = 1$, откъдето $(u_k, nt_k) = 1$. Също така $(t_k, v_k) = (t_k, mt_k + 1) = 1$.

Остава да докажем, че за тройката

$$x_k = 3u_k^4 t_k + nt_k^3, \quad y_k = u_k^4 - nt_k^2, \quad z_k = u_k v_k = u_k(mt_k + 1),$$

удовлетворяваща уравнението от условието, е изпълнено $(x_k, y_k) = (y_k, z_k) = (z_k, x_k) = 1$. Имаме

$$\begin{aligned}(x_k, y_k) &= (3u_k^4 t_k + nt_k^3, u_k^4 - nt_k^2) = (4u_k^4 t_k, u_k^4 - nt_k^2) = (4, u_k^4 - nt_k^2) = 1 \\(y_k, z_k) &= (u_k^4 - nt_k^2, u_k v_k) = (u_k^4 - nt_k^2, 4nt_k^2) = (u_k^4 - nt_k^2, 4) = 1 \\(z_k, x_k) &= (3u_k^4 t_k + nt_k^3, u_k v_k) = (3u_k^4 + nt_k^2, u_k v_k) = (3u_k^4 + nt_k^2, v_k) = \\&= (8, u_k^4 + 3nt_k^2) = 1.\end{aligned}$$

Следователно съществуват безбройно много тройки от цели числа (x, y, z) , за всяка от които е изпълнено $nx^2 + y^3 = z^4$ и $(x, y) = (y, z) = (z, x) = 1$.

Задача 6. Нека M е множество от естествени числа, всяко от които не се дели на просто число, по-голямо от 3. Да се докаже, че за произволни подмножества $A_1, A_2, A_3, \dots$ на M съществуват две различни естествени числа i и j , за които всяко $x \in A_i$ има делител в A_j .

Решение. На всеки елемент $2^x 3^y, x \geq 0, y \geq 0$ от A да съпоставим точката от равнината с координати (x, y) . За две точки (a, b) и (c, d) дефинираме $(a, b) \leq (c, d)$, ако $a \leq c$ и $b \leq d$. Освен това нека $(a, b) < (c, d)$, ако $(a, b) \leq (c, d)$ и $(a, b) \neq (c, d)$. Трябва да докажем, че за произволни множества $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{N}_0^2$ съществуват $i, j \in \mathbb{N}$, такива, че за всяко $x \in A_i$ съществува $y \in A_j$, за които $y \leq x$.

Ще казваме, че множествата $A_1, A_2, \dots$ образуват хубаво множество, ако удовлетворяват горното условие.

Ще казваме, че множеството $A \in \mathbb{N}_0^2$ е редуцирано, ако не съществуват $x, y \in A$, за които $x < y$. Директно се вижда, че всяко редуцирано множество A е крайно и $|A| \leq a + b + 1$. Без ограничение можем да считаме, че всяко от множествата A_i е редуцирано.

Ще използваме следните две лема.

Лема 1. Ако за множествата $A_1, A_2, \dots$ не съществуват точки $p \in \mathbb{N}_0^2$, които се съдържат в безкрайно много от тях, то $A_1, A_2, \dots$ е хубаво множество.

Доказателство. За неотрицателно цяло число h полагаме

$$V_h = \cup A_i \cap \{(h, y) | y \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ако множеството V_h е крайно, от условието на лемата следва, че само краен брой множества A_i имат сечение с V_h . Можем да изтрием тези множества A_i .

Случай 1. Нека V_h е крайно за всяко $h \in \mathbb{N}_0$. Нека (a_0, b_0) е точка от $\cup A_i$ за която b_0 е най-малката y координата на точките в $\cup A_i$, а a_0 е най-малката x координата от всички точки с y координата равна на b_0 . Без ограничение $(a_0, b_0) \in A_1$. От $A_1, A_2, \dots$ изтриваме всички множества (без A_1), които имат общи елементи с $V_0, V_1, \dots, V_{a_0-1}$. При това са изтрети само краен брой множества. Следователно всички останали елементи (включително A_1) образуват хубаво множество.

Случай 2. Да допуснем, че съществува $h \in \mathbb{N}_0$, за което V_h е безкрайно. Нека t да е най-малкото число с това свойство. Тъй като всяко A_i е крайно, то безбройно много множества A_i имат общ елемент с V_t . Нека $\{C_i | i \in \mathbb{N}\}$ са тези безбройно много множества и $H_k = \{(x, k) | (x, k) \in \cup C_i\}$. Ако всички H_k са крайни, то $\{C_i | i \in \mathbb{N}\}$ е хубаво.

Да допуснем, че съществува k , за което H_k е безкрайно. Нека s е най-малкият измежду тези елементи k . Тъй като всяко C_i е крайно, съществуват безбройно много множества C_i , които имат общ елемент с H_s . Нека $\{D_i | i \in \mathbb{N}\}$ са тези безбройно много множества за H_s . Да отбележим, че $D_i \cap V_t \neq \emptyset, D_i \cap H_s \neq \emptyset$. Следователно, ако $(t, d) \in D_1$ и $(c, s) \in D_1$, то броят на множествата D_i , които допринасят за $[t, c) \times [s, d)$ е краен. Изтривайки тези множества D_i (освен D_1) от $\{D_i | i \in \mathbb{N}\}$, получаваме безкрайно подмножество $\{D_i\} \cup \{E_i | i \in \mathbb{N}\}$ на $A_1, A_2, \dots$. Избирайки $(t, d) \in D_1$ или $(c, s) \in D_1$, тъй като $x \in A_i$, заключаваме, че $\{D_i\} \cup \{E_i | i \in \mathbb{N}\}$ е хубаво.

Лема 2. Ако за $A_1, A_2, \dots$ съществува $n \in \mathbb{N}$, за което $|A_i| \leq n$ за всяко i , то множеството $A_1, A_2, \dots$ е хубаво.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по N . За $N = 1$ твърдението е очевидно. Ако за някое $N \geq 2$ множеството не удовлетворява лемата, то съществува p , което се съдържа в безкрайно много множества A_i . Нека $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ е множеството от множества, съдържащи p . От индукционната хипотеза следва, че $\{B_i - \{p\} | i \in \mathbb{N}\}$ е хубаво, откъдето лесно следва, че $\{B_i | i \in \mathbb{N}\}$ е хубаво. Следователно множеството $A_1, A_2, \dots$ също е хубаво, с което доказателството на лемата е завършено.

Ако $A_1, A_2, \dots$ удовлетворява условието на Лема 1, задачата е решена. В противен случай съществува $p = (a, b)$, което се съдържа в безкрайно много от множествата $A_1, A_2, \dots$. Тогава за всяко A_i имаме $|A_i| \leq a + b + 1$ (всички A_i са редуцирани). Следователно от Лема 2 следва, че множеството от множествата A_i , които съдържат p , е хубаво, т.е. $A_1, A_2, \dots$ е също хубаво.

Казахстан (Жаутиков)

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Нека D е произволна вътрешна точка от страната AB , а M и N са петите на перпендикулярите от D съответно към BC и AC . Нека H_1 и H_2 са съответно ортоцентровете на триъгълниците MNC и MND . Да се докаже, че лицето на четириъгълника AH_1BH_2 не зависи от разположението на точката D върху AB .

Решение. Ще използваме следната лема, чието лесно доказателство оставяме на читателя.

Лема. Ако права ℓ пресича правите, определени от страните на успоредник, то сумата от разстоянията до ℓ от два противоположни върха на успоредника е равна на сумата от разстоянията до ℓ от другите два противоположни върха и на разстоянието до ℓ от пресечната точка на диагоналите на успоредника. (Всички разстояния се отчитат със знак $+$ или $-$ в зависимост от коя страна на ℓ се намират.)

Прилагането на лемата за успоредниците NH_1MD и MH_2NC и правата AB дава равенствата

$$d(M, AB) + d(D, AB) = d(D, AB) + d(H_1, AB),$$

$$d(M, AB) + d(D, AB) = d(C, AB) - d(H_2, AB),$$

Следователно $d(H_1, AB) + d(H_2, AB) = d(C, AB)$, откъдето лесно следва, че $S_{AH_1BH_2} = S_{ABC}$.

Задача 2. Множество от клетки на таблица $n \times n$, $n \geq 5$, се нарича *удобно*, ако всеки ред и всеки стълб на таблицата съдържа поне по две клетки от това множество. Да се намери максималното m със следното свойство: съществува удобно множество с m клетки, което престава да бъде удобно при премахване на коя да е от клетките му.

Решение. (Конструкция) Множеството от всички клетки в първите два реда без последните по две в ред и всички клетки в последните два стълба без първите по две в стълб има исканите свойства и има $4(n-2) = 4n-8$ клетки.

(Оценка) Нека M е удобно множество, което престава да бъде удобно при премахване на коя да е от клетките му. Една линия (ред или стълб на таблицата) се нарича *базисна* за M , ако съдържа точно две клетки от M . Тогава всяка клетка от M се съдържа в поне една базисна линия (в противен случай ще премахнем тази клетка и новото множество също ще е удобно).

Нека t_r и t_c са съответно броят на базисните редове и броят на базисните стълбове. От горното следва, че $|M| \leq 2(t_c + t_r)$.

Ако $\max\{t_r, t_c\} \leq n-2$, то $|M| \leq 2(t_c + t_r) \leq 4(n-2)$, а ако $\max\{t_r, t_c\} = n$, имаме $|M| = 2n \leq 4(n-2)$ при $n \geq 5$.

Нека $\max\{t_r, t_c\} = n-1$, като например $t_c = n-1$. Ако не всички клетки от единствения стълб на таблицата, който не е базисен, са в M , то $|M| \leq 2(n-1) + n-1 = 3n-3 \leq 4(n-2)$ при $n \geq 5$. Ако пък всички клетки от този стълб са в M , то в никой ред на таблицата не може да има повече от една клетка извън този стълб, т.е. $|M| \leq n + n-1 < 4(n-2)$ при $n \geq 4$ (освен това имаме и противоречие с $t_c = n-1$ при $n \geq 3$).

Задача 3. Нека $Q(x)$ и $R(x)$ са полиноми с реални коефициенти, за които е известно, че съществува полином $P(x)$ също с реални коефициенти, такъв, че $P(Q(x)) + P(R(x))$ е константа за всяко x . Да се докаже, че поне един от полиномите $P(x)$ и $Q(x) + R(x)$ е константа за всяко x .

Решение. За означим степените на $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ съответно с p , q и r , а старшите им коефициенти съответно с a , b и c . Оставайки няколко тривиални случаи на читателя, можем да считаме, че $p > 0$, $q > 0$ и $r \geq 0$, като $q \geq r$.

Ако $q > r$, то старшият коефициент на $P(Q(x)) + P(R(x))$ е $ab^p \neq 0$, противоречие. Следователно $q = r$ и тогава, тъй като старшият коефициент на $P(Q(x)) + P(R(x))$ в този случай е $a(b^p + c^p)$, заключаваме, че p е нечетно и $b = -c$.

Да разгледаме полинома $S(x) = a(Q(x)^p + R(x)^p) = a(Q(x) + R(x))T(x)$ (разлагането е възможно, защото p е нечетно). Старшият коефициент на $T(x)$ е $b^{p-1} - b^{p-2}(-b) + \dots - b(-b)^{p-2} + (-b)^{p-1} = pb^{p-1} \neq 0$, т.е. степента на $T(x)$ е $(p-1)q$. Ако $Q(x) + R(x)$ не е константа, то степента на $S(x)$ е поне $1 + (p-1)q > 0$. Но в тази ситуация степента на $P(Q(x)) + P(R(x))$ съвпада със степента на $S(x)$, противоречие.

Задача 4. Съществуват ли естествени числа m и n и функция $f: \mathbb{R} \rightarrow$

$\mathbb{R}$, такива, че са изпълнени едновременно следните две условия

- (i) $f(f(x)) = 2f(x) - x - 2$ за всяко реално x ; (ii) $m \leq n$ и $f(m) = n$.

Решение. Отговор – Не! Да допуснем, че съществуват числа m и n и функция с исканите свойства. Ако $n - m \geq 2$, то от

$$f(n) = f(f(m)) = 2f(m) - m - 2 = 2n - m - 2 \geq n$$

следва, че можем да разгледаме двойката числа $(m_1, n_1) = (n, 2n - m - 2)$, за които условията (ii) също са изпълнени, но $n_1 - m_1 = 2n - m - 2 - n = n - m - 2$, т.е. разликата между тях е намалена с 2.

Следователно е достатъчно да разгледаме случаите $n = m$ и $n = m + 1$. При $n = m$ имаме

$$m = f(n) = f(f(m)) = 2f(m) - m - 2 = m - 2,$$

противоречие. При $n = m + 1$ получаваме първо

$$f(m + 1) = f(n) = f(f(m)) = 2f(m) - m - 2 = m$$

и след това

$$m + 1 = f(m) = f(f(m + 1)) = 2f(m + 1) - (m + 1) - 2 = m - 3,$$

противоречие.

Задача 5. Върху диагоналите на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са построени равностранни триъгълници ACB' и BDC' така, че B и B' са от една и съща страна на AC , а C и C' са от една и съща страна на BD . Да се намери $\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA$, ако е известно, че $B'C' = AB + CD$.

Решение. Да построим равностранен $\triangle ADM$ така, че M и C да са от една и съща страна на AD . Тогава $\triangle MAB' \cong \triangle DAC$ и $\triangle MDC' \cong \triangle ADB$ (Докажете!). Следователно $MB' = CD$ и $MC' = AB$, откъдето $B'C' = AB + CD = MB' + MC'$. Последното означава, че $M \in B'C'$. Тогава

$$\sphericalangle BAD + \sphericalangle CDA = \sphericalangle C'MD + \sphericalangle B'MA = 180^\circ - \sphericalangle AMD = 120^\circ.$$

Задача 6. Да се реши в цели числа уравнението $2x^2 - y^{14} = 1$.

Решение. Да положим $y^2 = z$ запишем уравнението във вида

$$2x^2 = (z+1)(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1).$$

Тъй като най-големият общ делител на двата множителя отдясно е делител на 7 (следствие от добре известен факт; вж. например Задачи по теория на числата на Додунеков и Чакърян), а 7 не дели $z+1 = y^2+1$ (друг добре известен факт), тези два множителя са взаимно прости и очевидно $z+1$ е четно. Следователно $z+1 = 2a^2$, $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = b^2$, където a и b са взаимнопрости цели числа и $ab = x$.

Уравнението $z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = b^2$ се решава стандартно с метода на заключване между точни квадрати. Оставяйки рутинните сметки на читателя, записваме

$$(16z^3 - 8z^2 + 6z - 5)^2 < 16b^2 < (16z^3 - 8z^2 + 6z - 4)^2$$

при $z \geq 4$. Сега от $z = y^2$ следва единствена възможност $z = 1$, откъдето получаваме единственото решение $(x, y) = (1, 1)$.

Забележка. Препоръчваме на читателя да разгледа с аналогичен подход малко по-съдържателното уравнение $2x^2 - y^{15} = 1$, като докаже, че ако $x > 1$, то x се дели на 5 (това е Задача 10.7 от Всерусийската олимпиада през 2005 г., която тогава бе решена по този начин от Емил Баронов за учудване на журито, което разполагаше с много по-дълго и сложно решение).