

НАЦИОНАЛНИ ОЛИМПИАДИ ПО МАТЕМАТИКА 2013

Петър Бойваленков Емил Колев
Николай Николов

УНИМАТ СМБ
Съюз на Математиците в България

Настоящата книга е под номер шест в започнатата през 2008 г. поредица. Представени са условията и решенията на задачите от финалните етапи на националните олимпиади във водещи (по преценка на авторите) в “олимпийската“ математика страни, като за първи път са включени задачите от националните олимпиади на КНДР и Тайланд.

Текстът се основава на материалите, разпространявани между ръководствата на националните отбори по време на Международната олимпиада по математика (Санта Марта, Колумбия, 18-28 юли 2013 г.), както и на материали от интернет. Авторите се надяват задачите от тази книга да послужат добре както на учениците с изявени интереси в областта на математиката, така и на специалистите, които се занимават с подготовка на олимпийци.

Copyright © УНИМАТ СМБ
София 1113, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
тел. (02)979-28-06, e-mail: peter@math.bas.bg
София, януари 2014 г.
ISBN: 978-954-8880-41-1

СЪДЪРЖАНИЕ

	Условия	Решения
Великобритания	3	23
Виетнам	4	26
Иран	6	34
Китай	8	43
КНДР	10	51
Русия	12	57
САЩ	16	73
Тайланд	18	82
Южна Корея ...	20	91
Япония	22	99

Великобритания

Задача 1. Съществуват ли безбройно много двойки (m, n) от естествени числа, за които m дели $n^2 + 1$ и n дели $m^2 + 1$?

Задача 2. Точка P е вътрешна за $\triangle ABC$, като $\angle ABP = \angle PCA$. Точка Q е такава, че $PBQC$ е успоредник. Да се докаже, че $\angle QAB = \angle CAP$.

Задача 3. Разглеждаме множеството от всички естествени числа, които, записани в двоична система, имат 2013 цифри и повече нули отколкото единици. Нека n е броят на тези числа, а s е техния сбор. Да се докаже, че числото $n + s$, записано в двоичен вид, има повече нули, отколкото единици.

Задача 4. Точка P лежи на вписаната окръжност в квадрат $ABCD$. Възможно ли е всяка една от отсечките PA , PB , PC , PD и AB да има целочислена дължина?

Виетнам

Задача 1. Да се реши в реални числа системата

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{20y}{x+y}} \end{cases}.$$

Задача 2. Дадена е редицата

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}}, \text{ при } n \geq 1.$$

Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери нейната граница.

Задача 3. Окръжност k с център I е вписана в неравнобедрен $\triangle ABC$. Допирните точки на k със страните BC , CA и AB са съответно D , E и F . Права през E , перпендикулярна на BI , пресича k в точка $K \neq E$. Права през F , перпендикулярна на CI , пресича k в точка $L \neq F$. Нека J е средата на отсечката KL .

а) Да се докаже, че точките D , I и J лежат на една права.

б) Нека B и C са фиксирани, а точката A е такава, че $\frac{AB}{AC} = t$, където t е дадена константа, като A , B и C не лежат на една права. Нека M и N са съответно пресечните точки на IE и IF с окръжността k ($M \neq E, N \neq F$). Правата MN пресича правите IB и IC съответно в точките P и Q . Да се докаже, че симетралата на отсечката PQ минава през постоянна точка.

Задача 4. Върху права са записани няколко естествени числа. За един ход избираме всички възможни двойки от последователни числа върху правата и за всяка двойка (a, b) записваме числото $a + b$ в средата на интервала между двете числа. Да се определи колко пъти е записано числото 2013 след 2013 хода, ако:

а) дадените числа са 1 и 1000;

б) дадените числа са $1, 2, \dots, 1000$ в нарастващ ред от ляво на дясно.

Задача 5. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяващи следните условия:

$$f(0) = 0, f(1) = 2013 \text{ и}$$

$$(x - y)(f(f^2(x)) - f(f^2(y))) = (f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y))$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 6. Остроъгълният $\triangle ABC$ е вписан в окръжност k и върху дъгата $\widehat{BC}$, несъдържаща A , е избрана точка D . Произволна права l през ортоцентъра на $\triangle ABC$ пресича описаните окръжности около $\triangle ABH$ и $\triangle ACH$ съответно в точки M и N .

а) Да се определи положението на правата l , за която $\triangle AMN$ има максимално лице.

б) Нека d_1 е правата през M , перпендикулярна на правата DB и d_2 е правата през N , перпендикулярна на DC . Да се докаже, че когато правата l се мени, пресечната точка P на правите d_1 и d_2 лежи на една и съща окръжност.

Задача 7. Да се намерят броя на наредените 6-орки (a, b, c, a', b', c') , за които

$$ab + a'b' \equiv bc + b'c' \equiv ca + c'a' \pmod{15}$$

и $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}$.

Иран (финал на третия кръг)

Третият кръг на националната олимпиада на Иран се провежда в пет части, като на финалната част се предлагат 8 задачи, за всяка от които е зададено време за работа.

Задача 1. (90 минути) Нека G е граф с върхове $v_1, v_2, \dots, v_n$, $n \in \mathbb{N}$, и нека $f(G)$ е броят на ацикличните ориентации¹ на G .

а) Да се докаже, че $f(G) \leq f(G - v_1) + f(G - v_2) + \dots + f(G - v_n)$.

б) Нека e е ребро на G и G' е графът, получен от G след премахването на e и сливането на двата му края като един връх. Да се докаже, че $f(G) = f(G - e) + f(G')$.

в) Да се докаже, че за всяко реално число $\alpha > 1$ съществуват граф G и ребро e на G , за които $f(G) < \alpha f(G - e)$.

Задача 2. (105 минути) Нека S е изпъкнала фигура в равнината с лице 10. Да разгледаме отсечка с дължина 3 с краища на контура на S и нека A и B са точки върху тази отсечка, които я разделят на три равни части. За произволна точка $X \in S \setminus \{A, B\}$ нека A_1 и B_1 са пресечните точки на лъчите $AX^{\rightarrow}$ и $BX^{\rightarrow}$ с контура на S . Нека S' е множеството от тези точки X , за които $3AA_1 > BB_1$. Да се докаже, че лицето на S' е поне 6.

Задача 3. (50 минути) Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват естествени числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, за които $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \dots > \varphi(a_n)$.

Задача 4. (75 минути) Дадени са n торби с по 100 монети всяка. В една от торбите монетите са 9-грамови, а в останалите $n - 1$ монетите са 10-грамови. Разполагаме с кантар, който показва тегла до 1 килограм. Да се намери най-малкият възможен брой измервания, с които може да бъде определена торбата с леките монети.

Задача 5. (60 минути) Полином на три променливи P се нарича цикличен, ако $P(x, y, z) = P(y, z, x)$. Да се докаже, че съществуват циклични

¹ Ациклична ориентация на обикновен граф се нарича всяко задаване на направления на ребрата му, която го превръща в насочен граф без цикли.

полиноми на три променливи P_1, P_2, P_3 и P_4 , такива, че за всеки цикличен полином на три променливи P съществува полином на четири променливи Q , за който

$$P(x, y, z) = Q(P_1(x, y, z), P_2(x, y, z), P_3(x, y, z), P_4(x, y, z)).$$

Задача 6. (105 минути) Да се докаже, че:

а) съществува реално положително число α , такова, че за всяко естествено число n съществува изпъкнал n -ъгълник с върхове в точките от целочислената решетка с лице, по-малко от αn^3 ;

б) съществува реално положително число β , такова, че за всяко естествено число n всеки изпъкнал n -ъгълник с върхове в точките от целочислената решетка има лице поне βn^2 ;

в) съществуват реални положителни числа γ и c , такива, че за всяко естествено число n всеки изпъкнал n -ъгълник с върхове в точките от целочислената решетка има лице поне γn^{2+c} .

Задача 7. (50 минути) В една страна има магистрали, които представляват затворени криви, които могат да се пресичат. Някои различни магистрали също се пресичат. Правителството иска да построи мостове на местата на пресичане по такъв начин, че при пътуване по коя да е магистрала минаванията по мостове и под тях да се редуват. Да се докаже, че това винаги е възможно.

Задача 8. (75 минути) а) Съществува ли безкрайно множество от естествени числа S , $S \neq \mathbb{N}$, такова, че за всяко естествено число $n \notin S$ точно n числа от S са взаимнопрости с n ?

б) Съществува ли безкрайно множество от естествени числа S , такова, че за всяко естествено число $n \in S$ точно n числа от S са взаимнопрости с n ?

Китай

Задача 1. Окръжностите k_1 и k_2 с различни радиуси се пресичат в точки A и B . Точките C и D съответно от k_1 и k_2 са такива, че A е средата на отсечката CD . Правата DB пресича k_1 за втори път в точка E , а правата CB пресича k_2 за втори път в точка F . Нека ℓ_1 и ℓ_2 са симетралите съответно на отсечките CD и EF .

а) Да се докаже, че ℓ_1 и ℓ_2 имат единствена обща точка P .

б) Да се докаже, че дължините на отсечките CA , AP и PE са дължини на страни на правоъгълен триъгълник.

Задача 2. Да се намерят всички множества S от цели числа, за които от $m, n \in S$ следва $3m - 2n \in S$ (m и n не са непременно различни).

Задача 3. Да се намерят всички реални числа t със следното свойство: Съществува безкрайно множество X от реални числа, такова, че неравенството

$$\max\{|x - (a - d)|, |y - a|, |z - (a + d)|\} > td$$

е в сила за всички (не непременно различни) $x, y, z \in X$, всички реални a и всички реални положителни d .

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е естествено число и крайните непразни множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ са такива, че $|A_i \Delta A_j| = |i - j|$ за всички $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Да се намери максималната възможна стойност на $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$. (Симетричната разлика $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ се състои, както се вижда от формулата, от всички елементи на обединението на A и B , които не принадлежат на сечението $A \cap B$.)

Задача 5. За всяко естествено n и за всяко $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ означаваме $\binom{n}{i} \equiv c_{n,i} \pmod{2}$, $c_{n,i} \in \{0, 1\}$, и дефинираме $f(n, q) = \sum_{i=0}^n c_{n,i} q^i$. Нека m , n и q са естествени числа, като $q + 1$ не е степен на 2. Да се докаже, че ако $f(m, q) \mid f(n, q)$, то $f(m, r) \mid f(n, r)$ за всяко естествено число r .

Задача 6. Дадени са естествени числа m и n . Да се намери най-малкото естествено число N , $N \geq m$, със следното свойство: ако N -елементно множество от цели числа съдържа пълна система остатъци по модул m , то това множество притежава непразно подмножество със сума на елементите си, кратна на n .

КНДР

Задача 1. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност ω се допира до страните BC , CA и AB съответно в точките D , E и F . Права през върха A пресича дъгата $\widehat{EF}$ (която не съдържа D) в точка T . Правата през T , която се допира до ω , пресича правата EF в точка P , а правата през P , успоредна на AB , пресича правата AT в точка H . Да се докаже, че $\angle HEF = 90^\circ$.

Задача 2. Във всеки връх на правилен n -ъгълник $P_1P_2 \dots P_n$ е записано числото 1. Имаме право да извършваме следната операция:

Избираме три произволни върха $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ ($P_{n+1} = P_1$, $P_{n+2} = P_2$) и заместваме числата a_i , a_{i+1} и a_{i+2} , записани в тях съответно с числата $a_i - x$, $a_{i+1} - |x - y|$ и $a_{i+2} - y$, където $x, y \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяват неравенствата $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, $a_i - x \geq 0$ и $a_{i+2} - y \geq 0$. За всяка операция числата x и y може да са различни.

Да се определи дали е възможно след няколкократно прилагане на горната операция за някое a_i , $1 \leq i \leq n$ да е изпълнено неравенството:

а) $a_i > 1,5$,

б) $a_i > \frac{5}{3}$.

Задача 3. Съществува ли функция $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, която не е полином и за произволни $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$ числото $a - b$ дели $f(a) - f(b)$?

Задача 4. Да се намерят всички функции, за които равенството

$$f(x^2 + 2yf(x)) + f(y^2) = f^2(x + y)$$

е изпълнено за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 5. Нека ω и O са съответно описаната окръжност и нейния център за неравнобедрен $\triangle ABC$. Правата през A , която е допирателна

към ω пресича правата BC в точка A_1 . Точка A_2 е симетрична на точката A_1 спрямо точката O . Правата A_1A_2 пресича ω в точка A_3 ($A_3 \neq A_2$). Аналогично се дефинират точките B_3 и C_3 . Да се докаже, че правите AA_3 , BB_3 и CC_3 се пресичат в една точка.

Задача 6. С M_1 означаваме множеството от всички пермутации на $(1, 2, 3, 4, 5)$. Дефинираме индуктивно множествата M_k по следния начин

$$M_{k+1} = \{A_{k+1} = (a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, a_5 + a_1) | \\ A_k = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in M_k\}.$$

За всяко $k \in \mathbf{N}$ да се намери $N_k = \min_{A_k \in M_k} \max_{1 \leq i \leq 5} a_i$.

Русия

Задача 9.1. Дадени са две по две различни реални числа a , b и c . Да се докаже, че поне две от уравненията $(x-a)(x-b) = x-c$, $(x-b)(x-c) = x-a$ и $(x-c)(x-a) = x-b$ имат реален корен.

Задача 9.2. Остроъгълен $\triangle ABC$ е вписан в окръжност Ω . Допирателните към Ω в точките B и C се пресичат в точка P . Точките D и E са пети на перпендикулярите от P към правите AB и AC . Да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle ADE$ съвпада със средата на отсечката BC .

Задача 9.3. На дъската са написани 100 две по две различни числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. След това под всяко число a_i написали числото b_i , равно на сумата на a_i и най-големия общ делител на останалите 99 първоначални числа. Колко най-малко може да са две по две различните числа измежду $b_1, b_2, \dots, b_{100}$?

Задача 9.4. В равнината са дадени n прави, никои две от които не са еспоредни и никои три от които не се пресичат в една точка. Да се докаже, че съществува начупена несамопресичаща се линия с n звена, така че на всяка от дадените n прави лежи точно по едно нейно звено.

Задача 9.5. По окръжност са разположени $2n$ реални числа с положителна сума. За всяко от числата разглеждаме двете групи от n последователни по окръжността числа, за които това число е крайно. Да се докаже, че за поне едно от числата сумата от числата и в двете групи е положителна.

Задача 9.6. Петя и Вася измислили десет квадратни тричлена. След това Вася казвал последователни естествени числа (започвайки отнякъде), а Петя замествал всяко казано число в някой от квадратните тричлени (по негов избор) и записвал получените стойности на дъската отляво надясно. Оказало се, че числата, записани на дъската, образуват аритметична прогресия (в реда, в който за записани). Колко най-много числа е могъл да каже Вася?

Задача 9.7. Външно за остроъгълния $\triangle ABC$ са построени квадратите $CAKL$ и $CBMN$. Правата CN пресича отсечката AK в точка X , а правата

CL пресича отсечката BM в точка Y . Точката P , лежаща във вътрешността на $\triangle ABC$ е пресечна за окръжностите, описани около триъгълниците KXN и LYM . Точката S е средата на отсечката AB . Да се докаже, че $\sphericalangle ACS = \sphericalangle BCP$.

Задача 9.8. От квадрат 55×55 съставен от единични клетки са изрязани по границите на клетките 400 триклетъчни ъгъла (квадрат 2×2 , от който е премахната една ъглова клетка и още 500 клетки. Да се докаже, че две от изрязаните фигури са имали обща страна на клетка за граница.

Задача 10.1. Виж Задача 9.1.

Задача 10.2. Върху окръжност са отбелязани n точки, които я разбиват на n дъги. Окръжността е ротирана около центъра си на ъгъл $2\pi k/n$ (при някое естествено k), в резултат на което отбелязаните точки се изобразили в n нови точки, разбиващи окръжността на n нови дъги. Да се докаже, че някоя от новите дъги лежи изцяло в някоя от старите дъги. (Дъгите се разглеждат като затворени множества.)

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа k , за които произведението на първите k прости числа, намалено с 1, е точна степен (по-голяма от първа) на естествено число.

Задача 10.4. Във вътрешността на вписан четириъгълник $ABCD$ са разположени точки P и Q , за които

$$\begin{aligned}\sphericalangle PDC + \sphericalangle PCB &= \sphericalangle PAB + \sphericalangle PBC = \sphericalangle QCD + \sphericalangle QDA \\ &= \sphericalangle QBA + \sphericalangle QAD = 90^\circ.\end{aligned}$$

Да се докаже, че правата PQ сключва равни ъгли с правите AD и BC .

Задача 10.5. Съществува ли естествено число n със следното свойство: за произволни ненулеви цифри a и b числото $\overline{anb}$ се дели на $\overline{ab}$? (С $\overline{x\dots y}$ се означава числото, получено чрез последователно записване на числата $x, \dots, y$ в десетичен вид.)

Задача 10.6. Петя и Вася измислили десет полинома от пета степен. След това Вася казвал последователни естествени числа (започвайки от някъде), а Петя замествал всяко казано число в някой от полиномите (по негов избор) и записвал получените стойности на дъската отляво надясно.

Оказало се, че числата, записани на дъската, образуват аритметична прогресия (в реда, в който са записани). Колко най-много числа е могъл да каже Вася?

Задача 10.7. Окръжност с център I е вписана в $\triangle ABC$ и се допира до страните BC , CA и AB съответно в точките A_1 , B_1 и C_1 . Нека I_a , I_b и I_c са центровете на външновписаните окръжности за $\triangle ABC$, допиращи се съответно до страните BC , CA и AB . Отсечките I_aB_1 и I_bA_1 се пресичат в точка C_2 , отсечките I_bC_1 и I_cB_1 се пресичат в точка A_2 и отсечките I_cA_1 и I_aC_1 – в точка B_2 . Да се докаже, че I е центърът на окръжността, описана около $\triangle A_2B_2C_2$.

Задача 10.8. В равнината е даден квадрат, чиито страни са хоризонтални и вертикални. В квадрата са разположени няколко отсечки, успоредни на страните, като някои две отсечки не лежат на една права и не се пресичат в точка, вътрешна и за двете. Оказало се, че отсечките разбиват квадрата на правоъгълници, като при това всяка вертикална права, пресичаща квадрата и несъдържаща отсечки от разбиването, пресича точно k правоъгълника от разбиването, а всяка хоризонтална права, пресичаща квадрата и несъдържаща отсечки от разбиването – точно ℓ правоъгълника. Какъв може да бъде броят на правоъгълниците от разбиването?

Задача 11.1. Полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ са от десета степен и имат старши коефициенти равни на 1. Уравнението $P(x) = Q(x)$ няма реални корени. Да се докаже, че уравнението $P(x+1) = Q(x-1)$ има поне един реален корен.

Задача 11.2. Вписаната и външновписаната сфери на триъгълна пирамида $ABCD$ се допират до стената (BCD) в различни точки X и Y . Да се докаже, че $\triangle XHY$ е тъпоъгълен. (Външновписаната сфера се допира до една от стените на пирамидата и до равнините на останалите стени в точки, външни за стените.)

Задача 11.3. Да се намерят всички естествени числа k , за които произведението на първите k нечетни прости числа, намалено с 1, е точна степен (по-голяма от първа) на естествено число.

Задача 11.4. На всяка от 2013 картички е записано по едно число, като всички 2013 числа са различни. Картичките са обърнати с числата надолу. За един ход се разрешава да се посочат десет картички и в отговор да се каже едно от числата (неизвестно кое) написано на някоя от тях.

Да се намери най-голямото t , за което със сигурност можем да намерим t картички за които е известно кое число е записано на всяка от тях.

Задача 11.5. От числата от 0 до 1000 са избрани 101 числа. Да се докаже, че измежду модулите на двойките разлики на тези числа има 10 различни числа не по-големи от 100.

Задача 11.6. Дадени са положителни числа a , b , c и d , за които $2(a + b + c + d) \geq abcd$. Да се докаже, че $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd$.

Задача 11.7. Министърът на финансите иска да пусне в обръщение 12 различни номинала монети (всеки номинал е естествено число рубли) така, че всеки сбор от 1 до 6543 рубли да може да се изплати без ресто с не повече от 8 монети. Възможно ли е това? (При заплащане на сумата може да се използват няколко монети от един и същи номинал).

Задача 11.8. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност ω с център I . Около триъгълника AIB е описана окръжност Γ . Окръжностите ω и Γ се пресичат в точки X и Y . Общите допирателни на ω и Γ се пресичат в точка Z . Да се докаже, че описаните около $\triangle ABC$ и $\triangle XYZ$ окръжности се допират.

САЩ (30 април - 1 май 2013)

Преди условията за всеки от двата дни на националния кръг на олимпиадата на САЩ е дадено следното указание към учениците: "За всяка геометрична задача първата страница на Вашето решение трябва да представлява голям, добре мащабиран, ясно означен чертеж, направен с чертожни инструменти (линия, пергел, транспортир, молив); неспазването на кое да е от тези изисквания ще доведе до автоматично изваждане на една точка от Вашия резултат." Привеждаме това указание с надеждата нашите ученици още веднъж да отбележат колко е важен точният чертеж (с подходящите допълнителни построения)!

Задача 1. Точките P , Q и R лежат съответно на страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$. Нека ω_A , ω_B и ω_C са съответно описаните около триъгълниците AQR , BRP и CPQ . Ако отсечката AP пресича ω_A , ω_B и ω_C отново в точките X , Y и Z , да се докаже, че $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$.

Задача 2. Нека $n \geq 3$ е естествено число. Върху окръжност са разположени n точки, които я разбиват на равни дъги. Даден е пул, на който е разрешено да се придвижва от една от дадените точки в съседната ѝ или в следващата след съседната точка по посока на часовниковата стрелка (т.е. имаме $2n$ позволени хода). Да означим с a_n броя на начините, по които окръжността може да бъде обходена двукратно със старт и край във фиксирана точка от дадените, без повтаряне на ход. Да се докаже, че $a_{n-1} + a_n = 2^n$ за всяко $n \geq 4$.

Задача 3. Нека n е естествено число. Равностранен триъгълник е разбит на еднакви равностранни триъгълници по обичайния начин и във възлите, $\frac{n(n+1)}{2}$ на брой, са разположени пулове. Всеки пул е бял от едната страна и черен от другата и в началото всички пулове са обърнати с черната си страна нагоре. Разрешена е следната операция – да се избере права с пулове, успоредна на страна на големия триъгълник, и всички пулове върху тази права едновременно да се преобърнат. Една конфигурация от пулове са нарича допустима, ако може да бъде получена от първоначалната

след краен брой операции. За всяка допустима конфигурация C означаваме с $f(C)$ минималния брой операции, необходими за получаването на C от първоначалната конфигурация. Да се намери максималната възможна стойност на $f(C)$, когато C пробягва всички допустими конфигурации.

Задача 4. Да се намерят всички реални числа x , y и z , по-големи или равни на 1, които удовлетворяват условието

$$\min\{\sqrt{x+xyz}, \sqrt{y+xyz}, \sqrt{z+xyz}\} = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Задача 5. Дадени са естествени числа m и n . Да се докаже, че съществува естествено число s , за което в десетичния запис на числата sm и sn всяка ненулева цифра участва еднакъв брой пъти.

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$. Да се намерят всички точки P от отсечката BC , които имат следното свойство: ако X и Y са пресечните точки на правата PA с общите външни допирателни на описаните около $\triangle PAB$ и $\triangle PAC$ окръжности, то

$$\left(\frac{PA}{XY}\right)^2 + \frac{PB \cdot PC}{AB \cdot AC} = 1.$$

Тайланд

Задача 1. Да се намери най-голямото естествено число, което дели $p^4 - 1$ за всяко просто число $p > 3$.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$, за който $\angle ABC > \angle BCA$ и $\angle BCA \geq 30^\circ$. Ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle BCA$ пресичат срещуположните страни съответно в точки D и E . Правата BD пресича правата CE в точка P . Ако $PD = PE$ и радиусът на вписаната окръжност за $\triangle ABC$ има радиус 1, да се намери най-голямата възможна дължина на страната BC .

Задача 3. Всяка точка в равнината е оцветена в червено или синьо. Да се докаже, че съществува триъгълник със страни 1, 2 и $\sqrt{3}$ чийто върхове са едноцветни.

Задача 4. Да се намерят всички полиноми $p(x)$ със старши коефициент 1, имащи следните свойства:

- (1) $p(x)$ не е константа и всичките му корени са реални и различни;
- (2) ако a и b са корени на $p(x)$, то $a + b + ab$ е също корен на $p(x)$.

Задача 5. Да се намери петцифрено естествено число n с възможно най-малък сбор на цифрите и такова, че $n^3 - 1$ се дели на 2556.

Задача 6. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които

$$(x^2 + y^2)f(xy) = f(x)f(y)f(x^2 + y^2)$$

за произволни реални числа x и y .

Задача 7. В правилен шестоъгълник $ABCDEF$ със страна 1 са избрани различни точки $P_1, P_2, \dots, P_{2556}$. Ако никои три точки от множеството

$$S = \{A, B, C, D, E, F, P_1, P_2, \dots, P_{2556}\}$$

не лежат на една права, да се докаже, че съществува триъгълник с върхове от S чието лице е по-малко от $\frac{1}{1700}$.

Задача 8. Даден е полином $p(x) = x^{2003} + a_{2012}x^{2012} + \dots + a_1x + a_0$ с реални коефициенти. Нека всички корени на $p(x)$ са

$$-b_{1006}, -b_{1005}, \dots, -b_1, 0, b_1, \dots, b_{1005}, b_{1006},$$

където $b_1, b_2, \dots, b_{1006}$ са положителни реални числа с произведение 1. Да се докаже, че $a_3a_{2011} \geq 1012036$.

Задача 9. Точките M и N са среди съответно на страните AB и CD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Точка P от страната CD е такава, че $MP \perp CD$, а точка Q от правата AB е такава, че $NQ \perp AB$. Да се докаже, че $AD \parallel BC$ тогава и само тогава, когато $\frac{AB}{CD} = \frac{MP}{NQ}$.

Задача 10. Да се намерят всички естествени числа x и y за които числото $\frac{xy^3}{x+y}$ е точен куб на просто число.

Задача 11. Дадени са естествени числа m и n . Дадени са n купчини от златни монети, като i -тата купчина съдържа $a_i > 0$ монети. Разглеждаме следната игра:

1. Боб избира множества $B_1, B_2, \dots, B_n$, всяко от които е подмножество на $\{1, 2, \dots, m\}$.

2. Алис, знаейки избраните множества от Боб, избира непразно подмножество S на $\{1, 2, \dots, m\}$.

3. Монетите от купчинка i се дават на Боб, ако сечението $B_i \cap S$ има четен брой елементи. В противен случай монетите се дават на Алис.

Да се докаже, че каквито и множества $B_1, B_2, \dots, B_n$ да избере Боб, Алис може да избере множество S така, че да получи повече монети от Боб.

Задача 12. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k се допира до страните BC и AC съответно в точки D и E . Права, перпендикулярна на BC през точка D пресича k в точка P по-близка до A . Правата AP пресича BC в точка M . Нека N е точка от отсечката AC , за която $AE = CN$ и BN пресича k в точка Q по-близка до B и пресича AM в точка R . Да се докаже, че $\triangle ABR$ и четириъгълникът $PQMN$ имат равни лица.

Южна Корея

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$, за който $\angle B > \angle C$ и точка $D \in AC$ е такава, че $\angle ADC = \angle C$. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и E е втората пресечна точка на правата AI и окръжността, описана около $\triangle CDI$. Нека P е пресечната точка на правата BD и правата през E , успоредна на AB . Нека J е центърът на вписаната в $\triangle ABD$ окръжност и точката A' е симетрична на A относно I . Накрая, нека правите JP и $A'C$ се пресичат в точка Q . Да се докаже, че $QJ = QA'$.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, такива, че равенството

$$f(a-b) + f(c-d) = f(a) + f(b+c) + f(d)$$

е изпълнено за всички реални числа a, b, c и d , удовлетворяващи равенството $ab + bc + cd = 0$

Задача 3. Да означим $T = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, i|j\}$, където n е естествено число. Да се намери (като функция на n) максималната възможна стойност на израза $\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j$, където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са реални неотрицателни числа, удовлетворяващи равенството $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$, за който точките B_1 и C_1 са центровете на външноописаните окръжности съответно към страните AC и AB . Правата B_1C_1 пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка D , $D \neq A$. Нека E е пресечната точка на перпендикулярите от B_1 към CA и от C_1 към AB . Нека ω е окръжността, описана около $\triangle ADE$. Допирателната към ω в точка D пресича правата AE в точка F . Перпендикулярът от D към AE пресича AE в точка G и тази права пресича ω в точка H , $H \neq D$. Окръжността, описана около $\triangle HGF$ пресича ω в точка I , $I \neq H$. Нека J е петата на перпендикуляра от D към AH . Да се докаже, че правата AI минава през средата на отсечката DJ .

Задача 5. Нека a и b са взаимнопрости естествени числа и a_n и b_n са цели числа, дефинирани чрез равенството $(a + b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}$. Да се намерят всички прости числа p , за които съществува естествено число $n \leq p$, такова, че b_n се дели на p .

Задача 6. Нека n е естествено число, а $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ е пермутация. Множествата A , B , C и D са дефинирани по следния начин:

$$\begin{aligned} A &= \{i : i > f(i)\}, \\ B &= \{(i, j) : i < j \leq f(j) < f(i) \text{ или } f(j) < f(i) < i < j\} \\ C &= \{(i, j) : i < j \leq f(i) < f(j) \text{ или } f(i) < f(j) < i < j\} \\ D &= \{(i, j) : i < j \text{ и } f(i) > f(j)\}. \end{aligned}$$

Да се докаже, че $|A| + 2|B| + |C| = |D|$.

Япония

Задача 1. Дадени са естествени числа n и k , като $n \geq k$. В група от n човека всеки е член на точно един от k клуба, означени с $C_1, C_2, \dots, C_k$, като всеки клуб има поне един член. Да се докаже, че между всички n човека могат да се разпределят n^2 парчета торта, така че да се удовлетворяват следните условия:

- (1) Всеки човек получава поне едно парче торта;
- (2) За всяко i , $1 \leq i \leq k$, всеки член на клуб C_i получава a_i парчета торта;
- (3) Ако $1 \leq i < j \leq k$, то $a_i > a_j$.

Задача 2. Да се намерят всички реални функции f , дефинирани върху множеството на целите числа, за които

$$f(m) + f(n) = f(mn) + f(m + n + mn)$$

за всеки две цели числа m и n .

Задача 3. Дадено е естествено число $n \geq 2$. Да се намери най-малкото естествено число m за което съществува редица $a_1, a_2, \dots, a_n$ от естествени числа, удовлетворяваща следните две условия:

- (1) $a_1 < a_2 < \dots < a_n = m$;
- (2) всички $n - 1$ числа $\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}, \dots, \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2}{2}$ са точни квадрати.

Задача 4. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H . Окръжност, минаваща през точките B и C , пресича окръжността с диаметър AH в две точки X и Y . Нека D е петата на перпендикуляра от A към правата BC , а K е петата на перпендикуляра от D към правата XY . Да се докаже, че $\angle BKD = \angle CKD$.

Задача 5. Дадено е естествено число n . В равнината са избрани точки $P_1, P_2, \dots, P_{4n}$ никои три от които не лежат на една права. Известно е, че за всяко $i = 1, 2, \dots, 4n$ образът на лъча $P_i P_{i-1}$ при ротацията с център P_i на ъгъл 90° по посока на часовниковата стрелка е лъча $P_i P_{i+1}$. Да се намери максималния възможен брой двойки (i, j) , $1 \leq i < j \leq 4n$, за които отсечките $P_i P_{i+1}$ и $P_j P_{j+1}$ се пресичат в точка, различна от край на отсечка. (Приемаме, че $P_0 = P_{4n}$ и $P_{4n+1} = P_1$.)

Великобритания

Задача 1. Съществуват ли безбройно много двойки (m, n) от естествени числа, за които m дели $n^2 + 1$ и n дели $m^2 + 1$?

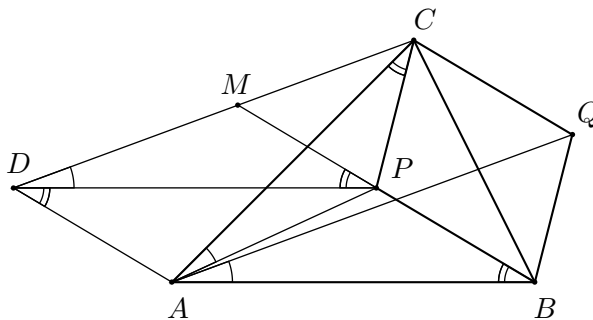
Решение. Ще докажем, че всички двойки от вида $(n, m) = (F_{2k-1}, F_{2k+1})$, където F_s е s -то число на Фибоначи изпълняват условието на задачата. С индукция по $k \geq 1$ лесно следва, че за числата на Фибоначи е в сила равенството $F_{2k+1}^2 + 1 = F_{2k-1}F_{2k+3}$. Наистина, $F_3^2 + 1 = 2^2 + 1 = F_1 \cdot F_5$ и ако $F_{2k-1}^2 + 1 = F_{2k-3}F_{2k+1}$, то като използваме равенството $F_{2k+3} = 3F_{2k+1} - F_{2k-1}$ намираме

$$\begin{aligned} F_{2k-1}F_{2k+3} &= F_{2k-1}(3F_{2k+1} - F_{2k-1}) = \\ &= 3F_{2k-1}F_{2k+1} - F_{2k-1}^2 = \\ &= 3F_{2k-1}F_{2k+1} - (F_{2k-3}F_{2k+1} - 1) = \\ &= F_{2k+1}(3F_{2k-1} - F_{2k-3}) + 1 = F_{2k+1}F_{2k+1} + 1 = F_{2k+1}^2 + 1. \end{aligned}$$

От полученото равенство непосредствено следва, че $F_{2k-1} | (F_{2k+1}^2 + 1)$ и $F_{2k+1} | (F_{2k-1}^2 + 1)$.

Задача 2. Точка P е вътрешна за $\triangle ABC$, като $\angle ABP = \angle PCA$. Точка Q е такава, че $PBQC$ е успоредник. Да се докаже, че $\angle QAB = \angle CAP$.

Решение. Нека точка D е такава, че $BPDA$ е успоредник. Тогава триъгълниците ABQ и DPC са еднакви. Следователно $\angle QAB = \angle CDP$.



Нека M е пресечната точка на BP и DC . Тъй като правите AD , BP и CQ са успоредни, то

$$\angle ABP = \angle DPM = \angle PDA.$$

От условието $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCA$ следва, че $\sphericalangle PCA = \sphericalangle PDA$ и следователно точките A, P, C и D лежат на една окръжност. Тогава $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CDP$, откъдето $\sphericalangle PAC = \sphericalangle QAB$.

Задача 3. Разглеждаме множеството от всички естествени числа, които, записани в двоична система, имат 2013 цифри и повече нули отколкото единици. Нека n е броят на тези числа, а s е техният сбор. Да се докаже, че числото $n + s$, записано в двоичен вид, има повече нули, отколкото единици.

Решение. Най-лявата цифра на всяко число от разглежданото множество е 1 и понеже нулите са повече от единиците, то броят на нулите е число в интервала $[2012, 1007]$. Следователно

$$\begin{aligned} n &= \binom{2012}{2012} + \binom{2012}{2011} + \cdots + \binom{2012}{1007} = \frac{2^{2012} - \binom{2012}{1006}}{2} = \\ &= 2^{2011} - \frac{1}{2} \binom{2012}{1006} = 2^{2011} - \binom{2011}{1005}. \end{aligned}$$

За намиране на s да разгледаме броя на единиците във фиксирана позиция. Най-лявата цифра на всички числа е единица. Да разгледаме произволна позиция от останалите. Без най-лявата и тази позиция (в които има единици) в останалите 2011 позиции трябва да имаме поне 1007 нули. Следователно този брой е равен на

$$\binom{2011}{2011} + \binom{2011}{2010} + \cdots + \binom{2011}{1007} = 2^{2010} - \binom{2011}{1006} = 2^{2010} - \binom{2011}{1005}.$$

Оттук

$$s = 2^{2012}n + \left(2^{2010} - \binom{2011}{1005}\right) \sum_{i=0}^{2012} 2^i = 2^{2012}n + \left(2^{2010} - \binom{2011}{1005}\right) (2^{2012} - 1),$$

откъдето

$$n + s = 2^{4023} + 2^{4022} + 2^{2010} - 2^{2013} \binom{2011}{1005}.$$

Понеже $n + s < 2^{4024}$, то в двоичното представяне на $n + s$ има най-много 4024 цифри. Понеже

$$n + s = 2^{2013} \left(2^{2010} + 2^{2009} - \binom{2011}{1005}\right) + 2^{2010},$$

то 2012 от последните 2013 цифри са нули.

Ако допуснем, че нулите в $n + s$ не са повече от единиците, то първите 2012 цифри трябва да са единици. Числото с това свойство е

$$2^{2013}(1 + 2 + \dots + 2^{2010}) + 2^{2010}.$$

Това число очевидно е по-голямо от $n + s$, противоречие.

Задача 4. Точка P лежи на вписаната окръжност в квадрат $ABCD$. Възможно ли е всяка една от отсечките PA , PB , PC , PD и AB да има целочислена дължина?

Решение. Да допуснем, че всяка от дадените отсечки има целочислена дължина. Да разгледаме правоъгълна координатна система с център O – пресечната точка на диагоналите на квадрата. Тогава координатите на върховете A , B , C и D са съответно (a, a) , $(-a, a)$, $(-a, -a)$ и $(a, -a)$. Ако координатите на P са (b, c) , то

$$AP^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac,$$

$$BP^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac,$$

$$CP^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac,$$

$$DP^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac,$$

откъдето намираме $BP^2 - AP^2 = 4ab$ и $CP^2 - BP^2 = 4ac$. Тъй като $2a$ е естествено число, то b и c са рационални. Това означава, че можем да считаме, че a , b и c са естествени числа (като умножим с най-малкото общо кратно на техните знаменатели). Освен това, ако и трите са четни можем да разделим на 2 докато едно от числата стане нечетно. От равенството $b^2 + c^2 = a^2$ (тъй като P е върху вписаната окръжност) по модул 4 следва, че точно едно от числата b и c е четно. Нека без ограничение b е четно, а c и a са нечетни. Сега от равенствата за CP^2 и BP^2 следва, че и CP и BP са нечетни. Тъй като квадрат на нечетно число е сравнимо с 1 по модул 8, то $4ac = CP^2 - BP^2$ се дели на 8, което е противоречие понеже a и c са нечетни числа.

Полученото противоречие доказва, че не е възможно всяка една от отсечките PA , PB , PC , PD и AB да има целочислена дължина.

Виетнам

Задача 1. Да се реши в реални числа системата

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{20y}{x+y}} \end{cases}.$$

Решение. От неравенството на Коши имаме

$$\begin{aligned} \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) &\geq \left(|\sin x \cos x| + \frac{1}{|\sin x \cos x|} \right)^2 \\ &= \left(\frac{|\sin 2x|}{2} + \frac{1}{2|\sin 2x|} + \frac{3}{2|\sin 2x|} \right)^2 \\ &\geq \left(1 + \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

и аналогично

$$\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y} \right) \left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y} \right) \geq \frac{25}{4}.$$

Умножаваме почленно двете уравнения и получаваме

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} \right) \left(\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} \right) \\ (1) \qquad &= 20 \sqrt{\frac{xy}{(x+y)^2}}. \end{aligned}$$

Като използваме неравенството между средноаритметично и средногеометрично, получаваме че лявата страна на (1) е по-голяма или равна на

$$2 \sqrt{\sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}}} \cdot 2 \sqrt{\sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}}}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\sqrt{\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}\right)\left(\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)} \\
&\geq 5\sqrt[4]{\left(\frac{5}{4}\right)^4} = 10 \geq 20\sqrt{\frac{xy}{(x+y)^2}}.
\end{aligned}$$

Сего от (1) следва, че навсякъде в горната верига от неравенства имаме равенства, което показва, че $x = y$ и $|\sin 2x| = |\sin 2y| = 1$, т.е. $x = y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Директно се проверява, че тези стойности са решение на дадената система.

Задача 2. Дадена е редицата

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}}, \text{ при } n \geq 1.$$

Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери нейната граница.

Решение. Ще докажем по индукция, че $a_n > 1$ за всяко $n > 1$. При $n = 2$ имаме $a_2 = \frac{3}{2} > 1$. Нека за някое k е изпълнено $a_k > 1$. Тогава

$$a_{k+1} = 3 - \frac{a_k + 2}{2^{a_k}} > 1 \iff 2^{a_k+1} > a_k + 2$$

и понеже функцията $u(x) = 2^{x+1} - x - 2$ е растяща в интервала $(1, +\infty)$ (понеже $u'(x) = 2^{x+1} \ln 2 - 1 > 0$ при $x > 1$), то $u(a_k) > u(1) > 0$.

От $a_n > 1$ следва, че за всяко $n > 1$ имаме $a_{n+1} = 3 - \frac{a_n+2}{2^{a_n}} < 3$. Ще покажем, че редицата е растяща. За функцията $f(x) = 3 - \frac{x+2}{2^x}$ при $1 < x < 3$ имаме $f'(x) = \frac{\ln 4 + x \ln 2 - 1}{2^x} > 0$ и следователно $f(x)$ е растяща при $1 < x < 3$. Освен това $a_2 = \frac{3}{2} > a_1$ и следователно редицата е растяща.

Получихме, че разглежданата редица е ограничена и растяща, откъдето следва, че тя е сходяща. Ако L е нейната граница, имаме

$$L = 3 - \frac{L+2}{2^L}.$$

Ще докажем, че уравнението $x = 3 - \frac{x+2}{2^x}$ има единствено решение при $x \in (1, 3)$. Наистина, за функцията $g(x) = 3 - \frac{x+2}{2^x} - x$ при $x \in (1, 3)$ имаме

$$g'(x) = \frac{\ln 4 + x \ln 2 - 1}{2^x} - 1 = \frac{\ln 4 + x \ln 2 - 1 - 2^x}{2^x}.$$

Директно се проверява, че за функцията $h(x) = \ln 4 + x \ln 2 - 1 - 2^x$ имаме $h'(x) = (1 - 2^x) \ln 2 < 0$ при $x \in (1, 3)$ и следователно $h(x) < h(1) = \ln 8 - 2 < 0$ при $x \in (1, 3)$. Оттук $g'(x) < 0$ при $x \in (1, 3)$, т.е. $g(x)$ е намаляваща в интервала $(1, 3)$ и уравнението $g(x) = 0$ има най-много едно решение. Тъй като $g(2) = 0$ получаваме, че $L = 2$.

Задача 3. Окръжност k с център I е вписана в неравнобедрен $\triangle ABC$. Допирните точки на k със страните BC , CA и AB са съответно D , E и F . Права през E , перпендикулярна на BI , пресича k в точка $K \neq E$. Права през F , перпендикулярна на CI , пресича k в точка $L \neq F$. Нека J е средата на отсечката KL .

а) Да се докаже, че точките D , I и J лежат на една права.

б) Нека B и C са фиксирани, а точката A е такава, че $\frac{AB}{AC} = t$, където t е дадена константа, като A , B и C не лежат на една права. Нека M и N са съответно пресечните точки на IE и IF с окръжността k ($M \neq E, N \neq F$). Правата MN пресича правите IB и IC съответно в точките P и Q . Да се докаже, че симетралата на отсечката PQ минава през постоянна точка.

Решение. а) Тъй като $DE \perp CI$ от условието $FL \perp CI$ следва, че $DE \parallel FL$. По същия начин следва, че $DF \perp EK$. От равните дъги върху окръжността заключаваме, че

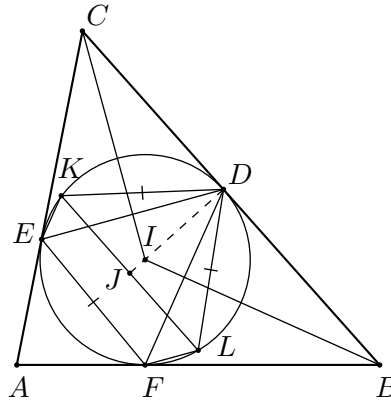
$$DK = DL = EF,$$

т.е. D лежи на симетралата на KL . Понеже I също лежи на симетралата на KL , то точките D , I и J лежат на една права.

б) Нека T е средата на BC , G е пресечната точка на AI и BC , U е симетричната точка на T по отношение на G . Ще докажем, че симетралата на PQ минава през точката U .

Нека X и Y са пресечните точки на EF съответно с BI и CI . Имаме

$$\begin{aligned} \sphericalangle XIC &= 180^\circ - \sphericalangle BIC = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\sphericalangle BAC}{2} \right) = \\ &= 90^\circ - \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \sphericalangle AEI - \sphericalangle EFI = \sphericalangle AEF = \sphericalangle XEC \end{aligned}$$



б) Да добавим върху правата числото 1 след числото 1000. Ще преброим колко пъти се среща 2013 върху новата права след 2013 хода. Конструираме индуктивно редица A от двойки числа. Първоначално избираме

$$A = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (999, 1000), (1000, 1)\}$$

и на всяка стъпка при записване на числото $k = a + b$ за двойката (a, b) добавяме две нови двойки (a, k) и (k, b) в множеството A .

Ще докажем с индукция по $a + b$, че наредената двойка (a, b) се появява в множеството A само при $(a, b) = 1$ и винаги, когато $(a, b) = 1$ двойката (a, b) се появява точно веднъж в множеството A . Базата на индукцията се проверява директно. Да допуснем, че твърдението е вярно при $a + b < k$. Ще докажем, че то е вярно и при $a + b = k$. Двойката (a, b) се добавя в A когато записваме числото b между числата от двойката $(a, b - a)$. Тъй като $a + (b - a) = b < k$, то двойката $(a, b - a)$ е в множеството само ако $(a, b - a) = 1$ и ако $(a, b - a) = 1$, то двойката $(a, b - a)$ се появява точно един път. Понеже $(a, b) = (a, b - a)$ твърдението е вярно и при $a + b = k$, с което индукцията е завършена.

Следователно броят на записванията на числото 2013 е равен на броя на двойките $(a, 2013 - a)$, за които $(a, 2013 - a) = 1$. Това означава, че 2013 е записано точно $\varphi(2013) = 1200$ пъти.

От а) имаме, че 2013 е записано два пъти между 1 и 1000. Следователно върху началната права числото 2013 е записано $1200 - 2 = 1198$ пъти.

Задача 5. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяващи следните условия:

$$f(0) = 0, f(1) = 2013 \text{ и}$$

$$(x - y)(f(f^2(x)) - f(f^2(y))) = (f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y))$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. При $x \neq 0$ и $y = 0$ намираме

$$xf(f^2(x)) = f^3(x),$$

откъдето $f(f^2(x)) = \frac{f^3(x)}{x}$ при $x \neq 0$. Замествайки в първоначалното уравнение при $xy \neq 0$, получаваме

$$(1) \quad (x - y) \left(\frac{f^3(x)}{x} - \frac{f^3(y)}{y} \right) = (f(x) - f(y))(f^2(x) - f^2(y)).$$

Полагаме $x < 0$ и $y = 1$ в (1) и намираме

$$(x-1) \left(\frac{f^3(x)}{x} - 2013^3 \right) = (f(x) - 2013)(f^2(x) - 2013^2),$$

което е еквивалентно на

$$(f(x) - 2013x)(f^2(x) - 2013^2x) = 0.$$

Но при $x < 0$ имаме $f^2(x) - 2013^2x \neq 0$ и следователно $f(x) = 2013x$ за $x < 0$. В частност имаме $f(-1) = -2013$.

Сега полагаме $x > 0$ и $y = -1$ в (1) и намираме

$$(f(x) - 2013x)(f^2(x) + 2013^2x) = 0.$$

Следователно $f(x) = 2013x$ при $x > 0$. Тъй като $f(0) = 0$, то $f(x) = 2013x$ за всяко x . Директно се проверява, че тази функция удовлетворява даденото в условието равенство.

Задача 6. Остроъгълният $\triangle ABC$ е вписан в окръжност k и върху дъгата $\widehat{BC}$, несъдържаща A , е избрана точка D . Произволна права l през ортоцентъра на $\triangle ABC$ пресича описаните окръжности около $\triangle ABH$ и $\triangle ACH$ съответно в точки M и N .

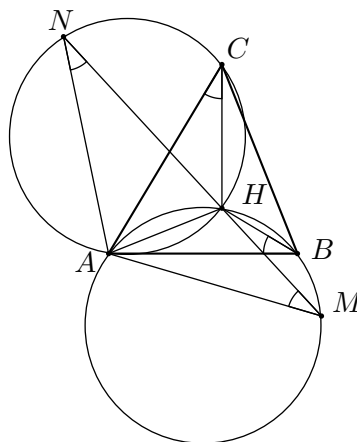
а) Да се определи положението на правата l , за която $\triangle AMN$ има максимално лице.

б) Нека d_1 е правата през M , перпендикулярна на правата DB и d_2 е правата през N , перпендикулярна на DC . Да се докаже, че когато правата l се мени, пресечната точка P на правите d_1 и d_2 лежи на една и съща окръжност.

Решение. а) Тъй като $R_{AHB} = R_{ANC} = R_{ABC}$ и AH е обща хорда за описаните окръжности около $\triangle AMH$ и $\triangle ANH$, то

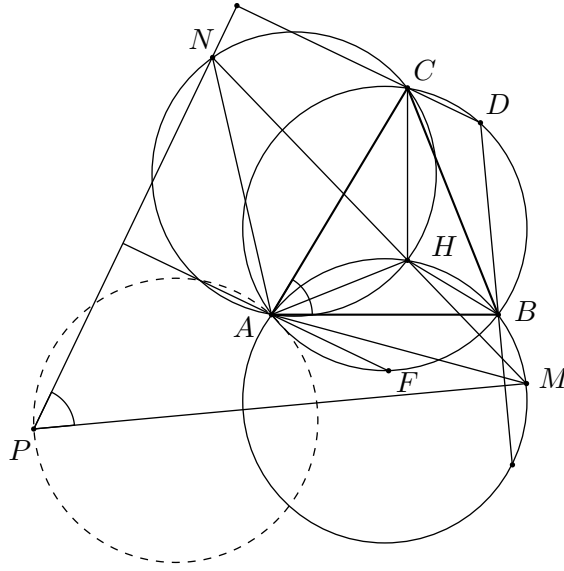
$$\angle AMH = \angle ANH = \angle ACH = 90^\circ - \angle BAC,$$

откъдето $AM = AN$. Освен това, когато правата l се мени $\angle AMH = \angle ANH$ са постоянни (защото радиусите на двете окръжности и дължината на хордата AH не се променят), което означава, че $\angle MAN = 2\angle BAC$ не се променя.



Следователно $\triangle AMN$ има най-голямо лице когато $AN = AM$ е с най-голяма дължина, т.е. AM и AN са диаметри. Това означава, че $\angle AHN = \angle AHM = 90^\circ$, т.е. правата l е перпендикулярна на AH .

б) Имаме $\angle MPN = 180^\circ - \angle BDC = \angle BAC$, т.е. $\angle MPN = \frac{1}{2}\angle MAN$. Следователно P лежи на окръжността с център A и радиус AM . Нека F е пресечната точка на описаната окръжност около $\triangle AHC$ и правата през A , успоредна на CD ($F \neq A$). Имаме $AF \perp PN$ и следователно P е симетрична на N спрямо AF . Тъй като AF е постоянна и N е върху описаната окръжност на $\triangle AHC$, то P лежи на окръжността симетрична на описаната окръжност на $\triangle AHC$ спрямо AF .



Задача 7. Да се намерят броя на наредените 6-орки (a, b, c, a', b', c') , за които

$$ab + a'b' \equiv bc + b'c' \equiv ca + c'a' \pmod{15}$$

и $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1, 2, \dots, 14\}$.

Решение. За всяко цяло число k да означим с N_k броя на наредените 6-орки (a, b, c, a', b', c') , за които

$$ab + a'b' \equiv bc + b'c' \equiv ca + c'a' \pmod{k}$$

и $a, b, c, a', b', c' \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. От китайската теорема за остатъците следва, че $N_{nm} = N_n \cdot N_m$ при $(n, m) = 1$. Следователно достатъчно е да

намерим N_3 и N_5 . Всъщност ще намерим N_p за всяко просто число p . За всяко решение (a, b, a', b') на сравнението $ab + a'b' \equiv 1 \pmod{p}$ ще пресметнем броя на решенията на системата

$$(*) \quad bc + b'c' \equiv ca + c'a' \pmod{p}.$$

Разглеждаме три случая:

Случай 1. Нека $(1, a') \not\equiv t(b, b') \pmod{p}$ за всяко $t \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Тогава системата $(*)$ има единствено решение $c \equiv \frac{a'-b'}{a'b-b'a} \pmod{p}$ и $c' = \frac{a-b}{ab'-ba'} \pmod{p}$.

Случай 2. Нека $(1, a') \equiv t(b, b') \pmod{p}$ за някое $t \neq 1$. Тогава системата $(*)$ няма решение.

Случай 3. Нека $(1, a') \equiv (b, b') \pmod{p}$. Системата $(*)$ се свежда до уравнението $bc + b'c' \equiv 1 \pmod{p}$. Понеже $ba + b'a' \equiv 1 \pmod{p}$, можем да приемем, че $b \neq 0$. Следователно при всеки избор на c' имаме единствен избор за $c \equiv \frac{1-b'c'}{b} \pmod{p}$. Това означава, че системата $(*)$ има точно p решения.

Да означим с T_p броя на наредените четворки (a, b, a', b') за които $ab + a'b' \equiv 1 \pmod{p}$ и $a, b, a', b' \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. За всяка двойка $(a, a') \neq (0, 0)$ съществуват точно p двойки (b, b') които удовлетворяват уравнението. Следователно $T_p = p(p^2 - 1)$.

Ако означим с $C_p(t)$ броя на наредените двойки (a, b) , за които $a^2 + b^2 \equiv t \pmod{p}$ и $a, b \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, то

$$N_p = T_p - \sum_{i=1}^{p-1} C_p(t) + pC_p(1) = p(p^2 - 1) - p^2 + C_p(0) + pC_p(1).$$

Директно се проверява, че $C_3(0) = 1$, $C_3(1) = 4$, $C_5(0) = 9$ и $C_5(1) = 4$, откъдето получаваме $N_3 = 28$, $N_5 = 124$ и следователно $N_{15} = 28 \cdot 124 = 3472$.

Иран (финал на третия кръг)

Задача 1. Нека G е граф с върхове $v_1, v_2, \dots, v_n$, $n \in \mathbb{N}$, и нека $f(G)$ е броят на ацикличните ориентации¹ на G .

а) Да се докаже, че $f(G) \leq f(G - v_1) + f(G - v_2) + \dots + f(G - v_n)$.

б) Нека e е ребро на G и G' е графът, получен от G след премахването на e и сливането на двата му края като един връх. Да се докаже, че $f(G) = f(G - e) + f(G')$.

в) Да се докаже, че за всяко реално число $\alpha > 1$ съществуват граф G и ребро e на G , за които $f(G) < \alpha f(G - e)$.

Решение. а) За всяка ациклична ориентация на G съществува връх v , който има само входящи ребра (в противен случай ще имаме цикъл). Премахването на този връх и ребрата, насочени към него, дава ациклична ориентация на $G - v$. Следователно всички ациклични ориентации на G са преброени и отдясно. Ясно е, че за някои от тях може да има и повече от един връх с разглежданото свойство (т.е. само с входящи ребра) – оттук и неравенството.

б) Всяка ациклична ориентация на $G - e$ отговаря на поне една (и максимум две) ациклична ориентация на G . Действително, ако допуснем обратното, съществуват насочени пътища от v_i до v_j и от v_j до v_i в $G - e$ (v_i и v_j са краищата на e), което дава цикъл.

Ако съответните ациклични ориентации на G са две, то e може да е ориентирано и в двете посоки и следователно в $G - e$ няма нито насочен път от v_i до v_j , нито от v_j до v_i . Това означава, че ще имаме съответна ациклична ориентация в G' .

в) Нека G е пълният граф с n върха. Тогава $f(G) = n!$. От б) следва, че $f(G - e) = f(G) - f(G') = n! - (n - 1)!$. Тогава

$$\frac{f(G)}{f(G - e)} = \frac{n}{n - 1} = 1 + \frac{1}{n - 1}$$

и е достатъчно да изберем n така, че $1 + \frac{1}{n - 1} < \alpha$.

¹ Ациклична ориентация на обикновен граф се нарича всяко задаване на направления на ребрата му, която го превръща в насочен граф без цикли.

Задача 2. Нека S е изпъкнала фигура в равнината с лице 10. Да разгледаме отсечка с дължина 3 с краища на контура на S и нека A и B са точки върху тази отсечка, които я разделят на три равни части. За произволна точка $X \in S \setminus \{A, B\}$ нека A_1 и B_1 са пресечните точки на лъчите $AX^\rightarrow$ и $BX^\rightarrow$ с контура на S . Нека S' е множеството от тези точки X , за които $3AA_1 > BB_1$. Да се докаже, че лицето на S' е поне 6.

Решение. Идеята е да отделим (т.е. да се избавим от) някакви околности на точките A и B , защото не можем да оценяваме отношението $\frac{AA_1}{BB_1}$ в близост до тези точки.

Нека $AB^\rightarrow$ пресича контура на S в точка Z и ZB_1 да пресича AA_1 в точка A_2 . Тъй като фигурата S е изпъкнала, A_2 е между A и A_1 . Следователно, ако S'' е множеството от точки X , за които $3AA_2 > BB_1$, то $S'' \subset S'$ и е достатъчно да докажем, че лицето на S'' е поне 6.

От теоремата на Менелай за $\triangle AXB$ и правата AB_1 имаме

$$\frac{AA_2}{A_2X} \cdot \frac{XB_1}{B_1B} \cdot \frac{BZ}{ZA} = 1 \iff \frac{AA_2}{A_2X} \cdot \frac{XB_1}{B_1B} = 2 \iff \frac{A_2X}{AA_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{XB_1}{B_1B}.$$

От последното получаваме
$$\frac{AX}{AA_2} = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{BX}{BB_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{BX}{BB_1} + \frac{1}{2}.$$

Нека D_1 е множеството от точки $Y \in S$, за които $\frac{1}{2} \cdot \frac{BY}{BB_1} + \frac{1}{2} \geq \alpha \frac{BY}{BB_1}$, където α е положителна константа. Ако $X \notin D_1$, то

$$\frac{AX}{AA_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BX}{BB_1} + \frac{1}{2} < \alpha \frac{BY}{BB_1} \implies \frac{AA_2}{BB_1} > \frac{1}{\alpha} \frac{AX}{BX}.$$

Нека D_2 е множеството от точки $T \in S$, за които $\frac{AT}{BT} < \frac{\alpha}{3}$. Ясно е, че константата α може да бъде подбрана така, че D_1 е околност на B в S и D_2 е околност на A в S . Ако $X \notin D_1 \cup D_2$, то $\frac{AA_2}{BB_1} > \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}$, с което нашата цел е постигната, защото $S \setminus (D_1 \cup D_2) \subseteq S'' \subseteq S'$. Остава да намерим лицата на D_1 и D_2 .

Ако $\alpha < 3$, то D_2 е вътрешността на аполониевия кръг за A и B и по-долу лесно ще определим лицето му.

Условието $X \in D_1$ е еквивалентно на $\frac{BX}{BB_1} \leq \frac{1}{2\alpha - 1}$. Тогава при $\alpha > 1$ фигурата D_1 е хомотетично копие на S и следователно лицето на D_1 е $10(2\alpha - 1)^2$.

Да изберем $\alpha = \frac{3}{2} \in (1, 3)$. Тогава лицето на D_2 е 2.5. Лесно се вижда¹, че диаметърът на аполониевия кръг за A и B е $4/3$, откъдето лицето на D_1 е $4\pi/9 < 1.5$. Окончателно, лицето на S' е поне $10 - 2.5 - 1.5 = 6$.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществуват естествени числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, за които $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \dots > \varphi(a_n)$.

Решение. Ще конструираме индуктивно редица с исканите свойства. При $n = 1$ няма какво да доказваме.

Нека естествените числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ са такива, че $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \dots > \varphi(a_n)$. Ще означаваме i -тото просто число с p_i . Нека p_N е най-големият измежду всички прости делители на числата $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогава всяко естествено число x , чиито прости делители са по-големи от p_N , е взаимнопросто с всяко от числата $a_1, a_2, \dots, a_n$. Последното означава, че редицата $a_1x < a_2x < \dots < a_nx$ също има исканото свойство (защото $\varphi(a_ix) = \varphi(a_i)\varphi(x)$).

Ще довършим решението, като намерим такова x и изберем естествено число y така, че $y < a_1x$ и $\varphi(y) > \varphi(a_1x)$.

Първо ще докажем съществуването на x , за което $\frac{a_1x}{\varphi(a_1x)} > 4 \iff \frac{x}{\varphi(x)} > 4\frac{\varphi(a_1)}{a_1}$. Нека $x_m = p_{N+1}p_{N+2} \dots p_{N+m}$, където m е естествено число. Тогава

$$\frac{x_m}{\varphi(x_m)} = \prod_{i=N+1}^{N+m} \frac{p_i}{p_i - 1} = \prod_{i=N+1}^{N+m} \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \geq \sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i - 1}.$$

Тъй като $\sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i - 1}$ расте неограничено² с m , можем да намерим такова

m , че да е изпълнено неравенството $\frac{x_m}{\varphi(x_m)} > 4\frac{\varphi(a_1)}{a_1}$. Полагаме $x = x_m$.

Да отбележим, че $\frac{a_1x}{\varphi(a_1x)} > 4$ следва, че $\varphi(a_1x) < 2^{\ell-1} < 2^\ell < a_1x$ за някое естествено ℓ (по-точно, за това ℓ , за което $2^{\ell-2} \leq \varphi(a_1x) < 2^{\ell-1}$). Сега е достатъчно да изберем $y = 2^\ell$ и редицата $y < a_1x < a_2x < \dots < a_nx$ има исканото свойство.

¹Оставяме това за лесно упражнение на читателя.

²Това следва от разходимостта на реда $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}$.

Задача 4. Дадени са n торби с по 100 монети всяка. В една от торбите монетите са 9-грамови, а в останалите $n - 1$ монетите са 10-грамови. Разполагаме с кантар, който показва тегла до 1 килограм. Да се намери най-малкият възможен брой измервания, с които може да бъде определена торбата с леките монети.

Решение. Да означим с $f(k)$ максималния брой торби, за които k измервания са достатъчни. Ясно е, че функцията $f(k)$ е нестрого растяща.

Ще докажем, че $f(1) = 14$. Ако $n = 14$, поставяме на кантара по $i - 1$ монети от i -тата торба за $i = 1, 2, \dots, 14$. Тогава показаното тегло е $910 - k$ и означава, че торбата с леките монети е $(k + 1)$ -вата. Следователно $f(1) \geq 14$. Нека имаме някакъв брой торби и право на едно измерване. Нека a_i е броят на торбите, от които сме взели по i монети. Тогава

$$(1) \quad a_1 + 2a_2 + \dots + ma_m \leq 100,$$

като $a_i \leq 1$ за всяко $i \geq 0$, защото, ако вземем по равен брой монети от две различни торби и една от тези торби е с леките монети, няма да можем да направим разлика между тези торби. Трябва да максимизираме броя на торбите $\sum_{i=0}^m a_i$. това се постига, като първо се максимизира a_0 , после a_1 и т.н. С отчитане на неравенството (1) заключаваме, че максимумът е 14, т.е. $f(1) \leq 14$.

На втората стъпка ще докажем, че $f(2) = 60$. Неравенството (1) отново е изпълнено и от $f(1) = 14$ следва, че $a_i \leq 14$ за всяко $i \geq 0$. Сега максимизирането на $\sum_{i=0}^m a_i$ става при $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 14$ и $a_4 = 4$, откъдето $f(2) = 4 \cdot 14 + 4 = 60$.

По подобен начин се доказва, че $f(3) = 140$. Накрая, ако $k > 3$, то поради $a_i \leq 100$ трябва да имаме $a_0 \leq f(k - 1)$ и получаваме максимума при $a_0 = f(k - 1)$ и $a_1 = 100$. Следователно $f(k) = f(k - 1) + 100$, което, заедно с намерените $f(1)$, $f(2)$ и $f(3)$, определя функцията $f(k)$.

Задача 5. Полином на три променливи P се нарича цикличен, ако $P(x, y, z) = P(y, z, x)$. Да се докаже, че съществуват циклични полиноми на три променливи P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , такива, че за всеки цикличен полином на три променливи P съществува полином Q на четири променливи, за който

$$P(x, y, z) = Q(P_1(x, y, z), P_2(x, y, z), P_3(x, y, z), P_4(x, y, z)).$$

Решение. Нека $S(x, y, z) = P(x, y, z) + P(y, x, z)$ и $T(x, y, z) = P(x, y, z) - P(y, x, z)$. Лесно се проверява, че полиномите S и T са съответно симетричен и антисиметричен. Тъй като $T(x, x, z) = 0$, полиномът T се дели на $x - y$. Аналогично се вижда, че T се дели на $y - z$ и на $z - x$, т.е.

$$T(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)R(x, y, z),$$

като от това равенство и от антисиметричността на T следва, че R е симетричен полином.

Получихме

$$P = \frac{S + T}{2} = \frac{Q(x, y, z)}{2} + \frac{(x - y)(y - z)(z - x)R(x, y, z)}{2}.$$

Тъй като всеки симетричен полином на три променливи се представя като полином на елементарните симетрични полиноми (които са и циклични) $P_1 = x + y + z$, $P_2 = xy + yz + zx$ и $P_3 = xyz$, остава да вземем $P_4 = (x - y)(y - z)(z - x)$, който също е цикличен.

Задача 6. Да се докаже, че:

а) съществува реално положително число α , такова, че за всяко естествено число n съществува изпъкнал n -ъгълник с върхове в точките от целочислената решетка с лице, по-малко от αn^3 ;

б) съществува реално положително число β , такова, че за всяко естествено число n всеки изпъкнал n -ъгълник с върхове в точките от целочислената решетка има лице поне βn^2 ;

б) съществуват реални положителни числа γ и c , такива, че за всяко естествено число n всеки изпъкнал n -ъгълник с върхове в точките от целочислената решетка има лице поне γn^{2+c} .

Решение. Ще казваме, че един целочислен изпъкнал многоъгълник $P = A_1 A_2 \dots A_n$ е *добър*, ако всички насочени отсечки $u_i = \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$, са в първи квадрант. Да означим с $f(n)$ и $g(n)$ съответно най-малкото възможно лице на целочислен изпъкнал многоъгълник и на добър целочислен изпъкнал многоъгълник с n върха. Да отбележим, че $g(n/4) \leq f(n) \leq g(n)$. Дясното неравенство е очевидно, а лявото следва от факта, че всеки целочислен изпъкнал многоъгълник с n върха има поне $n/4$ върха в един и същи квадрант.

Ще използваме следната формула за лицето на добър многоъгълник P

– имаме

$$S(P) = \frac{1}{2} \sum_{j < i} |u_i \times u_j|,$$

където $\vec{a} \times \vec{b}$ е векторно произведение. Действително, ако A_1 е центърът на координатната система, то за лицето на $\triangle A_1 A_i A_{i+1}$ имаме

$$S_{A_1 A_i A_{i+1}} = \frac{1}{2} |u_i \times \overrightarrow{A_1 A_i}| = \frac{1}{2} |u_i \times \sum_{j=1}^{i-1} u_j| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} |u_i \times u_j|$$

(всички векторни произведения са с еднакъв знак). Остава да сумираме лицата на всички такива триъгълници.

а) Нека $u_i = (1, i)$. Тъй като наклоните на $u_1, u_2, \dots, u_n$ са растящи, те определят добър n -ъгълник. Тогава горната формула дава лице

$$S = \frac{1}{2} \sum_{j < i} |u_i \times u_j| = \frac{1}{2} \sum_{j < i} (i-j) = \frac{1}{2} \sum_i \frac{i(i-1)}{2} \leq \frac{1}{4} \sum_i i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}.$$

б) Тъй като $|u_i \times u_j|$ е естествено число³, от формулата следва, че лицето на всеки добър многоъгълник е поне $\binom{n-1}{2}$, т.е. $g(n) \geq \binom{n-1}{2}$.

в) Ще използваме две лема.

Лема 1. За всеки изпъкнал n -ъгълник M с периметър P съществуват три върха на M , които определят триъгълник с лице, не по-голямо от $\pi P^2/n^3$.

Доказателство. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са дължините на страните на M (в този ред) и съответните външни ъгли към тях да са $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Тогава $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$ и $2S_i = a_i a_{i+1} \sin \alpha_i$, където S_i е лицето на триъгълника, определен от върховете, които са краища на a_i и a_{i+1} . Ще използваме неравенството $\sin x < x$ и неравенството между средното аритметично и средното геометрично. Имаме последователно

$$\prod_{i=1}^n (2S_i) = \prod_{i=1}^n a_i a_{i+1} \sin \alpha_i \leq \prod_{i=1}^n a_i^2 \prod_{i=1}^n \alpha_i \leq \left(\frac{P^2}{n^2} \cdot \frac{2\pi}{n} \right)^n,$$

³Следва например от формулата на Пик.

откъдето следва, че поне един от множителите в първото произведение не надминава $2\pi P^2/n^3$.

Лема 2. За всеки изпъкнал n -ъгълник M с лице S съществува афинна трансформация в равнината, която изпраща M в изпъкнал n -ъгълник с периметър, не по-голям от $4\sqrt{2S}$.

Доказателство. Не е трудно да се съобрази, че съществуват четири прави⁴, успоредни и перпендикулярни на фиксиран диаметър на M , които определят правоъгълник, който съдържа M . Лицето на този правоъгълник е най-много $2S$. Тогава афинна трансформация, която изпраща правоъгълника в квадрат със същото лице, върши работа.

От лемите следва, че за нашия многоъгълник можем да намерим три (последователни) върха, които определят триъгълник с лице най-много $\frac{\pi P^2}{n^3} \leq \frac{32\pi S}{n^3}$. От друга страна, лицето на този триъгълник е поне $\frac{1}{2}$, откъдето получаваме $S \geq \frac{n^3}{64\pi}$.

Задача 7. В една страна има магистрали, които представляват затворени криви, които могат да се пресичат. Някои различни магистрали също се пресичат. Правителството иска да построи мостове на местата на пресичане по такъв начин, че при пътуване по коя да е магистрала минаванията по мостове и под тях да се редуват. Да се докаже, че това винаги е възможно.

Решение. Нека G е графът, определен от магистралите и техните пресичания – точките на пресичане са върховете, а отсечките между тях са ребрата. По този начин равнината се разделя на части, като две части са съседни, ако имат общо ребро. Ще означаваме магистралите с $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Лема 1. Частите на равнината, определени от G могат да бъдат оцветени в два цвята така, че да няма съседни части в еднакъв цвят⁵.

Доказателство. Едно оцветяване на областите се нарича добро, ако има исканото свойство. Ще проведем индукция по броя на ребрата. Основа за индукцията е празният граф и за него имаме единствена област, която оцветяваме в един от двата цвята.

Нека C е най-късият цикъл в G , който е индуциран от магистрала. Можем да считаме, че $C \subseteq C_1$ и очевидно C е проста затворена крива

⁴Обикновено тези прави се наричат носители на M .

⁵Заинтересованият читател може да погледне и Задача 4 от Балканската олимпиада по математика през 2004, която използваше този факт.

(ако C се самопресича, ще имаме по-къс цикъл). Следователно $C_1 \setminus C$ е затворена (възможно празно множество) крива. Графът H , състоящ се от $C_1 \setminus C, C_2, \dots, C_n$ има по-малко ребра от G и за него има добро оцветяване съгласно индукционното предположение. Сега добавяме C към H и променяме цвета на всички части от вътрешността на C . Лесно се вижда, че полученото оцветяване е добро, с което лемата е доказана.

Нека имаме добро оцветяване за G и да разгледаме магистралите като ориентирани криви (по произволен начин). Тогава ребрата са два вида – 1 и 2, в зависимост от цвета на дясностоящата им област. Сега по всяка магистрала да построим мостове в краищата на ребрата от вид 1. От факта, че оцветяването е добро, следва, че на всяко пресичане точно две от ребрата са насочени към пресичането и точно едно от тези две ребра е от вид 1. Така построената система от мостове има исканото свойство.

Задача 8. а) Съществува ли безкрайно множество от естествени числа S , $S \neq \mathbb{N}$, такова, че за всяко естествено число $n \notin S$ точно n числа от S са взаимнопрости с n ?

б) Съществува ли безкрайно множество от естествени числа S , такова, че за всяко естествено число $n \in S$ точно n числа от S са взаимнопрости с n ?

Решение. а) Ще докажем, че множество с исканите свойства не съществува. Да допуснем обратното и нека $n \notin S$ е естествено число. Тъй като точно n числа от S са взаимно прости с n , то извън S има безбройно много прости числа. Нека p и q са две от тези прости числа. Точно p от числата в S са не се делят на p . Нещо повече, имаме $p^\alpha \in S$ за всяко естествено $\alpha > 1$, защото в противен случай ще получим $p^\alpha > p$ числа от S , които са взаимнопрости с p^α , оттам и с p . Но така получихме безбройно много числа от S , които са взаимнопрости с $q \notin S$, противоречие.

б) Ще конструираме множество с исканите свойства. Нека отначало $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots = 1$. На всяка стъпка ще умножаваме съответни a_i с подходящи прости числа.

На n -тата стъпка правим следното.

(1) Умножаваме a_n с нови (т.е. неизползвани досега) прости числа p_{2n-1} и p_{2n} (p_i е i -тото просто число). Да отбележим, че сега (а и по-нататък) $a_n > a_{n-1}$;

(2) Някои от числата $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ са взаимнопрости с a_n . Нека техният брой е b_n , като очевидно $b_n < n < a_n$. Полагаме $t_n = a_n - b_n \in \mathbb{N}$.

(3) В момента безбройно много от числата a_i , $i > n$, са взаимнопрости с a_n . Оставяме без промяна първите t_n от тях и нека най-голямото от тези непроменени t_n числа е a_m .

(4) В редицата $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots$ умножаваме първите 2^{n-1} числа с p_{2n-1} , следващите 2^{n-1} числа с p_{2n} и т.н.

От този алгоритъм следва, че в края на n -тата стъпка имаме следното.

(1) Точно a_n числа са взаимнопрости с a_n .

(2) За всеки набор от прости числа $(q_1, q_2, \dots, q_n)$, където $q_i \in \{p_{2i-1}, p_{2i}\}$, съществуват безбройно много индекси k , за които a_k има точно тези прости числа като прости делители. Следователно за всяко a_i съществуват безбройно много индекси k , за които a_k има прости делители, различни от тези на a_i и значи $(a_k, a_i) = 1$.

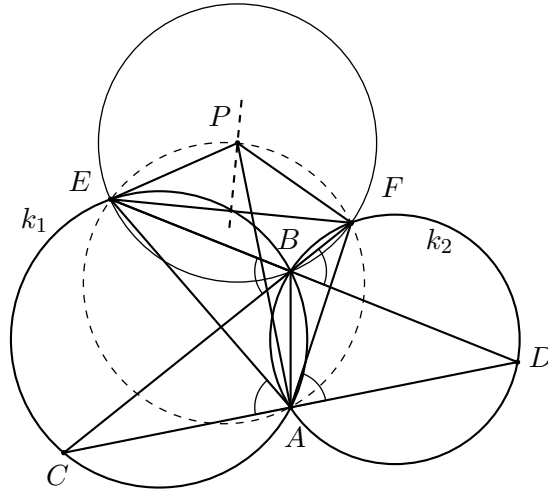
Китай

Задача 1. Окръжностите k_1 и k_2 с различни радиуси се пресичат в точки A и B . Точките C и D съответно от k_1 и k_2 са такива, че A е средата на отсечката CD . Правата DB пресича k_1 за втори път в точка E , а правата CB пресича k_2 за втори път в точка F . Нека ℓ_1 и ℓ_2 са симетралите съответно на отсечките CD и EF .

а) Да се докаже, че ℓ_1 и ℓ_2 имат единствена обща точка P .

б) Да се докаже, че дължините на отсечките CA , AP и PE са дължини на страни на правоъгълен триъгълник.

Решение. а) От условието следва, че $CB \cdot CF = CA \cdot CD = DA \cdot DC = DB \cdot DE$. Да допуснем, че $\ell_1 \parallel \ell_2$. Тогава $CD \parallel EF$ и значи $\frac{CF}{CB} = \frac{DE}{DB}$. Това и горните равенства дават $CB = DB$, откъдето $BA \perp CD$. Получихме, че равните отсечки CB и CD са диаметри съответно на k_1 и k_2 , което противоречи на условието, че k_1 и k_2 имат различни радиуси.



б) Имаме $\angle CAE = \angle CBE = \angle DBF = \angle DAF$. Тъй като $AP \perp CD$, AP е ъглополовяща на $\angle EAF$. Понеже точката P лежи на симетралата

на EF , тя лежи на окръжността, описана около $\triangle AEF$. Имаме $\sphericalangle EPF = 180^\circ - \sphericalangle EAF = \sphericalangle CAE + \sphericalangle DAF = 2\sphericalangle CAE = 2\sphericalangle CBE$. Това означава, че B лежи на окръжността с център P и радиус $PE = R$. От степените на точки относно тази окръжност получаваме $2CA^2 = CA \cdot CD = CB \cdot CF = CP^2 - R^2$. Следователно

$$AP^2 = CP^2 - CA^2 = (2CA^2 + R^2) - CA^2 = CA^2 + PE^2,$$

което е еквивалентно на исканото.

Задача 2. Да се намерят всички множества S от цели числа, за които от $m, n \in S$ следва $3m - 2n \in S$ (m и n не са непременно различни).

Решение. Ясно е, че всяко едноелементно S е решение на задачата. Оттук нататък ще считаме, че $|S| \geq 2$.

Нека $d = \min\{|m - n| : m, n \in S, m \neq n\}$. Лесно се вижда, че съществува цяло a , такова, че $a + d$ и $a + 2d$ са елементи на S (например $a = n - d$ при $d = m - n$). Последователно получаваме

$$a + 4d = 3(a + 2d) - 2(a + d) \in S, \quad a - d = 3(a + d) - 2(a + 2d) \in S,$$

$$a + 5d = 3(a + 2d) - 2(a - d) \in S, \quad a - 2d = 3(a + d) - 2(a + 2d) \in S,$$

и аналогично нататък, до $S_0 = \{a + kd : k \text{ не се дели на } 3\} \subset S$. Нещо повече, множеството S_0 е решение на задачата за произволно цяло a .

Да допуснем, че $S \setminus S_0 \neq \emptyset$ и нека $b \in S \setminus S_0$. Тогава съществува $\ell \in \mathbb{Z}$, за което $a + \ell d \leq b < a + (\ell + 1)d$. Ясно е, че поне едно от числата $a + \ell d$ и $a + (\ell + 1)d$ се съдържа в S_0 . Оттук и от дефиницията на d лесно следва, че $b = a + \ell d$, а от последното и от дефиницията на b следва, че $a + \ell d \notin S_0$, т.е. ℓ се дели на 3.

Получихме, че съществува $\ell \in \mathbb{Z}$, за което петте числа $a + i\ell$, $i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ принадлежат на S . Оттук нататък лесно се получава, че $\{a + kd : k \in \mathbb{Z}\} \subset S$. От друга страна, от дефиницията на d веднага следва, че нито един интервал $(a + kd, a + (k + 1)d)$ не може да съдържа числа от S , т.е. $S = \{a + kd : k \in \mathbb{Z}\}$.

Окончателно, решенията на задачата са три вида: $S = \{a\}$, $S = \{a + kd : k \in \mathbb{Z}, k \text{ не се дели на } 3\}$ и $S = \{a + kd : k \in \mathbb{Z}\}$, като и в трите случая a е произволно цяло число, а d е естествено число.

Задача 3. Да се намерят всички реални числа t със следното свойство: Съществува безкрайно множество X от реални числа, такова, че неравенството

$$\max\{|x - (a - d)|, |y - a|, |z - (a + d)|\} > td$$

е в сила за всички (не непременно различни) $x, y, z \in X$, всички реални a и всички реални положителни d .

Решение. Отговор: всички $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Нека $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и да изберем фиксирано $\lambda \in \left(0, \frac{1-2t}{2(1+t)}\right)$. Ще докажем, че геометричната прогресия $X = \{x_i = \lambda^i : i \in \mathbb{N}\}$ има исканото свойство.

Да допуснем противното, т.е. съществуват реални a и $d > 0$ и три числа $x_i, x_j, x_k \in X$ (не непременно различни), за които

$$\max\{|x_i - (a - d)|, |x_j - a|, |x_k - (a + d)|\} \leq td.$$

Това условие е еквивалентно на едновременното изпълнение на неравенствата

$$\begin{aligned} -td \leq x_i - (a - d) \leq td &\iff x_i + (1 - t)d \leq a \leq x_i + (t + 1)d, \\ -td \leq x_j - a \leq td &\iff x_j - td \leq a \leq x_j + td, \\ -td \leq x_k - (a + d) \leq td &\iff x_k - (t + 1)d \leq a \leq x_k + (t - 1)d. \end{aligned}$$

От неравенствата за a получаваме

$$\begin{aligned} x_k - (t + 1)d &\leq a \leq x_i + (t + 1)d, \\ x_i + (1 - t)d &\leq a \leq x_j + td, \\ x_j - td &\leq a \leq x_k + (t - 1)d, \end{aligned}$$

откъдето

$$d \geq \frac{x_k - x_i}{2(t + 1)}, \quad d \leq \frac{x_j - x_i}{1 - 2t}, \quad d \leq \frac{x_k - x_j}{1 - 2t}$$

(за последните две неравенства използвахме, че $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$).

Тъй като $d > 0$, от горните неравенства получаваме наредбата $x_i < x_j < x_k$, откъдето $i > j > k$ и значи $\lambda^j + \lambda^{i+1} < \lambda^{k+1} + \lambda^i \iff \lambda^j - \lambda^i < \lambda(\lambda^k - \lambda^i)$. Тогава

$$\frac{x_j - x_i}{x_k - x_i} = \frac{\lambda^j - \lambda^i}{\lambda^k - \lambda^i} < \lambda.$$

От друга страна, от неравенствата $\frac{x_k - x_i}{2(t+1)} \leq d \leq \frac{x_j - x_i}{1-2t}$ получаваме

$$\frac{x_j - x_i}{x_k - x_i} \geq \frac{1-2t}{2(t+1)} > \lambda,$$

което противоречи на горното. Следователно множеството $X = \{x_i = \lambda^i : i \in \mathbb{N}\}$ има исканото свойство.

Нека сега $t \geq \frac{1}{2}$. Ще докажем, че за всяко безкрайно множество X и всеки три числа $x < y < z$ от X , съществуват реално a и реално положително d , такива, че

$$\max\{|x - (a - d)|, |y - a|, |z - (a + d)|\} \leq td.$$

Нека $d = \frac{z - x}{2}$ и да отбележим, че този избор ни дава равенството $x + (1 - t)d = z - (1 + t)d$. Нека $a = \max\{x + (1 - t)d, y - td\}$. Тъй като $t \geq \frac{1}{2}$, имаме

$$y - x < 2d \leq (1 + 2t)d, \quad x - y < 0 < (2t - 1)d,$$

откъдето

$$y - td \leq x + (1 + t)d, \quad x + (1 - t)d \leq y + td.$$

Оттук и от избора на a следват неравенствата

$$\begin{aligned} x + (1 - t)d &\leq a \leq x + (t + 1)d, \\ y - td &\leq a \leq y + td, \\ z - (1 + t)d &\leq a \leq z - (1 - t)d, \end{aligned}$$

които дават исканото.

Задача 4. Нека $n \geq 2$ е естествено число и крайните непразни множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ са такива, че $|A_i \Delta A_j| = |i - j|$ за всички $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Да се намери максималната възможна стойност на $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$. (Симетричната разлика $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ се състои, както се вижда от формулата, от всички елементи на обединението на A и B , които не принадлежат на сечението $A \cap B$.)

Решение. Да означим търсения минимум с S_n . Ще докажем, че $S_{2k} = k^2 + 2$ и $S_{2k+1} = k^2 + k + 2$.

(Оценка) Да отбележим първо следните два прости факта.

Факт 1: за всеки две крайни множества A и B имаме $|A| + |B| \geq |A \Delta B|$.

Факт 2: за всеки две непразни крайни множества A и B от $|A \Delta B| = 1$ следва $|A| + |B| \geq 3$.

При $n = 2k$ от Факт 1 следва, че $|A_i| + |A_{2k+1-i}| \geq |A_i \Delta A_{2k+1-i}| = 2k + 1 - 2i$ за $i = 1, 2, \dots, k-1$. Освен това от $|A_k \Delta A_{k+1}| = 1$ и Факт 2 имаме $|A_k| + |A_{k+1}| \geq 3$. Тогава

$$S_{2k} \geq |A_k| + |A_{k+1}| + \sum_{i=1}^{k-1} (|A_i| + |A_{2k+1-i}|) \geq 3 + \sum_{i=1}^{k-1} (2k + 1 - 2i) = k^2 + 2.$$

Аналогично, при $n = 2k+1$ имаме $|A_i| + |A_{2k+2-i}| \geq |A_i \Delta A_{2k+2-i}| = 2k+2-2i$ за $i = 1, 2, \dots, k-1$ и $|A_k| + |A_{k+1}| + |A_{k+2}| \geq 3 + 1 = 4$. Следователно

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &\geq |A_k| + |A_{k+1}| + |A_{k+2}| + \sum_{i=1}^{k-1} (|A_i| + |A_{2k+2-i}|) \\ &\geq 4 + \sum_{i=1}^{k-1} (2k + 2 - 2i) = k^2 + k + 2. \end{aligned}$$

(Конструкция) Оставяме на читателя да се убеди, че множества

$$A_i = \{i, i+1, \dots, k\}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad A_{k+1} = \{k, k+1\},$$

$$A_{k+j} = \{k+1, k+2, \dots, k+j-1\}, \quad j = 2, 3, \dots, k+1,$$

са такива, че $|A_i \Delta A_j| = |i - j|$ за всички $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, като при това $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_{2k}| = k^2 + 2$ и $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_{2k+1}| = k^2 + k + 2$.

Отговорът може да се запише и във вида $S_n = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 2$.

Задача 5. За всяко естествено n и за всяко $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ означаваме $\binom{n}{i} \equiv c_{n,i} \pmod{2}$, $c_{n,i} \in \{0, 1\}$, и дефинираме

$$f(n, q) = \sum_{i=0}^n c_{n,i} q^i.$$

Нека m , n и q са естествени числа, като $q+1$ не е степен на 2. Да се докаже, че ако $f(m, q) | f(n, q)$, то $f(m, r) | f(n, r)$ за всяко естествено число r .

Решение. За всяко естествено число n нека $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, е двоичното представяне на n и нека $T(n) = \{2^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, 2^{a_k}\}$.

Съгласно теоремата на Люка, биномният коефициент $\binom{n}{i}$ е нечетно число тогава и само тогава, когато $T(i) \subseteq T(n)$. Следователно

$$\sum_{A \subseteq T(n)} q^{\sigma(A)} = \prod_{a \in T(n)} (1 + q^a),$$

където със $\sigma(A)$ е означена сумата от елементите на множеството A .

За зададените по условие m , n и q ще докажем, че от

$$f(m, q) | f(n, q) \iff \prod_{a \in T(m)} (1 + q^a) | \prod_{a \in T(n)} (1 + q^a)$$

следва $T(m) \subseteq T(n)$, откъдето пък следва $f(m, r) | f(n, r)$ за всяко r .

Да отбележим, че $(q^{2^j} + 1, q^{2^i} + 1) = 1$ или 2 при $i < j$ (това следва лесно от разлагането $q^{2^j} - 1 = (q^{2^{j-1}} + 1) \dots (q^{2^i} + 1)(q^{2^i} - 1)$). Тогава, ако с $s(k)$ означим най-големия нечетен делител на k , числата $s(q^{2^j} + 1)$ и $s(q^{2^i} + 1)$ са взаимнопрости. Тъй като $q^{2^i} + 1$ дава остатък 1 или 2 при деление на 4 при $i \geq 1$, имаме $s(q^{2^i} + 1) > 1$, а $s(q + 1) > 1$ следва от условието, че $q + 1$ не е степен на 2 . Тогава за всяко $b \in T(m)$ имаме

$$s(q^b + 1) | \prod_{a \in T(m)} s(1 + q^a) | \prod_{a \in T(n)} s(1 + q^a)$$

и значи $b \in T(n)$. Следователно $T(m) \subseteq T(n)$, с което решението е завършено.

Задача 6. Дадени са естествени числа m и n . Да се намери най-малкото естествено число N , $N \geq m$, със следното свойство: ако N -елементно множество от цели числа съдържа пълна система остатъци по модул m , то това множество притежава непразно подмножество със сума на елементите си, кратна на n .

Решение. Отговор: $N = \max \left\{ m, m + n - \frac{m[(m, n) + 1]}{2} \right\}$.

Първо ще докажем, че $N \geq \max \left\{ m, m + n - \frac{m[(m, n) + 1]}{2} \right\}$. Неравенството $N \geq m$ е очевидно. Нека $(m, n) = d$, $m = m_1 d$, $n = n_1 d$ и

$n > \frac{m(d+1)}{2}$. Съществува пълна система от остатъци $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ по модул m , такава, че остатъците на числата $x_1, x_2, \dots, x_m$ при деление на n образуват точно m_1 групи $\{1, 2, \dots, d\}$. Действително, числата $i + jdn_1$, $i = 1, 2, \dots, d$, $j = 1, 2, \dots, m_1$, имат исканото свойство.

Да добавим към $x_1, x_2, \dots, x_m$ още $k = n - \frac{m(d+1)}{2}$ числа $y_1, y_2, \dots, y_k$, всяко от които дава остатък 1 при деление на n . Тогава множеството $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_k\}$ има исканото свойство. Действително, $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ е пълна система остатъци по модул m , а сумата от всички числа по модул n е между 0 и $m_1(1 + 2 + \dots + d) + k = n - 1$.

Остава да докажем, че числото $N = \max \left\{ m, m + n - \frac{m[(m, n) + 1]}{2} \right\}$ има исканите свойства. Ще използваме на няколко пъти следния факт: измежду произволни k числа могат да бъдат избрани няколко, чиято сума се дели на k . Оттук веднага следва и такъв факт: измежду произволни k числа, които се делят на a , могат да бъдат избрани няколко, чиято сума се дели на ka . Ще казваме, че едно крайно множество е k -множество, ако сумата от елементите та това множество е кратна на k .

Ще разгледаме поотделно двата случая за максимума.

Случай 1. Нека $n \leq \frac{m(d+1)}{2}$ и съответно $N = m$.

Нека $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ е произволно множество от $N = m$ цели числа с исканите свойства. Тъй като $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ е пълна система от остатъци по модул m , можем да я разделим на m_1 групи, всяка от които е пълна система от остатъци по модул d . За всяка от последните системи $Y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ ще считаме, че $y_i \equiv i \pmod{d}$.

Ако d е нечетно, можем да разделим Y на $\frac{d+1}{2}$ на брой d -множества (например $\{y_i, y_{d-i}\}$ за $i = 1, 2, \dots, \frac{d-1}{2}$ и $\{y_d\}$). Получихме $\frac{m_1(d+1)}{2} \geq n_1$ на брой d -множества, и следователно можем за изберем няколко от тях с обща сума от елементите им, кратна на $n_1 d = n$.

Ако d е четно, разделяме Y на $\frac{d}{2}$ на брой d -множества и оставяме $y_{\frac{d}{2}}$ настрана, комбинирайки го с аналога му от друга система. Така получаваме

Ето и кратко доказателство: нека числата са $a_1, a_2, \dots, a_k$ и $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$, $i = 1, 2, \dots, k$; ако никоя от сумите S_i не се дели на k , то две от тях дават равни остатъци при деление на k и тогава тяхната разлика има исканото свойство.

$\frac{m_1 d}{2} + \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil \geq n_1$ на брой d -множества и отново можем да изберем няколко от тях с обща сума от елементите им, кратна на $n_1 d = n$.

Случай 2. Нека $n > \frac{m(d+1)}{2}$ и съответно $N = m + n - \frac{m(d+1)}{2}$.

Нека X е множество с N елемента и $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset X$ е пълна система остатъци по модул m .

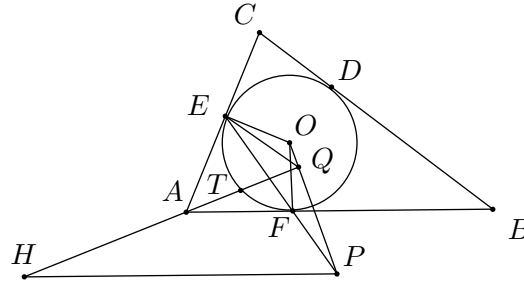
Ако d е нечетно, разделяме A както в Случай 1 на $\frac{m_1(d+1)}{2}$ на брой d -множества, а останалите $n - \frac{m(d+1)}{2}$ разбиваме произволно в $n_1 - \frac{m_1(d+1)}{2}$ множества от по d числа. Във всяко от последните множества можем да намерим d -множество, т.е. имаме още $n_1 - \frac{m_1(d+1)}{2}$ на брой d -множества. В крайна сметка получихме n_1 на брой d -множества и следователно можем да изберем няколко от тях с обща сума от елементите им, кратна на $n_1 d = n$.

Ако d е четно, разделяме A както в Случай 1 на $\frac{m_1 d}{2} + \left\lceil \frac{m_1}{2} \right\rceil$ на брой d -множества. Да отбележим, че ако m_1 е четно, имаме $\frac{m_1(d+1)}{2}$ на брой d -множества, а ако m_1 е нечетно, то ни е останало число $y_{\frac{d}{2}} \equiv \frac{d}{2} \pmod{d}$. Сега останалите $n - \frac{m(d+1)}{2}$ разбиваме произволно в $2n_1 - m_1(d+1)$ множества от по $\frac{d}{2}$ числа. Във всяко от последните множества можем да намерим $\frac{d}{2}$ -подмножество, а след това от всеки две $\frac{d}{2}$ -множества имаме (поне) едно d -множество, получавайки в крайна сметка $n_1 - \left\lceil \frac{m_1(d+1)}{2} \right\rceil$ на брой d -множества. В случая на четно m_1 директно имаме n_1 на брой d -множества. При нечетно m_1 комбинираме останалите ни $y_{\frac{d}{2}}$ и едно $\frac{d}{2}$ -множество, за да получим още едно, и общо, отново n_1 на брой d -множества. Накрая можем да изберем няколко от нашите n_1 на брой d -множества с обща сума от елементите им, кратна на $n_1 d = n$.

КНДР

Задача 1. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност ω се допира до страните BC , CA и AB съответно в точките D , E и F . Права през върха A пресича дъгата $\widehat{EF}$ (която не съдържа D) в точка T . Правата през T , която се допира до ω , пресича правата EF в точка P , а правата през P , успоредна на AB , пресича правата AT в точка H . Да се докаже, че $\angle HEF = 90^\circ$.

Решение. Да означим с O центъра на ω . Точка A е полюс на правата EF относно ω . Тъй като $P \in EF$, то полярата на P ще минава през A . Това означава, че AT е полярата на точка P и $OP \perp AT$. Ако $Q = OP \cap AT$, то точките A , F , Q , O и E лежат на окръжност с диаметър AO . Тогава $\angle PHA = \angle FAQ = \angle FEQ = \angle PEQ$, откъдето следва, че $HPQE$ е вписан четириъгълник. Следователно $\angle HEP = \angle HQP = 90^\circ$.



Задача 2. Във всеки връх на правилен n -ъгълник $P_1P_2 \dots P_n$ е записано числото 1. Имаме право да извършваме следната операция:

Избираме три произволни върха $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ ($P_{n+1} = P_1$, $P_{n+2} = P_2$) и заместваме числата a_i , a_{i+1} и a_{i+2} , записани в тях съответно с числата $a_i - x$, $a_{i+1} - |x - y|$ и $a_{i+2} - y$, където $x, y \in \mathbb{R}^+$ удовлетворяват неравенствата $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$, $a_i - x \geq 0$ и $a_{i+2} - y \geq 0$. За всяка операция числата x и y може да са различни.

Да се определи дали е възможно след няколкократно прилагане на горната операция за някое a_i , $1 \leq i \leq n$ да е изпълнено неравенството:

а) $a_i > 1,5$,

б) $a_i > \frac{5}{3}$.

Решение. а) Да! Например

$$(1, 1, 1) \rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \left(0, \frac{5}{3}, 0\right).$$

б) Не! Да допуснем, че $a_i > \frac{5}{3}$ след краен брой стъпки. Тъй като $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$ имаме $|x-y| \leq \min\{x, y, \frac{x+y}{3}\}$. Под i -операция ще разбираме операция върху тройката (a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) . Числото a_{i-1} ще се увеличава само при прилагане на $(i-1)$ -операция и да означим общото нарастване на a_{i-1} с α . Тогава намаляването на a_i е не по-малко от α . Аналогично, нека β да е общото нарастване на a_{i+1} чрез $(i+1)$ -операции и γ да бъде общото нарастване на a_i чрез i -операции.

Тогава сборът от намаляването на a_{i-1} a_{i+1} чрез i -операции е не по-малък от 3γ . Следователно $(1+\alpha) + (1+\beta) \geq 3\gamma$, откъдето $2 \geq 3(\gamma - \alpha - \beta)$, $\gamma - \alpha - \beta \leq \frac{2}{3}$. Оттук получаваме

$$a_i \leq 1 + \gamma - \alpha - \beta \leq 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3},$$

противоречие.

Задача 3. Съществува ли функция $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, която не е полином и за произволни $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, числото $a - b$ дели $f(a) - f(b)$?

Решение. Ще построим индуктивно функция, която не е полином и удовлетворява условието на задачата.

Нека $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Да допуснем, че стойностите на функцията $f(-t)$, $f(-t+1)$, $f(-t), \dots, f(s)$ са определени така, че $a - b$ дели $f(a) - f(b)$ за произволни $-t \leq a < b \leq s$. За произволно просто число $p < s + t + 1$ съществува $\alpha(p) \in \mathbb{N}$, за което $0 < p^{\alpha(p)} \leq s + t + 1 < p^{\alpha(p)+1}$.

Нека x_0 е решение на системата $x \equiv f(s+1 - p^{\alpha(p)}) \pmod{p^{\alpha(p)}}$, където p пробягва всички прости числа по-малки или равни на $s + t + 1$. Нека $f(s+1) = x_0 + ((s+t+1)!)^{s+1}$. За всяко b , $-t \leq b < s$, ако $s+1-b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, то

$$f(b) = f(s+1 - p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) \equiv f(s+1 - p_i^{\alpha(p_i)}) \equiv x_0 \equiv f(s+1) \pmod{p_i^{\alpha_i}}.$$

По аналогичен начин се дефинира и $f(-t-1)$. Тъй като $f(s) > s^s$ за всяко цяло число $s > 2$, то така дефинираната функция не може да се представи като полином.

Задача 4. Да се намерят всички функции, за които равенството

$$f(x^2 + 2yf(x)) + f(y^2) = f^2(x + y)$$

е изпълнено за произволни $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Полагаме $x = y = 0$ и получаваме $2f(0) = f^2(0)$, т.е. $f(0) = 0$ или $f(0) = 2$.

1. Нека $f(0) = 2$. При $x = 0$ получаваме $f(4y) = f^2(y) - f(y^2)$, а при $y = 0$ намираме $f^2(x) - f(x^2) = 2$. От последните две равенства следва, че $f(4y) = 2$, т.е. $f(x) \equiv 2$.

2. Нека $f(0) = 0$. При $y = 0$ получаваме $f(x^2) = f^2(x)$, откъдето $|f(x)| = |f(-x)|$ и $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$.

Да допуснем, че съществува $a > 0$, за което $f(a) = 0$. Полагаме $x = y = a$ и намираме

$$f^2(2a) = f(a^2 + 2af(a)) + f(a^2) = 2f(a^2) = 2f^2(a) = 0.$$

Следователно $f(2a) = 0$. За всяко b , $0 < b < a$ полагаме $x = a - b$, $y = b$ и получаваме $f(x^2 + 2yf(y)) + f(b^2) = 0$. Понеже $x^2 + 2yf(y) \geq 0$, то $f(x^2 + 2yf(y)) \geq 0$, като $f(b^2) \geq 0$. Това означава, че $f(b^2) = 0$, т.е. $f(b) = 0$. Следователно $f(x) = 0$ при $x \geq 0$ и значи $f(x) \equiv 0$.

Нека $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Полагаме $y = 2f(x) - 2x$ и получаваме

$$x^2 + 2yf(x) = x^2 + y(y + 2x) = (x + y)^2.$$

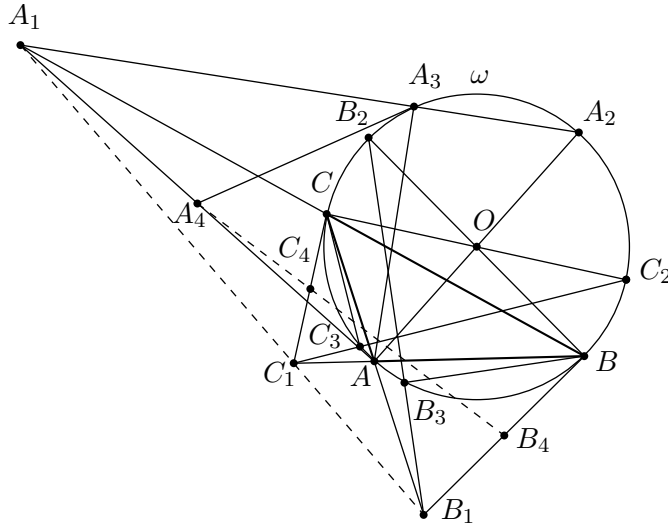
Следователно $f((x + y)^2) + f(y^2) = f^2(x + y)$, $f(y^2) = 0$. Това означава, че $y = 2f(x) - 2x = 0$, откъдето $f(x) \equiv x$.

Директно се проверява, че всяка от намерените функции $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 2$ и $f(x) = x$ удовлетворява уравнението от условието.

Задача 5. Нека ω и O са съответно описаната окръжност и нейния център за неравнобедрен $\triangle ABC$. Правата през A , която е допирателна към ω пресича правата BC в точка A_1 . Точка A_2 е симетрична на точката A_1 спрямо точката O . Правата A_1A_2 пресича ω в точка A_3 ($A_3 \neq A_2$).

Аналогично се дефинират точките B_3 и C_3 . Да се докаже, че правите AA_3 , BB_3 и CC_3 се пресичат в една точка.

Решение. Нека A_4 е средата на AA_1 . Тъй като $\angle AA_3A_2 = 90^\circ$, то $A_4A_3 = A_4A$ и следователно A_4 е полюса на правата AA_3 . Аналогично дефинираме точките B_4 и C_4 , които са полюси съответно на правите BB_3 и CC_3 .



От друга страна, точките A_1 , B_1 и C_1 лежат на една права (следва от теоремата на Паскал за вписан шестоъгълник, когато три двойки съседни точки съвпадат). От теоремата на Нютон за четириъгълника AB_1BA_1 следва, че точките A_4 , B_4 и C_4 лежат на една права. Понеже полюсите на правите AA_3 , BB_3 и CC_3 лежат на една права, то тези прави се пресичат в една точка.

Задача 6. С M_1 означаваме множеството от всички пермутации на $(1, 2, 3, 4, 5)$. Дефинираме индуктивно множествата M_k по следния начин

$$M_{k+1} = \{A_{k+1} = (a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, a_5 + a_1) | A_k = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in M_k\}.$$

За всяко $k \in \mathbf{N}$ да се намери $N_k = \min_{A_k \in M_k} \max_{1 \leq i \leq 5} a_i$.

Решение. Казваме, че една редица $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ е добра, тогава и само тогава, когато съществува цяло число i , за което е вярна едната от

двете вериги неравенства $a_i > a_{i-1} > a_{i-2} > a_{i+2}$ и $a_i > a_{i+1} > a_{i-1} > a_{i+2} > a_{i-2}$ ($a_{i+5} = a_i$). Директно се проверява, че ако A_k е добра редица, то A_{k+1} е също добра. Ще покажем, че всички редици от M_6 са добри. Без ограничение можем да приемем, че $(a_1, a_2) = (1, 2)$ или $(a_1, a_3) = (1, 2)$.

A_1					A_6				
1	2	3	4	5	107	114	96	78	85
1	2	3	5	4	112	114	91	75	88
1	2	4	3	5	107	109	93	81	90
1	2	4	5	3	117	109	83	75	96
1	2	5	3	4	112	104	85	81	98
1	2	5	4	3	117	104	80	78	101
1	3	2	4	5	102	111	99	83	85
1	3	2	5	4	107	111	94	80	88
1	3	2	3	5	97	103	99	91	90
1	4	2	5	3	107	103	89	85	96
1	5	2	3	4	97	95	94	96	98
1	5	2	4	3	102	95	89	93	101

Да запишем елементите на A_k в намаляващ ред $b_k \geq c_k \geq d_k \geq e_k \geq f_k$. Ще докажем, че

$$(*) \quad b_k - c_k \geq F_{k-6}, c_k - d_k \geq F_{k-5}, d_k - e_k \geq F_{k-5}, e_k - f_k \geq F_{k-6},$$

където $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ е редицата на Фибоначи. За $k = 6$ твърдението е вярно. Да допуснем, че то е вярно за някое $k \geq 6$. Тъй като A_{k+1} е добра, то $b_{k+1} = b_k + c_k$, $c_{k+1} = b_k + d_k$, $d_{k+1} = c_k + e_k$, $e_{k+1} = d_k + f_k$ и $f_{k+1} = e_k + f_k$. Имаме $b_{k+1} - c_{k+1} = c_k - d_k \geq F_{k-5}$, $c_{k+1} - d_{k+1} \geq (b_k - c_k) - (d_k - e_k) \geq F_{k-4}$, $d_{k+1} - e_{k+1} \geq (c_k - d_k) - (e_k - f_k) \geq F_{k-4}$ и $e_{k+1} - f_{k+1} \geq d_k - e_k \geq F_{k-5}$. Следователно твърдението $(*)$ е вярно и за $k + 1$.

За всяко $k \geq 6$ имаме

$$b_k - c_k + b_k - d_k + b_k - e_k + b_k - f_k \geq 5(F_{k-6} + F_{k-5}) = 5F_{k-4},$$

откъдето

$$\begin{aligned} 5b_k \geq b_k + c_k + d_k + e_k + f_k + 5F_{k-4} &= 15 \cdot 2^{k-1} + 5F_{k-4}b_k \\ &\geq 3 \cdot 2^{k-1} + F + k - 4. \end{aligned}$$

Ако $A_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, то $A_2 = (6, 7, 5, 7, 5)$, $A_3 = (13, 12, 12, 12, 11)$, $A_4 = (25, 24, 24, 23, 24)$, $A_5 = (49, 48, 47, 47, 49)$ и $A_6 = (97, 95, 94, 96, 98)$. Това означава, че неравенството $(*)$ е вярно за всяко $k \geq 6$. Това означава, че и второто неравенството също е вярно за $k \geq 6$. Следователно

$$\min_{A_k \in M_k} \max_{1 \leq i \leq 5} a_i = 3 \cdot 2^{k-1} + F_{k-4}.$$

При $k = 2, 3, 4, 5$ директно се проверява, че $N_k = 3 \cdot 2^{k-1} + 1$. Окончателно получаваме

$$N_k = \begin{cases} 5 & k = 1 \\ 3 \cdot 2^{k-1} + 1 & 2 \leq k \leq 5 \\ 3 \cdot 2^{k-1} + F_{k-4} & k \geq 6. \end{cases}$$

Русия

Задача 9.1. (И. Богданов) Дадени са две по две различни реални числа a , b и c . Да се докаже, че поне две от уравненията $(x - a)(x - b) = x - c$, $(x - b)(x - c) = x - a$ и $(x - c)(x - a) = x - b$ имат реален корен.

Решение. Първи начин. Да означим $f_1(x) = (x - b)(x - c) - (x - a)$, $f_2(x) = (x - c)(x - a) - (x - b)$ и $f_3(x) = (x - a)(x - b) - (x - c)$ и да допуснем противното, т.е. най-много една от тези квадратни функции има реален корен. Тогава две от тях, например f_1 и f_2 нямат реални корени. Тъй като старшите им коефициенти са положителни, имаме $f_1(x) > 0$ и $f_2(x) > 0$ за всяко x . Това веднага води до противоречие, защото полиномът

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= (x - c)(x - b + x - a) - (x - a + x - b) \\ &= (2x - a - b)(x - c - 1) \end{aligned}$$

има реален корен (например $x_0 = c + 1$).

Втори начин. Как по-горе, да приемем, че $f_1(x)$ и $f_2(x)$ нямат реални корени. Тогава дискриминантите им са отрицателни, т.е. $(b + c + 1)^2 < 4(bc + a)$ и $(c + a + 1)^2 < 4(ca + b)$. Записани във вида $(b - c - 1)^2 < 4a - 4b$ и $(c - a + 1)^2 < 4b - 4a$, тези неравенства показват, че числата в десните им страни са положителни. Сумата на тези две числа обаче е 0, което е противоречие.

Забележка. Трети начин за решение е разглеждането на графиките на линейните и квадратни функции от условието с предварително нареждане $a < b < c$.

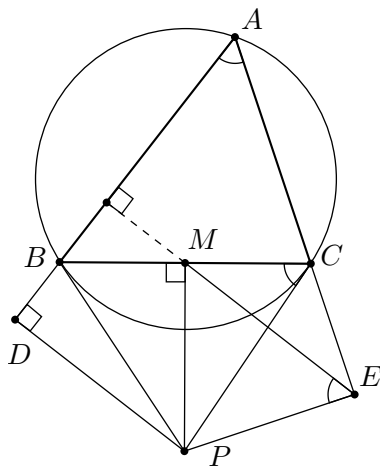
Задача 9.2. (П. Кожевников) Остроъгълнен $\triangle ABC$ е вписан в окръжност Ω . Допирателните към Ω в точките B и C се пресичат в точка P . Точките D и E са пети на перпендикулярите от P към правите AB и AC . Да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle ADE$ съвпада със средата на отсечката BC .

Решение. Нека M е средата на BC . Тъй като $\triangle BPC$ е равнобедрен ($BP = PC$ като допирателни), медианата PM е и височина. От $\sphericalangle PMC = \sphericalangle PEC = 90^\circ$ следва, че четириъгълникът $MCEP$ е вписан и значи $\sphericalangle MEP$

$= \angle MCP$. Имаме и $\angle MCP = \angle BAC$, защото CP е допирателна към Ω . Следователно $\angle MEP = \angle BAC$ и тогава

$$\angle MEA + \angle BAC = (90^\circ - \angle MEP) + \angle BAC = 90^\circ,$$

откъдето $ME \perp AB$.



Аналогично се доказва, че $MD \perp AC$, което вече означава, че M е орто-центърът на $\triangle ADE$.

Задача 9.3. (С. Берлов) На дъската са написани 100 две по две различни числа $a_1, a_2, \dots, a_{100}$. След това под всяко число a_i написали числото b_i , равно на сумата на a_i и най-големия общ делител на останалите 99 първоначални числа. Колко най-малко може да са две по две различните числа измежду $b_1, b_2, \dots, b_{100}$?

Решение. Отговор: 99. *Първи начин.* (Конструкция) Ако $a_{100} = 1$ и $a_i = 2i$ при $i = 1, 2, \dots, 99$, то $b_1 = b_{100} = 3$, т.е. измежду числата b_i има не повече от 99 различни.

(Оценка) Ще докажем, че измежду числата b_i винаги има 99 две по две различни. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a_1 < a_2 < \dots < a_{100}$. Нека d_i е най-големият общ делител на всички 99 първоначални числа без a_i . Тогава $b_i = a_i + d_i$. Нека $d_k = \max\{d_1, d_2, \dots, d_{100}\}$. Тогава при $i \neq k$ числата a_i се делят на d_k . Следователно при $i < j$ и $i \neq k \neq j$ разликата $a_j - a_i$ също се дели на d_k . Тъй като тази разлика е положителна, имаме $a_j - a_i \geq d_k \geq d_i$. Тогава $b_j > a_j \geq a_i + d_i = b_i$, откъдето $b_i \neq b_j$.

Получихме $b_j \neq b_i$ при $i \neq k \neq j$, което означава, че всичките 99 числа b_i при $i \neq k$ са две по две различни.

Втори начин за получаване на оценката. Да добавим $c_i = a_{i+1} - a_i$ към горните означения и нека $c_\ell = \min\{c_1, c_2, \dots, c_{99}\}$. Ще докажем, че ако $i < j$ и $i \neq \ell + 1 \neq j$, то числата b_i и b_j са различни, откъдето исканото следва.

При $i < j - 1$ имаме $i \leq 98$ и числата a_{i+1} и a_{i+2} се делят на d_i . Следователно $d_i \leq a_{i+2} - a_{i+1} < a_j - a_i$, откъдето $b_i = a_i + d_i < a_i + (a_j - a_i) = a_j < b_j$. При $i + 1 = j$ имаме $i \neq \ell + 1$ и $i \neq \ell$ (понеже $j \neq \ell + 1$). Тогава числата a_ℓ и $a_{\ell+1}$ се делят на d_i . Оттук $d_i \leq a_{\ell+1} - a_\ell = c_\ell \leq c_i$, което дава $b_i = a_i + d_i \leq a_i + c_i = a_{i+1} = a_j < b_j$. И в двата случая получихме $b_i < b_j$, което и искахме да докажем.

Задача 9.4. (фолклор) В равнината са дадени n прави, никои две от които не са еспоредни и никои три от които не се пресичат в една точка. Да се докаже, че съществува начупена несамопресичаща се линия с n звена, така че на всяка от дадените n прави лежи точно по едно нейно звено.

Решение. Ще докажем по-силно твърдение: ако A_0 е произволна точка от една от дадените прави, през която не минава нито една от останалите прави, то съществува начупена линия с исканите свойства, която започва от A_0 .

Ще проведем индукция по n . При $n = 1$ твърдението е тривиално. Нека $n \geq 2$, дадените прави да са $\ell_1, \dots, \ell_n$ и A_0 да лежи на ℓ_n . Нека A_1 е най-близката до A_0 пресечна точка на ℓ_n с някоя от останалите прави (ако най-близките точки са две, избираме коя да е от тях). Нека $A_1 = \ell_n \cap \ell_{n-1}$. По условие през A_1 не минават други прави освен ℓ_n и ℓ_{n-1} .

Съгласно индукционното предположение съществува несамопресичаща се начупена линия $A_1 A_2 \dots A_n$, започваща от A_1 и съдържаща по едно звено на всяка от правите $\ell_1, \dots, \ell_{n-1}$. Тогава начупената линия $A_0 A_1 \dots A_n$ има исканите свойства. Действително, имаме по едно звено на всяка от правите $\ell_1, \dots, \ell_n$ и остава да докажем, че линията не се самопресича. Единствената възможност последното да не е вярно, е когато звеното $A_0 A_1$ се пресича с някое друго звено. Но това очевидно противоречи на избора на A_1 .

Задача 9.5. (А. Грибалко) По окръжност са разположени $2n$ реални числа с положителна сума. За всяко от числата разглеждаме двете групи от n последователни по окръжността числа, за които това число е крайно. Да се докаже, че за поне едно от числата сумата от числата и в двете групи е положителна.

Решение. Да означим дадените числа с $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ (по посока на часовниковата стрелка). Нека $S > 0$ е сумата на всички числа и положим

$S_i = a_i + a_{i+1} + \dots + a_{i+n-1}$ (индексите са по модул $2n$, т.е. $a_{2n+i} = a_i$ и $S_{2n+i} = S_i$). Трябва да докажем, че двете суми S_i и S_{i+1-n} са положителни за някое i . Да отбележим, че $S_i + S_{n+i} = S > 0$, което означава, че измежду сумите S_i има положителни.

Ако всички суми S_i са положителни, всеки индекс i върши работа. В противен случай съществува индекс i , за който $S_i > 0$, а $S_{i+1} \leq 0$. Тогава $S_{i+1-n} = S - S_{i+1} > 0$ и индексът i върши работа.

Задача 9.6. (А. Голованов) Петя и Вася измислили десет квадратни тричлена. След това Вася казвал последователни естествени числа (започвайки отнякъде), а Петя замествал всяко казано число в някой от квадратните тричлени (по негов избор) и записвал получените стойности на дъската отляво надясно. Оказало се, че числата, записани на дъската, образуват аритметична прогресия (в реда, в който за записани). Колко най-много числа е могъл да каже Вася?

Решение. Отговор: 20. (Оценка) Ще докажем, че Петя е използвал всеки квадратен тричлен $P(x)$ не повече от два пъти. Действително, нека n -тият член на получената аритметична прогресия е равен на $an + b$, а n -тото от числата на Вася да е $k + n$. Тогава заместването на $k + n$ в $P(x)$ дава уравнението $P(k + n) = an + b$, което е квадратно относно n и следователно има не повече от два корена.

(Конструкция) Петя и Вася могат да направят така, че да се кажат 20 числа, по следния начин: избират квадратните тричлени $P_k(x) = x + (x - 2k)(x - (2k - 1))$, $k = 1, 2, \dots, 10$, и Вася казва числата $1, 2, \dots, 20$. Тъй като $P_k(2k - 1) = 2k - 1$ и $P_k(2k) = 2k$, Петя може да замества така, че да получи последователно числата $1, 2, \dots, 20$.

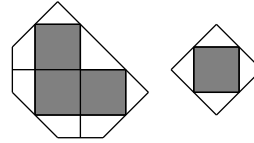
Задача 9.7. (И. Богданов) Външно за остроъгълния $\triangle ABC$ са построени квадратите $CAKL$ и $CBMN$. Правата CN пресича отсечката AK в точка X , а правата CL пресича отсечката BM в точка Y . Точката P , лежаща във вътрешността на $\triangle ABC$ е пресечна за окръжностите, описани около триъгълниците KXN и LYM . Точката S е средата на отсечката AB . Да се докаже, че $\sphericalangle ACS = \sphericalangle BCP$.

Решение. Нека Q е пресечната точка на правите KL и MN . Тъй като $\sphericalangle QLC = \sphericalangle NMY = 90^\circ$, четириъгълникът $QLYM$ е вписан. Аналогично се вижда, че четириъгълникът $QNXK$ е вписан. Следователно Q е втората пресечна точка на окръжностите ω_1 и ω_2 , описани съответно около $\triangle KXN$ и $\triangle LYM$.

Ще докажем, че точката S лежи на правата PQ . Правоъгълните триъгълници CAH и CBY са подобни, защото $\sphericalangle XCA = 90^\circ - \sphericalangle ACB =$

Решение. Да вметим всяка от изрязаните фигури в ”опаковка”, както е показано на фигурата. Ако твърдението на задачата не е вярно, то опаковките не се пресичат във вътрешни точки. Действително, опаковката на фигура F се състои точно от тези точки, за които разстоянието до F не надминава разстоянието до коя да е клетка без обща страна с F .

Тогава, ако точка X е едновременно вътрешна за две опаковки (съответните опаковани фигури нямат обща страна), то разстояние от X до едната фигура не надминава това до втората и обратно, т.е. тези разстояния са равни и X лежи на границите на двете опаковки, противоречие.



От горното следва, че никои две от опаковките нямат общо лице. Опаковката на триклетъчен ъгъл има лице $\frac{11}{2}$, а лицето на опаковката на една клетка е 2. Тогава сумарното лице на опаковките е $2200 + 1000 = 3200$. Но всички опаковки се намират в квадрат 56×56 (със същия център, както дадения) и тъй като $56^2 = 3136 < 3200$, имаме противоречие.

Задача 10.1. Виж Задача 9.1.

Задача 10.2. (И. Митрофанов) Върху окръжност са отбелязани n точки, които я разбиват на n дъги. Окръжността е ротирана около центъра си на ъгъл $2\pi k/n$ (при някое естествено k), в резултат на което отбелязаните точки се изобразили в n нови точки, разбиващи окръжността на n нови дъги. Да се докаже, че някоя от новите дъги лежи изцяло в някоя от старите дъги. (Дъгите се разглеждат като затворени множества.)

Решение. Ще считаме, че радиусът на окръжността е 1, а ротацията е по посока на часовниковата стрелка. Ако две нови точки лежат върху една и съща стара дъга, някоя нова дъга лежи изцяло в тази стара дъга. Затова да допуснем, че няма такива нови точки. Тъй като и новите, и старите дъги са по n на брой, това е възможно само когато върху всяка стара дъга има точно по една нова точка (като при това новите точки не са краища на старите дъги).

Нека старите точки да са $A_1, A_2, \dots, A_n$, номерирани по часовниковата стрелка. Нека при ротацията A_i да отива в нова точка B_i (индексите са по модул n , т.е. $A_{n+i} = A_i$ и $B_{n+i} = B_i$). Ясно е, че съседните точки попадат на съседни дъги, т.е. ако B_1 лежи на дъгата $A_j A_{j+1}$, то за всяка i точката B_i лежи на дъгата $A_{j+i-1} A_{j+i}$.

Нека $j \leq k$. Да забележим, че всички дъги от вида $A_i A_{i+1} \dots A_{i+j}$ покриват окръжността точно j пъти. Следователно сумата от техните дължини е $2\pi j \leq 2\pi k$. От друга страна, дължината на дъгата $A_i A_{i+1} \dots A_{i+j}$ е строго

по-голяма от дължината на дъгата A_iB_i , която е равна на $2\pi k/n$, откъдето същата сума излиза строго по-голяма от $n \cdot 2\pi k/n = 2\pi k$, противоречие.

Аналогично, ако $j > k$, то сумата от дължините на всички дъги от вида $A_iA_{i+1} \dots A_{i+j-1}$ е равна на $2\pi(j-1) \geq 2\pi k$, а от друга страна тя е строго по-малка от сумата на дължините на дъгите A_iB_i , равна на $2\pi k$ и отново имаме противоречие.

Задача 10.3. (В. Сендеров) Да се намерят всички естествени числа k , за които произведението на първите k прости числа, намалено с 1, е точна степен (по-голяма от първа) на естествено число.

Решение. Отговор: $k = 1$. Нека $n \geq 2$, и $2 = p_1 < \dots < p_k$ да са първите k прости числа, като

$$p_1 p_2 \dots p_k = a^n + 1.$$

Ако $a = 1$, то $a^n + 1 = 2$ и следователно $k = 1$.

Нека сега $a > 1$ и $k > 1$. Числото a е нечетно и значи има нечетен прост делител q . Очевидно $q > p_k$, откъдето и $a > p_k$. Без ограничение на общността можем да считаме, че n е просто число (ако $n = st$, можем да заменим n с t , а a с a^s). Освен това $n > 2$, понеже $a^2 + 1$ не се дели на $3 = p_2$.

Ако $n > p_k$, то $a^n + 1 > p_k^{p_k} > p_1 p_2 \dots p_k$, което е невъзможно.

Следователно $n \leq p_k$, т.е. $n = p_i$ за някое $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Имаме $p_i | a^{p_i} + 1$ от условието и $p_i | a^{p_i} - a$ от малката теорема на Ферма, откъдето $p_i | (a^{p_i} + 1) - (a^{p_i} - a) = a + 1$. Но тогава $1 + a^{p_i} = (1 + a)(1 - a + \dots + a^{p_i-1})$ се дели на p_i^2 , защото $p_i | a + 1$ и

$$1 - a + \dots + a^{p_i-1} \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p_i \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Следователно $1 + a^{p_i} = p_1 p_2 \dots p_k$ се дели на p_i^2 , което е невъзможно.

Задача 10.4. (А. Пастор) Във вътрешността на вписан четириъгълник $ABCD$ са разположени точки P и Q , за които

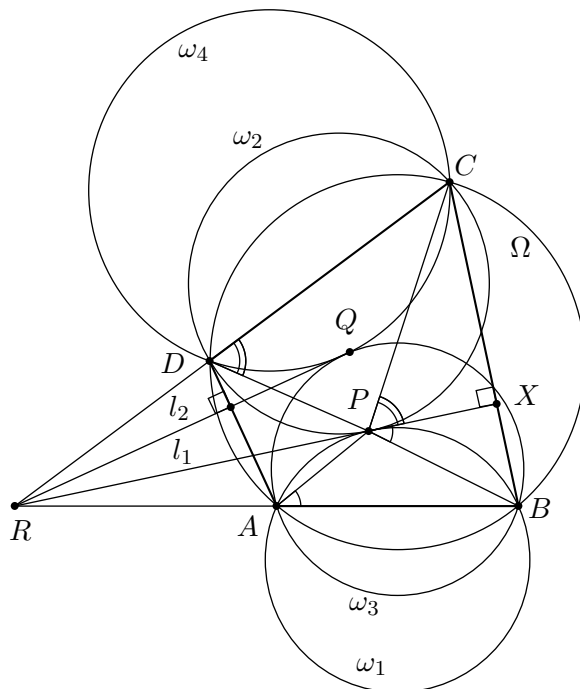
$$\begin{aligned} \sphericalangle PDC + \sphericalangle PCB &= \sphericalangle PAB + \sphericalangle PBC = \sphericalangle QCD + \sphericalangle QDA \\ &= \sphericalangle QBA + \sphericalangle QAD = 90^\circ. \end{aligned}$$

Да се докаже, че правата PQ сключва равни ъгли с правите AD и BC .

Решение. Да означим окръжностите, описани около $ABCD$ и триъгълниците ABP , CDP , ABQ и CDQ съответно с Ω , ω_1 , ω_2 , ω_3 и ω_4 .

Нека X е проекцията на P върху BC и да означим правата PX с ℓ_1 . Тогава $\sphericalangle BPX = 90^\circ - \sphericalangle PBC = \sphericalangle PAB$ и значи правата ℓ_1 се допира до

окръжността ω_1 . Аналогично ℓ_1 се допира и до ω_2 . Следователно ℓ_1 , ω_1 и ω_2 се допират в точка P . Аналогично се вижда, че правата ℓ_2 през Q , перпендикулярна на AD , и окръжностите ω_3 и ω_4 се допират в точка Q .



Нека правите AB и CD се пресичат в точка R . Ще докажем, че правите RP и ℓ_1 съвпадат. Да означим с P_1 и P_2 вторите пресечни точки на RP съответно с ω_1 и ω_2 (като $P_1 = P$, ако RP се допира до ω_1 и аналогично за P_2). Тогава $RP \cdot RP_1 = RA \cdot RB = RD \cdot RC = RP \cdot RP_2$, т.е. $P_1 = P_2$. Тъй като P е единствената обща точка на ω_1 и ω_2 , то $P_1 = P_2 = P$. Получихме, че RP съвпада с ℓ_1 , т.е. $RP^2 = RA \cdot RB$.

Аналогично се получава, че RQ съвпада с ℓ_2 и $RQ^2 = RA \cdot RB$. Следователно, $RP^2 = RA \cdot RB = RQ^2$, т.е. $\triangle PQR$ е равнобедрен и неговата основа PQ съдържа равни ъгли с правите QR и PR , а оттам и с перпендикулярните им прави AD и BC .

Остава да разгледаме случая, когато правите AB и CD са успоредни. Тогава $ABCD$ е равнобедрен трапец или правоъгълник. При всички случаи $ABCD$ и всички разглеждани окръжности са симетрични относно общата симетрала на AB и CD . Следователно точките P и Q лежат на тази симетрала, която очевидно съдържа равни ъгли с правите AD и BC .

Забележка. В получената конфигурация точката R е общия радикален център (т.е. пресечна точка на радикалните оси) на окръжностите Ω , ω_1 , ω_2 , ω_3 и ω_4 .

Задача 10.5. (В. Сендеров) Съществува ли естествено число n със следното свойство: за произволни ненулеви цифри a и b числото $\overline{anb}$ се дели на $\overline{ab}$? (С $\overline{x\dots y}$ се означава числото, получено чрез последователно записване на числата $x, \dots, y$ в десетичен вид.)

Решение. Отговор: Не. Да допуснем, че отговорът е положителен, т.е. съществува число $n = \overline{n_k n_{k-1} \dots n_1}$ с исканото свойство. Тогава $4|12|\overline{1n2}$, откъдето следва, че $4|\overline{n_1 2}$. Аналогично от $4|24|\overline{2n4}$ получаваме $4|\overline{n_1 4}$. Тогава и числото $\overline{n_1 4} - \overline{n_1 2} = 2$ се дели на 4, противоречие.

Задача 10.6. (А. Голованов) Петя и Вася измислили десет полинома от пета степен. След това Вася казвал последователни естествени числа (започвайки отнякъде), а Петя замествал всяко казано число в някой от полиномите (по негов избор) и записвал получените стойности на дъската отляво надясно. Оказало се, че числата, записани на дъската, образуват аритметична прогресия (в реда, в който са записани). Колко най-много числа е могъл да каже Вася?

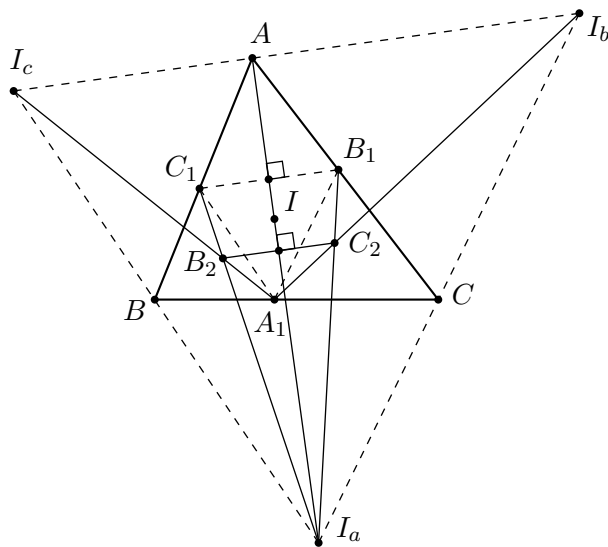
Решение. Отговор: 50. Виж решението на Задача 9.6.

Задача 10.7. (Л. Емелянов, А. Полянский) Окръжност с център I е вписана в $\triangle ABC$ и се допира до страните BC , CA и AB съответно в точките A_1 , B_1 и C_1 . Нека I_a , I_b и I_c са центровете на външновписаните окръжности за $\triangle ABC$, допиращи се съответно до страните BC , CA и AB . Отсечките $I_a B_1$ и $I_b A_1$ се пресичат в точка C_2 , отсечките $I_b C_1$ и $I_c B_1$ се пресичат в точка A_2 и отсечките $I_c A_1$ и $I_a C_1$ – в точка B_2 . Да се докаже, че I е центърът на окръжността, описана около $\triangle A_2 B_2 C_2$.

Решение. Правите $B_1 C_1$ и $I_b I_c$ са успоредни, защото са перпендикулярни на ъглополовящата AI на $\angle BAC$. Аналогично се вижда, че $C_1 A_1 \parallel I_c I_a$ и $A_1 B_1 \parallel I_a I_b$. От тези успоредности следва, че триъгълниците $A_1 B_1 C_1$ и $I_a I_b I_c$ са хомотетични.

Триъгълниците $A_1 C_1 B_2$ и $I_c I_a B_2$ са подобни, защото съответните им страни са успоредни. Аналогично имаме $\triangle A_1 B_1 C_2 \sim \triangle I_b I_a C_2$. От тези подобия следват равенствата $\frac{I_a B_2}{C_1 B_2} = \frac{I_a I_c}{A_1 C_1} = \frac{I_a I_b}{A_1 B_1} = \frac{I_a C_2}{B_1 C_2}$. Точките B_1 и C_1 са симетрични относно правата AI_a , от $\frac{I_a B_2}{C_1 B_2} = \frac{I_a C_2}{B_1 C_2}$ следва, че точките B_2 и

C_2 са симетрични относно същата права и $IB_2 = IC_2$. Аналогично получаваме, че $IA_2 = IB_2$ и следователно I е центърът на окръжността, описана около $\triangle A_2B_2C_2$.



Задача 10.8. (И. Богданов, Д. Фон-Дер-Флаасс) В равнината е даден квадрат, чиито страни са хоризонтални и вертикални. В квадрата са разположени няколко отсечки, успоредни на страните, като никои две отсечки не лежат на една права и не се пресичат в точка, вътрешна и за двете. Оказало се, че отсечките разбиват квадрата на правоъгълници, като при това всяка вертикална права, пресичаща квадрата и несъдържаща отсечки от разбиването, пресича точно k правоъгълника от разбиването, а всяка хоризонтална права, пресичаща квадрата и несъдържаща отсечки от разбиването – точно ℓ правоъгълника. Какъв може да бъде броят на правоъгълниците от разбиването?

Решение. Отговор: $k\ell$. Да фиксираме една хоризонтална отсечка I и нека I да участва в a правоъгълника над нея и в b правоъгълника под нея. Ще докажем, че $a = b$. Нека h е хоризонтална права, минаваща отначало през горната страна на квадрата и да започнем да я движим успоредно надолу. В момента, когато правата минава през I (по условие в този момент h минава само през I), броят на правоъгълниците, пресечени от h , намалява с a и се увеличава с b . Тъй като по условие броят на пресечените правоъгълници е постоянен, имаме $a = b$.

Ще докажем с индукция по k , че търсеният брой е $k\ell$. При $k = 1$

твърдението е очевидно. Нека $k > 1$. Да разгледаме правоъгълниците от разбиването, които имат страна върху долната страна на квадрата. Ясно е, че тези правоъгълници са ℓ на брой (хоризонтална права, достатъчно близка до долната страна, пресича само тях). Да разбием разглежданите правоъгълници на групи от съседни с равни височини. Всяка такава група има за горна граница някаква хоризонтална отсечка от дадените.

Да разгледаме една такава група с горна граница отсечката I . Да забележим, че вертикалните отсечки, ограничаващи групата, продължават нагоре над I . Действително, ако е вярно обратното, например ако горният край на лявата вертикална отсечка J лежи върху I , то отдясно към J се допира един правоъгълник, а отляво – повече (защото J е граничен за група). Последното противоречи на доказаното в началото.

Да отстраним разглежданата група и да продължим правоъгълниците над I до долната страна на квадрата. Тъй като под и над I имаме еднакъв брой правоъгълници, всяка хоризонтална права все още пресича точно ℓ правоъгълника.

Да извършим описаната операция с всички групи. По този начин отстраняваме точно ℓ правоъгълника, като при това всяка вертикална права вече ще пресича по един правоъгълник по-малко отпреди, т.е. $k - 1$ правоъгълника. По индукционно предположение броят на останалите правоъгълници е точно $(k - 1)\ell$ и добавянето на премахнатите дава $(k - 1)\ell + \ell = k\ell$ правоъгълника.

Задача 11.1. Полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ са от десета степен и имат старши коефициенти равни на 1. Уравнението $P(x) = Q(x)$ няма реални корени. Да се докаже, че уравнението $P(x + 1) = Q(x - 1)$ има поне един реален корен.

Решение. Нека $P(x) = x^{10} + p_9x^9 + \dots + p_0$ и $Q(x) = x^{10} + q_9x^9 + \dots + q_0$. Тогава полиномът $P(x) - Q(x) = (p_9 - q_9)x^9 + \dots + (p_0 - q_0)$ няма реални корени, но ако $p_9 \neq q_9$, то степента на този полином е нечетна и значи той има поне един реален корен. Следователно $p_9 = q_9$. Да забележим, че $P(x + 1) = x^{10} + (p_9 + 10)x^9 + \dots$ и $Q(x - 1) = x^{10} + (q_9 - 10)x^9 + \dots$, откъдето заключаваме, че полиномът $P(x + 1) - Q(x - 1) = 20x^9 + \dots$ е от девета степен, т.е. има поне един реален корен.

Задача 11.2. Вписаната и външновписаната сфери на триъгълна пирамида $ABCD$ се допират до стената (BCD) в различни точки X и Y . Да се докаже, че $\triangle AXU$ е тъпоъгълен. (Външновписаната сфера се допира до една от стените на пирамидата и до равнините на останалите стени в точки, външни за стените.)

Решение. Нека X е допирната точка на вписаната сфера със стената (BCD) . Нека образът на точка Y при хомотетията с център точка A , която преобразува външно вписаната сфера във вписаната, е някаква точка Z , която лежи на вписаната сфера. Образът на равнината (BCD) при тази хомотетия е равнина, успоредна на (BCD) , която допира вписаната сфера в точка Z . Това означава, че X и Z са диаметрално противоположни точки върху вписаната сфера и следователно $XZ \perp (BCD)$. Тъй като Z е върху отсечката AY , то $\angle AXZ > \angle ZXY = 90^\circ$, откъдето следва твърдението от условията на задачата.

Задача 11.3. Да се намерят всички естествени числа k , за които произведението на първите k нечетни прости числа, намалено с 1, е точна степен (по-голяма от първа) на естествено число.

Решение. Ще докажем, че такива k не съществуват. Нека $n \geq 2$, и $3 = p_1 < \dots < p_k$ са първите k нечетни прости числа. Да допуснем, че

$$3 \cdot \dots \cdot p_k = a^n + 1. \quad (*)$$

Възможни са два случая.

Случай 1. Нека a е степен на 2. Тъй като степените на 2 при деление на 7 дават остатъци 1, 2 и 4, а $a^n + 1$ се дели на 7 при $k \geq 3$. Следователно $k \leq 2$ и възможните стойности за a^n са $3 - 1 = 2$ и $3 \cdot 5 - 1 = 14$. И двете стойности не водят до решение.

Случай 2. Нека a има нечетен прост делител q . Тогава $q > p_k$, защото в противен случай лявата част на $(*)$ ще се дели на q , което е невъзможно. Следователно $a > p_k$.

Без ограничение можем да считаме, че n е просто число (ако $n = st$, то можем да заменим n с t , а a с a^s). Да забележим, че $n > 2$, тъй като $a^2 + 1$ не се дели на $3 = p_1$.

Ще докажем, че $n > p_k$. В противен случай имаме $n = p_i$ за някое $1 \leq i \leq k$. Тогава $p_i | a^{p_i} + 1$, а от друга страна от малката теорема на Ферма $p_i | a^{p_i} - a$. Следователно $a + 1 = (a^{p_i} + 1) - (a^{p_i} - a)$ също се дели на p_i . Освен това $1 + a^{p_i} = (1 + a)(1 - a + \dots + a^{p_i-1})$, където $p_i | a + 1$ и

$$1 - a + \dots + a^{p_i-1} \equiv 1 + 1 + \dots + 1 = p_i \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Следователно $1 + a^{p_i}$ се дели на p_i^2 , което е невъзможно по условие.

Получихме, че $a > p_k$ и $n > p_k$, откъдето $a^n + 1 > p_k^{p_k} > 3 \cdot \dots \cdot p_k$, което противоречи на $(*)$.

Задача 11.4. На всяка от 2013 картички е записано по едно число, като всички 2013 числа са различни. Картичките са обърнати с числата надолу. За един ход се разрешава да се посочат десет картички и в отговор да се каже едно от числата (неизвестно кое) написано на някоя от тях. Да се намери най-голямото t , за което със сигурност можем да намерим t картички за които е известно кое число е записано на всяка от тях.

Решение. Ще докажем, че $t = 1986 = 2013 - 27$.

Първо ще покажем, че не можем да определим числата върху 1987 картички. Да номерираме картичките $A_1, \dots, A_{2013}$. Ще покажем какви трябва да бъдат отговорите така, че да не можем да определим нито едно от числата $A_1, \dots, A_{27}$.

За всяко $i = 1, \dots, 9$ да обединим картичките $A_{3i-2}, A_{3i-1}, A_{3i}$ в тройка T_i . Ако между 10-те картички, за които се пита има картичка A_n с $n > 27$, то отговаряме с числото n . Ако всички 10 картички са в тройки, то в някоя тройка T_i има поне две картички. В този случай отговаряме по следния начин: за картички A_{3i} и A_{3i-1} с числото $3i - 1$; за картички A_{3i-1} и A_{3i-2} с числото $3i - 2$; за картички A_{3i} и A_{3i-2} с числото $3i$.

На тези отговори съответстват две различни разположения на числата върху картичките. На картичките с номера, по-големи от 27, са написани техните номера, а на картичките от всяка тройка $A_{3i-2}, A_{3i-1}, A_{3i}$ са записани съответно или числата $3i, 3i - 2, 3i - 1$ или числата $3i - 2, 3i - 1, 3i$. Следователно не можем да определим нито едно от числата върху дадените тройки.

Остана да докажем, че числата на всички картички без 27 могат да се определят. Ще покажем, че ако зададем всички възможни въпроси за някои 28 картички, то по получените отговори ще можем да определим записаното върху една от картичките число. След това можем да заменим тази картичка с произволна друга и т.н. да определим числата върху всички картички без 27.

Лема. Даден е граф с поне $3n - 2$ върха и не повече от $3n - 2$ ребра ($n \geq 2$). Тогава съществуват n върха между които няма ребра.

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по n . Да забележим, че можем да отстраним няколко върха, след което да добавим няколко ребра така, че да имаме точно $3n - 2$ ребра и точно $3n - 2$ върха. При $n = 2$ имаме 4 върха и по-малко от 6 ребра, значи има две точки, които не се свързани с ребро.

Нека сега $n > 2$. Да означим степените на върховете съответно с $d_1, \dots, d_{3n-2}$, тогава $d_1 + \dots + d_{3n-2} = 2(3n - 2)$. Следователно или имаме число $d_i < 2$ и число $d_j > 2$, или всички степени са равни на 2. В първия случай

да изтрием от графа i -ия и j -ия връх, а също и единствения съсед на i -ия връх (ако такъв има). Изтрили сме не повече от 3 върха и не по-малко от 3 ребра. Във втория случай да изтрием произволен връх (нека това да е връх номер i) и двата му съседни върха. Тъй като всички степени са 2, то отново сме изтрили не по-малко от 3 ребра (и точно 3 върха). По индукционното предположение в получения граф има $n - 1$ върха без ребро между тях. Добавяме към тях i -ия връх и получаваме търсените n върха (тъй като сме изтрили всички съседни върхове на i -ия връх).

Нека сме задали всички въпроси за някои 28 картички и нека $c_1, \dots, c_k$ са всички, числа, които се срещат в отговорите (тогава $k \leq 28$). За всяко $i = 1, 2, \dots, k$ да разгледаме всички 10-ки от картички, за които сме получили отговор c_i . Да означим тяхното сечение с S_i (ясно е, че това множество не е празно, тъй като то съдържа картичката с числото c_i). Ако в това множество има само един елемент, то това е картичката с числото c_i .

В противен случай, във всяко от множествата има поне по две картички. За всяко i да изберем две картички в S_i и да ги съединим с ребро. Ще получим граф, който удовлетворява условието на лемата при $n = 10$. Следователно в него можем да изберем 10 картички без ребра между тях. Отговорът на тази десетка ще бъде някое число c_i и значи в тази десетка ще се съдържа множеството S_i , а значи и две картички от нея ще са съединени с ребро, противоречие.

Задача 11.5. От числата от 0 до 1000 са избрани 101 числа. Да се докаже, че измежду модулите на двойките разлики на тези числа има 10 различни числа не по-големи от 100.

Решение. Нека избраните числа са $a_0 < a_1 < \dots < a_{100}$. Сборът на десетте разлики $a_{10} - a_0, a_{20} - a_{10}, \dots, a_{100} - a_{90}$ е равен на $a_{100} - a_0 \leq 1000$, поради което една от тези разлики е не по-голяма от 100. Нека тази разлика е $a_{10i+10} - a_{10i}$. Тогава

$$0 < a_{10i+1} - a_{10i} < a_{10i+2} - a_{10i} < \dots < a_{10i+10} - a_{10i} \leq 100,$$

т.е. намерихме търсените 10 разлики.

Задача 11.6. Дадени са положителни числа a, b, c и d , за които $2(a + b + c + d) \geq abcd$. Да се докаже, че $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd$.

Решение. Възможни са два случая.

Случай 1. Нека $abcd \geq 16$. От неравенството между средното квадра-

тично и средното аритметично имаме

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &\geq 4 \left(\frac{a + b + c + d}{4} \right)^2 \geq \\ &\geq 4 \left(\frac{abcd}{8} \right)^2 = \frac{(abcd)^2}{16} \geq abcd, \end{aligned}$$

което трябваше да се докаже.

Случай 2. Нека $abcd < 16$. От неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt{16abcd} > \sqrt{a^2b^2c^2d^2} = abcd,$$

което трябваше да се докаже.

Задача 11.7. Министърът на финансите иска да пусне в обръщение 12 различни номинала монети (всеки номинал е естествено число рубли) така, че всеки сбор от 1 до 6543 рубли да може да се изплати без ресто с не повече от 8 монети. Възможно ли е това? (При заплащане на сумата може да се използват няколко монети от един и същи номинал).

Решение. Възможно е. Да забележим, че $9^4 = 6561 > 6543$. Ще покажем, че могат да се изберат 12 различни вида монети така, че с помощта на не повече от 8 монети да се заплати всяка сума от 1 до 6560 рубли.

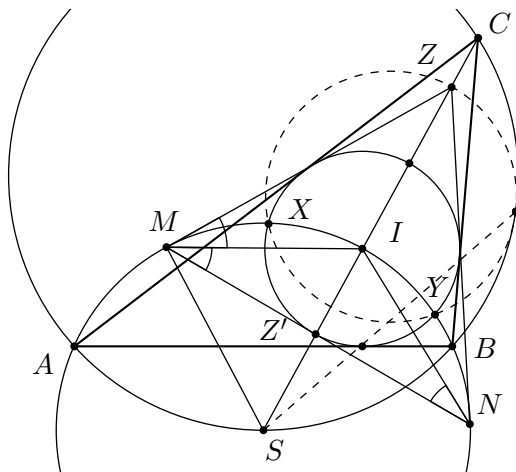
С монети от 1, 3 и 4 рубли може да се заплати всяка сума от 1 до 8 рубли с не повече от 2 монети $1 = 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 3$, $4 = 4$, $5 = 4 + 1$, $6 = 3 + 3$, $7 = 4 + 3$ и $8 = 4 + 4$.

Да разгледаме монети от 9^k , $3 \cdot 9^k$ и $4 \cdot 9^k$ рубли при $k = 0, 1, 2, 3$. Всяко число N от 1 до 6560 се представя по единствен начин във вида $N = a_3 \cdot 9^3 + a_2 \cdot 9^2 + a_1 \cdot 9 + a_0$, където числата a_k приемат стойности от 0 до 8. (Това е разлагането на числото N в деветична бройна система.) Както показахме сумата $a_k \cdot 9^k$ може да се получи с не повече от две монети. По такъв начин N може да се получи с не повече от $4 \cdot 2 = 8$ монети, което трябваше да се докаже.

Задача 11.8. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност ω с център I . Около триъгълника AIB е описана окръжност Γ . Окръжностите ω и Γ се пресичат в точки X и Y . Общите допирателни на ω и Γ се пресичат в точка Z . Да се докаже, че описаните около $\triangle ABC$ и $\triangle XYZ$ окръжности се допират.

Решение. Да означим описаната около $\triangle ABC$ окръжност с Ω . Нека ъглополовящата CI пресича Ω за втори път в точка S . Тогава $SA = SB =$

SI , т. е. S е център на Γ . От симетрията следва, че точката Z лежи на правата SC .



Нека общите допирателни на ω и Γ се допират до Γ в точки M и N . Правата през центровете SI е симетрала на отсечката MN , откъдето $\angle IMN = \angle INM = \angle IMZ$ (последното равенство е вярно тъй като правата MZ се допира до Γ). Следователно MI е ъглополовяща на ъгъл ZMN , т. е. разстоянията от I до ZM и MN са равни. Тъй като ω се допира до ZM , то тя също се допира до правата MN в някаква точка Z' , а от симетрията следва, че тази точка лежи на SI .

Правоъгълните триъгълници $SZ'M$ и SMZ са подобни, откъдето $SZ \cdot SZ' = SM^2$. Това означава, че при инверсия спрямо окръжността Γ образът на точката Z' е точка Z . Следователно образът на окръжността ω , съдържаща точките X , Y и Z' , е окръжност, описана около триъгълник XYZ . Освен това при такава инверсия образът на правата AB е окръжността Ω . Тъй като ω и AB се допират, техните образи също се допират, което трябваше да се докаже.

САЩ

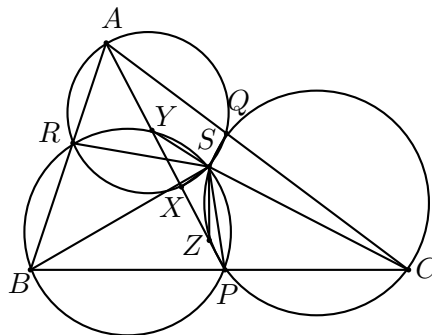
Задача 1. (Ц. Фенг) Точките P , Q и R лежат съответно на страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$. Нека ω_A , ω_B и ω_C са съответно описаните около триъгълниците AQR , BRP и CPQ . Ако отсечката AP пресича ω_A , ω_B и ω_C отново в точките X , Y и Z , да се докаже, че $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$.

Решение. Да означим с S втората пресечна точка на ω_B и ω_C (случаят $S \equiv P$ се разглежда по подобен начин). Тъй като четириъгълниците $BPSR$ и $CPSQ$ са вписани, имаме $\angle RSP = 180^\circ - \angle PBR$ и $\angle PSQ = 180^\circ - \angle QCP$. Тогава

$$\begin{aligned}\angle QSR &= 360^\circ - \angle RSP - \angle PSQ = \angle PBR + \angle QCP = \angle CBA + \angle ACB \\ &= 180^\circ - \angle BAC,\end{aligned}$$

което означава, че четириъгълникът $ARSQ$ е вписан, т.е. ω_A , ω_B и ω_C се пресичат¹ в точката S .

Тъй като четириъгълникът $BPSY$ е вписан в ω_B , имаме $\angle XYS = \angle PYS = \angle PBS$, от вписания $ARXS$ в ω_A имаме $\angle SXY = \angle SXA = \angle SRA$ и от вписания $BPSR$ в ω_B получаваме $\angle SRA = \angle SPB$. Следователно $\angle SXY = \angle SRA = \angle SPB$. Тогава $\triangle SYX \sim \triangle SBP$, защото $\angle XYS = \angle PBS$ и $\angle SXY = \angle SPB$. Оттук $\frac{YX}{BP} = \frac{SX}{SP}$.



Аналогично се доказва, че $\triangle SXZ \sim \triangle SPC$ и оттам $\frac{SX}{SP} = \frac{XZ}{PC}$. Комбинирането на последните две равенства дава искания резултат.

Забележка. Твърдението остава вярно и ако "отсечката AP " се замени с "правата AP ". Американските колеги за отбелязали, че често срещана грешка е предположението, че правите RY и QZ се пресичат върху ω_A .

¹Това е теоремата на Микел.

Задача 2. (С. Вандервелде) Нека $n \geq 3$ е естествено число. Върху окръжност са разположени n точки, които я разбиват на равни дъги. Даден е пул, на който е разрешено да се придвижва от една от дадените точки в съседната ѝ или в следващата след съседната точка по посока на часовниковата стрелка (т.е. имаме $2n$ позволени хода). Да означим с a_n броя на начините, по които окръжността може да бъде обходена двукратно със start и край във фиксирана точка от дадените, без повтаряне на ход. Да се докаже, че $a_{n-1} + a_n = 2^n$ за всяко $n \geq 4$.

Решение. Ще докажем, че $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$. Това ще е достатъчно, защото

$$a_{n-1} + a_n = \frac{2^n + (-1)^{n-1}}{3} + \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} = 2^n.$$

Лема. За всяко естествено число n е в сила тъждеството

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} 2^k = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

Доказателство. Ще проведем индукция по n . Случаите $n = 1$ и $n = 2$ се проверяват лесно. Нека $n = 2m + 1 \geq 3$ е нечетно. Имаме последователно

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \binom{2m+1-k}{k} 2^k &= 1 + \sum_{k=1}^m \binom{2m-k}{k} 2^k + \sum_{k=1}^m \binom{2m-k}{k-1} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{2m-k}{k} 2^k + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \binom{2m-1-k}{k} 2^k \\ &= \frac{2^{2m+1} + 1}{3} + \frac{2(2^{2m} - 1)}{3} = \frac{2^{2m+2} - 1}{3} \end{aligned}$$

(използвахме индукционното предположение за $n = 2m$ и $n = 2m - 1$). Индукционният преход за четно n е подобен и лемата е доказана.

Ще намерим броя на начините за двукратна обиколка на окръжността, организирайки броенето около точките, посетени по два пъти. Ясно е, че две такива точки не могат да бъдат съседни и че има точно два начина (редици от ходове) водещи от една такава точка до следващата такава (ходовете са само с дължина 2 освен може би в краищата).

При $k \geq 1$ такива точки, никои две съседни и без точката A , имаме 2^k начина за обиколка на окръжността без повторение на ходове. Половината

от тези възможности води до двукратно повторение на един и същи маршрут и значи начините всъщност са 2^{k-1} . Имаме $\binom{n-k}{k}$ начина за избор на k (никои две съседни и без A) точки, което означава, че общо начините са

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} 2^{k-1} = \frac{1}{2} \left[-1 + \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n-k}{k} 2^k \right] = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{6} - \frac{1}{2}.$$

Ако A е от точките, посетени по два пъти, имаме $\binom{n-k-1}{k-1}$ начина за избор, като сега начините за придвижване са 2^k на брой. Тогава приносът в този случай е

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n-k-1}{k-1} 2^k = 2 \sum_{k=0}^{[(n-2)/2]} \binom{n-k}{k} 2^k = \frac{2(2^{n+1} + (-1)^n)}{3}.$$

Накрая, при нечетно n имаме една допълнителна възможност да обиколим двукратно окръжността без да посетим двукратно нито една точка (със стъпки с дължина 2), което отчитаме като принос $\frac{1 - (-1)^n}{2}$.

Окончателно, получаваме

$$\frac{2^{n+1} + (-1)^n}{6} - \frac{1}{2} + \frac{2(2^{n+1} + (-1)^n)}{3} + \frac{1 - (-1)^n}{2} = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3},$$

с което решението е завършено.

Задача 3. (У. Суксомпонг) Нека n е естествено число. Равностранен триъгълник е разбит на еднакви равностранни триъгълници по обичайния начин и във възлите, $\frac{n(n+1)}{2}$ на брой, са разположени пулове. Всеки пул е бял от едната страни и черен от другата и в началото всички пулове са обърнати с черната си страна нагоре. Разрешена е следната операция – да се избере права с пулове, успоредна на страна на големия триъгълник, и всички пулове върху тази права едновременно да се преобърнат. Една конфигурация от пулове се нарича допустима, ако може да бъде получена от първоначалната след краен брой операции. За всяка допустима конфигурация C означаваме с $f(C)$ минималния брой операции, необходими за получаването на C от първоначалната конфигурация. Да се намери

максималната възможна стойност на $f(C)$, когато C пробягва всички допустими конфигурации.

Решение. При $n = 1$ имаме очевиден отговор 1 и затова оттук нататък ще считаме, че $n \geq 2$.

Във всеки даден момент имаме на разположение $3n$ прави, с които да оперираме, т.е. разполагаме с $3n$ възможни операции. Тъй като финалното положение на всеки фиксиран пул зависи само от четността на броя на операциите, в които този пул е участвал, изпълнението на операцията два пъти върху една и съща права е безсмислено, т.е. можем да считаме, че за всяка права има 0 или 1 изпълнение на операцията. Тогава можем да опишем всяка комбинация от операции като $(3n)$ -орки (тройка от n -орки)

$$((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)),$$

където всеки елемент a_i, b_i, c_i е равен на 0 или 1 (има или няма операция), всеки от трите вектора съответства на страна на триъгълника и индексите $1, 2, \dots, n$ означават броя на пуловете върху съответната права. Нека A , $|A| = 2^{3n}$, е множеството от всички такива $(3n)$ -орки.

Нека B е множеството от всички допустими конфигурации. Да положим $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Ще представим всеки елемент на B като N -орка $(z_1, z_2, \dots, z_N)$, в която всеки елемент е 0 или 1 в зависимост от съответния му пул – бял или черен отгоре (позициите на пуловете не са важни). За всеки елемент $a \in A$, да означим с $f(a) \in B$ резултата от прилагането на a . Тогава $f(a + a') = f(a) + f(a')$, където събирането е по модул 2.

Нека $K \subset A$ е множеството от всички елементи $a \in A$, за които $f(a)$ е конфигурацията, в която всички пулове са обърнати с черната си страна нагоре. Лесно се проверява, че следните осем елемента на A са в K :

$$\begin{aligned} \text{id} &= ((0, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 0)), \\ x &= ((0, 0, \dots, 0), (1, 1, \dots, 1), (1, 1, \dots, 1)), \\ y &= ((1, 1, \dots, 1), (0, 0, \dots, 0), (1, 1, \dots, 1)), \\ x + y &= ((1, 1, \dots, 1), (1, 1, \dots, 1), (0, 0, \dots, 0)), \\ z &= ((0, 1, 0, 1, \dots), (0, 1, 0, 1, \dots), (0, 1, 0, 1, \dots)), \\ x + z &= ((0, 1, 0, 1, \dots), (1, 0, 1, 0, \dots), (1, 0, 1, 0, \dots)), \\ y + z &= ((1, 0, 1, 0, \dots), (1, 0, 1, 0, \dots), (0, 1, 0, 1, \dots)), \\ x + y + z &= ((1, 0, 1, 0, \dots), (0, 1, 0, 1, \dots), (1, 0, 1, 0, \dots)). \end{aligned}$$

Ще докажем, че това са всички елементи на K .

Нека $L = ((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), (c_1, c_2, \dots, c_n)) \in K$. Да отбележим, че имаме $a_i + b_j + c_k = 0$ винаги, когато $i + j + k = 2n + 1$ (Защо?). С добавяне на x и/или y при необходимост, можем да получим $b_n = c_n = 0$. Тъй като $a_2 + b_{n-1} + c_n = a_2 + b_n + c_{n-1} = 0$, получаваме $b_{n-1} = c_{n-1}$. Ще разгледаме поотделно двете възможности.

Случай 1. Ако $b_{n-1} = c_{n-1} = 0$, то от $a_3 + b_{n-2} + c_n = a_3 + b_{n-1} + c_{n-2} = a_3 + b_n + c_{n-2} = 0$ получаваме $b_{n-2} = c_{n-2} = 0$ и т.н., до извода, че всички b_i и c_i са равни на 0, откъдето и $a_i = 0$ за всяко i , т.е. $L = \text{id}$.

Случай 2. Ако $b_{n-1} = c_{n-1} = 1$, то както в предходния случай получаваме $b_{n-2} = c_{n-2} = 0$, $b_{n-3} = c_{n-3} = 1$ и т.н., до $(b_1, b_2, \dots, b_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (\dots, 1, 0, 1, 0)$. Оттук $L = z$ или $L = x + z$.

Следователно L е един от осемте елемента, изброени по-горе, и $|K| = 8 = 2^3$. Последното означава, че елементите на A се разбиват на 2^{3n-3} класа, всеки от които съответства на елемент на K .

За $a \in A$ нека x_1 е броят на единиците измежду $a_1, a_3, \dots$ и x_2 е броят на единиците измежду $a_2, a_4, \dots$; аналогично се дефинират и y_1, y_2, z_1 и z_2 съответно чрез единиците измежду b_i и c_i . Търсим елемента на класа на a , за който стойността на $T = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2$ е възможно най-малка. Тогава максимумът на тази стойност по всички класове ще даде търсения отговор.

За да бъде T минимално е необходимо и достатъчно едновременно да са изпълнени следните неравенства:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 &\leq n, \\ x_1 + x_2 + z_1 + z_2 &\leq n, \\ y_1 + y_2 + z_1 + z_2 &\leq n, \\ x_2 + y_2 + z_2 &\leq \left\lfloor \frac{3\lceil n/2 \rceil}{2} \right\rfloor = V, \\ x_1 + y_1 + z_2 &\leq \left\lfloor \frac{2\lceil n/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil}{2} \right\rfloor = W, \\ x_2 + y_1 + z_1 &\leq \left\lfloor \frac{2\lceil n/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil}{2} \right\rfloor = W, \\ x_1 + y_2 + z_1 &\leq \left\lfloor \frac{2\lceil n/2 \rceil + \lceil n/2 \rceil}{2} \right\rfloor = W. \end{aligned}$$

Сега търсим максималното T , за което са изпълнени горните неравенства.

Сумирането на последните четири от тях дава $T \leq \left\lceil \frac{V+3W}{2} \right\rceil$. В зависимост от остатъка на n при деление на 4 имаме следните случаи за отговора на задачата:

- (а) при $n = 4k$ получаваме $V = W = 3k$ и съответно $T \leq 6k$, което се достига при $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = k$;
- (б) при $n = 4k+1$ получаваме $V = 3k$, $W = 3k+1$ и съответно $T \leq 6k+1$, което се достига при $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z_1 = k$ и $z_2 = k+1$;
- (в) при $n = 4k+2$ получаваме $V = W = 3k+1$ и съответно $T \leq 6k+2$, което се достига при $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = k$ и $z_1 = z_2 = k$;
- (г) при $n = 4k+3$ получаваме $V = 3k+12$, $W = 3k+2$ и съответно $T \leq 6k+3$, което се достига при $x_1 = x_2 = y_1 = k$ и $y_2 = z_1 = z_2 = k+1$.

Задача 4. (Т. Андрееску) Да се намерят всички реални числа x , y и z , по-големи или равни на 1, които удовлетворяват условието

$$\min\{\sqrt{x+xyz}, \sqrt{y+xyz}, \sqrt{z+xyz}\} = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Решение. Нека a , b и c са неотрицателни реални числа, за които $x = 1+a^2$, $y = 1+b^2$ и $z = 1+c^2$. Можем да считаме, че $c = \min\{a, b, c\}$, което означава, че условието се записва във вида

$$(1+c^2)(1+(1+a^2)(1+b^2)) = (a+b+c)^2.$$

Подходящо прилагане на неравенството на Коши-Буняковски дава

$$(a+b+c)^2 \leq (1+(a+b)^2)(1+c^2)$$

и следователно $(1+a^2)(1+b^2) \leq (a+b)^2 \iff (ab-1)^2 \leq 0$. Оттук $ab = 1$ и трябва да имаме равенство по-горе, т.е. $c(a+b) = 1$. Обратно, ако са в сила равенствата $ab = 1$ и $c(a+b) = 1$, то условието е изпълнено. Следователно решенията на задачата са всички тройки $(x, y, z) = (1+a^2, 1+\frac{1}{a^2}, 1+\frac{a^2}{(a^2+1)^2})$, където $a > 0$, и техните пермутации.

Задача 5. (Р. Стонг) Дадени са естествени числа m и n . Да се докаже, че съществува естествено число s , за което в десетичните записи на числата sm и sn всяка ненулева цифра участва еднакъв брой пъти (колкото в sm , толкова и в sn).

Решение. За всяко естествено k можем да запишем $10^k m - n = 2^r \cdot 5^s t$, където $(t, 10) = 1$. Тъй като при достатъчно голямо k степените на 2 и 5 в

дясната страна няма да надминават степените им в каноничното разлагане на n , можем да получаваме произволно големи t . Затова ще считаме, че k и t са по-големи от $\max\{m, n\}$.

Нека b е показателят на t по модул 10. Тогава b е дължината на периода в десетичното представяне на дробта $\frac{1}{t}$. По-точно, ако $ct = 10^b - 1$, то периодът е b -цифреното десетично представяне на c с евентуално добавени нули. Тъй като t е по-голямо от m и n , десетичните записи на дробите $\frac{m}{t}$ и $\frac{n}{t}$ ще имат за периоди съответно b -цифрените представяния съответно на cm и cn .

От друга страна, от равенството $10^k \frac{m}{t} = 2^r \cdot 5^s + \frac{n}{t}$ следва, че десетичният запис на $\frac{n}{t}$ се получава от този на $\frac{m}{t}$ с изместване надясно на k позиции и премахване на цялата част. Следователно b -цифрените десетични представяния на cm и cn са циклично изместени едно спрямо друго. В частност, всяка ненулева цифра се появява еднакъв брой пъти (това не може да се твърди за 0, защото не е ясен броят на нулите в началата на b -цифрените записи).

Задача 6. (Т. Андрееску, К. Похоата) Даден е $\triangle ABC$. Да се намерят всички точки P от отсечката BC , които имат следното свойство: ако X и Y са пресечните точки на правата PA с общите външни допирателни на описаните около $\triangle PAB$ и $\triangle PAC$ окръжности, то

$$\left(\frac{PA}{XY}\right)^2 + \frac{PB \cdot PC}{AB \cdot AC} = 1.$$

Решение. Нека ω_B и O_B (съответно ω_C и O_C) са окръжността, описана около $\triangle ABP$ (съответно $\triangle ACP$) и центърът ѝ; правата ST , $S \in \omega_B$, $T \in \omega_C$, е едната обща допирателна на ω_B и ω_C , $X \in ST$, и Y да лежи на другата обща допирателна.

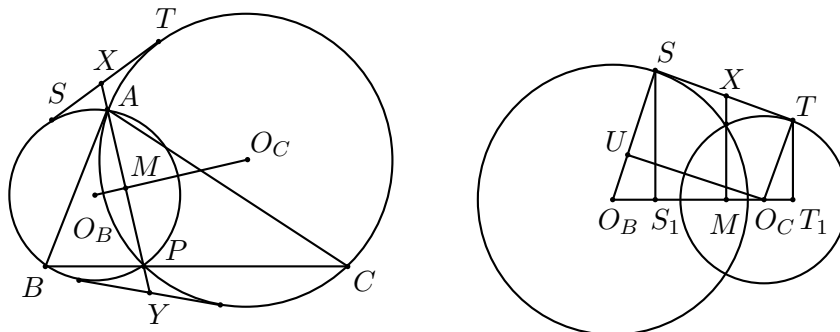
Ще започнем с два добре известни геометрични факта. Ще използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$.

Първо, ако $M = O_B O_C \cap XY$, то M е среда едновременно на AP и XY , а правата $O_B O_C$ е симетрала на тези отсечки. Освен това X е среда на ST (от степените на X относно двете окръжности имаме $XS^2 = XA \cdot XP = XT^2$).

Второ, триъгълниците ABC и $AO_B O_C$ са подобни¹. Действително, имаме

¹Този факт е известен като теорема на Салмън.

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle MO_B O_C = \sphericalangle O_C O_B A = \widehat{AP} / 2$ (в ω_B) и аналогично $\sphericalangle ACB = \sphericalangle O_B O_C A$. От това подобие следват равенствата $\frac{c}{AO_B} = \frac{a}{O_B O_C} = \frac{b}{O_C A}$.



Ще докажем, че е в сила равенството

$$1 - \left(\frac{PA}{XY} \right)^2 = \frac{a^2}{(b+c)^2}.$$

От последното и условието получаваме $PB \cdot PC = \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$. Има две точки P_1 и P_2 върху BC , за които е в сила последното равенство – пресечната точка на ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и BC и нейната симетрична относно средата на BC (Проверете!). От друга страна, условието $PB(a - PB) = \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$ е квадратно уравнение относно PB и не може да има повече от две решения.

Остава да докажем споменатото по-горе равенство. Имаме

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{PA}{XY} \right)^2 &= \frac{XY^2 - PA^2}{XY^2} = \frac{(XY + PA)(XY - PA)}{XY^2} \\ &= \frac{4XA \cdot XP}{XY^2} = \frac{4XS^2}{XY^2} = \frac{ST^2}{XY^2}. \end{aligned}$$

Нека S_1 и T_1 са петите на перпендикулярите съответно от S и T към правата $O_B O_C$, а U е петата на перпендикуляра от O_C към $O_B S$. Тогава правоъгълните триъгълници $O_B S S_1$, $O_C T T_1$ и $O_B O_C U$ са подобни, а XM

е средна отсечка в правоъгълния трапец S_1STT_1 . Следователно

$$\begin{aligned}\frac{ST}{O_BO_C} &= \frac{UO_C}{O_BO_C} = \frac{S_1S}{O_BS} = \frac{T_1T}{O_CT} \\ &= \frac{S_1S + T_1T}{O_BC + O_CT} = \frac{2XM}{O_BS + O_CT} = \frac{XY}{O_BS + O_CT},\end{aligned}$$

откъдето

$$\frac{ST}{XY} = \frac{O_BO_C}{O_BS + O_CT} = \frac{O_BO_C}{O_BA + O_CA} = \frac{a}{b+c}$$

(използвахме подобие на ABC и AO_BO_C) и исканото следва.

Тайланд

Задача 1. Да се намери най-голямото естествено число, което дели $p^4 - 1$ за всяко просто число $p > 3$.

Решение. Тъй като $p > 3$ е просто число, то $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$ и следователно $p^4 \equiv 1 \pmod{3}$. От друга страна, понеже p е нечетно, то имаме $p \equiv \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7 \pmod{2^4}$. Директно се проверява, че при всеки възможен остатък е изпълнено $p^4 \equiv 1 \pmod{2^4}$. Следователно $3 \cdot 2^4$ дели $p^4 - 1$ за всяко просто $p > 3$. Тъй като $\text{НОД}(5^4 - 1, 7^4 - 1) = 3 \cdot 2^4$, то търсеното най-голямо естествено число е $3 \cdot 2^4 = 48$.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$, за който $\angle ABC > \angle BCA$ и $\angle BCA \geq 30^\circ$. Ъглополовящите на $\angle ABC$ и $\angle BCA$ пресичат срещуположните страни съответно в точки D и E . Правата BD пресича правата CE в точка P . Ако $PD = PE$ и радиусът на вписаната окръжност за $\triangle ABC$ има радиус 1, да се намери най-голямата възможна дължина на страната BC .

Решение. Ако $\varphi = \angle BDA$ и $\psi = \angle AEC$, то

$$(1) \quad \varphi = \gamma + \frac{\beta}{2}, \psi = \beta + \frac{\gamma}{2}.$$

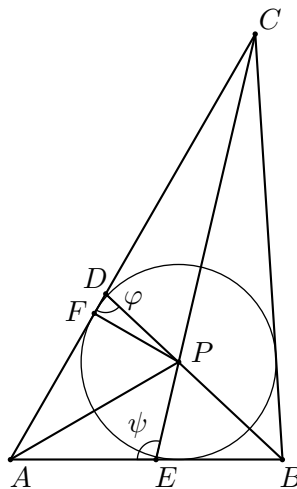
От $\beta > \gamma$ следва $\varphi < \psi$. От синусовата теорема за $\triangle APD$ и $\triangle APE$ имаме

$$\frac{AP}{\sin \varphi} = \frac{PD}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{PE}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{AP}{\sin \psi},$$

т.е. $\sin \varphi = \sin \psi$. Тъй като $0 < \varphi, \psi < 180^\circ$ и $\varphi < \psi$ имаме $\psi = 180^\circ - \varphi$. От (1) намираме $\beta + \gamma = 120^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$.

От синусовата теорема за $\triangle ABC$ намираме

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{b + c - a}{\sin \beta + \sin \gamma - \sin 60^\circ}.$$



Ако F е допирната точка на вписаната окръжност със страната CA , имаме

$$\operatorname{tg}(\angle FAP) = \frac{1}{\frac{b+c-a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

откъдето $b + c - a = 2\sqrt{3}$. От $\beta + \gamma = 120^\circ$ намираме

$$\sin \beta + \sin \gamma = \sin(120^\circ - \gamma) + \sin \gamma = \sqrt{3} \sin(60^\circ - \gamma)$$

и следователно

$$a = \frac{6}{2\sqrt{3} \cos(60^\circ - \gamma) - \sqrt{3}} \leq \frac{6}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}|2|) - \sqrt{3}} = \frac{6}{3 - \sqrt{3}},$$

като равенство се достига при $\gamma = 30^\circ$.

Задача 3. Всяка точка в равнината е оцветена в червено или синьо. Да се докаже, че съществува триъгълник със страни 1, 2 и $\sqrt{3}$ чийто върхове са едноцветни.

Решение. Поне два от върховете на равностранен триъгълник ABC със страна 2 са в един и същи цвят. Нека това са върховете B и C и нека те са червени. Ако D и E са средите на страните BA и CA , то всеки от триъгълниците BCD и CBE е със страни 1, 2 и $\sqrt{3}$, което означава, че ако някоя от точките D или E е червена, то съществува триъгълник с исканото свойство. Нека D и E са сини. Ако D' и E' са симетричните точки съответно на D и E спрямо BC , то същите разсъждения показват, че точките D' и E' са също сини. Тогава $\triangle D'DE$ е с исканите свойства.

Задача 4. Да се намерят всички полиноми $p(x)$ със старши коефициент 1, имащи следните свойства:

- (1) $p(x)$ не е константа и всичките му корени са реални и различни;
- (2) ако a и b са корени на $p(x)$, то $a + b + ab$ е също корен на $p(x)$.

Решение. Ако a е корен на $p(x)$, то според свойство (2) числото $a^2 + 2a$ също е корен на $p(x)$.

1. Ако $a > 0$, то $0 < a < a^2 + 2a < (a^2 + 2a)^2 + 2(a^2 + 2a) < \dots$ и получаваме безкрайна растяща редица от корени на $p(x)$.

2. Ако $-1 < a < 0$, то $0 > a > a^2 + 2a > -1$. Понеже $f(x) = x^2 + 2x$ е строго рестаща в интервала $(-1, 0)$, отново получаваме безкрайна намаляваща редица от корени на $p(x)$ в интервала $(-1, 0)$.

3. Ако $-2 < a < -1$, то $-1 < f(a) < 0$ и от предишния случай получаваме безбройно много корени на полинома $p(x)$.

4. Ако $a < -2$, то $f(a) > 0$ и попадаме в първия случай.

От горните четири случая следва, че ако $a \notin \{-2, -1, 0\}$, то полиномът $p(x)$ има безбройно много корени, което е невъзможно. С директна проверка се получава, че при $a \in \{-2, -1, 0\}$ възможните полиноми са:

$$x, x+1, x(x+1), x(x+2), x(x+1)(x+2).$$

Задача 5. Да се намери петцифрено естествено число n с възможно най-малък сбор на цифрите и такова, че $n^3 - 1$ се дели на 2556.

Решение. Тъй като $2556 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71$ имаме $n^3 \equiv 1 \pmod{2^2 \cdot 3^2 \cdot 71}$. Освен това от теоремата на Ферма получаваме $n^{70} \equiv 1 \pmod{71}$, откъдето

$$1 \equiv n \cdot n^{69} \equiv n \cdot (n^3)^{23} \equiv n \pmod{71}.$$

Следователно $71|n-1$. От $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ следва (от това, че $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ е нечетно число), че $4|n-1$. Накрая, ако $3 \nmid n-1$, то $3|n(n+1)$ и тогава $3 \nmid n^2 + n + 1$, т.е. $3 \nmid n^3 - 1$ - противоречие. Получихме, че $n-1$ се дели на $3 \cdot 4 \cdot 71$ и следователно $n = 3 \cdot 4 \cdot 71 \cdot k + 1 = 852k + 1$. Ще докажем, че търсеното число с най-малък сбор на цифрите е $n = 852 \cdot 25 + 1 = 21301$. Тъй като последната цифра на $852k$ не може да бъде 9, то достатъчно е да намерим петцифрено естествено число от вида $852k$ с минимален сбор на цифрите. Понеже това число се дели на 3, то сборът от цифрите му също се дели на 3. Освен това последните две цифри образуват число, което се дели на 4. Ако сборът от цифрите е 3, то единствената възможност е това число да е от вида $\overline{abc}20$. Тогава $a+b+c=1$, откъдето $a=1$ и $b=c=0$. Но 10020 не се дели на 71 и следователно търсеното число е 21301.

Задача 6. Да се намерят всички функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които

$$(x^2 + y^2)f(xy) = f(x)f(y)f(x^2 + y^2)$$

за произволни реални числа x и y .

Решение. Нека $f(x) \neq 0$. Полагаме $x = y = 0$ и получаваме $f(0) = 0$. При $y = 1$ функционалното уравнение добива вида:

$$(1) \quad (x^2 + 1)f(x) = f(x)f(1)f(x^2 + 1).$$

Ако съществува $b \neq 0$, за което $f(b) = 0$, полагаме $y = b$ и получаваме $f(bx) = 0$ за всяко x , което е противоречие с $f(x) \neq 0$. При $x > 1$ заместваме x с $\sqrt{x-1}$ в (1) и получаваме

$$(2) \quad f(x)f(1) = x.$$

Сега от (2) и от функционалното уравнение от условието следва

$$(3) \quad f(xy)f(1) = f(x)f(y) \text{ при } x \text{ и } y \text{ такива, че } x^2 + y^2 > 1.$$

При $0 < x < 1$ полагаме $y = \frac{1}{x}$ (тогава $x^2 + y^2 > 2 > 1$) в (3) и намираме

$$(4) \quad f(x) = f(1)^3 x.$$

Полагаме $x = y \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в уравнението от условието и от (4) следва, че

$$x^2(2x)^2 f(1)^3 = (2x^2)f(x^2) = f(2x^2)f(x)^2 = (f(1)^3 2x^2)(f(1)^3 x)^2,$$

откъдето $f(1) = \pm 1$.

1. Нека $f(1) = 1$. От (2) и (4) следва, че

$$(5) \quad f(x) = x \text{ при } x \geq 0.$$

Тъй като $x^2 + y^2 \geq 0$, от (5) и от функционалното уравнение намираме

$$(6) \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Ако $f(x) = x$ за всяко $x < 0$, то $f(x) = x$ за всяко x . Ако съществува $a < 0$, за което $f(a) \neq a$, то $x = y = a$ в (6) дава $f(a^2) = a^2$. Сега от (5) следва $f(a)^2 = a^2$, т.е. $f(a) = -a$. При $x < 0$ имаме $ax > 0$ и от (5) намираме $f(ax) = ax$. При $x = a$, $y = x$ в (6) намираме

$$ax = f(ax) = f(a)f(x) = -af(x),$$

т.е. $f(x) = -x$. Следователно $f(x) = |x|$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

2. Нека $f(1) = -1$. При $g(x) = -f(x)$ функцията $g(x)$ удовлетворява същото функционално уравнение като $f(x)$ и $g(1) = 1$. Както в предходния случай намираме $f(x) = -|x|$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Директна проверка на получените функции показва, че решенията са:

$$f(x) \equiv 0, f(x) = x, f(x) = -x, f(x) = |x|, f(x) = -|x|.$$

Задача 7. В правилен шестоъгълник $ABCDEF$ със страна 1 са избрани различни точки $P_1, P_2, \dots, P_{2556}$. Ако никои три точки от множеството

$$S = \{A, B, C, D, E, F, P_1, P_2, \dots, P_{2556}\}$$

не лежат на една права, да се докаже, че съществува триъгълник с върхове от S чието лице е по-малко от $\frac{1}{1700}$.

Решение. Да разгледаме триангулация на правилния шестоъгълник и дадените точки. Сборът на всички ъгли от тази триангулация е равен на $2556.360^\circ + 4.180^\circ$ и следователно триъгълниците са $2556.2 + 4 = 5116$. Ако всеки от тези триъгълници има лице поне $\frac{1}{1700}$, то лицето на шестоъгълника ще бъде поне $5116 \cdot \frac{1}{1700} > 3 > \frac{3\sqrt{3}}{2} = S_{ABCDEF}$, което е противоречие.

Задача 8. Даден е полином $p(x) = x^{2003} + a_{2012}x^{2012} + \dots + a_1x + a_0$ с реални коефициенти. Нека всички корени на $p(x)$ са

$$-b_{1006}, -b_{1005}, \dots, -b_1, 0, b_1, \dots, b_{1005}, b_{1006},$$

където $b_1, b_2, \dots, b_{1006}$ са положителни реални числа с произведение 1. Да се докаже, че $a_3 a_{2011} \geq 1012036$.

Решение. От условието следва, че

$$p(x) = x(x^2 - b_1^2) \dots (x^2 - b_{1006}^2),$$

откъдето получаваме

$$x^{2002} + a_{2012}x^{2011} + \dots + a_1 = (x^2 - b_1^2) \dots (x^2 - b_{1006}^2).$$

Полиномът в дясната част на горното равенство е полином на x^2 , което означава, че $a_2 = a_4 = \dots = a_{2012} = 0$, т.е.

$$(x^2 - b_1^2) \dots (x^2 - b_{1006}^2) = a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + \dots + a_{2011}x^{2010} + x^{2012}.$$

От формулите на Виет намираме $\sum_{i=1}^{1006} b_i^2 = -a_{2011}$ и

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{1005} \leq 1006} b_{i_1}^2 \dots b_{i_{1005}}^2 = (-1)^{1005} a_3 = -a_3.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
 a_3 a_{2011} &= \left(- \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{1005} \leq 1006} b_{i_1}^2 \dots b_{i_{1005}}^2 \right) \left(- \sum_{i=1}^{1006} b_i^2 \right) = \\
 &= \left(\prod_{i=1}^{1006} b_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{1006} \frac{1}{b_i^2} \right) \left(\sum_{i=1}^{1006} b_i^2 \right) = \\
 &= \left(\sum_{i=1}^{1006} \frac{1}{b_i^2} \right) \left(\sum_{i=1}^{1006} b_i^2 \right) \geq 1006^2 = 1012036,
 \end{aligned}$$

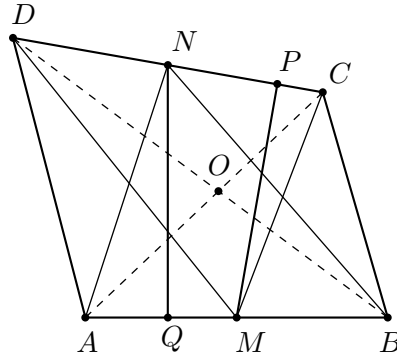
където неравенството следва от неравенството на Коши-Буняковски.

Задача 9. Точките M и N са среди съответно на страните AB и CD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Точка P от страната CD е такава, че $MP \perp CD$, а точка Q от правата AB е такава, че $NQ \perp AB$. Да се докаже, че $AD \parallel BC$ тогава и само тогава, когато $\frac{AB}{CD} = \frac{MP}{NQ}$.

Решение. Означаваме лицето на фигура $\mathcal{A}$ с $[\mathcal{A}]$. Имаме

$$[ABCD] = [ADM] + [DMC] + [MCB] = \frac{1}{2}[ABD] + \frac{1}{2}CD \cdot MP + \frac{1}{2}[ABC],$$

$$[ABCD] = [ADN] + [ANB] + [NBC] = \frac{1}{2}[ADC] + \frac{1}{2}AB \cdot NQ + \frac{1}{2}[BCD].$$



Следователно

$$\begin{aligned}
 CD \cdot MP - AB \cdot NQ &= [ADC] + [BCD] - [ABD] - [ABC] = \\
 &= [ABCD] + [DOC] - [AOB] - ([ABCD] + [AOB] - \\
 &\quad - [DOC]) = 2([DOC] - [AOB]) = 2([ADC] - [ADB]),
 \end{aligned}$$

т.е. $CD.MP = AB.NQ \iff [ADC] = [ADB]$. Оттук

$$AD \parallel BC \iff [ADC] = [ADB] \iff \frac{AB}{CD} = \frac{MP}{NQ}.$$

Задача 10. Да се намерят всички естествени числа x и y за които числото $\frac{xy^3}{x+y}$ е точен куб на просто число.

Решение. Нека p е просто число, за което

$$(1) \quad xy^3 = p^3(x+y).$$

Ако $p \nmid y$, то $p^3 \mid x$. Тогава $x = p^3h$ и следователно $p^3hy^3 = p^2(p^3h+y)$. След опростяване намираме $y(hy^2-1) = p^3h$. Тъй като $p \nmid y$, то $p^3 \mid (hy^2-1)$, т.е. $y \mid h$. Нека $h = yk$. Тогава $y(ky^3-1) = p^3yk$, откъдето $k(y^3-p^3) = 1$. Следователно $y^3-p^3 = \pm 1$, противоречие.

Нека $p \mid y$, т.е. $y = ps$. От (1) намираме $xps^3 = p^3(x+ps)$, откъдето $x(s^3-1) = ps$. Тъй като $s \nmid (s^3-1)$, то $s \mid x$. Тогава $s^3-1 \mid p$, което означава, че $s^3-1 = p$. Това е възможно само при $s-1 = 1$ и $s^2+s+1 = p$. Следователно $x = s = 2$, $p = 7$, т.е. $x = 2$ и $y = 14$.

Задача 11. Дадени са естествени числа m и n . Дадени са n купчини от златни монети, като i -тата купчина съдържа $a_i > 0$ монети. Разглеждаме следната игра:

1. Боб избира множества $B_1, B_2, \dots, B_n$, всяко от които е подмножество на $\{1, 2, \dots, m\}$.
2. Алис, знаейки избраните множества от Боб, избира непразно подмножество S на $\{1, 2, \dots, m\}$.
3. Монетите от купчинка i се дават на Боб, ако сечението $B_i \cap S$ има четен брой елементи. В противен случай монетите се дават на Алис.

Да се докаже, че каквито и множества $B_1, B_2, \dots, B_n$ да избере Боб, Алис може да избере множество S така, че да получи повече монети от Боб.

Решение. Алис ще има повече монети ако $\sum_{i=1}^n (-1)^{|B \cap S|} a_i < 0$. Да допуснем, че за всяко непразно множество S Алис получава по-малко монети от Боб. Това означава, че

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{|B \cap S|} a_i \geq 0,$$

като при $S = \emptyset$ имаме $\sum_{i=1}^n (-1)^{|B \cap S|} a_i = \sum_{i=1}^n a_i > 0$. Сумираме по всички множества S и получаваме

$$(1) \quad \sum_{S \subset \{1,2,\dots,m\}} \sum_{i=1}^n (-1)^{|B \cap S|} a_i > 0.$$

За произволно множество B Да разгледаме сумата $\sum_{S \subset \{1,2,\dots,m\}} (-1)^{|B \cap S|}$. При $S = C \cup D$, където $C = S \setminus B$, $D = S \cap B$ и $C \cap D = \emptyset$ имаме

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset \{1,2,\dots,m\}} (-1)^{|B \cap S|} &= \sum_{C \subset \{1,2,\dots,m\} \setminus B} \sum_{D \subset B} (-1)^{|B \cap (C \cup D)|} = \\ &= \sum_{C \subset \{1,2,\dots,m\} \setminus B} \sum_{D \subset B} (-1)^{|D|}. \end{aligned}$$

Понеже $|B| > 0$, то $\sum_{D \subset B} (-1)^{|D|} = \sum_{r=0}^{|B|} (-1)^r \binom{|B|}{r} = 0$ и следователно $\sum_{S \subset \{1,2,\dots,m\}} (-1)^{|B \cap S|} = 0$ за всяко непразно подмножество B на $\{1, 2, \dots, m\}$. Получаваме

$$\sum_{S \subset \{1,2,\dots,m\}} \sum_{i=1}^n (-1)^{|B \cap S|} a_i = \sum_{i=1}^n \left(a_i \sum_{S \subset \{1,2,\dots,m\}} (-1)^{|B \cap S|} \right) = 0,$$

което е противоречие с (1).

Задача 12. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k се допира до страните BC и AC съответно в точки D и E . Права, перпендикулярна на BC през точка D пресича k в точка P по-близка до A . Правата AP пресича BC в точка M . Нека N е точка от отсечката AC , за която $AE = CN$ и BN пресича k в точка Q по-близка до B и пресича AM в точка R . Да се докаже, че $\triangle ABR$ и четириъгълникът $PQMN$ имат равни лица.

Решение. Нека правата през точка P , успоредна на BC пресича правите AB и AC съответно в точките B' и C' . Ясно е, че правата $B'C'$ е допирателна към окръжността k . Нека Y и Z са произволни точки върху правата BC , а Y' и Z' са пресечните точки на AY и AZ с правата AB . Ако h'_a и h_a са съответно височините на $\triangle AB'C'$ и $\triangle ABC$, то $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$ и $\triangle AY'Z' \sim \triangle AYZ$, откъдето

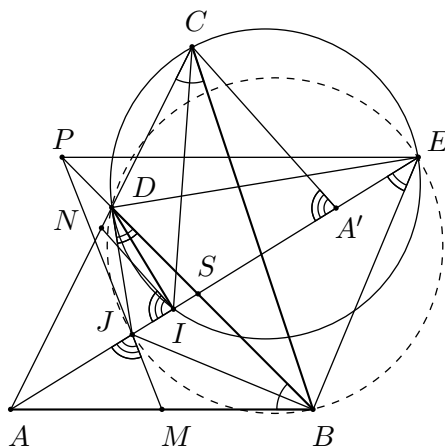
$$(1) \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'_a}{h_a} = \frac{Y'Z'}{YZ}.$$

Южна Корея

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$, за който $\angle B > \angle C$ и точка $D \in AC$ е такава, че $\angle ABD = \angle C$. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и E е втората пресечна точка на правата AI и окръжността, описана около $\triangle CDI$. Нека P е пресечната точка на правата BD и правата през E , успоредна на AB . Нека J е центърът на вписаната в $\triangle ABD$ окръжност и точката A' е симетрична на A относно I . Накрая, нека правите JP и $A'C$ се пресичат в точка Q . Да се докаже, че $QJ = QA'$.

Решение. Ще докажем, че правата PJ минава през средата на страната AB . Нека $PJ \cap AB = \{M\}$ и $BP \cap AI = \{S\}$. От теоремата на Менелай за $\triangle ABS$ и правата PJ имаме $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BP}{PS} \cdot \frac{SJ}{JA} = 1$. Следователно е достатъчно да докажем, че $\frac{BP}{PS} \cdot \frac{SJ}{JA} = 1$.

От свойството на ъглополовящата имаме $\frac{SJ}{JA} = \frac{BS}{AB}$.



Тъй като $\angle JBD = \frac{1}{2}\angle C$ и $\angle DEI = \angle DCI = \frac{1}{2}\angle C$, точките J, B, E и D лежат на една окръжност. Тогава $\angle BEJ = \angle BDJ = \frac{1}{2}\angle B$.

Поради $AB \parallel PE$ имаме $\sphericalangle BEP = \sphericalangle BEJ + \sphericalangle PEA = \sphericalangle BEJ + \sphericalangle EAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle C$. Освен това от $AB \parallel PE$ и от $\sphericalangle EPB = \sphericalangle PBA = \sphericalangle C$ получаваме $\sphericalangle PBE = 180^\circ - \sphericalangle C - (90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle C) = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle C$. Получихме $\sphericalangle PBE = \sphericalangle PEB$, откъдето $PB = PE$. От последното и от $AB \parallel PE$ получаваме $\frac{BS}{AB} = \frac{PS}{PE}$. Оттук и от полученото по-горе, следва, че $AM = BM$.

Нека N е средата на AC . Тъй като $\triangle ABC \sim \triangle ADB$, имаме $\sphericalangle AJM = \sphericalangle AIN$. Тъй като $\sphericalangle AIN = \sphericalangle AA'Q$ и M, J, P и Q лежат на една права, имаме $\sphericalangle QJA' = \sphericalangle QA'J$, откъдето $QJ = QA'$.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, такива, че равенството

$$f(a-b) + f(c-d) = f(a) + f(b+c) + f(d)$$

е изпълнено за всички реални числа a, b, c и d , удовлетворяващи равенството $ab + bc + cd = 0$.

Решение. Първо ще докажем, че $f(p) + f(q) = f(r)$ за всички реални p, q и r , за които $p^2 + q^2 = r^2$. Действително, ако $2a = p - q + r$, $2b = p - q - r$, $2c = p + q = r$ и $d = q$, имаме $2(ab + bc + cd) = p^2 + q^2 - r^2 = 0$ и следователно

$$f(r) + f\left(\frac{p-q+r}{2}\right) = f\left(\frac{p-q+r}{2}\right) + f(p) + f(q),$$

откъдето имаме исканото $f(p) + f(q) = f(r)$.

При $p = q = r = 0$ получаваме $f(0) = 0$, след това при $q = 0$ и $r = -p$ имаме $f(p) = f(-p)$, т.е. f е четна функция.

Да разгледаме функцията $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, дефинирана чрез равенството $g(t) = f(\sqrt{t})$. Тогава от доказаното за f при $p = \sqrt{a}$ и $q = \sqrt{b}$ получаваме $g(a) + g(b) = g(a+b)$. Оттук при $a \geq b \geq 0$ получаваме $g(a) = g(a-b) + g(b) \geq g(b)$, т.е. функцията g е (нестрого) растяща.

От последното и от адитивността на g следва, че $g(x) = g(1)x$. Тогава $f(x) = f(1)x^2$ за всяко $x \geq 0$, което заедно с четността на f дава $f(x) = f(1)x^2$ за всяко x .

Лесно се вижда, че всички функции $f(x) = \lambda x^2$, $\lambda \geq 0$, удовлетворяват условието на задачата.

Задача 3. Да означим $T = \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, i|j\}$, където n е естествено число. Да се намери (като функция на n) максималната възможна

стойност на израза $\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j$, където $x_1, x_2, \dots, x_n$ са реални неотрицателни числа, удовлетворяващи равенството $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Решение. Да означим търсения максимум с $M(n)$ и нека $k \in \mathbb{N}$ е такава, че $2^k \leq n < 2^{k+1}$ (т.е. $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$). Ще докажем, че $M(n) = \frac{k}{2(k+1)}$.

При $x_{2^0} = x_{2^1} = \dots = x_{2^k} = \frac{1}{k+1}$ и $x_i = 0$ за останалите индекси. Тогава лесно се вижда, че

$$\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j = \binom{k+1}{2} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k}{2(k+1)},$$

което означава, че $M(n) \geq \frac{k}{2(k+1)}$.

Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са такива, че $\sum_{(i,j) \in T} x_i x_j = M(n)$ и броят на индексите i , за които $x_i = 0$, да е максимално възможен. Ще докажем, че при тези предположения от $x_a x_b \neq 0$ и $a < b$ следва, че $(a, b) \in T$.

Да допуснем противното и да разгледаме набора $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$, дефиниран чрез $x'_a = x_a - \varepsilon$, $x'_b = x_b + \varepsilon$, $x'_i = x_i$ за $i \neq a, b$. Тъй като $(a, b) \notin T$, изразът $\sum_{(i,j) \in T} x'_i x'_j$ е линейна функция на ε . Следователно за $\varepsilon = x'_a$ или

за $\varepsilon = -x'_b$ имаме $\sum_{(i,j) \in T} x'_i x'_j \geq \sum_{(i,j) \in T} x_i x_j = M(n)$, което е противоречие с

предположението за максималността на броя на нулевите x_i .

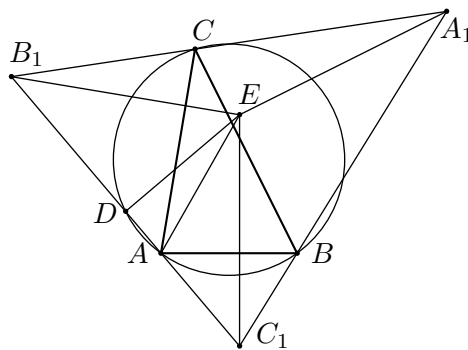
Нека $C = \{i : x_i \neq 0\} = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$, като $i_1 < i_2 < \dots < i_t$. От доказаното по-горе следва, че $(i_p, i_q) \in T$ за всички $p < q$. Тогава $i_p \geq 2i_{p-1}$ за всяко $p \geq 2$, $p \in C$. Следователно $n \geq i_t \geq 2^{t-1} i_1 \geq 2^{t-1}$, т.е. $|C| = t \leq k+1$. Сега последователно имаме

$$\begin{aligned} 2M(n) &= 2 \sum_{(i,j) \in T} x_i x_j = \left(\sum_{i \in C} x_i \right)^2 - \sum_{i \in C} x_i^2 \leq 1 - \frac{1}{|C|} \left(\sum_{i \in C} x_i \right)^2 \\ &\leq 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}, \end{aligned}$$

с което доказателството е завършено.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$, за който точките B_1 и C_1 са центровете на външноописаните окръжности съответно към страните AC и AB . Правата B_1C_1 пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка D , $D \neq A$. Нека E е пресечната точка на перпендикулярите от B_1 към CA и от C_1 към AB . Нека ω е окръжността, описана около $\triangle ADE$. Допирателната към ω в точка D пресича правата AE в точка F . Перпендикулярът от D към AE пресича AE в точка G и тази права пресича ω в точка H , $H \neq D$. Окръжността, описана около $\triangle HGF$, пресича ω в точка I , $I \neq H$. Нека J е петата на перпендикуляра от D към AH . Да се докаже, че правата AI минава през средата на отсечката DJ .

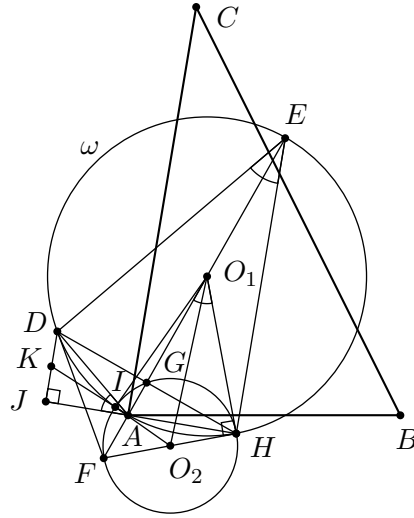
Решение. Първо ще докажем, че $\angle ADE = 90^\circ$. Имаме $\angle EB_1C_1 = \frac{1}{2}\angle A = \angle EC_1B_1$, откъдето $EB_1 = EC_1$. Аналогично $EB_1 = EA_1$ (A_1 е третият център на външноописана окръжност) и значи E е центърът на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност.



От друга страна, (както е добре известно и лесно се доказва) точките A , B и C са петите на височините в $\triangle A_1B_1C_1$. Следователно окръжността, описана около $\triangle ABC$, е окръжността на деветте точки за $\triangle A_1B_1C_1$. Тогава D е среда на B_1C_1 , което означава, че $\angle ADE = 90^\circ$.

Тъй като AE е диаметър в ω и H е симетрична на D относно AE , правата HF също е допирателна към ω . Нека O_1 и O_2 са съответно центровете на ω и на окръжността, описана около $\triangle HGF$. Тогава O_2 е среда на HF .

Тъй като $\angle HO_1F = \angle FO_1D = \angle HED = \angle JAD$, имаме $\triangle HO_1F \sim \triangle JAD$. Тогава $\angle HO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle HO_1I = \angle HAI = \angle JAK$, където $\{K\} = DJ \cap AI$. Тъй като $HO_2 = O_2F$ в $\triangle HO_1F$, имаме $JK = KD$ в $\triangle JAD$.



Задача 5. Нека a и b са взаимнопрости естествени числа и a_n и b_n са цели числа, дефинирани чрез равенството $(a + b\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{2}$. Да се намерят всички прости числа p , за които съществува естествено число $n \leq p$, такова, че b_n се дели на p .

Решение. Тъй като $b_1 = 2ab$, т.е. $p = 2$ и всички прости делители на ab са решения на задачата, оттук нататък ще предполагаме, че p е нечетно просто число, взаимнопросто с a и b .

От условието

$$\begin{aligned} a_n + b_n\sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})^{2n} = (a + b\sqrt{2})^{2(n-1)}(a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}) \\ &= (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})(a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}) \end{aligned}$$

следват рекурентните зависимости

$$\begin{aligned} a_n &= (a^2 + 2b^2)a_{n-1} + 4abb_{n-1} \\ b_n &= 2aba_{n-1} + (a^2 + 2b^2)b_{n-1}. \end{aligned}$$

Ще разгледаме два случая: $p|a^2 - 2b^2$ и $(p, a^2 - 2b^2) = 1$, като ще докажем, че нито едно p от първия случай не е решение, а всички p от втория случай са решения.

Случай 1. Нека $p|a^2 - 2b^2$, p е нечетно и $(p, ab) = 1$. Тогава p не дели $b_1 = 2ab$. Да допуснем, че p дели някое b_r , $r \geq 2$, и нека r е най-малкият

възможен индекс с това свойство. Тъй като

$$\begin{aligned} 0 &\equiv b_r = 2ab[(a^2 + 2b^2)a_{r-2} + 4abb_{r-2}] + (a^2 + 2b^2)b_{r-1} \\ &= 2ab[(a^2 + 2b^2)a_{r-2} + 4abb_{r-2}] \\ &\quad + 2(a^2 + 2b^2)b_{r-1} - (a^2 + 2b^2)[2aba_{r-2} + (a^2 + 2b^2)b_{r-2}] \\ &= 2(a^2 + 2b^2)b_{r-1} - (a^2 - 2b^2)^2b_{r-2} \equiv 2(a^2 + 2b^2)b_{r-1} \pmod{p} \end{aligned}$$

Тъй като $(p, 2(a^2 + 2b^2)) = 1$ при нашите предположения, получаваме $p|b_{r-1}$, което пък противоречи на избора на r . Следователно в този случай нямаме решения на задачата.

Случай 2. Нека $(p, a^2 - 2b^2) = 1$, p е нечетно и $(p, ab) = 1$. Да отбележим, че

$$b_n = \frac{(a + b\sqrt{2})^{2n} - (a - b\sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{2}} = \sum_{k \text{ нечетно}} \binom{2n}{k} a^{2n-k} b^k 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

Нека съществува цяло число m , за които $m^2 \equiv 2 \pmod{p}$ (с други думи, 2 е квадратичен остатък по модул p). Тогава

$$b_n \equiv \sum_{k \text{ нечетно}} \binom{2n}{k} a^{2n-k} b^k m^{k-1} = \frac{(a + bm)^{2n} - (a - bm)^{2n}}{m} \pmod{p}.$$

Тъй като $(a + bm)(a - bm) \equiv a^2 - 2b^2 \pmod{p}$, имаме $(a + bm, p) = (a - bm, p) = 1$ и можем да прилагаме малката теорема на Ферма за $n = \frac{p-1}{2}$, получавайки $b_{\frac{p-1}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$.

Нека сега сравнението $x^2 \equiv 2 \pmod{p}$ да няма решение и да разгледаме $n = \frac{p+1}{2}$. Имаме $\binom{2n}{k} = \binom{p+1}{k} \equiv 0 \pmod{p}$ за $k = 2, 3, \dots, p-1$ и следователно

$$b_{\frac{p+1}{2}} \equiv (p+1)a^p b + (p+1)ab^p 2^{\frac{p+1}{2}} \equiv ab(1 + 2^{\frac{p+1}{2}}) \equiv 0 \pmod{p}$$

(използвахме теоремата на Ферма и $2^{\frac{p+1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ съгласно критерия на Ойлер).

Забележка. В коментар към тази задача на www.artofproblemsolving.com е предложена и следната задача със сходно решение: за редицата $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, зададена с $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ и $u_{n+2} = 3u_{n+1} + u_n$, да се докаже, че за просто $p \neq 2, 13$, имаме $p|u_{p-2}$ (съответно $p|u_p$), ако 2 е квадратичен остатък (съответно неостатък) по модул p .

Задача 6. Нека n е естествено число, а $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ е пермутация. Множествата A , B , C и D са дефинирани по следния начин:

$$\begin{aligned} A &= \{i : i > f(i)\}, \\ B &= \{(i, j) : i < j \leq f(j) < f(i) \text{ или } f(j) < f(i) < i < j\} \\ C &= \{(i, j) : i < j \leq f(i) < f(j) \text{ или } f(i) < f(j) < i < j\} \\ D &= \{(i, j) : i < j \text{ и } f(i) > f(j)\}. \end{aligned}$$

Да се докаже, че $|A| + 2|B| + |C| = |D|$.

Решение. Ще проведем индукция по $|D|$. При $|D| = 0$ пермутацията f е тъждествена и следователно $|A| = |B| = |C| = 0$. Да предположим, че твърдението е вярно за всички пермутации с $|D| < k$, където k е естествено число. Нека f е пермутация, за която $|D_f| = k$ (ще използваме наименованието на функцията в индекса, за да указваме за коя функция е съответното множество) и i е такова, че $f(i) > f(i+1)$.

Да разгледаме функцията $g : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, определена с равенствата $g(j) = j$ за $j \notin \{i, i+1\}$, $g(i) = f(i+1)$ и $g(i+1) = f(i)$. Тогава g е пермутация, за която $|D_g| = k - 1$ и по индукционното предположение имаме $|A_g| + 2|B_g| + |C_g| = |D_g| = k - 1$. За да довършим доказателството, ще определим множествата (и съответно техните мощности) A_g , B_g и C_g в зависимост от A_f , B_f и C_f . Имаме 5 различни възможности.

Случай 1. Ако $f(i+1) > i$ и $f(i) > i+1$, то

$$(|A_f|, |B_f|, |C_f|) = (|A_g|, |B_g| + 1, |C_g| - 1).$$

Случай 2. Ако $f(i+1) = i$ и $f(i) > i$, то поради свойството $|\{j : j < i, i+1 < f(j)\}| = |\{j : f(j) < i, i+1 < j\}|$ имаме

$$(|A_f|, |B_f|, |C_f|) = (|A_g| + 1, |B_g|, |C_g|).$$

Случай 3. Ако $f(i+1) < i$ и $f(i) > i$, то

$$(|A_f|, |B_f|, |C_f|) = (|A_g|, |B_g|, |C_g| + 1)$$

Случай 4. Ако $f(i+1) < i$ и $f(i) = i$, то поради свойството $|\{j : j < i, i+1 < f(j)\}| = |\{j : f(j) < i, i+1 < j\}|$ имаме

$$(|A_f|, |B_f|, |C_f|) = (|A_g| - 1, |B_g| + 1, |C_g|).$$

Случай 5. Ако $f(i+1) < i$ и $f(i) < i$, то

$$(|A_f|, |B_f|, |C_f|) = (|A_g|, |B_g| + 1, |C_g| - 1).$$

Във всички случаи с помощта на индукционното предположение получаваме исканото

$$|A_f| + 2|B_f| + |C_f| = |D_f|.$$

Япония

Задача 1. Дадени са естествени числа n и k , като $n \geq k$. В група от n човека всеки е член на точно един от k клуба, означени с $C_1, C_2, \dots, C_k$, като всеки клуб има поне един член. Да се докаже, че между всички n човека могат да се разпределят n^2 парчета торта, така че да се удовлетворяват следните условия:

- (1) Всеки човек получава поне едно парче торта;
- (2) За всяко i , $1 \leq i \leq k$, всеки член на клуб C_i получава a_i парчета торта;
- (3) Ако $1 \leq i < j \leq k$, то $a_i > a_j$.

Решение. За всяко i , $1 \leq i \leq k$ да означим с x_i броят на членовете на клуб C_i . Ще докажем, че числата $a_i = x_i + 2(x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_k)$ удовлетворяват условието на задачата. Условието $a_i > 0$ е изпълнено. За всяко i , $1 \leq i \leq k-1$ имаме $a_i = x_i + x_{i+1} + a_{i+1} > a_{i+1}$, което означава, че при $1 \leq i < j \leq k$ имаме $a_i > a_j$. Общо раздадените парчета торта са

$$a_1x_1 + \dots + a_kx_k = \sum_{i=1}^k x_k^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k x_ix_j = (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 = n^2.$$

Задача 2. Да се намерят всички реални функции f , дефинирани върху множеството на целите числа, за които

$$f(m) + f(n) = f(mn) + f(m + n + mn)$$

за всеки две цели числа m и n .

Решение. Полагаме $n = 1$ и получаваме

$$f(m) + f(1) = f(m) + f(2m + 1),$$

което означава, че за всяко нечетно число d имаме $f(d) = f(1) = a$ за някое реално a . Всяко цяло, различно от нула число може да се представи във

вида $2^k d$, където k е неотрицателно цяло число, а d е нечетно цяло число. Полагаме $m = d$ и $n = 2^k$ и получаваме

$$f(d) + f(2^k) = f(2^k d) + f(2^k(d+1) + d).$$

Тъй като d и $2^k(d+1) + d$ са нечетни числа, то $f(d) = f(2^k(d+1) + d) = a$. Следователно $f(2^k d) = f(2^k)$ и функцията f се определя еднозначно от стойностите $f(2^k)$ за $k = 0, 1, 2, \dots$ и $f(0)$.

За $k \geq 2$ полагаме $m = 2^k$ и $n = 2$ и получаваме

$$f(2^k) + f(2) = f(2^{k+1}) + f(2^k \cdot 3 + 2).$$

Понеже $2^k \cdot 3 + 2$ е от вида $2d$ за d нечетно число, то $f(2^k \cdot 3 + 2) = f(2)$, откъдето намираме $f(2^k) = f(2^{k+1})$ при $k \geq 2$. Следователно $f(2^k) = b$ при $k \geq 2$. При $m = n = 2$ намираме $2f(2) = f(4) + f(8) = 2b$, т.е. $f(2) = b$. При $m = n = -2$ получаваме $2f(-2) = f(4) + f(0)$ и следователно $f(0) = b$. Получихме, че всяка функция, която удовлетворява условието трябва да има вида

$$f(n) = \begin{cases} a & n \text{ четно,} \\ b & n \text{ нечетно или } 0 \end{cases}$$

за някакви реални числа a и b . Ще докажем, че всяка такава функция удовлетворява условието на задачата. Поради симетрията е достатъчно да разгледаме три случая за четността на m и n .

- Ако m и n са четни, двете страни на даденото в условието уравнение са равни на $2b$.
- Ако m и n са нечетни, двете страни на даденото в условието уравнение са равни на $2a$.
- Ако m и n са с различна четност, двете страни на даденото в условието уравнение са равни на $a + b$.

Следователно всяка функция от описания вид удовлетворява даденото в условието уравнение.

Задача 3. Дадено е естествено число $n \geq 2$. Да се намери най-малкото естествено число m за което съществува редица $a_1, a_2, \dots, a_n$ от естествени числа, удовлетворяваща следните две условия:

$$(1) \ a_1 < a_2 < \dots < a_n = m;$$

(2) всички $n - 1$ числа $\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}, \dots, \frac{a_{n-1}^2 + a_n^2}{2}$ са точни квадрати.

Решение. Ще докажем, че търсената най-малка стойност на m е равна на $2n^2 - 1$. За $a_k = 2k^2 - 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, имаме

$$\frac{a_k^2 + a_{k+1}^2}{2} = \frac{(2k^2 - 1)^2 + (2(k+1)^2 - 1)^2}{2} = (2k^2 + 2k + 1)^2,$$

като $m = 2n^2 - 1$. Остава да докажем, че за всяка редица удовлетворяваща условието е изпълнено $m \geq 2n^2 - 1$. За целта ще докажем, че $a_k \geq 2k^2 - 1$ е вярно за всяко $k = 1, 2, \dots, n$.

Лема. Ако x , y и k са естествени числа, за които $2k^2 - 1 \leq x < y < 2(k+1)^2 - 1$, то $\frac{x^2 + y^2}{2}$ не е точен квадрат на естествено число.

Доказателство. Ако $\frac{x^2 + y^2}{2}$ е точен квадрат на естествено число, то x и y са от една и съща четност. Имаме

$$\frac{x^2 + y^2}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 > 0.$$

Освен това $y - x \leq (2(k+1)^2 - 2) - (2k^2 - 1) = 4k + 1$ и $y \geq x + 2 \geq 2k^2 + 1$. Тъй като $y - x$ е четно число, то първото неравенство може да бъде подоброено до $y - x \leq 4k$. Пресмятаме

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+y}{2} + 1\right)^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} &= x + y + 1 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 \\ &\geq (2k^2 - 1) + (2k^2 + 1) + 1 - (2k)^2 = 1 > 0. \end{aligned}$$

Следователно

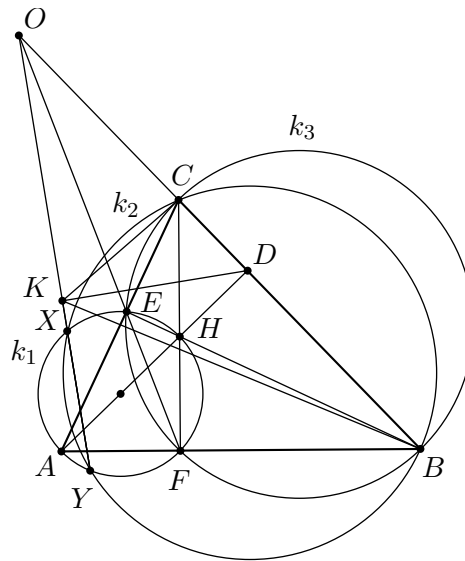
$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 < \frac{x^2 + y^2}{2} < \left(\frac{x+y}{2} + 1\right)^2,$$

откъдето следва, че $\frac{x^2 + y^2}{2}$ не може да е точен квадрат. С индукция по k ще докажем, че $a_k \geq 2k^2 - 1$ за всяко $k = 1, 2, \dots, n$. При $k = 1$ твърдението е очевидно. Ако $a_l \geq 2l^2 - 1$ и $a_{l+1} < 2(l+1)^2 - 1$, то при $x = a_l$ и $y = a_{l+1}$ ще получим противоречие с лемата. Следователно $a_{l+1} \geq 2(l+1)^2 - 1$, с което индукцията е завършена.

Задача 4. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H . Окръжност, минаваща през точките B и C , пресича окръжността с диаметър AH в две точки X и Y . Нека D е петата на перпендикуляра от A към правата BC , а K е петата на перпендикуляра от D към правата XY . Да се докаже, че $\sphericalangle BKD = \sphericalangle CKD$.

Решение. Ако $AB = AC$, то центърът на окръжността минаваща през точките B и C и центърът на окръжността, за която AH е диаметър лежат на симетралата на отсечката BC . Следователно правата XY и симетралата на отсечката BC са перпендикулярни и пресечната им точка съвпада с точката K . Освен това точка D е среда на отсечката BC . Оттук $\sphericalangle BKD = \sphericalangle CKD$.

Нека $AB \neq AC$ и без ограничение да допуснем, че $AB > AC$. Нека E е пресечната точка на BH и AC и F е пресечната точка на CH и AB . Тъй като $\sphericalangle AEH = \sphericalangle AFH = 90^\circ$, то точките E и F са върху окръжността k_1 с диаметър AH . Точките X и Y също са върху k_1 . Ясно е, че точките B, C, X и Y лежат на една окръжност (означаваме тази окръжност с k_2), и точките B, C, E и F лежат на една окръжност (означаваме тази окръжност с k_3).



Ще докажем, че правите XY , BC и EF се пресичат в една точка. Наистина, ако O е пресечната точка на правите BC и EF , то от свойството на секущите в k_3 следва, че $OB \cdot OC = OF \cdot OE$, т.е. O има една и съща степен

спрямо окръжностите k_1 и k_2 . Следователно O лежи на радикалната ос на двете окръжности XY .

От теоремата на Чева сега следва

$$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{FB \cdot DC \cdot EA} = 1,$$

а от теоремата на Менелай имаме

$$\frac{AF \cdot BO \cdot CE}{FB \cdot OC \cdot EA} = 1,$$

откъдето намираме $\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{OC}$. Нека точката C' от отсечката DO е такава, че $\sphericalangle BKD = \sphericalangle C'KD$. Тъй като KD е ъглополовяща на $\sphericalangle BKC'$ и $\sphericalangle DKO = 90^\circ$, то KO е ъглополовяща на $\sphericalangle EKO$. Следователно

$$\frac{BD}{DC'} = \frac{KB}{KC'}, \quad \frac{BO}{OC'} = \frac{KB}{KC'},$$

откъдето $\frac{BD}{DC'} = \frac{BO}{OC'}$. От това равенство и от $\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{OC}$ намираме $\frac{OC}{DC} = \frac{OC'}{DC'}$. Понеже и двете точки C и C' са върху отсечката DO , то $C \equiv C'$. Следователно $\sphericalangle BKD = \sphericalangle CKD$.

Задача 5. Дадено е естествено число n . В равнината са избрани точки $P_1, P_2, \dots, P_{4n}$ никои три от които не лежат на една права. Известно е, че за всяко $i = 1, 2, \dots, 4n$ образът на лъча $P_i P_{i-1}^{\rightarrow}$ при ротацията с център P_i на ъгъл 90° по посока на часовниковата стрелка е лъча $P_i P_{i+1}^{\rightarrow}$. Да се намери максималния възможен брой двойки (i, j) , $1 \leq i < j \leq 4n$, за които отсечките $P_i P_{i+1}$ и $P_j P_{j+1}$ се пресичат в точка, различна от край на отсечка. (Приемаме, че $P_0 = P_{4n}$ и $P_{4n+1} = P_1$.)

Решение. За $k = 1, 2, \dots, n$ да положим $A_k = P_{4k-3}$, $B_k = P_{4k-2}$, $C_k = P_{4k-1}$ и $D_k = P_{4k}$. Освен това, нека $A_{n+1} = A_1$ и $B_{n+1} = B_1$. Можем да считаме, че насочените отсечки $A_i B_i$, $B_i C_i$, $C_i D_i$ и $D_i A_{i+1}$ сочат съответно наляво, надолу, надясно и нагоре. За всяко $i = 1, 2, \dots, n$ ще казваме, че начупената линия $A_i B_i C_i$ е от тип наляво-надолу и аналогично дефинираме надолу-надясно, надясно-нагоре, нагоре-наляво начупени линии.

Разглеждаме пресечната точка на две отсечки, сочещи съответно наляво и надолу като пресечна точка на две начупени линии от вида наляво-надолу. Задачата се свежда до намирането на максималния възможен брой

на пресечните точки на две наляво-надолу начупени линии, две надолу-надясно начупени линии, две надясно-нагоре начупени линии и две нагоре-наляво начупени линии.

Ще казваме, че двойката (i, j) за $1 \leq i \neq j \leq n$ е добра, ако начупените линии във всяка от следните четирите двойки $A_i B_i C_i$ и $A_j B_j C_j$, $B_i C_i D_i$ и $B_j C_j D_j$, $C_i D_i A_{i+1}$ и $C_j D_j A_{j+1}$, $D_i A_{i+1} B_i$ и $D_j A_{j+1} B_j$ се пресичат. Да забележим, че ако (i, j) е добра двойка и A_i се намира над A_j , то B_i лежи надясно от B_j , C_i лежи под C_j , D_i се намира наляво от D_j и A_{i+1} се намира под A_{j+1} .

Лема. Означаваме допълнението на всяко непразно същинско подмножество X на множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ с $Y = X^c$. Тогава съществуват $x \in X$ и $y \in Y$, за които двойката (x, y) не е добра.

Доказателство. За всяко $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ дефинираме:

$$x^+ = \begin{cases} x + 1 & \text{ако } 1 \leq x \leq n - 1 \\ 1 & \text{ако } x = n \end{cases}, x^- = \begin{cases} x - 1 & \text{ако } 2 \leq x \leq n \\ n & \text{ако } x = 1 \end{cases}.$$

Нека за всеки избор на $x \in X$ и $y \in Y$ двойката (x, y) е добра. Дефинираме $f(k) = i$ и $f^{-1}(i) = k$, ако A_k е на i -та позиция отгоре надолу измежду точките $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Ще докажем, че за всяко k , $1 \leq k \leq n$ броят на точките измежду $f(1), f(2), \dots, f(k)$, които принадлежат на X е равен на броят на точките измежду $f(1)^-, f(2)^-, \dots, f(k)^-$, които принадлежат на X . Да допуснем, че в първото множество има повече елементи. Тогава съществува $x \in X$, за което $f^{-1}(x) \leq k$ и $f^{-1}(x^+) > k$. Освен това, тъй като броят на точките от множеството $\{f(k+1), f(k+2), \dots, f(n)\}$, които са от Y е по-голям от броя на точките от множеството $\{f(k+1)^-, f(k+2)^-, \dots, f(n)^-\}$, които са от Y , то съществува $y \in Y$, за което $f^{-1}(y) > k$ и $f^{-1}(y^+) \leq k$. Това означава, че двойката (x, y) не е добра двойка, противоречие. По същия начин се стига до противоречие ако допуснем, че във второто множество има повече елементи от първото.

Използвайки равенството на елементите в двете множества за $k = l$ и $k = l - 1$, намираме

$$f(l) \in X \iff f(l)^- \in X.$$

Това означава, че за всяко x имаме

$$x \in X \iff x^- \in X.$$

Това противоречи на допускането, че X е непразно подмножество на $\{1, 2, \dots, n\}$, с което лемата е доказана.

Да допуснем, че броят на двойките (x, y) , които не са добри, е най-много $n - 2$. Тогава броят на елементите от множеството $\{1, 2, \dots, n\}$, които могат да бъдат достигнати от 1 чрез последователност от двойки, които не са добри, е най-много $n - 1$. Нека X е множеството от онези елементи, които могат да бъдат достигнати от 1 по този начин, а Y е допълнението на X . Получаваме противоречие с лемата. Следователно имаме най-много $n - 1$ двойки от множеството в $\{1, 2, \dots, n\}$, които не са добри. Следователно максималният брой двойки (i, j) , удовлетворяващи условието, е равен на

$$4\binom{n}{2} - (n - 1) = (2n - 1)(n - 1).$$

Предоставяме на читателя да посочи пример, в който пресечните точки са точно $(2n - 1)(n - 1)$, което означава, че това е и отговорът на задачата.