

НАЦИОНАЛНИ ОЛИМПИАДИ ПО МАТЕМАТИКА 2014

Петър Бойваленков Емил Колев
Николай Николов

УНИМАТ СМБ
Съюз на Математиците в България

Настоящата книга е под номер седем в започнатата през 2008 г. поредица. Представени са условията и решенията на задачите от финалните етапи на националните олимпиади във водещи (по преценка на авторите) в “олимпийската“ математика страни, като за първи път са включени задачите от националните олимпиади на Великобритания и Холандия.

Текстът се основава на материалите, разпространявани между ръководствата на националните отбори по време на Международната олимпиада по математика (Кейптаун, Република Южна Африка, 3-13 юли 2014 г.), както и на материали от интернет. Авторите се надяват задачите от тази книга да послужат добре както на учениците с изяви интереси в областта на математиката, така и на специалистите, които се занимават с подготовка на олимпийци.

Copyright © УНИМАТ СМБ
София 1113, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8
тел. (02)979-28-06, e-mail: peter@math.bas.bg
София, ноември 2014 г.
ISBN: 978-954-8880-43-5

СЪДЪРЖАНИЕ

	Условия	Решения
Великобритания	3	19
Иран	4	23
Китай	5	29
Русия	7	37
САЩ	11	53
Тайланд	13	60
Холандия	15	67
Южна Корея ...	17	73

Великобритания

Задача 1. Всеки от диагоналите на правилен 2014-ъгълник е оцветен в някой от дадени n цвята. Известно е, че всеки два диагонала, които се пресичат във вътрешна точка, са оцветени в различни цветове. Кое е най-малкото n , за което това е възможно?

Задача 2. Да се докаже, че не съществува правоъгълен паралелепипед, чиито периметър, пълна повърхнина и обем се изразяват с едно и също реално число.

Задача 3. Редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ е зададена с равенствата $a_0 = 4$ и $a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1}$ за всяко естествено число n .

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много прости числа, които делят поне по един член на редицата.

б) Съществуват ли безбройно много прости числа, които не делят нито един член на редицата?

Задача 4. Точка P е вътрешна за $\triangle ABC$. Правата AP пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точка A' . Аналогично се дефинират точките B' и C' . Нека O_A е центърът на описаната около $\triangle BCP$ окръжност. Аналогично се дефинират точките O_B и O_C . Нека O'_A е центърът на описаната около $\triangle B'C'P$ окръжност. Аналогично се дефинират точките O'_B и O'_C . Да се докаже, че правите $O_AO'_A$, $O_BO'_B$ и $O_CO'_C$ се пресичат в една точка.

Иран

Задача 1. Да се намерят всички двойки взаимнопрости естествени числа a и b , за които $b, a = \frac{a}{b}$. (Например при $a = 92$ и $b = 13$ имаме $b, a = 13, 92 = \frac{1392}{100}$.)

Задача 2. Дадени са няколко тежести с тегла естествени числа $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$. Едно такова множество от тежести се нарича *пълно*, ако всяко естествено число, което е по-малко от $w_1 + w_2 + \dots + w_n$, може да се представи като сбор на няколко от тези тежести. Да се докаже, че ако от едно пълно множество премахнем най-голямата тежест, останалите тежести също образуват пълно множество.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ с описана окръжност ω с център O . Точката M е среда на дъгата $\widehat{BC}$, която не съдържа A . Правите през O , които са успоредни на MB и MC , пресичат страните AB и AC съответно в точки K и L . Ако височината през A към страната BC пресича ω в точка N , да се докаже, че $NK = NL$.

Задача 4. Дадена е окръжност C и точка P извън окръжността. Отсечките PA и PB са допирателни към окръжността C и K е произволна точка от отсечката AB . Описаната окръжност около $\triangle PBK$ пресича за втори път C в точка T . Ако точка P' е симетрична на P спрямо A , да се докаже, че $\angle PBT = \angle P'KA$.

Задача 5. Във всяка от клетките на таблица $n \times m$ е записано по едно цяло число. Диагонал на таблицата се нарича множество от клетки за които разликата между номера на реда и номера на стълба е едно и също число. На всяка стъпка имаме право да прибавим 1 или да извадим 1 към всички клетки от даден ред, стълб или диагонал. Да се докаже, че ако, прилагайки тези операции, можем да направим равни на нула числата във всяка подтаблица 3×3 , като останалите числа не се променят, то можем да направим всички числа в таблицата равни на нула.

Задача 6. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от естествени числа удовлетворява равенството:

$$a_{n+1} = \left\lceil \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right\rceil + \left\lceil \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rceil,$$

където с $[x]$ се означава цялата част на числото x . Да се докаже, че съществува естествено число m , за което $a_m = 4$ и $a_{m+1} \in \{3, 4\}$.

Китай

Задача 1. В остроъгълен $\triangle ABC$, $AB > AC$, ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича страната BC в точка D . Точките E и F съответно от страните AB и AC са такива, че B, C, F и E лежат на една окръжност. Да се докаже, че центърът на описаната около $\triangle DEF$ окръжност съвпада с центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност тогава и само тогава, когато $BE + CF = BC$.

Задача 2. За всяко естествено число $n > 1$ дефинираме

$$D(n) = \{a - b \mid a, b \text{ са естествени числа и } n = ab, a > b\}.$$

Да се докаже, че за всяко естествено число $k > 1$ съществуват k различни естествени числа $n_1, n_2, \dots, n_k$, $n_i > 1$, $1 \leq i \leq k$, за които сечението

$$D(n_1) \cap D(n_2) \cap \dots \cap D(n_k)$$

съдържа поне два елемента.

Задача 3. Да се докаже, че съществува единствена функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за която $f(1) = f(2) = 1$ и

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(n - f(n-1)), \quad n = 3, 4, \dots$$

За тази функция да се намери $f(2^m)$ при $m \geq 2$.

Задача 4. За всяко естествено число n с канонично разлагане $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ полагаме

$$\omega(n) = t, \quad \Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_t.$$

Да се докаже или опровергае следното твърдение: За дадени произволно естествено число k и произволни положителни реални числа α и β съществува естествено число n , за което

$$\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)} > \alpha, \quad \frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \beta.$$

Задача 5. За множеството $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ разглеждаме функция $f : X \rightarrow X$, която изпълнява следните две условия:

(1) $f(x) \neq x$ за всяко $x \in X$;

(2) $A \cap f(A) \neq \emptyset$ за всяко множество $A \subset X$, за което $|A| = 40$.

Да се намери най-малкото естествено число k , за което за всяка такава функция съществува множество $B \subseteq X$, за което $|B| = k$ и $B \cup f(B) = X$.

Забележка. За подмножество T на X дефинираме

$$f(T) = \{x \mid \exists t \in T, x = f(t)\}.$$

Задача 6. За непразни множества S и T дефинираме

$$S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}, \quad 2S = \{2s \mid s \in S\}.$$

Нека n е естествено число, а A и B са подмножества на $\{1, 2, \dots, n\}$. Да се докаже, че съществува подмножество D на $A + B$, за което

$$D + D \subseteq 2(A + B) \quad \text{и} \quad |D| \geq \frac{|A| \cdot |B|}{2n},$$

където $|X|$ означава броя на елементите на множеството X .

Русия

Задача 9.1. (С. Берлов) Върху окръжност са написани 99 естествени числа. Известно е, че всеки две съседни числа се различават с 1 или 2, или пък едното е два пъти по-голямо от другото. Да се докаже, че поне едно от числата се дели на 3.

Задача 9.2. (С. Берлов) Сергей избрал две различни естествени числа a и b и записал в тетрадката си четирите числа a , $a + 2$, b и $b + 2$. След това той написал на дъската всичките шест произведения на по две числа от тетрадката. Колко най-много точни квадрати е написал Сергей на дъската?

Задача 9.3. (С. Берлов) В изпъкнал n -ъгълник са построени няколко диагонала. Един построен диагонал се нарича *добър*, ако пресича (във вътрешна точка) точно един от другите построени диагонали. Да се намери максималният възможен брой добри диагонали.

Задача 9.4. (В. Шмаров) Точка M е средата на страната AC на остроъгълен $\triangle ABC$, в който $AB > BC$, а Ω е окръжността, описана около $\triangle ABC$. Допирателните към Ω в точките A и C се пресичат в точка P . Отсечките BP и AC се пресичат в точка S . Нека AD е височина в $\triangle ABP$. Окръжността ω , описана около $\triangle CSD$, пресича Ω в точка $K \neq C$. Да се докаже, че $\angle CKM = 90^\circ$.

Задача 9.5. (Н. Агаханов) Към естественото число N добавили най-големия му естествен делител, по-малък от N , и получили степен на десет. Да се намерят всички такива N .

Задача 9.6. (И. Богданов) Трапец $ABCD$ с основи AB и CD е вписан в окръжност Ω . Окръжност ω минава през точките C и D и пресича отсечките CA и CB съответно в точки A_1 и B_1 . Точките A_2 и B_2 са симетрични на точките A_1 и B_1 относно средите на отсечките CA и CB съответно. Да се докаже, че точките A , B , A_2 и B_2 лежат на една окръжност.

Задача 9.7. (И. Богданов, С. Берлов) В страната на математиците избрали реално число $\alpha > 2$ и пуснали в обръщение монети с номинали 1 лев

и α^k лева за всяко естествено k . При това числото α било избрано така, че всички номинали, без най-малкия, били ирационални числа. Възможно ли е да се окаже, че всяка сума от естествено число лева може да се изплати с такива монети, като всеки номинал се използва не повече от 6 пъти?

Задача 9.8. (И. Богданов) В една страна има n града, всеки два от които са свързани с двупосочна железопътна линия. Цените на билетите са еднакви в двете посоки за всеки два града, но са различни за всяка линия, свързваща директно два града. Да се докаже, че пътешественик може да тръгне от някой от градовете и да пътува последователно по $n - 1$ линии, плащайки за всяко пътуване по-малко, отколкото за предходното. (Пътешественикът има право да минава през един и същи град повече от веднъж.)

Задача 10.1. (О. Подлипски) Едно естествено число се нарича *добро*, ако измежду неговите делители има точно две прости числа. Възможно ли е 18 последователни естествени числа да бъдат добри?

Задача 10.2. (А. Храбров) Функцията $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е такава, че за произволни x и y , за които $x > y$, е в сила неравенството $(f(x))^2 \leq f(y)$. Да се докаже, че множеството от стойностите на функцията се съдържа в интервала $[0, 1]$.

Задача 10.3. (И. Богданов, Г. Иванов) Дадени са n кутии с номера от 1 до n . Първоначално във всяка кутия стои карта с номера на кутията. Васил разместил картите по някакъв начин и след това в i -тата кутия се оказала картата с числото a_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Петър има право да избере две карти с номера x и y и да размени местата им, като заплати за това удоволствие $2|x - y|$ лева. Да се докаже, че Петър може да върне всички карти на първоначалните им места, като заплати не повече от $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|$ лева.

Задача 10.4. (М. Кунгожин) Даден е $\triangle ABC$, $AB > BC$, вписан в окръжност Ω . Върху страните AB и BC са избрани съответно точки M и N така, че $AM = CN$. Правите MN и AC се пресичат в точка K . Нека P е центърът на вписаната в $\triangle AMK$ окръжност, а Q е центърът на външновписаната към страната CN окръжност за $\triangle CNK$. Да се докаже, че средата на дъгата ABC на окръжността Ω е равноотдалечена от точките P и Q .

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 10.6. (Ф. Ивлев, Ф. Нилов) Точка M е средата на страната AC на $\triangle ABC$. Върху отсечките AM и CM са избрани съответно точки P и Q така, че $PQ = AC/2$. Окръжността, описана около $\triangle ABQ$, пресича страната BC в точка $X \neq B$, а окръжността, описана около $\triangle BCP$, пресича страната AB в точка $Y \neq B$. Да се докаже, че четириъгълникът $BXMY$ е вписан.

Задача 10.7. Виж Задача 9.7.

Задача 10.8. (А. Акопян) В равнината са дадени n изпъкнали k -ъгълника, всеки два от които имат обща вътрешна точка. Известно е, че всеки от k -ъгълниците може да се изобрази във всеки друг чрез хомотетия с положителен коефициент. Да се докаже, че в равнината съществува точка, която принадлежи на поне $1 + \frac{n-1}{2k}$ от тези k -ъгълници.

Задача 11.1. (Н. Агаханов) Съществува ли реално положително число a , за което за всички реални числа x е в сила неравенството

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax?$$

Задача 11.2. (Н. Полянский) Петър и Васил играят игра на клетъчна дъска $n \times n$, $n > 1$. В началото една от ъгловите клетки е черна и в нея стои шахматен топ, а останалите клетки са бели. Първи мести Петър, след това играчите се редуват, като на всеки ход съответният играч премества топа хоризонтално или вертикално и в този момент всички клетки, през които топът е преминал (включително тази, в която ходът свършва), се преоцветяват в черно. Топът няма право да преминава през черни клетки или да спира в тях. Губи този, който първи не може да направи ход. Кой от играчите има печеливша стратегия?

Задача 11.3. (А. Голованов) Рационални положителни числа a и b са записани като десетични дроби. Известно е, че минималните периоди и на двете дроби са с дължина 30 цифри, а в десетичния запис на числото $a - b$ минималният период е с дължина 15 цифри. Кое е най-малкото естествено число k , за което минималният период в десетичния запис на числото $a + kb$ също може да е с дължина 15 цифри?

Задача 11.4. Виж Задача 10.4.

Задача 11.5. (С. Берлов) Естественото число n се нарича *хубаво*, ако всеки негов естествен делител, увеличен с 1, е делител на числото $n + 1$. Да се намерят всички хубави естествени числа.

Задача 11.6. (И. Богданов) Сфера ω минава през върха S на пирамидата $SABC$ и пресича ребрата SA , SB и SC за втори път съответно в точките A_1 , B_1 и C_1 . Сферата Ω , описана около пирамидата $SABC$, пресича ω по окръжност, лежаща в равнина, успоредна на равнината (ABC) . Точките A_2 , B_2 и C_2 са симетрични на точките A_1 , B_1 и C_1 относно средите съответно на ребрата SA , SB и SC . Да се докаже, че точките A , B , C , A_2 , B_2 и C_2 лежат на една сфера.

Задача 11.7. (К. Тищук) В началото на дъската са написани полиномите $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Ако в даден момент на дъската са написани полиномите $f(x)$ и $g(x)$, можем да допишем и полиномите $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, където c е произволна (не непременно цяла) константа. Възможно ли е след няколко такива операции на дъската да се появи полином от вида $x^n - 1$ (n е естествено число)?

Задача 11.8. (Е. Лакштанов) Двама играят игра с карти с колода от n две по две различни карти. За всеки две карти от колодата е известно коя от тях е по-силна, като при това, ако картата A е по-силна от B , а B и по-силна от C , може да се окаже, че C е по-силна от A . В началото картите са раздадени по произволен начин. На всеки ход всеки от играчите показва най-горната си карта и този, чиято карта е по-силна, взима двете карти и ги слага най-отдолу в своята колода (в какъвто си иска ред). Да се докаже, че при произволно начално раздаване играчите, знаейки разположението на всички карти, да се договорят и да действат така, че единият от тях в даден момент да остане без карти.

САЩ

Задача 1. (Т. Андрееску) Реалните числа a, b, c и d са такива, че $b-d \geq 5$ и полиномът $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ има четири реални корена x_1, x_2, x_3 и x_4 . Да се намери най-малката възможна стойност на произведението

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1).$$

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, за които

$$xf(2f(y) - x) + y^2f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y))$$

за всички цели числа x и y , $x \neq 0$.

Задача 3. (С. Вандевелде) Да се докаже, че съществува безкрайно множество от точки

$$\dots, P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$$

в равнината със следното свойство: За всеки три различни цели числа a, b и c точките P_a, P_b и P_c лежат на една права тогава и само тогава, когато $a + b + c = 2014$.

Задача 4. (П. Мебане) Дадени са естествено число k и безкрайна решетка от правилни шестоъгълници. Двама играчи A и B играят върху решетката, редувайки ходовете си (A е пръв). В началото всички клетки на решетката са празни. A има право да избере две празни съседни клетки и да постави пулове в тях, а B има право да премахне който си иска пул. Играта се печели от A в момента, в който се появят k последователни клетки с пулове на една линия. Да се намери минималната стойност на k , за която A не може да спечели с краен брой ходове или да се докаже, че такава минимална стойност не съществува.

Задача 5. (Т. Андрееску, К. Похоата) Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и нека P е втората пресечна точка на ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и описаната около $\triangle AHC$ окръжност. Нека X е центърът на описаната около $\triangle APB$ окръжност и Y е ортоцентърът на $\triangle APC$. Да се докаже, че дължината на отсечката XY е равна на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 6. (Т. Андрееску, Г. Доспинеку) Да се докаже, че съществува константа $c > 0$ със следното свойство: ако a, b и n са естествени числа, за които $(a + i, b + j) > 1$ за всички $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, то $\min\{a, b\} > c^n n^{\frac{n}{2}}$.

Тайланд

Задача 1. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, за който $\angle BAC = 100^\circ$. Върху лъча AB са избрани точки D и E , за които $BC = AD = BE$. Да се докаже, че $BC \cdot DE = BD \cdot CE$.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които равенството

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

е изпълнено за произволни реални числа x и y .

Задача 3. Дадени са естествени числа M и N . Иван се намира в точката $(0, N)$ и се придвижва на стъпки до точката $(M, 0)$, като спазва следните две правила:

1. Всяка стъпка е с дължина 1 и е успоредна на някоя от координатните оси.

2. За всяка точка (x, y) на неговия път е изпълнено $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

На всяка стъпка той записва разстоянието до оста, на която е успоредна тази стъпка, като, ако стъпката го отдалечава от центъра на координатната система, той записва това разстояние с положителен знак, а в противен случай – с отрицателен знак.

Да се докаже, че когато Иван завърши разходката си, сборът от всички записани числа ще бъде равен на нула.

Задача 4. Да се намерят всички полиноми $P(x)$ с цели коефициенти, за които $P(n)$ дели $2557^n + 213 \cdot 2014$ за всяко естествено число n .

Задача 5. Да се намери най-голямото реално число k , за което неравенството

$$\left(k + \frac{a}{b}\right) \left(k + \frac{b}{c}\right) \left(k + \frac{c}{a}\right) \leq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$$

е изпълнено за произволни реални положителни числа a , b и c .

Задача 6. Да се намерят всички прости числа p , за които числото $2p^2 - 3p - 1$ е точен куб на естествено число.

Задача 7. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с най-къса страна AB и най-дълга страна CD ($AB < CD$). Да се докаже, че върху отсечката CD може да се избере точка E със следното свойство: за всяка точка $P \neq E$ от отсечката CD дължината на отсечката, свързваща центровете на описаните окръжности за $\triangle APD$ и $\triangle BPE$, не зависи от избора на точката P .

Задача 8. Дадено е естествено число n . Да се намери минималният брой числа от вида $m!$, където m е естествено число със следното свойство:

За всяко естествено число $t \leq n!$ сборът на няколко от числата (възможно само едно) е равен на t .

Холандия

Задача 1. Квадрат $n \times n$ е разделен на n^2 единични квадратчета. Някои от квадратчетата са оцветени в черно, а останалите в бяло. За всеки два реда и всеки два стълба четирите квадратчета, намиращи се в тези два реда и два стълба не са в един и същи цвят. Да се намери най-голямата възможна стойност на n ?

Задача 2. Да се намерят всички тройки (x, y, z) от реални числа, за които $x + y - z = -1$, $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $-x^3 + y^3 + z^3 = -1$.

Задача 3. Страните BC и AD на четириъгълник $ABCD$ са успоредни, а диагоналите му се пресичат в точка O . Ако $CD = AO$, $BC = OD$ и CA е ъглополовяща на ъгъл BCD , да се намери ъгъл ABC .

Задача 4. За естественото число n с $P(n)$ означаваме произведението на всички положителни делители на n . Например, $P(20) = 8000$ тъй като положителните делители на 20 са 1, 2, 4, 5, 10, 20 и тяхното произведение е $1.2.4.5.10.20 = 8000$.

а) Да се намерят всички естествени числа n , за които $P(n) = 15n$.

б) Да се докаже, че не съществува естествено число n , за което е изпълнено равенството $P(n) = 15n^2$.

Задача 5. Колко пъти се среща цифрата 5 в десетичния запис на числото

$$S = 1 + 10 + 19 + 28 + 37 + \dots + 10^{2013}?$$

Контролно за определяне на отбора на Холандия за Европейската олимпиада за момичета 2014

Задача 1. Да се намерят всички неотрицателни цели числа n , за които съществуват такива цели числа a и b , че $n^2 = a + b$ и $n^3 = a^2 + b^2$.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, за които

$$xf(xy) + f(-y) = xf(x)$$

за произволни реални числа x и y .

Задача 3. Точка I е център на вписаната окръжност за $\triangle ABC$. Окръжността, минаваща през B и допираща се до AI в точка I , пресича AB за втори път в точка P и пресича BC за втори път в точка Q . Правата QI пресича AC в точка R . Да се докаже, че $AR \cdot BQ = PI^2$.

Задача 4. Естествените числа $m \geq 3$ и n са такива, че $n > m(m-2)$. Да се намери най-голямото естествено число d за което d дели $n!$ и k не дели d за всяко $k \in \{m, m+1, \dots, n\}$.

Задача 5. Дадено е естествено число n . Даниел и Мария играят игра. Даниел има k листа, където k е естествено число. На горната страна на всеки лист той записва някои от числата от 1 до n (може да запише произволен брой числа, включително нула числа или всички числа). На гърба на всеки лист той записва останалите числа. Мария може да обърне част от листовите (може да обърне произволен брой листови, включително нула или всичките). Ако Мария успее да направи така, че всички числа от 1 до n да се виждат, тя побеждава.

Да се намери най-малкото k , за което Мария винаги може да победи, независимо какви числа е записал Даниел.

Южна Корея

Задача 1. Дадени са положителни реални числа x , y и z със сума 1. Да се докаже, че $A \geq B^2$, където

$$A = \frac{(1 + xy + yz + zx)(1 + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2)}{9(x + y)(y + z)(z + x)},$$

$$B = \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{3+9x^2}} + \frac{y\sqrt{1+y}}{\sqrt[4]{3+9y^2}} + \frac{z\sqrt{1+z}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}$$

Задача 2. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, за който $AC = BC > AB$. Точките E и F са среди съответно на страните AC и AB . Симетралата l на AC пресича AB в точка K , а правата през B , успоредна на KC , пресича AC в точка L . Нека H е ортоцентърът на $\triangle ACP$, където P е произволна точка от отсечката BF . Отсечките BH и CP се пресичат в точка J , а правите FJ и l се пресичат в точка M . Ако W е пресечната точка на правите FL и l , да се докаже, че $AW = BW$ тогава и само тогава, когато точките B , E , F и M лежат на една окръжност.

Задача 3. По окръжност, с лице към центъра на кръга, са наредени n ученици с различни имена. Имената на учениците са написани на n картички и картичките са разпределени между учениците по произволен начин, като всеки ученик има една картичка. Учениците повтарят следната операция:

Ученик, който държи картичка с неговото име, напуска кръга, след което всеки от останалите ученици дава своята картичка на ученика вдясно от него.

Да се намери броят на първоначалните разпределения на картичките, при които след 4 операции не всички ученици са напуснали кръга.

Задача 4. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, $AC = BC$. Точка D е от правата BA , като A лежи между B и D . Нека O_1 е описаната окръжност около $\triangle DAC$, като O_1 пресича BC в точка E . Точка F е от правата BC , като FD е допирателна към O_1 . Описаната окръжност O_2 около $\triangle DBF$ пресича O_1 в точка G , $G \neq D$. Ако O е описаната окръжност около $\triangle BEG$, да се докаже, че FG е допирателна към O тогава и само тогава, когато DG е перпендикулярна на FO .

Задача 5. Дадено е просто число $p > 5$. Да се докаже, че ако съществува естествено число k , за което $k^2 + 5$ се дели на p , то съществуват естествени числа m и n , за които $p^2 = m^2 + 5n^2$.

Задача 6. На един остров има две държави A и B и краен брой замъци, като всеки замък е в едната от двете държави. Във всеки замък има точно един генерал. Някои от замъците са свързани с директен път и такива замъци се наричат съседни. Да се докаже, че следните две твърдения са еквивалентни:

1. Ако някои от генералите от страна B се придвижат до съседни замъци от страна A и ги атакуват, то генералите от страна A могат да се придвижат до съседни замъци, така че във всеки замък от A генералите от A са не по-малко от генералите от B .
2. Ако X е множество от замъци от A , то броят на генералите от A , които са в замък от X или в замък, който е съседен на замък от X е не по-малък от броя на генералите от страна B , всеки от които е в замък, който е съседен на замък от X .

Великобритания

Задача 1. Всеки от диагоналите на правилен 2014-ъгълник е оцветен в някой от дадени n цвята. Известно е, че всеки два диагонала, които се пресичат във вътрешна точка, са оцветени в различни цветове. Кое е най-малкото n , за което това е възможно?

Решение. Първи начин. Да наречем *главен* всеки диагонал, свързващ срещуположни върхове. Тъй като главните диагонали са 1007 и всеки от тях се пресича с всички други в центъра на 2014-ъгълника, са необходими поне 1007 цвята.

Да оцветим главните диагонали в 1007 различни цвята, а всеки от останалите диагонали да оцветим в цвята на главния диагонал, с който има общ връх и този общ връх, вторият връх на нашия диагонал и вторият връх на главния диагонал са разположени в този ред по посока на часовниковата стрелка. Не е трудно да се види, че това оцветяване е дефинирано коректно и има исканото свойство.

Втори начин. В общия случай имаме да оцветим $\frac{n(n-3)}{2}$ диагонала. Ако цветовете са не повече от $\frac{n}{2} - 1$, ще има цвят, в който са оцветени поне $n - 2$ диагонала. Ще докажем с индукция по n , че това води до противоречие с изискването да няма непресичащи се във вътрешни точки едноцветни диагонали.

Случаите $n = 3$ и $n = 4$ са тривиални. Нека твърдението е вярно за $n \leq k$ върха. В $(k + 1)$ -ъгълник фиксиран диагонал в някакъв цвят определя a -и b -ъгълник, като $a + b = k + 3$. По индукционно предположение можем да имаме най-много $(a - 3) + (b - 3) = k - 3$ диагонала в този цвят в малките многоъгълници, т.е. общо имаме не повече от $k - 2 = (k + 1) - 3$ от този цвят.

Да номерираме върховете с $0, 1, 2, \dots, 2n - 1 \pmod{2n}$, където $n = 1007$. За първия цвят избираме някое a и оцветяваме в този цвят диагоналите от $a - i$ до $a + i$ за $i = 1, 2, \dots, n - 1$ и диагоналите от $a - i$ до $a + i + 1$ за $i = 1, 2, \dots, n - 2$. Продължаваме аналогично със следващите цветове за $a + 1, a + 2, \dots, a + 1006$.

Ясно е, че няма пресичащи се едноцветни диагонали и, тъй като от всеки цвят имаме по $2n - 3$ диагонала, остава да докажем коректността на оцветяването (т.е. че не сме оцветили никои диагонал двукратно в различни цветове). Ако диагоналът между p и q е оцветен двукратно, това е станало

при $a = \frac{p+q}{2}$ и $a = \frac{p+q}{2} + n$ при четно $p - q$ или при $a = \frac{p+q-1}{2}$ и $a = \frac{p+q-1}{2} + n$ при нечетно $p - q$. И в двата случая използваният цвят е един и същ.

Задача 2. Да се докаже, че не съществува правоъгълен паралелепипед, чиито периметър, пълна повърхнина и обем се изразяват с едно и също реално число.

Решение. Да допуснем противното и нека размерностите на паралелепипеда са a , b и c . Тогава от условието следва, че числата $4(a + b + c)$, $2(ab + bc + ca)$ и abc са равни.

Първи начин. Имаме

$$4abc(a + b + c) = 4(ab + bc + ca)^2,$$

откъдето $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + abc(a + b + c) = 0$, което е невъзможно.

Втори начин. Ако $T = a + b + c$, то a , b и c са трите различни (Защо?) корени на уравнението

$$f(x) = x^3 - Tx^2 + 2Tx - 4T = 0.$$

Функцията $f(x)$ има локален максимум $u = u(T) = \frac{T - \sqrt{T^2 - 6T}}{3}$. За да имаме три различни реални корена е необходимо $f(u) > 0$. Имаме $T \geq 6$ и функцията $u(T)$ е намаляваща за $T \geq 6$ (Проверете!). Тогава $u = u(T) \leq u(6) = 2$ и $u \leq T$, откъдето $u^3 < Tu^2$ и $2Tu < 4T$, т.е. $f(u) < 0$, което е противоречие.

Задача 3. Редицата $a_0, a_1, a_2, \dots$ е зададена с равенствата $a_0 = 4$ и $a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1}$ за всяко естествено число n .

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много прости числа, които делят поне по един член на редицата.

б) Съществуват ли безбройно много прости числа, които не делят нито един член на редицата?

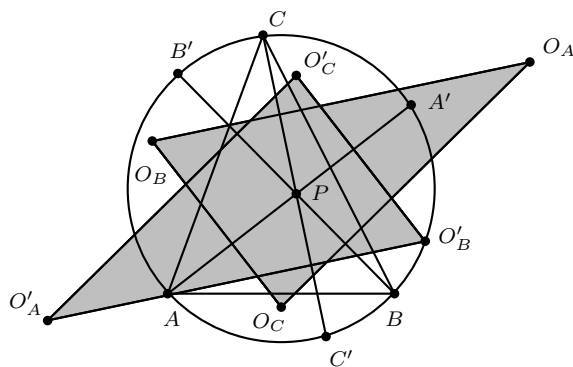
Решение. а) Тъй като $a_{n-1} | a_n$, ако едно просто число дели някой член на редицата, то ще дели и всички останали. От друга страна, редицата е строго растяща (Докажете!) и от равенството $a_n = a_{n-1}(a_{n-1} - 1)$ следва, че $a_{n-1} - 1 > 1$. Тогава всеки прост делител p на $a_{n-1} - 1$ дели a_n , но не дели a_{n-1} . От последното следва и че p не дели a_m за никое $m \leq n - 1$. Такова просто p има за всяко n и така получаваме безбройно много прости числа, които делят поне по един член на редицата.

б) Да разгледаме редицата $b_0, b_1, b_2, \dots$, дефинирана с $b_n = a_n - 2$ за всяко естествено число n . Имаме $b_0 = 2$ и $b_n = b_{n-1}(b_{n-1} + 3)$. Двата множителя отлясно в последното равенство са взаимнопрости (Защо?) и както в а) следва, че съществуват безбройно много прости числа, които делят поне по един член на новата редица. Ясно е, че тези прости числа, с изключение на 2, не делят нито един член на първата редица.

Задача 4. Точка P е вътрешна за $\triangle ABC$. Правата AP пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в точка A' . Аналогично се дефинират точките B' и C' . Нека O_A е центърът на описаната около $\triangle BCP$ окръжност. Аналогично се дефинират точките O_B и O_C . Нека O'_A е центърът на описаната около $\triangle B'C'P$ окръжност. Аналогично се дефинират точките O'_B и O'_C . Да се докаже, че правите $O_AO'_A$, $O_BO'_B$ и $O_CO'_C$ се пресичат в една точка.

Решение. Първи начин. Да разгледаме инверсия с център P , като ще оставим същите означения за точките. При нашата инверсия окръжностите през P стават прави, а техните центрове са симетрични на P относно тези прави (например O_A е симетрична на P относно BC). Следователно е достатъчно да се докаже, че окръжностите, описани около триъгълниците $PO_AO'_A$, $PO_BO'_B$ и $PO_CO'_C$, се пресичат в още една точка освен P .

Центърът на окръжността, описана около $\triangle PO_AO'_A$, лежи на BC – симетралата на PO_A и аналогично лежи на $B'C'$. Да означим $D = BC \cap B'C'$ и да дефинираме аналогично центровете E и F . Тогава от теоремата на Дезарг за триъгълниците ABC и $A'B'C'$ следва, че D , E и F лежат на една права, а симетричната точка на P относно тази права лежи и на трите окръжности.



Втори начин. Правите O_BO_C и $O'_BO'_C$ са симетрали съответно на PA и PA' и следователно са успоредни. Оттук и от аналогичните двойки успоредни прави следва, че триъгълниците $O_AO_BO_C$ и $O'_AO'_BO'_C$ са подобни, като имат съответно успоредни страни. Освен това във всички случаи P е между съответните страни и значи двата триъгълника са хомотетични с отрицателен коефициент. Тогава правите $O_AO'_A$, $O_BO'_B$ и $O_CO'_C$ се пресичат в една точка (центъра на хомотетията).

Иран

Задача 1. Да се намерят всички двойки взаимнопрости естествени числа a и b , за които $b, a = \frac{a}{b}$. (Например при $a = 92$ и $b = 13$ имаме $b, a = 13, 92 = \frac{1392}{100}$.)

Решение. Ако k е броят на цифрите на числото a , то $10^{k-1} \leq a < 10^k$. Тогава $\frac{a}{b} = b, a = b + \frac{a}{10^k}$, откъдето $\frac{a - b^2}{b} = \frac{a}{10^k}$. Тъй като $(a, b) = 1$ и $(a - b^2, b) = 1$, то $\frac{a - b^2}{b}$ е несъкратима дроб. Това означава, че за някое естествено число s имаме $sb = 10^k$ и $s(a - b^2) = a$.

От последното равенство следва, че $a - b^2$ дели a и понеже $(a - b^2, a) = 1$, то $a - b^2 = \pm 1$. Но $\frac{a - b^2}{b} = \frac{a}{10^k} > 0$, т.е. $a - b^2 = 1$. Тогава

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{10^k}$$

и понеже $a \geq 10^{k-1}$, то $\frac{1}{b} = \frac{a}{10^k} \geq \frac{1}{10}$, откъдето $b \leq 10$. Директна проверка за $b = 1, 2, \dots, 10$ и $a = b^2 + 1$, показва, че единственото решение е $b = 2$, $a = 5$. Следователно задачата има единствено решение $\frac{5}{2} = 2, 5$.

Задача 2. Дадени са няколко тежести с тегла естествени числа $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$. Едно такова множество от тежести се нарича *пълно*, ако всяко естествено число, което е по-малко от $w_1 + w_2 + \dots + w_n$, може да се представи като сбор на няколко от тези тежести. Да се докаже, че ако от едно пълно множество премахнем най-голямата тежест, останалите тежести също образуват пълно множество.

Решение. Ще използваме означението $\{w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n\} \rightarrow a$, ако числото a може да се представи като сбор на някои от числата $w_1, w_2, \dots, w_n$. Тогава ще казваме, че $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$ поражда елемента a . Ще докажем, че $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$ е пълно множество тогава и само тогава, когато

$$(1) \quad w_1 = 1, \quad w_i \leq w_1 + \dots + w_{i-1} + 1 \quad (\text{за всяко } 2 \leq i \leq n).$$

Ако $w_1 > 1$ или $w_i > w_1 + \dots + w_{i-1} + 1$ за някое $2 \leq i \leq n$, то съответно 1 или $w_1 + \dots + w_{i-1} + 1$ не могат да бъдат породени от множеството $\{w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n\}$.

Обратно, да допуснем, че $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$ удовлетворяват (1). Ще докажем по индукция, че тези числа образуват пълно множество. При $n = 1$ твърдението е очевидно и да допуснем, че то е вярно за $n - 1$.

Тъй като $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$ удовлетворяват (1), то и числата $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{n-1}$ също удовлетворяват (1). Това означава, че за всяко $W \leq w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1}$ имаме $\{w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{n-1}\} \rightarrow W$. Ако

$$w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} < W \leq w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1} + w_n,$$

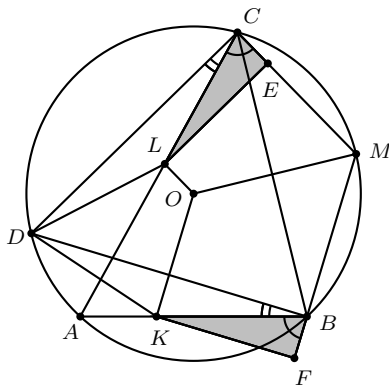
то

$$-1 \leq W - w_n \leq w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1}.$$

При $W = w_n$ е ясно, че $\{w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n\} \rightarrow W$, а при $W < w_n$, от $1 \leq W - w_n \leq w_1 + w_2 + \dots + w_{n-1}$ следва, че $\{w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{n-1}\} \rightarrow W - w_n$, т.е. $\{w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n\} \rightarrow W$.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ с описана окръжност ω с център O . Точката M е среда на дъгата $\widehat{BC}$, която не съдържа A . Правите през O , които са успоредни на MB и MC , пресичат страните AB и AC съответно в точки K и L . Ако височината през A към страната BC пресича ω в точка N , да се докаже, че $NK = NL$.

Решение. Първо ще докажем, че $KB = LC$. Нека F и E са петите на перпендикулярите от K и L съответно към MB и MC .

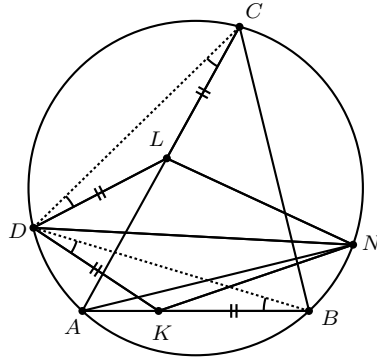


Имаме $OK \parallel MB$, откъдето следва, че KF е разстоянието от O до MB . Освен това $OL \parallel MC$, откъдето следва, че LE е разстоянието от O до MC . Тъй като $MB = MC$, то разстоянията от O до тези хорди са равни и

значи $KF = LE$, (1). От друга страна, четириъгълникът $ABMC$ е вписан, откъдето $\sphericalangle KBF = \sphericalangle LCE$, (2).

От (1) и (2) следва, че $\triangle KBF \cong \triangle LCE$, откъдето $KB = LC$. Ако D е средата на дъгата $\widehat{BAC}$, то $DB = DC$, $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$, $KB = LC$ и следователно $\triangle DBK \cong \triangle DCL$. Оттук $\sphericalangle KDL = \sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC$ и $KD = LD$.

Понеже $\sphericalangle KOL = \sphericalangle BMC$, то $AKOLD$ е вписан в окръжност. Следователно $\sphericalangle AKD = \sphericalangle ALD = \sphericalangle AOD = \sphericalangle B - \sphericalangle C$, $\sphericalangle KBD = \sphericalangle LCD = \frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2}$, откъдето $\sphericalangle KDB = \sphericalangle LDC = \frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2}$, т.е. $KB = KD = LD = LC$ (3).



Освен това имаме

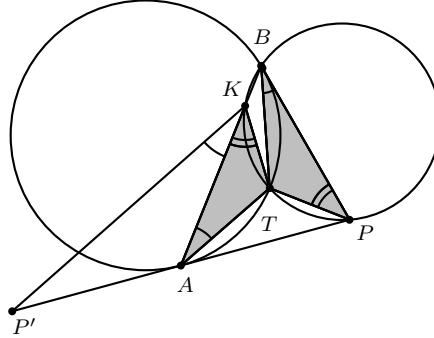
$$\sphericalangle NDK = \sphericalangle NDB + \sphericalangle BDK = (90^\circ - \sphericalangle B) + \left(\frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2} \right) = \frac{\sphericalangle A}{2},$$

$$\sphericalangle NDL = \sphericalangle NDC + \sphericalangle CDL = (90^\circ - \sphericalangle C) - \left(\frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2} \right) = \frac{\sphericalangle A}{2}$$

и следователно $\sphericalangle NDK = \sphericalangle NDL$ (4). Равенства (3) и (4) показват, че $\triangle NDK \cong \triangle NDL$, откъдето $NK = NL$.

Задача 4. Дадена е окръжност C и точка P извън окръжността. Отсечките PA и PB са допирателни към окръжността C и K е произволна точка от отсечката AB . Описаната окръжност около $\triangle PBK$ пресича за втори път C в точка T . Ако точка P' е симетрична на P спрямо A , да се докаже, че $\sphericalangle PBT = \sphericalangle P'KA$.

Решение. Тъй като четириъгълникът $KTPB$ е вписан, то $\angle AKT = \angle BPT$. Оттук и от $\angle TAK = \frac{\widehat{TB}}{2} = \angle TBP$ следва, че $\triangle TAK \sim \triangle TBP$.



Следователно

$$\frac{TA}{TB} = \frac{AK}{BP} = \frac{AK}{AP'} = \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA}.$$

Горното равенство и $\angle P'AK = \frac{\widehat{AB}}{2} = \angle BTA$ означават, че $\triangle P'AK \cong \triangle BTA$. Следователно $\angle P'KA = \angle BAT = \angle PBT$, с което доказателството е завършено.

Задача 5. Във всяка от клетките на таблица $n \times m$ е записано по едно цяло число. Диагонал на таблицата се нарича множество от клетки за които разликата между номера на реда и номера на стълба е едно и също число. На всяка стъпка имаме право да прибавим 1 или да извадим 1 към всички клетки от даден ред, стълб или диагонал. Да се докаже, че ако, прилагайки тези операции, можем да направим равни на нула числата във всяка подтаблица 3×3 , като останалите числа не се променят, то можем да направим всички числа в таблицата равни на нула.

Решение. Да означим с $A_{i,j}$ числото, записано в клетката, намираща се в i -ия ред и j -ия стълб, а с $S(i,j)$ да означим квадрат 3×3 с горен десен ъгъл клетката с числото $A_{i,j}$.

При $m, n \geq 3$ (ако $m \leq 2$ или $n \leq 2$ няма подтаблица 3×3) за всяка подтаблица $S_{i,j}$ да разгледаме израза:

$$M(i,j) = A_{i+1,j} - A_{i+2,j} + A_{i+2,j-1} - A_{i+1,j-2} + A_{i,j-2} - A_{i,j-1}.$$

Ако изберем ред, стълб или диагонал на таблицата $S_{i,j}$, стойността на този израз не се променя. Тъй като по условие можем да направим всички числа във всяка подтаблица 3×3 равни на нула, то $M_{i,j} = 0$.

Ще докажем твърдението с индукция по $m + n$. При $m + n = 6$, т.е. $m = n = 3$ твърдението е вярно. При $m + n > 6$ без ограничение нека $m > 3$. Разглеждаме таблица $n \times (m-1)$, получена от дадената без последния стълб. От индукционното допускане следва, че можем да направим всички числа от тази $n \times (m-1)$ таблица равни на нула.

Стойностите $M_{i,m}$ за $1 \leq i \leq n-1$ са инварианти, откъдето следва (имайки предвид, че само в последния стълб на разглежданите 3×3 таблици има различни от нула числа), че $A_{i+1,m} = A_{i+2,m}$ за $1 \leq i \leq n-2$. Следователно $A_{2,m} = A_{3,m} = \dots = A_{n,m}$ и като извършваме позволената операция за този стълб можем да направим всички тези числа равни на нула. Остава само числото $A_{1,m}$, което е диагонал и също можем да го направим нула. С това индукцията е завършена.

При $m + n < 6$ имаме $m \leq 2$ или $n \leq 2$ и доказателството е тривиално.

Задача 6. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от естествени числа удовлетворява равенството:

$$a_{n+1} = \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rfloor,$$

където с $[x]$ се означава цялата част на числото x . Да се докаже, че съществува естествено число m , за което $a_m = 4$ и $a_{m+1} \in \{3, 4\}$.

Решение. Първо ще докажем три лема.

Лема 1. За всяко естествено число n е изпълнено $a_n \geq 3$.

Доказателство. Нека $a_n < 3$ за някое $n \geq 3$. Ако $a_{n-1} \geq a_{n-2}$, то

$$\frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}} \right\rfloor \geq 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{2a_{n-2}}{a_{n-1}} \right\rfloor = 0 \Rightarrow a_{n-1} > 2a_{n-2} \Rightarrow \frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}} > 4.$$

Това е противоречие с $a_n < 3$. Случаят $a_{n-2} \geq a_{n-1}$ се разглежда аналогично.

Лема 2. За всяко естествено число $n \geq 3$ е изпълнено

$$a_{n+1} = a_n \text{ или } a_{n+2} < \max\{a_n, a_{n+1}\}.$$

Доказателство. Да допуснем, че $a_{n+1} \neq a_n$. Ако $a_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$, то

$\frac{2a_{n+1}}{a_n} < 2$. От друга страна

$$\begin{aligned} a_{n+1}a_n \geq 3 &\Rightarrow \frac{2a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{2a_n}{3} \\ &\Rightarrow a_{n+2} = \left\lfloor \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right\rfloor \leq 1 + \frac{2a_n}{3} \leq \frac{a_n}{3} + \frac{2a_n}{3} = a_n. \end{aligned}$$

Ако $a_{n+2} \geq \max\{a_n, a_{n+1}\} = a_n$, то горното неравенство става равенство и тогава $a_n = a_{n+1} = 3$, което е противоречие с $a_n \neq a_{n+1}$. Случаят $a_{n+1} = \max\{a_n, a_{n+1}\}$ се разглежда аналогично.

Лема 3. Съществува естествено число k , за което $a_k = a_{k+1}$.

Доказателство. Да допуснем, че никога няма равенство. От Лема 2 тогава следва

$$a_{n+1} < \max\{a_n, a_{n+1}\}$$

и

$$a_{n+1} < \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} < \max\{a_n, a_{n+1}\}.$$

Следователно

$$\max\{a_{n+1}, a_{n+3}\} < \max\{a_n, a_{n+1}\}$$

и функцията $\max\{a_{2k}, a_{2k+1}\}$ е строго намаляваща, което не е възможно в множеството на естествените числа. С това лемата е доказана.

От Лема 3 следва, че съществува естествено число k , за което $a_k = a_{k+1}$. Това означава, че $a_{k+1} = 4$ и ако $a_k = a_{k+1} \in \{3, 4\}$, то $a_{k+3} \in \{3, 4\}$ и твърдението е доказано. Ако $a_k = a_{k+1} > 4$, то съществува естествено число m , за което $a_{k+m} = a_{k+m+1}$. От доказателството на Лема 3 имаме:

Случай 1. Ако m е нечетно, то

$$\begin{aligned} a_{k+1} = \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} &> \max\{a_{k+3}, a_{k+4}\} > \dots \\ &> \max\{a_{k+m}, a_{k+m-1}\} = a_{k+m}. \end{aligned}$$

Случай 2. Ако m е четно, то

$$\begin{aligned} a_{k+1} = \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} &> \max\{a_{k+3}, a_{k+4}\} > \dots \\ &> \max\{a_{k+m-1}, a_{k+m}\} \geq a_{k+m}. \end{aligned}$$

Следователно, ако два равни съседни члена на редицата са по-големи от 4, то съществуват два последователни члена на редицата с по-малка стойност. По такъв начин можем да изберем два последователни члена със стойност по-малка или равна от 4. С това доказателството е завършено, защото следващите членове са 4, 3 или 3, 4.

Китай

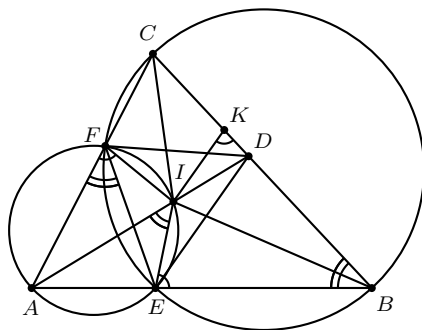
Задача 1. В остроъгълен $\triangle ABC$, $AB > AC$, ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича страната BC в точка D . Точките E и F съответно от страните AB и AC са такива, че B, C, F и E лежат на една окръжност. Да се докаже, че центърът на описаната около $\triangle DEF$ окръжност съвпада с центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност тогава и само тогава, когато $BE + CF = BC$.

Решение. Да означим с I центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Да допуснем, че $BC = BE + CF$. Нека K е точка върху BC , за която $BK = BE$ и тогава $CK = CF$. Понеже BI и CI са ъглополовящи, от тези равенства следва:

$$\angle BEI = \angle BKI = \pi - \angle CKI = \pi - \angle CFI = \angle AFI,$$

т.е. точките A, E, I и F лежат на една окръжност. Тъй като точките B, C, F и E лежат на една окръжност, то $\angle AIE = \angle AFE = \angle ABC$, което означава, че B, E, I и D също лежат на една окръжност.



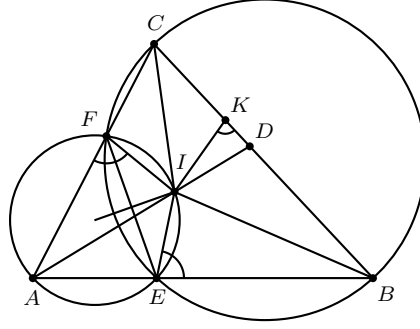
Във вписания четириъгълник $AEIF$ правата AI е ъглополовяща на $\angle EAF$, което дава $IF = IE$. Аналогично, във вписания четириъгълник $BDIE$ правата BI е ъглополовяща и следователно $IE = ID$. Получихме $ID = IE = IF$, т.е. I е център на описаната около $\triangle DEF$ окръжност.

Обратно, нека I е център на описаната окръжност за $\triangle DEF$. Понеже B, E, F и C лежат на една окръжност, то $AE \cdot AB = AF \cdot AC$, $AB > AC$ и тогава $AE < AF$. Освен това ъглополовящата на $\angle EAF$ и симетралата на EF се пресичат в точка I върху описаната около $\triangle AEF$ окръжност.

Нека K е симетричната точка на E спрямо BI . Тогава

$$\angle BKI = \angle BEI = \angle AFI > \angle ACI = \angle BCI$$

и следователно точката K е от отсечката BC .



Тогава $\angle IKC = \angle IFC$, $\angle ICK = \angle ICF$, т.е. $\triangle IKC \cong \triangle IFC$. Оттук $BC = BK + CK = BE + CF$.

Задача 2. За всяко естествено число $n > 1$ дефинираме

$$D(n) = \{a - b \mid a, b \text{ са естествени числа и } n = ab, a > b\}.$$

Да се докаже, че за всяко естествено число $k > 1$ съществуват k различни естествени числа $n_1, n_2, \dots, n_k$, $n_i > 1$, $1 \leq i \leq k$, за които сечението

$$D(n_1) \cap D(n_2) \cap \dots \cap D(n_k)$$

съдържа поне два елемента.

Решение. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ са $k + 1$ различни положителни нечетни цели числа, като всяко от тях е по-малко от произведението на останалите k . За $N = a_1 a_2 \dots a_{k+1}$ за всяко $i = 1, 2, \dots, k + 1$ да положим

$$x_i = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{a_i} + a_i \right), \quad y_i = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{a_i} - a_i \right).$$

Тогава $x_i^2 - y_i^2 = N$ и понеже $a_i a_j < N$ и $\frac{N}{a_i} > a_i$, то (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq k + 1$, са $k + 1$ различни цели решения на уравнението $x^2 - y^2 = N$. Без ограничение

нека $x_{k+1} = \min\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$. За всяко $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ от $x_i^2 - y_i^2 = x_{k+1}^2 - y_{k+1}^2$ имаме:

$$(x_i + x_{k+1})(x_i - x_{k+1}) = x_i^2 - x_{k+1}^2 = y_i^2 - y_{k+1}^2 = (y_i + y_{k+1})(y_i - y_{k+1}).$$

При $n_i = (x_i + x_{k+1})(x_i - x_{k+1}) = (y_i + y_{k+1})(y_i - y_{k+1})$ имаме

$$2x_{k+1} = (x_i + x_{k+1}) - (x_i - x_{k+1}) \in D(n_i),$$

$$2y_{k+1} = (y_i + y_{k+1}) - (y_i - y_{k+1}) \in D(n_i).$$

Следователно $x_{k+1} > y_{k+1}$, като $2x_{k+1}$ и $2y_{k+1}$ са два различни елемента на $D(n_1) \cap D(n_2) \cap \dots \cap D(n_k)$.

Задача 3. Да се докаже, че съществува единствена функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, за която $f(1) = f(2) = 1$ и

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(n - f(n-1)), \quad n = 3, 4, \dots$$

За тази функция да се намери $f(2^m)$ при $m \geq 2$.

Решение. Ще докажем по индукция, че за всяко $n > 1$ стойността на функцията $f(n)$ се определя еднозначно от $f(1), f(2), \dots, f(n-1)$ и $\frac{n}{2} \leq f(n) \leq n$.

При $n = 2$ имаме $f(2) = 1$ и твърдението е вярно. Да допуснем, че за всяко k , $1 \leq k < n$, стойността $f(k)$ е определена и $\frac{k}{2} \leq f(k) \leq k$. Тогава $1 \leq \frac{n-1}{2} \leq f(n-1) \leq n-1$ и $1 \leq n - f(n-1) \leq n-1$ и от индукционното допускане стойностите $f(f(n-1))$ и $f(n - f(n-1))$ са еднозначно определени. Следователно

$$(1) \quad f(n) = f(f(n-1)) + f(n - f(n-1))$$

е също еднозначно определена. Освен това

$$\frac{1}{2}f(n-1) \leq f(f(n-1)) \leq f(n-1),$$

$$\frac{1}{2}(n - f(n-1)) \leq f(n - f(n-1)) \leq n - f(n-1).$$

От (1) сега следва $\frac{n}{2} \leq f(n) \leq f(n-1) + (n - f(n-1)) = n$, т.е. твърдението е вярно и за n . Докажем, че съществува единствена функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, която удовлетворява условията и за нея $\frac{n}{2} \leq f(n) \leq n$.

Отново по индукция ще докажем, че за всяко естествено n е изпълнено

$$(2) \quad f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}.$$

При $n = 1$ условието (2) е вярно. Допускаме, че (2) е вярно за $n \leq k$. От условието и (1) получаваме

$$\begin{aligned} f(k+1) - f(k) &= \\ &= (f(f(k+1)) + f(k+2 - f(k+1))) - (f(f(k)) + f(k+1 - f(k))) = \\ &= (f(f(k+1)) - f(f(k))) + (f(k+2 - f(k+1)) - f(k+1 - f(k))). \end{aligned}$$

От индукционното допускане $f(k+1) - f(k) \in \{0, 1\}$. Ако $f(k+1) = f(k) + 1$, то от $1 \leq f(k) \leq k$ и от индукционното допускане намираме

$$f(k+2) - f(k+1) = f(f(k) + 1) - f(f(k)) \in \{0, 1\}.$$

Ако $f(k+1) = f(k)$, от $1 \leq k+1 - f(k) \leq k$ и от индукционното допускане отново имаме

$$f(k+2) - f(k+1) = f(k+1 - f(k)) - f(k+1 - f(k)) \in \{0, 1\}.$$

Следователно за всяко n имаме $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$.

Накрая, по индукция ще докажем, че за всяко естествено m е изпълнено $f(2^m) = 2^{m-1}$. При $m = 1$ твърдението е вярно и да допуснем, че то е вярно за $m = k$, т.е. $f(2^k) = 2^{k-1}$.

Да допуснем, че $f(2^{k+1}) \neq 2^k$. Тъй като $f(2^{k+1}) \geq 2^k$ и $f(2^{k+1})$ е естествено число, то $f(2^{k+1}) \geq 2^k + 1$. Понеже $f(1) = 1$, от (2) следва, че съществува най-малко n , за което $f(n) = 2^k + 1$. От минималността на n следва, че $f(n-1) = 2^k$. От $n - 2^k \leq 2^k$ получаваме

$$2^k + 1 = f(n) = f(f(n-1)) + f(n - f(n-1)) = f(2^k) + f(n - 2^k) \leq 2f(2^k) = 2^k,$$

противоречие. Следователно $f(2^{k+1}) = 2^k$ и по индукция следва, че $f(2^m) = 2^{m-1}$ за всяко естествено число m .

Задача 4. За всяко естествено число n с канонично разлагане $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ полагаме

$$\omega(n) = t, \quad \Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_t.$$

Да се докаже или опровергае следното твърдение: За дадени произволно естествено число k и произволни положителни реални числа α и β съществува естествено число n , за което

$$\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)} > \alpha, \quad \frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \beta.$$

Решение. Ще докажем, че твърдението е вярно. От дефинициите за ω и Ω следва, че за всеки две естествени числа a и b имаме:

$$(1) \quad \omega(ab) \leq \omega(a) + \omega(b),$$

$$(2) \quad \Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(b).$$

За дадено положително естествено число k и положителни реални числа α и β избираме естествено число $m > (\omega(k) + 1)\alpha$. Можем да изберем достатъчно голямо просто число p , за което $\frac{\Omega(k) + 1}{p^m} + \log_p 2 < \beta$ и m различни прости числа $q_1, q_2, \dots, q_m$, всяко от които е по-голямо от p . Ще докажем, че числото $n = 2^{q_1 q_2 \dots q_m} k$ има исканото свойство.

Първо ще докажем, че $\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)} > \alpha$. Тъй като $q_1, q_2, \dots, q_m$ са нечетни прости числа, то за $n_1 = \frac{n+k}{k} = 2^{q_1 q_2 \dots q_m} + 1$ имаме $2^{q_i} | n_1$ и $d_i = \frac{2^{q_i} + 1}{3}$ е естествено число. Известно е, че за произволни естествени числа r и s имаме

$$(3) \quad (2^r - 1, 2^s - 1) = 2^{(r,s)} - 1.$$

Тъй като $(q_i, q_j) = 1$ при $i \neq j$, получаваме

$$(d_i, d_j) = \frac{1}{3}(2^{q_i} + 1, 2^{q_j} + 1) \leq \frac{1}{3}(2^{2q_i} - 1, 2^{2q_j} - 1) = \frac{2^{(2q_i, 2q_j)} - 1}{3} = \frac{2^2 - 1}{3} = 1.$$

Понеже $d_1, d_2, \dots, d_m$ са различни взаимнопрости делители на n_1 , то $\omega(n_1) \geq m$. От (1) и от избора на m сега получаваме:

$$\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)} \geq \frac{\omega(n_1)}{\omega(n)} \geq \frac{\omega(n_1)}{\omega(k) + 1} \geq \frac{m}{\omega(k) + 1} > \alpha.$$

Остана да докажем, че $\frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \beta$. Понеже $q_1 q_2 \dots q_m$ е нечетно и не се дели на 3, то $n_1 = 2^{q_1 q_2 \dots q_m} + 1 \equiv \pm 3 \pmod{9}$, т.е. $3 \parallel n_1$. Да допуснем, че q е прост делител на $\frac{n_1}{3}$ и $q \leq p$. Тогава

$$2^{2^{q_1 q_2 \dots q_m}} - 1 = (2^{q_1 q_2 \dots q_m} - 1)n_1 \equiv 0 \pmod{q}.$$

От малката теорема на Ферма намираме $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ и от (3) имаме $3 \mid 2^{2^{q_1 q_2 \dots q_m}} - 1$. Понеже $(q-1, 2^{q_1 q_2 \dots q_m}) = (q-1, 2) = 2$ и $q-1 < p < q_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) следва, че $q \mid 2^2 - 1$, т.е. $q = 3$. Това е противоречие с $3 \parallel n_1$ и следователно всеки прост делител на $\frac{n_1}{3}$ е по-голям от p . Тогава $\frac{n_1}{3} > p^{\Omega(n_1/3)}$ и от (2) и от избора на $p, q_1, q_2, \dots, q_m$ имаме:

$$\begin{aligned} \Omega(n+k) &= \Omega(k) + \Omega(3) + \Omega\left(\frac{n_1}{3}\right) < \\ &< \Omega(k) + 1 + \log_p\left(\frac{n_1}{3}\right) < \\ &< \Omega(k) + 1 + \log_p(n_1 - 1) = \\ &= \Omega(k) + 1 + q_1 q_2 \dots q_m \log_p 2. \end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \frac{\Omega(k) + 1 + q_1 q_2 \dots q_m \log_p 2}{q_1 q_2 \dots q_m} < \frac{\Omega(k) + 1}{p^m} + \log_p 2 < \beta.$$

Задача 5. За множеството $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ разглеждаме функция $f : X \rightarrow X$, която изпълнява следните две условия:

- (1) $f(x) \neq x$ за всяко $x \in X$;
- (2) $A \cap f(A) \neq \emptyset$ за всяко множество $A \subset X$, за което $|A| = 40$.

Да се намери най-малкото естествено число k , за което за всяка такава функция съществува множество $B \subseteq X$, за което $|B| = k$ и $B \cup f(B) = X$.

Забележка. За подмножество T на X дефинираме

$$f(T) = \{x \mid \exists t \in T, x = f(t)\}.$$

Решение. Да разгледаме функцията $f : X \rightarrow X$, дефинирана чрез:

$$f(3i-2) = 3i-1, f(3i-1) = 3i, f(3i) = 3i-2, i = 1, 2, \dots, 30,$$

$$f(j) = 100, 91 \leq j \leq 99, f(100) = 99.$$

Очевидно тази функция удовлетворява условие (1). За всяко множество $A \subset X$, за което $|A| = 40$ имаме:

(i) или съществува i , $1 \leq i \leq 30$, за което $|A \cap \{3i - 2, 3i - 1, 3i\}| \geq 2$ и тогава $A \cap f(A) \neq \emptyset$,

(ii) или $91, 92, \dots, 100 \in A$ и тогава $A \cap f(A) \neq \emptyset$.

И в двата случая f удовлетворява условие (2). За множество $B \subseteq X$, за което $f(B) \cup B = X$ имаме $|B \cap \{3i - 2, 3i - 1, 3i\}| \geq 2$ за всяко $1 \leq i \leq 30$, като $\{91, 92, \dots, 98\} \in B$ и $B \cap \{99, 100\} \neq \emptyset$. Следователно $|B| \geq 69$.

Ще докажем, че за всяка функция f , която удовлетворява дадените условия, съществува множество $B \subseteq X$, за което $|B| \leq 69$ и $f(B) \cup B = X$.

Измежду всички подмножества $U \subseteq X$, за които $U \cap f(U) = \emptyset$ (съществуването на поне едно такова множество следва от условие (1)) да изберем множество, за което $|U|$ е възможно най-голямо. Ако $V = f(U)$ и $W = X \setminus (U \cup V)$, то U , V и W са две по две непресичащи се множества и $X = U \cup V \cup W$. От условията $|U| \leq 39$, $|V| \leq 39$ и от (2) следва:

(i) $f(w) \in U$ за всички $w \in W$. В противен случай за множеството $U' = U \cup \{w\}$ имаме $f(U') = V$, $f(w) \notin U$, $f(w) \neq w$, откъдето $U' \cap f(U') = \emptyset$. Това противоречи с максималността на $|U|$.

(ii) $f(w_1) \neq f(w_2)$ за всички $w_1, w_2 \in W, w_1 \neq w_2$. В противен случай за $u = f(w_1) = f(w_2)$ от (1) имаме $u \in U$. Тогава за множеството $U' = (U \setminus \{u\}) \cup \{w_1, w_2\}$ имаме $f(U') \subseteq V \cup \{u\}$, $U' \cap (V \cup \{u\}) = \emptyset$, което е противоречие с максималността на $|U|$.

(iii) $f(u_i) \neq f(u_j)$ за $1 \leq i < j \leq m$. В противен случай нека $v = f(u_i) = f(u_j) \in V$ и $U' = (U \setminus \{u_i\}) \cup \{w_i\}$. Тогава $f(U') = V \cup \{u_i\}$, $U' \cap f(U') = \emptyset$ и от $|f(U')| > |f(U)|$ отново получаваме противоречие с максималността на $|f(U)|$.

Следователно $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_m)$ са различни елементи на V . В частност $|V| \geq |W|$ и тъй като $|U| \leq 39$ имаме $|V| + |W| \geq 61$ и $|V| \geq 31$. За множеството $B = U \cup W$ имаме $|B| \leq 69$ и $f(B) \cup B \supseteq V \cup B = X$.

Следователно търсеното число е $k = 69$.

Задача 6. За непразни множества S и T дефинираме

$$S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}, \quad 2S = \{2s \mid s \in S\}.$$

Нека n е естествено число, а A и B са подмножества на $\{1, 2, \dots, n\}$. Да се

докаже, че съществува подмножество D на $A + B$, за което

$$D + D \subseteq 2(A + B) \text{ и } |D| \geq \frac{|A| \cdot |B|}{2n},$$

където $|X|$ означава броя на елементите на множеството X .

Решение. Нека $S_y = \{(a, b) \mid a - b = y, a \in A, b \in B\}$. Тъй като

$$\sum_{y=1-n}^{n-1} |S_y| = |A| \cdot |B|,$$

то съществува y_0 , за което $1 - n \leq y_0 \leq n - 1$ и множеството $D = S_{y_0}$ има второто от исканите свойства, т.е.

$$|D| = |S_{y_0}| > \frac{|A| \cdot |B|}{2n}.$$

От дефиницията на S_{y_0} следва, че за всяко $d \in D$ съществува двойка $(a, b) \in S_{y_0}$, за която $d = 2b + y_0 = a + b \in A + B$ и следователно $D \subseteq A + B$. За всеки две $d_1, d_2 \in D$ нека $d_1 = 2b_1 + y_0 = 2a_1 - y_0$, $d_2 = 2b_2 + y_0$, $(b_1, b_2 \in B, a_1 \in A)$. Тогава

$$d_1 + d_2 = 2a_1 - y_0 + 2b_2 + y_0 = 2(a_1 + b_2) \subseteq 2(A + B).$$

Следователно множеството D удовлетворява исканите условия.

Русия

Задача 9.1. Върху окръжност са написани 99 естествени числа. Известно е, че всеки две съседни числа се различават с 1 или 2, или пък едното е два пъти по-голямо от другото. Да се докаже, че поне едно от числата се дели на 3.

Решение. Да допуснем, че нито едно от числата не се дели на 3, т.е. всяко написано число дава остатък 1 или 2 при деление на 3. Но числа с еднакви ненулеви остатъци при деление на 3 не могат да се различават с 1 или 2, не е възможно и едното да е два пъти по-голямо от другото. Следователно съседните числа дават различни остатъци при деление на 3, т.е. остатъците 1 и 2 се редуват, което противоречи на условието, че числата са нечетен брой (99).

Задача 9.2. Сергей избрал две различни естествени числа a и b и записал в тетрадката си четирите числа a , $a + 2$, b и $b + 2$. След това той написал на дъската всичките шест произведения на по две числа от тетрадката. Колко най-много точни квадрати е написал Сергей на дъската?

Решение. Тъй като никои два точни квадрата на естествени числа не се различават с 1, числата $a(a + 2) = (a + 1)^2 - 1$ и $b(b + 2) = (b + 1)^2 - 1$ не са точни квадрати. Освен това числата ab и $a(b + 2)$ не могат едновременно да са точни квадрати, защото иначе тяхното произведение $a^2 \cdot b(b + 2)$ също би било точен квадрат, а тогава и числото $b(b + 2)$ ще е точен квадрат. Аналогично, измежду числата $(a + 2)b$ и $(a + 2)(b + 2)$ най-много едно може да е точен квадрат. В крайна сметка на дъската има не повече от два точни квадрата.

Два точни квадрата се получават например при $a = 2$ и $b = 16$ – тогава $a(b + 2) = 6^2$ и $(a + 2)b = 8^2$.

Задача 9.3. В изпъкнал n -ъгълник са построени няколко диагонала. Един построен диагонал се нарича *добър*, ако пресича (във вътрешна точка) точно един от другите построени диагонали. Да се намери максималният възможен брой добри диагонали.

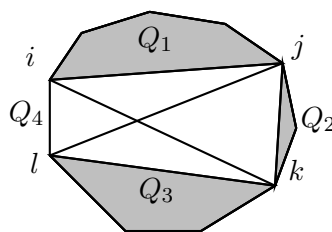
Решение. Отговор: $n - 2$ при четно n , $n - 3$ при нечетно n .

Ще използваме следната известна лема: в изпъкнал n -ъгълник могат да се построят най-много $n - 3$ диагонала, никои два от които нямат общи вътрешни точки.

Първо ще докажем с индукция по n , че броят на добрите диагонали не надминава $n - 2$, ако n е четно, и $n - 3$, ако n е нечетно. Ще считаме, че отсечката е 2-ъгълник без диагонали. При $n = 2$ и 3 твърдението очевидно е вярно. Нека $n \geq 4$ и нашият многоъгълник е $P = A_1 A_2 \dots A_n$.

Ако никои два добри диагонала не се пресичат, от лемата техният брой не надминава $n - 3$. Нека $A_i A_k$ и $A_j A_\ell$ ($i < j < k < \ell$) са два пресичащи се добри диагонала. Тогава всеки от тези диагонали не се пресича с другите построени диагонали.

Да забравим за момент за $A_i A_k$ и $A_j A_\ell$. Всеки от останалите построени диагонали d е диагонал или страна точно в един от многоъгълниците $Q_1 = A_i \dots A_j$, $Q_2 = A_j \dots A_k$, $Q_3 = A_k \dots A_\ell$ или $Q_4 = A_\ell \dots A_n A_1 \dots A_i$, като при това, ако d е страна на някой от тях, то той не може да се пресича с други диагонали (и значи не е добър).



Нека n е четно. От индукционното предположение следва, че измежду всички диагонали, попадащи в някой от многоъгълниците Q_s , $s = 1, 2, 3, 4$, добрите са не повече от върховете на Q_s минус два. Следователно общият брой добри диагонали в P не надминава

$$2 + (j - i - 1) + (k - j - 1) + (\ell - k - 1) + (n - \ell + i - 1) = n - 2 \quad (*)$$

(да отбележим, че си спомнихме за $A_i A_k$ и $A_j A_\ell$).

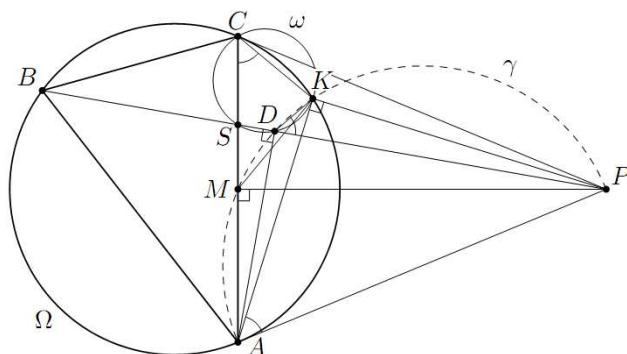
При нечетно n общият брой на върховете на многоъгълниците Q_1 , Q_2 , Q_3 и Q_4 е равна на нечетното число $n + 4$ и значи поне един от тях има нечетен брой върхове. Тогава съответното събираемо в сумата (*) се намалява с 1 и общият брой добри диагонали в този случай не надминава $n - 3$.

Оставяме на читателя да намери примери, показващи точността на оценката.

Задача 9.4. Точка M е средата на страната AC на остроъгълен $\triangle ABC$, в който $AB > BC$, а Ω е окръжността, описана около $\triangle ABC$. Допирателните към Ω в точките A и C се пресичат в точка P . Отсечките BP и AC се

пресичат в точка S . Нека AD е височина в $\triangle ABP$. Окръжността ω , описана около $\triangle CSD$, пресича Ω в точка $K \neq C$. Да се докаже, че $\angle CKM = 90^\circ$.

Решение. Тъй като $\angle AMP = \angle ADP = 90^\circ$, точките M и D лежат на окръжността γ с диаметър AP . Понеже PA е допирателна към Ω , имаме $\angle KAP = \angle ACK$. Тъй като точките C, K, D и S лежат на окръжността ω , имаме $\angle ACK = \angle KDP$. Следователно $\angle KAP = \angle ACK = \angle KDP$, т.е. точките A, D, K и P лежат на една окръжност. Получихме $K \in \gamma$ и $\angle AKP = 90^\circ$.



Оттук имаме $\angle MKP = 180^\circ - \angle MAP = 180^\circ - \angle ABC = \angle ACK$. Следователно

$$\angle MKC = \angle ACK - \angle AKM = \angle MKP - \angle AKM = \angle AKP = 90^\circ.$$

Забележка. От условието следва, че точка D е вътрешна за Ω , но е извън $\triangle ABC$.

Задача 9.5. Към естественото число N добавили най-големия му естествен делител, по-малък от N , и получили степен на десет. Да се намерят всички такива N .

Решение. Нека m е най-големият естествен делител на N , по-малък от N . Тогава $n = mp$, където p е най-малкият прост делител на N . Имаме $N + m = 10^k$ за някое естествено k , откъдето $m(p + 1) = 10^k$. Дясната страна не се дели на 3 и значи $p > 2$. Оттук следва, че N е нечетно, а тогава и m е нечетно. От друга страна m е делител на 10^k и заключаваме,

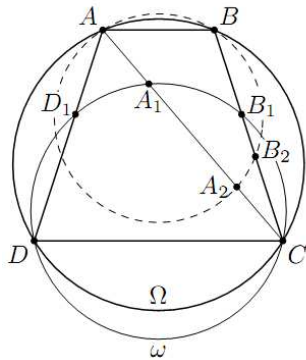
че $m = 5^s$ за някое цяло неотрицателно s . Ако $m = 1$, то $N = p = 10^k - 1$ е просто число, което е невъзможно, защото $10^k - 1$ се дели на 9.

Следователно $s \geq 1$, числото N се дели на 5 и $p \leq 5$. Ако $p = 3$, получаваме $4 \cdot 5^s = 10^k$, откъдето $k = 2$, $m = 25$ и $N = 75$. Ако $p = 5$, то $p + 1 = 6$, и числото 10^k се дели на 3, което е невъзможно.

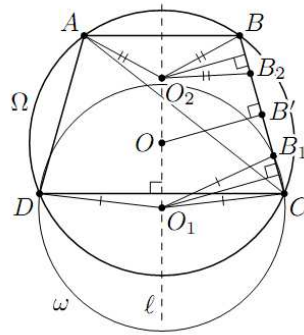
Задача 9.6. Трапец $ABCD$ с основи AB и CD е вписан в окръжност Ω . Окръжност ω минава през точките C и D и пресича отсечките CA и CB съответно в точки A_1 и B_1 . Точките A_2 и B_2 са симетрични на точките A_1 и B_1 относно средите на отсечките CA и CB съответно. Да се докаже, че точките A , B , A_2 и B_2 лежат на една окръжност.

Решение. Първи начин. Твърдението на задачата е еквивалентно на равенството $CA_2 \cdot CA = CB_2 \cdot CB$. Тъй като $AA_1 = CA_2$ и $BB_1 = CB_2$, достатъчно е да докажем, че $AA_1 \cdot AC = BB_1 \cdot BC$.

Нека D_1 е втората пресечна точка на ω и AD (фиг. 1). От симетрията имаме $AD = BC$ и $AD_1 = BB_1$. Тогава $AA_1 \cdot AC = AD_1 \cdot AD = BB_1 \cdot BC$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Втори начин. Да означим с O_1 и O съответно центровете на окръжностите ω и Ω . Тези центрове лежат върху общата симетрала ℓ на основите на трапеца. Нека точката O_2 е симетрична на O_1 относно O (фиг. 2). Тогава O_2 също лежи върху ℓ , т.е. $O_2A = O_2B$. По-нататък, проекциите на точките O_2 и O_1 върху BC са симетрични относно проекцията на O , т.е. относно средата B' на отсечката BC . Тъй като проекцията на O_1 съвпада със средата на отсечката CB_1 , от симетрията относно B' получаваме, че проекцията на O_2 съвпада със средата на отсечката BB_2 . Следователно $B_2O_2 = BO_2$.

Аналогично се доказва, че $A_2O_2 = AO_2 = BO_2 = B_2O_2$, т.е. точките A , B , A_2 , B_2 лежат на окръжност с център O_2 .

Задача 9.7. В страната на математиците избрали реално число $\alpha > 2$ и пуснали в обръщение монети с номинали 1 лев и α^k лева за всяко естествено k . При това числото α било избрано така, че всички номинали, без най-малкия, били ирационални числа. Възможно ли е да се окаже, че всяка сума от естествено число лева може да се изплати с такива монети, като всеки номинал се използва не повече от 6 пъти?

Решение. Отговор: Да!

Ще докажем, че числото $\alpha = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$ (това число е корен на уравнението $\alpha^2 + \alpha = 7$ и се намира по много естествен начин) върши работа.

Ясно е, че $\alpha > 2$. За всяко естествено m имаме $(2\alpha)^m = a_m + b_m\sqrt{29}$, където a_m и b_m са цели числа, като $a_m < 0 < b_m$ при нечетни m и $a_m > 0 > b_m$ при четни m . В частност, числото α^m е ирационално.

Остава да докажем, че за всяко естествено число n сумата от n лева може да бъде изплатена по искания начин. Да разгледаме всички възможности за изплащане на n лева с нашите монети (поне един начин има – с n еднолево монети). Да изберем измежду тези възможности тази, при която се използват най-малък брой монети.

Да допуснем, че в този момент някаква монета с номинал α^i (i е цяло неотрицателно число) е използвана 7 или повече пъти. Тогава от дефиницията на α следва, че можем да заменим 7 монети с номинал α^i с две монети с номинали α^{i+1} и α^{i+2} . При това сумата остава n лева, а общият брой на монетите ще намалее (с 5), което противоречи на избора ни.

Забележка. От условието лесно следва, че сумата от 7 лева може да се изплати по искания начин само във вида $7 = \alpha + \alpha^2$. Оттук следва единствеността на търсеното α .

Задача 9.8. В една страна има n града, всеки два от които са свързани с двупосочна железопътна линия. Цените на билетите са еднакви в двете посоки за всеки два града, но са различни за всяка линия, свързваща директно два града. Да се докаже, че пътешественик може да тръгне от някой от градовете и да пътува последователно по $n - 1$ линии, плащайки за всяко пътуване по-малко, отколкото за предходното. (Пътешественикът има право да минава през един и същи град повече от веднъж.)

Решение. Да пуснем експреси между градовете един по един според цената на билетите за съответните линии в нарастващ ред (т.е. първо пускаме най-евтиния експрес, втори е най-евтиният от останалите и т.н.). Във всеки момент във всеки град ще записваме максималния брой на експресите, с които може да се пътува последователно, започвайки от този град, така, че цените на пътуванията монотонно да намаляват.

В началния момент всички числа в градовете са нули. Да разгледаме даден момент, в който пускаме нов експрес, съединяващ градовете A и B , в които точно преди това са били написани съответно числата a и b . След пускането на новия експрес в A ще се появи число, не по-малко от $b + 1$ (защото новият експрес е по-скъп от всички досегашни и тогава от A можем да отидем с него до B , а оттам имаме маршрут с исканото свойство с дължина b). Аналогично, в B ще е записано число, не по-малко от $a + 1$. Тогава сумата на числата в A и B ще се увеличи поне с 2, а числата в останалите градове няма да намаляят. Следователно сумата на всички написани числа ще се увеличи поне с 2.

Да разгледаме финалната ситуация, когато са пуснати всичките $\frac{n(n-1)}{2}$ експреса. Тогава сумата от числата в градовете е поне $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$. Следователно в поне един от градовете е записано число, не по-малко от $n - 1$, което означава, че исканият от пътешественика маршрут е налице.

Забележка. При четно n може да се построи пример, показващ, че монотонен маршрут от n експреса може и да не съществува.

Задача 10.1. Едно естествено число се нарича *добро*, ако измежду неговите делители има точно две прости числа. Възможно ли е 18 последователни естествени числа да бъдат добри?

Решение. Да допуснем, че съществуват 18 последователни добри числа. Измежду тези числа има три, които се делят на 6 и нека това са $6n$, $6(n+1)$ и $6(n+2)$. Ясно е, че в каноничните разлагания на тези числа простите множители са само 2 и 3. Тъй като само едно от числата n , $n+1$, $n+2$ се дели на 3, другите две са степени на двойката, което означава, че това са числата $(1, 2)$ или $(2, 4)$, т.е. $n \leq 2$. Тогава 13 е измежду нашите числа, а то не е добро, противоречие.

Задача 10.2. Функцията $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е такава, че за произволни x и y , за които $x > y$, е в сила неравенството $(f(x))^2 \leq f(y)$. Да се докаже, че множеството от стойностите на функцията се съдържа в интервала $[0, 1]$.

Решение. От условието следва, че $f(y) \geq (f(y+1))^2 \geq 0$ за всяко y , т.е. всички стойности на функцията са неотрицателни.

Да допуснем за момент, че $f(a) = b > 1$ за някои a и b . Нека $c < b$ е произволно число и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растяща редица, която клони към a , като при това $c < x_n < a$ за всяко n (например $x_n = a - \frac{1}{tn}$ за някое достатъчно голямо t). Тогава

$$f(c) \geq (f(x_1))^2 \geq (f(x_2))^4 \geq \dots \geq (f(x_n))^{2^{n+1}} \geq (f(a))^{2^{n+2}} = b^{2^{n+2}},$$

т.е. $f(c) \geq b^{2^{n+2}}$ за всяко естествено n . Това очевидно е невъзможно, защото лявата страна е фиксирана, а дясната клони към безкрайност. Следователно $f(x) \leq 1$ за всяко x .

Задача 10.3. Дадени са n кутии с номера от 1 до n . Първоначално във всяка кутия стои карта с номера на кутията. Васил разместил картите по някакъв начин и след това в i -тата кутия се оказала картата с числото a_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Петър има право да избере две карти с номера x и y и да размени местата им, като заплати за това удоволствие $2|x - y|$ лева. Да се докаже, че Петър може да върне всички карти на първоначалните им места, като заплати не повече от $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|$ лева.

Решение. Нека $(b_1, \dots, b_n)$ е произволно разпределение на картите в даден момент (b_i е числото, написано на картата в i -тата кутия). Ще наричаме числото $|b_1 - 1| + |b_2 - 2| + \dots + |b_n - n|$ *цена* на това разпределение.

Лема. За всяко разпределение $(b_1, \dots, b_n)$, различно от първоначалното, е възможно да се разменят местата на някои две карти b_i и b_j така, че цената на новото разпределение да се намало точно с $2|b_i - b_j|$ спрямо цената на $(b_1, \dots, b_n)$.

Доказателство. Да забележим, че при размяна на местата на картите b_i и b_j цената намалява с

$$|b_i - i| + |b_j - j| - |b_i - j| - |b_j - i| = (|b_i - i| - |b_j - i|) + (|b_j - j| - |b_i - j|). \quad (*)$$

Лесно се вижда, че изразът от $(*)$ е равен на $2|b_i - b_j|$ точно когато са изпълнени неравенствата $i \leq b_j < b_i \leq j$ – тогава всяко от двете събираеми от дясно на $(*)$ ще е равно на $|b_i - b_j|$. Остава да намерим такива индекси i и j .

Нека j е най-голямото число, написано на карта, която не е в своята кутия (т.е. не е в кутията с номер j). Картата с числото b_j също не е в своята

кутия (а е в кутията j) и значи $b_j < j$. Да маркираме първите b_j кутии. Имаме точно b_j карти с числа, ненадминаващи b_j , и една от тях (картата с числото b_j) вече е немаркирана кутия (защото $j > b_j$). Следователно съществува маркирана кутия i , за която $b_i > b_j$. Поради избора на j имаме $b_i \leq j$, откъдето и следва исканата верига от неравенства

$$i \leq b_j < b_i \leq j.$$

Твърдението на задачата сега следва лесно от лемата – за всяко разпределение, различно от първоначалното, можем да намалим цената с някаква сума a , заплащайки точно a лева. Продължавайки по този начин, ще получим разпределение с нулева цена, заплащайки по пътя точно цената на $(b_1, \dots, b_n)$.

Забележка 1. Всяко от събираемите в $(*)$ не надминава $|b_i - b_j|$. Следователно не е възможно да намалим цената на разпределението с число, което да е по-голямо от количеството на заплатените левове. Това означава, че цената на едно разпределение е равно на най-малката сума левове, която е необходима за достигане на първоначалното състояние.

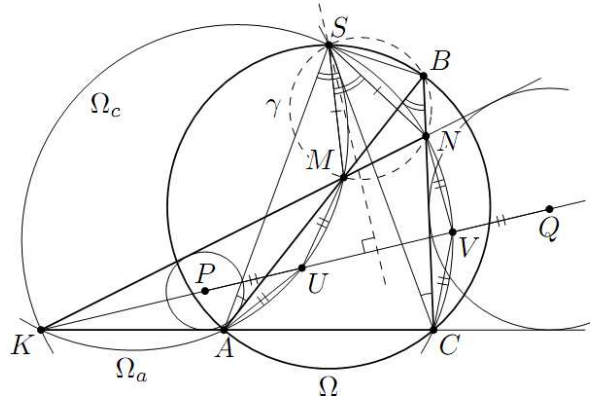
Забележка 2. Предлагаме на читателя и друго доказателство на лемата. За всяко k за означим с c_k номера на кутията, в която лежи картата с числото k (т.е. $c_{b_k} = k = b_{c_k}$). Нека s е най-малкото число, за което $c_s < s$ – такова число съществува, защото $c_1 + \dots + c_n = 1 + \dots + n$. Тогава картата с числото c_s не е в своята кутия. Нека t е максималният номер на кутия, който е по-малък от s и е такъв, че $c_t \neq t$. Тогава имаме $c_t > t$ или $t < s$. Освен това $t \geq c_s$ поради максималността на t . Тъй като $k = c_k \neq c_t$ за всички $t < k < s$, от неравенството $c_t > t$ следва $c_t \geq s$. Получихме $c_s \leq t < s \leq c_t$ и можем да положим $i = c_s$ и $j = c_t$, за да достигнем до исканото $i \leq b_j < b_i \leq j$.

Задача 10.4. Даден е $\triangle ABC$, $AB > BC$, вписан в окръжност Ω . Върху страните AB и BC са избрани съответно точки M и N така, че $AM = CN$. Правите MN и AC се пресичат в точка K . Нека P е центърът на вписаната в $\triangle AMK$ окръжност, а Q е центърът на външновписаната към страната CN окръжност за $\triangle CNK$. Да се докаже, че средата на дъгата ABC на окръжността Ω е равноотдалечена от точките P и Q .

Решение. Ще използваме известната лема за триъбеца.

Лема. Нека L е средата на дъгата YZ (несъдържаща точка X) от описаната около $\triangle XYZ$ окръжност. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle XYZ$

окръжност, а I_x е центърът на външновписаната към страната YZ на $\triangle XYZ$ окръжност. Тогава $LY = LZ = LI = LI_x$.



Нека S е средата на дъгата ABC от окръжността Ω . Имаме $SA = SC$ (тъй като S лежи на симетралата на отсечката AC), $AM = CN$ и $\angle BCS = \angle BAS$ (като вписани ъгли). Тогава $\triangle AMS \cong \triangle CNS$, и, нещо повече, тези триъгълници са съответни при ротация Φ с център S и ъгъл $\angle ASC = \angle ABC$. Оттук, в частности, получаваме $SM = SN$ и $\angle MSN = \angle ABC$. От последното равенство следва, че четириъгълникът $MSBN$ е вписан в някаква окръжност γ .

Окръжностите Ω_a и Ω_c , описани съответно около триъгълниците AMS и CNS , също са съответни при ротацията Φ . Нека U и V са средите на дъгите AM и CN (несъдържащи S) от тези окръжности. Тогава от ротацията получаваме $SU = SV$ (т.е. точка S лежи на симетралата на UV) и $UA = VC$. По-нататък, от окръжностите Ω и γ имаме $\angle SAK = \angle SBC = \angle SMK$, т.е. K лежи върху Ω_a . Аналогично, K лежи и върху Ω_c .

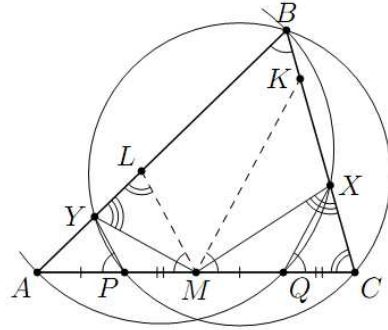
От горното следва, че точките U и V заедно с точките P и Q лежат на ъглополовящата на $\angle CKN$. От лемата за триъбеца (за триъгълниците KAM и KCN) имаме $UP = UA$ и $VQ = VC$. Тъй като $UA = VC$, това означава, че точките P и Q са симетрични относно симетралата на UV , върху която лежат точката S , т.е. S равноотдалечена от P и Q .

Забележка 1. Точката S е точка на Микел за четворката прави BA , BC , AC и MN .

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 10.6. Точка M е средата на страната AC на $\triangle ABC$. Върху отсечките AM и CM са избрани съответно точки P и Q така, че $PQ = AC/2$. Окръжността, описана около $\triangle ABQ$, пресича страната BC в точка $X \neq B$, а окръжността, описана около $\triangle BCP$, пресича страната AB в точка $Y \neq B$. Да се докаже, че четириъгълникът $BXMY$ е вписан.

Решение. От вписаните четириъгълници $BCPY$ и $BAQX$ следва, че $\angle APY = \angle ABC = \angle CQX$. Нека правата през M , успоредна на QX , да пресича правата BC в точка K , а правата през M , успоредна на PY , да пресича правата AB в точка L . Тогава $\angle AML = \angle ABC = \angle CMK$, откъдето



$$\angle ALM = 180^\circ - \angle LAM - \angle AML = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \angle ACB.$$

Следователно $\triangle MAL \sim \triangle MKC$.

От условието следва $AP = AM - PM = PQ - PM = MQ$ и аналогично $CQ = PM$. Оттук $AY/YL = AP/PM = MQ/QC = KX/XC$. Тогава Y и X са съответни точки в подобните триъгълници MAL и MKC . Следователно $\angle MXC = \angle MYL = \angle MYB$, което означава, че четириъгълникът $BXYM$ е вписан.

Задача 10.7. Виж Задача 9.7.

Задача 10.8. В равнината са дадени n изпъкнали k -ъгълника, всеки два от които имат обща вътрешна точка. Известно е, че всеки от k -ъгълниците може да се изобрази във всеки друг чрез хомотетия с положителен коефициент. Да се докаже, че в равнината съществува точка, която принадлежи на поне $1 + \frac{n-1}{2k}$ от тези k -ъгълници.

Решение. Ще използваме следната лема.

Лема. Ако два изпъкнали многоъгълници с обща вътрешна точка са съответни при хомотетия с положителен коефициент, то някой от върховете на единия е вътрешна точка за другия.

Доказателство. Нека двата многоъгълника са P и P' . Ако един от тях напълно лежи в другия, твърдението е очевидно. В противен случай ще

има страна AB на P , която пресича контура на P' . Ако P' съдържа една от точките A или B , твърдението е доказано.

Остава да разгледаме случая, когато P' пресича AB по отсечка, лежаща във вътрешността на AB . Ясно е, че P' има върхове и от двете страни на правата AB . Да разгледаме страната $A'B'$ на P' , която е съответна на AB при хомотетията, и произволен връх C' на P' , такъв, че $A'B'$ и C' са в различни полуравнини относно AB . Нека C е съответният на C' връх на P . Тогава C' лежи във вътрешността на $\triangle ABC$, защото се намира в една и съща полуравнина относно AB , BC и AC с този триъгълник. В частност, C' принадлежи на P и доказателството на лемата е завършено.

Нека $P_1, \dots, P_n$ са дадените k -ъгълници и да означим $P_i = A_{i,1}, \dots, A_{i,k}$, $i = 1, 2, \dots, n$. За всеки връх $A_{i,j}$ да означим с $a_{i,j}$ броя на многоъгълниците P_s ($s \neq i$), за които $A_{i,j}$ е вътрешна точка. От лемата следва, че всяка двойка k -ъгълници внася принос в някое от числата $a_{i,j}$. Следователно

$$a_{1,1} + \dots + a_{n,k} \geq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Оттук следва, че поне едно от числата $a_{i,j}$ е не по-малко от $\frac{n(n-1)}{2nk} = \frac{n-1}{2k}$. Тъй като върхът $A_{i,j}$ лежи в P_i и още $a_{i,j}$ други k -ъгълника, той принадлежи на поне $1 + \frac{n-1}{2k}$ от k -ъгълниците, т.е. има исканите свойства.

Задача 11.1. Съществува ли реално положително число a , за което за всички реални числа x е в сила неравенството

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax?$$

Решение. Отговор: Не.

Първи начин. Да допуснем, че $0 < a \leq 1$. Тогава при $x = \pi/2$ лявата част е $|\cos(a\pi/2)|$, т.е. няма да надминава 1, а дясната част е $1 + \sin(a\pi/2) > 1$. Ако $a > 1$, то, означавайки $ax = t$ и $b = 1/a$, привеждаме неравенството във вида $|\cos bt| + |\cos t| > \sin bt + \sin t$, което свежда нещата към предишния случай.

Втори начин. Да изберем x така, че $x(a+1) = \pi/2$. Тогава x и ax лежат в интервала $(0, \pi/2)$ и значи $|\cos x| = \cos x = \sin ax$ и $|\cos ax| = \cos ax = \sin x$. Следователно за това x имаме $|\cos x| + |\cos ax| = \sin ax + \sin x$.

Задача 11.2. Петър и Васил играят игра на клетъчна дъска $n \times n$, $n > 1$. В началото една от ъгловите клетки е черна и в нея стои шахматен топ,

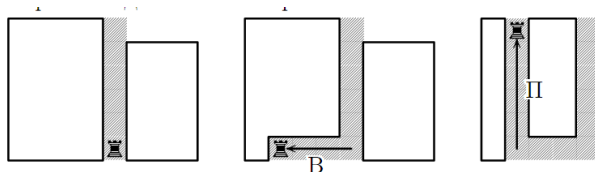
а останалите клетки са бели. Първи мести Петър, след това играчите се редуват, като на всеки ход съответният играч премества топа хоризонтално или вертикално и в този момент всички клетки, през които топът е преминал (включително тази, в която ходът свършва), се преоцветяват в черно. Топът няма право да преминава през черни клетки или да спира в тях. Губи този, който първи не може да направи ход. Кой от играчите има печеливша стратегия?

Решение. Отговор: Петър има печеливша стратегия.

Една от печелившите стратегии за Петър е следната: винаги да прави възможно най-дългия в момента вертикален ход (в частност, на първия си ход ще отиде по вертикала в друг ъгъл на дъската). Ще докажем, че това наистина води до победа.

Да наречем една бяла клетка *достижима*, ако от текущото положение на топа може да се достигне до тази клетка с няколко разрешени хода. Ще докажем, че във всеки момент Петър може да мести, като след всеки негов ход всички достижими клетки образуват няколко (всъщност не повече от два) правоъгълника, във всеки от които броят на редовете е по-голям от броя на стълбовете, като за всеки от тях топът стои в клетка, съседна с ъглова по хоризонтала. Това е вярно за първия ход на Петър.

По-нататък, ако горното е изпълнено след някой ход на Петър, Васил е принуден да мести в един от получените правоъгълници по хоризонтал. Нека това е правоъгълник с r реда и c стълба и хоризонталният ход на Васил да е на $v \leq c$ клетки. След този ход клетките на другия правоъгълник (ако изобщо е имало друг) вече няма да са достижими.



Тъй като $r \geq c + 1 \geq 2$, Петър има възможност да направи вертикален ход. След този ход достижимите клетки ще образуват правоъгълници $r \times (c - v)$ и $(r - 1) \times (v - 1)$. Във всеки от тези правоъгълници редовете са повече от стълбовете, защото $r > c > c - v$ и $r - 1 > c - 1 \geq v - 1$. При това топът е в клетка, съседна по хоризонтал с ъглова клетка на всеки от правоъгълниците, с което исканото твърдение е доказано.

В частност, доказахме, че Петър винаги може да направи ход. Тъй като играта очевидно завършва (защото белите клетки постоянно намаляват), стратегията на Петър е печеливша.

Задача 11.3. Рационални положителни числа a и b са записани като десетични дробни. Известно е, че минималните периоди и на двете дробни са с дължина 30 цифри, а в десетичния запис на числото $a - b$ минималният период е с дължина 15 цифри. Кое е най-малкото естествено число k , за което минималният период в десетичния запис на числото $a + kb$ също може да е с дължина 15 цифри?

Решение. Отговор: $k = 6$.

Без ограничение на общността можем да считаме, че числата a , b , $a - b$ и $a + kb$ са чисто периодични (т.е. периодите започват ведната след десетичната запетая). Действително, умножаването със степен на 10 не променя периода.

Ще използваме следния известен факт: десетичният запис на рационалното число r е чисто периодичен с (не непременно минимален) период T тогава и само тогава, когато r има вида $\frac{m}{10^T - 1}$ за някое цяло число m .

В нашата задача имаме $a = \frac{m}{10^{30} - 1}$ и $b = \frac{n}{10^{30} - 1}$ за някакви цели числа m и n . Освен това, числата $a - b = \frac{m-n}{10^{30} - 1}$ и $a + kb = \frac{m+kn}{10^{30} - 1}$ са десетични дробни с период 15, т.е. могат да бъдат записани като обикновени дробни със знаменатели $10^{15} - 1$. Тогава така може да се запише и тяхната разлика $(k+1)b = \frac{(k+1)n}{10^{30} - 1}$. Следователно числото $(k+1)n$ се дели на $10^{15} + 1$, а числото n няма това свойство (иначе и b щеше да има период 15). Заклучаваме, че числото $k + 1$ се дели на някакъв прост делител на $10^{15} + 1$. Най-малкият такъв делител е 7. Следователно $k + 1 \geq 7$, т.е. $k \geq 6$.

Един (в някакъв смисъл минимален) пример за числа, удовлетворяващи условието при $k = 6$, се получава, ако $a - b = \frac{1}{10^{15} - 1}$ и $a + 6b = \frac{2}{10^{15} - 1}$. Тогава $a = \frac{8}{7(10^{15} - 1)}$ и $b = \frac{1}{7(10^{15} - 1)}$. Ясно е, че минималните периоди на $a - b$ и $a + 6b$ са равни на 15. Оставяме на читателя да съобрази, че минималните периоди на числата a и b са равни на 30.

Задача 11.4. Виж Задача 10.4.

Задача 11.5. Естественото число n се нарича *хубаво*, ако всеки негов естествен делител, увеличен с 1, е делител на числото $n + 1$. Да се намерят всички хубави естествени числа.

Решение. Отговор: 1 и всички нечетни прости числа.

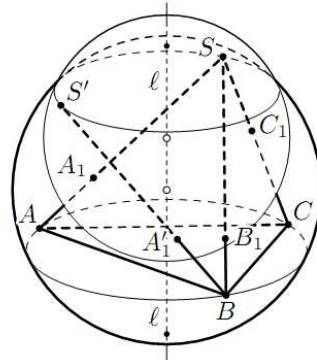
Ясно е, че $n = 1$ е решение. Решения са и всички нечетни прости числа – ако $n = p$, то делителите, увеличени с 1, са 2 и $p + 1$, като и двата делят $p + 1$. Да отбележим още, че всяко решение е нечетно (защото $n + 1$ се дели на $1 + 1$).

Да допуснем, че някое съставно n е решение. Нека $n = ab$, където $a \geq b > 2$. Тогава числото $n + 1$ се дели на $a + 1$. Тъй като и $n + b = (a + 1)b$ също се дели на $a + 1$, получаваме, че $b - 1 = (n + b) - (n + 1)$ се дели на $a + 1$. Но $b - 1 > 0$ и значи $b - 1 \geq a + 1$, което е противоречие.

Задача 11.6. Сфера ω минава през върха S на пирамидата $SABC$ и пресича ребрата SA , SB и SC за втори път съответно в точките A_1 , B_1 и C_1 . Сферата Ω , описана около пирамидата $SABC$, пресича ω по окръжност, лежаща в равнина, успоредна на равнината (ABC) . Точките A_2 , B_2 и C_2 са симетрични на точките A_1 , B_1 и C_1 относно средите съответно на ребрата SA , SB и SC . Да се докаже, че точките A , B , C , A_2 , B_2 и C_2 лежат на една сфера.

Решение. Твърдението на задачата е еквивалентно на равенството $SA_2 \cdot SA = SB_2 \cdot SB = SC_2 \cdot SC$. Поради равенството $AA_1 = SA_2$ и двете аналогични равенства, достатъчно е да докажем, че $AA_1 \cdot AS = BB_1 \cdot BS = CC_1 \cdot CS$.

Нека ℓ е правата през центровете на сферите Ω и ω . Общата окръжност на тези сфери лежи в равнината, перпендикулярна на ℓ и следователно $\ell \perp (ABC)$.



Това означава, че при ротация около ℓ описаната около $\triangle ABC$ окръжност се запазва, и значи има ротация, при която точка A се изобразява в точка B . Нека точките S и A_1 при тази ротация да се изобразяват съответно в S' и A'_1 (тези точки също лежат върху ω). Тогава $AA_1 \cdot AS = BA'_1 \cdot BS' = BB_1 \cdot BS$. Равенството $AA_1 \cdot AS = CC_1 \cdot CS$ се доказва аналогично.

Задача 11.7. В началото на дъската са написани полиномите $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Ако в даден момент на дъската са написани полиномите $f(x)$ и $g(x)$, можем да допишем и полиномите $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, където c е произволна (не непременно цяла) константа. Възможно

ли е след няколко такива операции на дъската да се появи полином от вида $x^n - 1$ (n е естествено число)?

Решение. Отговор: Не.

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са два полинома и x_0 е точка, за която $f'(x_0) = 0$ и $g'(x_0) = 0$. Тогава очевидно $(f \pm g)'(x_0) = 0$ и $cf'(x_0) = 0$. Освен това имаме и $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) = 0$, както и $(h(g(x_0)))' = h'(g(x_0))g'(x_0) = 0$ за произволен полином $h(x)$. Следователно, ако производните на първоначалните полиноми се анулират едновременно в някаква точка, то с разрешените ни от условието операции ще получаваме само полиноми, чиято производна се анулира в същата точка.

Горното разсъждение е достатъчно за отрицателен отговор на поставения въпрос, защото при $x = 2$ имаме $(x^2 - 4x)' = 2x - 4 = 0$ и $(x^3 - 3x^2 + 5)' = 3x^2 - 6x = 0$, но $(x^n - 1)' = nx^{n-1} = n2^{n-1} \neq 0$ за кое да е естествено n .

Забележка. За друго решение още в началото добавете на дъската константата 2 и докажете, че даже тогава исканото е невъзможно. Един начин за реализация на тази идея минава през полагане $x = t + 2$ и разглеждане на коефициента пред t като инвариант.

Задача 11.8. Двама играят игра с карти с колода от n две по две различни карти. За всеки две карти от колодата е известно коя от тях е по-силна, като при това, ако картата A е по-силна от B , а B и по-силна от C , може да се окаже, че C е по-силна от A . В началото картите са раздадени по произволен начин. На всеки ход всеки от играчите показва най-горната си карта и този, чиято карта е по-силна, взима двете карти и ги слага най-отдолу в своята колода (в какъвто си иска ред). Да се докаже, че при произволно начално раздаване играчите, знаейки разположението на всички карти, да се договорят и да действат така, че единият от тях в даден момент да остане без карти.

Решение. Да разгледаме всички ситуации, които могат да се случат в нашата игра (т.е. всички възможни двойки колоди). Ще наричаме дадена ситуация *финална*, ако всички карти са в един от играчите; *критична*, ако единият играч е останал с точно една карта; и *регулярна*, ако всеки от играчите има поне по две карти. Да построим стрелка от всяка ситуация към ситуацията, които могат да се получат след един ход. Тогава от всяка нефинална ситуация излизат две стрелки, а от всяка финална – нито една. Трябва да докажем, че от всяка нефинална ситуация можем по стрелки да стигнем до финална.

Да намерим броя на стрелките към дадена ситуация. Нека за определеност тази ситуация се е получила в резултат на ход, в който двете карти са взети от първия играч. Тогава той има поне две карти, които са в края на колодата му; като е известно, че една от тях a е по-силна от другата b . Следователно картата a е била преди това в първия играч, а картата b – във втория, т.е. предходната ситуация се възстановява еднозначно. Това означава, че ако нашата ситуация е регулярна, то на предходния ход картите може да са спечелени от кой да е от играчите, но във всеки случай тази предходна ситуация се възстановява еднозначно. Следователно във всяка регулярна ситуация влизат точно две стрелки. Аналогично, във всяка нерегулярна ситуация влиза точно една стрелка.

Да допуснем, че съществува ситуация S , от която не е възможно да се попадне във финална ситуация. Да наречем една ситуация *достижима*, ако в нея може да се достигне от S . От всяка достижима ситуация излизат две стрелки към достижими ситуации. От друга страна, във всяка достижима ситуация влизат не повече от две стрелки от достижими ситуации. Това е възможно само в случай, че във всяка достижима ситуация влизат точно по две стрелки от достижими ситуации. От това, в частност, следва, че всички достижими ситуации са регулярни. Нещо повече, тъй като във всяка ситуация влизат не повече от две стрелки, заключаваме, че всички стрелки, влизащи в достижими ситуации, излизат също от достижими такива.

Нека в ситуацията S първият играч да има $k > 1$ карти. Тогава в една от двете ситуации, от които влизат стрелки в S , първият играч има $k - 1$ карти. Нека това е ситуацията S_1 – тя е достижима според доказаното по-горе. Аналогично, ако $k - 1 > 1$, то в една от двете ситуации, от които влизат стрелки в S_1 , в първия играч има $k - 2$ карти, нека тя е S_2 и т.н.. В крайна сметка ще получим редица от достижими ситуации $S_1, S_2, \dots, S_{k-1}$, като в S_{k-1} първият играч вече ще има само една карта, т.е. тази ситуация е критична и значи в нея влиза само една стрелка, противоречие.

САЩ

Задача 1. Реалните числа a, b, c и d са такива, че $b - d \geq 5$ и полиномът $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ има четири реални корена x_1, x_2, x_3 и x_4 . Да се намери най-малката възможна стойност на произведението

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1).$$

Решение. Първи начин. Неравенството $b - d \geq 5$ се записва във вида

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - x_1x_2x_3x_4 \geq 5.$$

с помощта на формулите на Виет. Следователно

$$x_1(x_2 + x_3 + x_4 - x_2x_3x_4) + 1(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - 1) \geq 4,$$

откъдето

$$[x_1(x_2 + x_3 + x_4 - x_2x_3x_4) + 1(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - 1)]^2 \geq 16$$

и с помощта на неравенството на Коши-Буняковски достигаем до

$$\begin{aligned} 16 &\leq (x_1^2 + 1) [(x_2 + x_3 + x_4 - x_2x_3x_4)^2 + (x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - 1)^2] \\ &= (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1). \end{aligned}$$

Равенство се достига тогава и само тогава, когато

$$x_1(x_2 + x_3 + x_4 - x_2x_3x_4) = x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - 1,$$

което е еквивалентно на $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$, т.е. $a = c$. При $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ имаме $b - d = 5$ и минималната стойност на разглеждания израз е 16.

Втори начин. Имаме последователно

$$\begin{aligned} (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1) &= P(i)P(-i) \\ &= [1 - b + d + i(c - a)][1 - b + d - i(c - a)] \\ &= (b - d - 1)^2 + (c - a)^2 \\ &\geq 16. \end{aligned}$$

Равенство се достига тогава и само тогава, когато $b - d = 5$ и $a - c = 0$, което се реализира при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, за които

$$xf(2f(y) - x) + y^2f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y))$$

за всички цели числа x и y , $x \neq 0$.

Решение. Нека p е просто число. Тъй като p дели $f(p)^2$, заключаваме, че p дели и $\frac{f(p)^2}{p}$. Сега с полагането $y = 0$ и $x = p$ получаваме, че p дели $f(0)$. Тъй като p е произволно просто число, имаме $f(0) = 0$.

Полагаме $y = 0$ и получаваме $xf(-x) = \frac{f(x)^2}{x}$. Сега замяната на x с $-x$ и комбинирането на тези получените равенства дава $f(x) = 0$ или $f(x) = x^2$ за всяко x .

Да допуснем, че $f(x_0) = 0$ за някое $x_0 \neq 0$. Полагаме $y = x_0$ и получаваме $xf(x) + x_0^2f(2x) = \frac{f(x)^2}{x}$, откъдето $x_0^2f(2x) = 0 \iff f(2x) = 0$. Следователно f се анулира за всички четни x . Да допуснем, че $f(y_0) \neq 0$ за някое нечетно y_0 . Тогава $f(y_0) = y_0^2$ и с полагането $y = y_0$ получаваме

$$xf(2y_0^2 - x) + y_0^2f(2x - y_0^2) = \frac{f(x)^2}{x} + f(y_0^3).$$

Избирайки четно x в последното равенство, получаваме $y_0^2f(2x - y_0^2) = f(y_0^3)$, което означава, че $f(y_0)^3 = f(2x - y_0^2) = 0$ (в противен случай $y_0^2(2x - y_0^2)^2 = y_0^6$ за всички четни x , което е невъзможно).

От $f(2x - y_0^2) = 0$ за всяко четно x следва, че $f(y) = 0$ за всяко $y \equiv 3 \pmod{4}$. Сега от $x^2f(-x) = f(x)^2$ заключаваме, че $f(y) = 0$ и за всяко $y \equiv 1 \pmod{4}$, т.е. $f(y) = 0$ за всяко нечетно y , противоречие с допускането $f(y_0) \neq 0$.

Следователно $f(x) \equiv 0$ или $f(x) = x^2$. Първата от тези две функции очевидно е решение, втората също поради тъждеството¹

$$x(2y^2 - x)^2 + y^2(2x - y^2)^2 = x^3 + y^6.$$

Забележка. Изводът $f(0) = 0$ може да се направи и така: ако допуснем, че $f(0) \neq 0$ и положим $x = 2f(0)$ и $y = 0$, получаваме $2(2f(0) - 1)f(0)^2 = f(2f(0))^2$, откъдето $2(2f(0) - 1)$ е точен квадрат, което е невъзможно.

¹Известно като тъждество на Софи Жермен.

Задача 3. Да се докаже, че съществува безкрайно множество от точки

$$\dots, P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$$

в равнината със следното свойство: За всеки три различни цели числа a , b и c точките P_a , P_b и P_c лежат на една права тогава и само тогава, когато $a + b + c = 2014$.

Решение. Ще докажем, че множеството

$$\{P_n = (n, n^3 - 2014n^2) : n \in \mathbb{Z}\}$$

има исканото свойство.

Да напомним, че точките (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) лежат на една права тогава и само тогава, когато

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следователно е необходимо да изследваме детерминантата

$$\begin{vmatrix} a & a^3 - 2014a^2 & 1 \\ b & b^3 - 2014b^2 & 1 \\ c & c^3 - 2014c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^3 & 1 \\ b & b^3 & 1 \\ c & c^3 & 1 \end{vmatrix} - 2014 \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Първата детерминанта отдясно е симетричен полином на a , b и c от четвърта степен, който се дели на $(a - b)(b - c)(c - a)$. Оставащият множител от първа степен също е симетричен и трябва да гарантира едночлен ab^3 след разкриването на скобите, което означава, че е $a + b + c$. Втората детерминанта отдясно също е симетричен полином на a , b и c , но от трета степен, който се дели на $(a - b)(b - c)(c - a)$, и сравняването на коефициентите пред ab^2 показва, че тя е точно равна на $(a - b)(b - c)(c - a)$. Следователно²

$$\begin{vmatrix} a & a^3 - 2014a^2 & 1 \\ b & b^3 - 2014b^2 & 1 \\ c & c^3 - 2014c^2 & 1 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c - 2014).$$

Тъй като a , b и c са две по две различни, нашата детерминанта се анулира тогава и само тогава, когато $a + b + c = 2014$.

²Разбира се, до този извод може да се стигне и чрез директно пресмятане на детерминантите.

Задача 4. Дадени са естествено число k и безкрайна решетка от правилни шестоъгълници. Двама играчи A и B играят върху решетката, редувайки ходовете си (A е пръв). В началото всички клетки на решетката са празни. A има право да избере две празни съседни клетки и да постави пулове в тях, а B има право да премахне който си иска пул. Играта се печели от A в момента, в който се появят k последователни клетки с пулове на една линия. Да се намери минималната стойност на k , за която A не може да спечели с краен брой ходове или да се докаже, че такава минимална стойност не съществува.

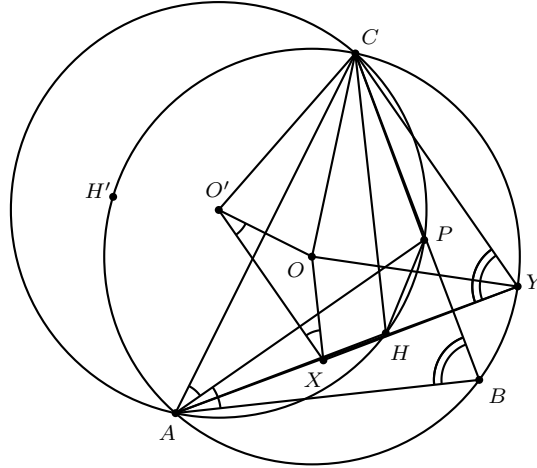
Решение. Ще докажем, че минимална стойност на k , за която A не може да спечели с краен брой ходове при правилна стратегия на B съществува и е равна на 6.

Първо ще покажем, че при $k = 6$ играчът B може да предотврати победата на A . Да оцветим решетката "шахматно" с три цвята и да изберем единия от тях, например бял. Тогава B играе по следния начин: премахва всеки пул на бял цвят, който A току що е поставил; ако няма такъв, играе по произволен начин. Тъй като A може да постави с един ход най-много един пул на бяло поле, тази стратегия гарантира, че във всеки момент ще имаме най-много един бял пул в решетката. Но всяка група от 6 последователни клетки на една линия има по два бели пула (по-общо, по два пула от всеки цвят, т.е. A не може да достигне до печелившата ситуация.

Сега ще докажем, че A винаги може да достигне до 5 последователни пула в един ред. Да разгледаме правоъгълник с ширина 2 клетки и дължина 10 клетки. Нека A да играе в този правоъгълник, докато това е възможно, и да разгледаме момента, в който A не може да играе там. Ако A все още не е победил, в правоъгълника за всеки две съседни клетки има поне по един пул и няма 5 последователни пула в един ред. Ако в горния ред има две редици от пулове с обща дължина 4 (т.е. $0 + 4$, $1 + 3$ или $2 + 2$) и празна клетка между тях, A побеждава с ход в тази празна клетка и клетката над нея. В противен случай не е трудно да се провери (с разглеждане на няколко прости случая), че съществува пул в горния ред, чийто съседни клетки са празни. Тогава четирите съседа на тези две клетки от втория ред имат пулове и A побеждава с ход в кой да е от краищата на тази група.

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и нека P е втората пресечна точка на ъглополовящата на $\angle BAC$ и описаната около $\triangle AHC$ окръжност. Нека X е центърът на описаната около $\triangle APB$ окръжност и Y е ортоцентърът на $\triangle APC$. Да се докаже, че дължината на отсечката XY е равна на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Решение. Нека O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, а H' е точката, симетрична на H относно AC . Тогава H лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Тъй като триъгълниците ACH и ACH' са симетрични относно AC , центровете на описаните около тях окръжности също са симетрични относно AC , т.е. центърът O' на описаната около $\triangle ACH$ окръжност е симетричен на O относно AC .



Тъй като $APCH$ е вписан и H и Y са ортоцентровете съответно на $\triangle ABC$ и $\triangle APC$, имаме

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle AHC = 180^\circ - \angle APC = \angle AYC.$$

Следователно Y лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност и $OY = R$ (R е радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност).

От друга страна, правите OX , XO' и $O'O$ са симетрали съответно на отсечките AB , AP и AC и значи

$$\angle OXO' = \angle BAP = \angle PAC = \angle XO'O.$$

Тогава $OO' = OX$ и това, заедно с $OC = OY$ и успоредността на правите XO' и YC (и двете са перпендикулярни на AP) дава, че трапецът $XYCO'$ е равнобедрен и значи $XY = O'C = OC = R$.

Задача 6. Да се докаже, че съществува константа $c > 0$ със следното свойство: ако a , b и n са естествени числа, за които $(a + i, b + j) > 1$ за всички $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$, то $\min\{a, b\} > c^n n^{\frac{n}{2}}$.

Решение. Да означим с P_n множеството от простите числа, ненадминаващи n .

Лема. Съществува естествено число n_0 , такова, че за всяко $n \geq n_0$ е в сила неравенството

$$\sum_{p \in P_n} \left(1 + \frac{n}{p}\right)^2 < \frac{2n^2}{3}.$$

Доказателство. Разкриваме скобите, делим на n^2 и използваме, че $|P_n| < n$, за да получим усиленото неравенство

$$\frac{1}{n} + \sum_{p \in P_n} \frac{1}{p^2} + \frac{2}{n} \sum_{p \in P_n} \frac{1}{p} < \frac{2}{3}.$$

Тъй като $\frac{2}{n} \sum_{p \in P_n} \frac{1}{p} < \frac{2}{n} \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} < \frac{2 \log n}{n}$, достатъчно е да докажем съществуването на константа $r < \frac{2}{3}$, за която $\sum_{p \in P_n} \frac{1}{p^2} < r$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} \sum_{p \in P_n} \frac{1}{p^2} &\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} < \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

с което лемата е доказана.

Оттук нататък почти докрая ще считаме, че $n \geq n_0$ както в лемата.

Ясно е, че за фиксирано просто p съществуват не повече от $\frac{n}{p} + 1$ числа $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, за които $p|a+i$ и, аналогично, съществуват не повече от $\frac{n}{p} + 1$ числа $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, за които $p|b+j$. Следователно съществуват не повече от $\left(\frac{n}{p} + 1\right)^2$ двойки (i, j) , $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, за които $p|(a+i, b+j)$.

Тогава от лемата следва, че съществуват по-малко от $\frac{2n^2}{3}$ двойки (i, j) , $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, за които има $p \in P_n$, такова, че $p|(a+i, b+j)$.

Нека $N = \left\lceil \frac{n^2}{3} \right\rceil$. Тогава съществуват поне N двойки (i, j) , $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, за които $(a+i, b+j)$ не се дели на нито едно число от P_n . Нека (i_s, j_s) ,

$s = 1, 2, \dots, N$, са такива двойки. За всяка от тези двойки съществува просто число $p_s > n$, което дели $(a + i_s, b + j_s)$. При това числата p_s са две по две различни (ако $p_s = p_{s'}$, то $p_s | (a + i_s) - (a + i_{s'}) = i_s - i_{s'}$, което е възможно само при $i_s = i_{s'}$; аналогично $j_s = j_{s'}$ и имаме противоречие).

Получихме, че $\prod_{i=0}^{n-1} (a + i)$ се дели на $\prod_{s=1}^N p_s$. Тогава

$$(a + n)^n > \prod_{i=0}^{n-1} (a + i) \geq \prod_{s=1}^N p_s \geq \prod_{i=1}^N (n + 2i - 1).$$

Да означим последното произведение с X и да го оценим. Имаме

$$X^2 = \prod_{i=1}^N (n + 2i - 1)(n + 2(N + 1 - i) - 1) > \prod_{i=1}^N (2nN) = (2nN)^N$$

(Проверете!). Следователно

$$(a + n)^n > (2nN)^{N/2} \geq \left(\frac{2n^3}{3}\right)^{n^2/6},$$

откъдето

$$a > \left(\frac{2}{3}\right)^{n/6} n^{n/2} - n.$$

Последното е по-голямо от $c^n n^{n/2}$ за всяка константа $c < \left(\frac{2}{3}\right)^{1/6}$. Ясно е, че същото неравенство следва по същия начин и за b .

Сега да освободим n от ограничението $n \geq n_0$. Остават краен брой стойности на n , за които са в сила аналогични неравенства с евентуално по-малка константа c . Следователно съществува константа $c > 0$, за която $\min\{a, b\} > c^n n^{\frac{n}{2}}$.

Забележка. Много от оценките в горното доказателство са груби и степенният показател $\frac{n}{2}$ може да бъде леко подобрен. Това означава, че неравенството от условието е в сила за всяка константа $c > 0$ при достатъчно големи n .

Тайланд

Задача 1. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, за който $\angle BAC = 100^\circ$. Върху лъча AB са избрани точки D и E , за които $BC = AD = BE$. Да се докаже, че $BC \cdot DE = BD \cdot CE$.

Решение. Нека G и F са такива точки съответно върху страните EC и BC , че четириъгълникът $BDGF$ е успоредник ($DG \parallel BF$ и $BD \parallel FG$). Тъй като $\triangle ABC$ е равнобедрен, то $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$ и понеже $\triangle BEC$ е също равнобедрен, получаваме $\angle BEC = \angle BCE = 20^\circ$. Сега от $DG \parallel BF$ намираме $\angle DGE = \angle BCE = \angle BEC$ и следователно $\triangle DEG$ е също равнобедрен, като $DE = DG$. Освен това имаме

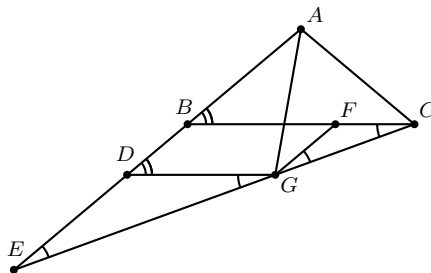
$$DE = BE - BD = AD - BD = AB$$

и от успоредника $BDGF$ намираме

$$BF = DG = DE = AB = AC$$

и

$$FG = BD = BE - DE = BC - BF = FC.$$



Следователно $\triangle FGC$ е равнобедрен и $\angle FGC = \angle FCG = 20^\circ$, откъдето $\triangle FGC \sim \triangle BEC$. Тогава $\frac{BC}{CE} = \frac{FC}{CG} = \frac{BD}{CG}$ и понеже имаме да докажем, че $\frac{BC}{CE} = \frac{BD}{DE}$, достатъчно е да установим, че $CG = DE$.

Триъгълниците ABC и GDA са еднакви ($AB = GD$, $BC = DA$ и $\angle ABC = \angle GDA = 40^\circ$), откъдето $GA = AC$. Тогава $\triangle GAC$ е равнобедрен, като $\angle ACG = \angle ACB + \angle BCG = 60^\circ$, т.е. $\triangle GAC$ е равностранен. Следователно $CG = AC = AB = DE$.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които равенството

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

е изпълнено за произволни реални числа x и y .

Решение. Полагаме $x = 0$ в даденото равенство и получаваме

$$f(-1) + f(x)f(0) = -1.$$

Ако $f(0) \neq 0$, това равенство показва, че $f(x)$ е константа, което е невъзможно, защото дясната част на равенството от условието се мени. Следователно $f(0) = 0$ и полагането $x = y = 1$ дава $f(1)^2 = 1$, т.е. $f(1) = 1$ или $f(1) = -1$.

Случай 1. При $f(1) = 1$ полагаме $x = xy$ и $y = 1$ и получаваме равенството $f(xy - 1) = f(xy) = 2xy - 1$. Оттук и от условието следва

$$(1) \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Полаганията $y = 1$, $x := x + 1$ и $y = 1$ в равенството от условието дават

$$(2) \quad f(x - 1) = 2x - 1 - f(x) \text{ и } f(x + 1) = 2x + 1 - f(x).$$

При $y = x$ в условието и равенствата (1) и (2) получаваме

$$\begin{aligned} 2x^2 - 1 &= f(x^2 - 1) + f(x)^2 = f(x - 1)f(x + 1) + f(x)^2 = \\ &= (2x - 1 - f(x))(2x + 1 - f(x)) + f(x)^2 = \\ &= 2f(x)^2 - 4xf(x) + 4x^2 - 1, \end{aligned}$$

откъдето $2(f(x) - x)^2 = 0$, т.е. $f(x) = x$.

Случай 2. При $f(1) = -1$ аналогични полагания показват, че

$$2x^2 - 1 = 2f(x) = 4x^2 - 1,$$

т. е. $f(x) = -x^2$.

Директна проверка показва, че и двете получени функции удовлетворяват условието, т.е. единствените решения са $f(x) = x$ и $f(x) = -x^2$.

Задача 3. Дадени са естествени числа M и N . Иван се намира в точката $(0, N)$ и се придвижва на стъпки до точката $(M, 0)$, като спазва следните две правила:

1. Всяка стъпка е с дължина 1 и е успоредна на някоя от координатните оси.

2. За всяка точка (x, y) на неговия път е изпълнено $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

На всяка стъпка той записва разстоянието до оста, на която е успоредна тази стъпка, като, ако стъпката го отдалечава от центъра на координатната система, той записва това разстояние с положителен знак, а в противен случай – с отрицателен знак.

Да се докаже, че когато Иван завърши разходката си, сборът от всички записани числа ще бъде равен на нула.

Решение. Нека Иван прави k стъпки и на i -та стъпка се придвижва от точката (x_{i-1}, y_{i-1}) до точката (x_i, y_i) . Ако тази стъпка е успоредна на оста Ox , то $y_i = y_{i-1}$ и записаното число е $y_{i-1}(x_i - x_{i-1})$. Ако тази стъпка е успоредна на оста Oy , то $x_i = x_{i-1}$ и записаното число е $x_i(y_i - y_{i-1})$. Следователно, независимо от посоката, числото, което се записва на i -та стъпка, е $y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + x_i(y_i - y_{i-1})$. Тогава сборът на всички записани числа е

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + x_i(y_i - y_{i-1}) &= \sum_{i=1}^k (x_i y_i - x_{i-1} y_{i-1}) = \\ &= x_k y_k - x_0 y_0 = M \cdot 0 + 0 \cdot N = 0. \end{aligned}$$

Задача 4. Да се намерят всички полиноми $P(x)$ с цели коефициенти, за които $P(n)$ дели $2557^n + 213 \cdot 2014$ за всяко естествено число n .

Решение. Полиномите $P(x) \equiv 1$ и $P(x) \equiv -1$ удовлетворяват условието. Ако $P \not\equiv 1$, $P \not\equiv -1$ и $P(x) \not\equiv 0$, то съществува цяло число n_0 , за което $|P(n_0)| > 1$. Ако q е прост делител на $P(n_0)$, то q дели $2557^{n_0} + 213 \cdot 2014$, откъдето следва, че q е нечетно и $q \neq 2557$ (числото 2557 е просто).

От $P(n_0 + q) \equiv P(n_0) \equiv 0 \pmod{q}$ и факта, че $P(n_0 + q)$ дели $2557^{n_0+q} + 213 \cdot 2014$, следва, че

$$2557^{n_0+q} + 213 \cdot 2014 \equiv 0 \equiv 2557^{n_0} + 213 \cdot 2014 \pmod{q}.$$

Оттук $2557^{n_0+q} \equiv 2557^{n_0} \pmod{q}$ и понеже $(q, 2557) = 1$, то $2557^q \equiv 1 \pmod{q}$. Сега от теоремата на Ферма намираме $1 \equiv 2557^q \equiv 2557 \pmod{q}$, т.е. q дели $2556 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71$. Следователно $q = 3$ или $q = 71$, откъдето q дели $213 \cdot 2014$, т.е. q дели 2557^{n_0} . Това означава, че $q = 2557$, което е противоречие.

Окончателно, търсените полиноми са $P(x) \equiv 1$ и $P(x) \equiv -1$.

Задача 5. Да се намери най-голямото реално число k , за което неравенството

$$\left(k + \frac{a}{b}\right) \left(k + \frac{b}{c}\right) \left(k + \frac{c}{a}\right) \leq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$$

е изпълнено за произволни реални положителни числа a , b и c .

Решение. При $a = b = c$ получаваме $k \leq \sqrt[3]{9} - 1$. Ще покажем, че $k = \sqrt[3]{9} - 1$ е търсеното число.

При $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ и $B = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ от неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме $A \geq 3$ и $B \geq 3$. За всяко реално число $k \geq 0$ са изпълнени следните неравенства:

$$9(k^3 + 1) \leq (k^3 + 1)AB, \quad 9k^2A \leq 3k^2AB, \quad 9kB \leq 3kAB.$$

Събираме горните три неравенства и получаваме

$$9(k^3 + 1 + k^2A + kB) \leq (k + 1)^3AB \iff$$

$$9 \left(k + \frac{a}{b}\right) \left(k + \frac{b}{c}\right) \left(k + \frac{c}{a}\right) \leq (k + 1)^3AB,$$

което при $k = \sqrt[3]{9} - 1$ е еквивалентно на даденото неравенство.

Задача 6. Да се намерят всички прости числа p , за които числото $2p^2 - 3p - 1$ е точен куб на естествено число.

Решение. От равенството

$$(1) \quad 2p^2 - 3p - 1 = n^3$$

получаваме $n^3 = 2p^2 - 3p - 1 < 2p^2 \leq p^3$, откъдето $n < p$, т.е. $n + 1 \leq p$.

Ако $p = n + 1$ от (1) получаваме $n^3 - 2n^2 - n + 2 = 0$, откъдето $(n - 2)(n - 1)(n + 1) = 0$. Следователно $n = 1, 2$, т.е. $p = 2, 3$.

Ако $p > n + 1$ от (1) имаме

$$(2) \quad p(2p - 3) = n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

и понеже $p > n + 1$ и p е просто, то p дели $n^2 - n + 1$. Тогава

$$(3) \quad n^2 - n + 1 = kp$$

за някое естествено k . От (2) и (3) намираме $2p = k(n + 1) + 3$ и след заместване $p = \frac{k(n + 1) + 3}{2}$ в (3) получаваме

$$2n^2 - (k^2 + 2)n - (k^2 + 3k - 2) = 0.$$

Дискриминантата на това квадратно уравнение $D = k^4 + 12k^2 + 24k - 12$ трябва да бъде точен квадрат. Ако $k \geq 9$, то имаме

$$(k^2 + 6)^2 < k^4 + 12k^2 + 24k - 12 < (k^2 + 7)^2$$

и D не може да бъде точен квадрат. Следователно $1 \leq k \leq 8$ и директна проверка показва, че нито една от тези стойности не дава решение.

Окончателно, търсените прости числа са $p = 2$ и $p = 3$.

Задача 7. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с най-къса страна AB и най-дълга страна CD ($AB < CD$). Да се докаже, че върху отсечката CD може да се избере точка E със следното свойство: за всяка точка $P \neq E$ от отсечката CD дължината на отсечката, свързваща центровете на описаните окръжности за $\triangle APD$ и $\triangle BPE$, не зависи от избора на точката P .

Решение. Ще докажем, че търсената точка E е пресечната точка на правата през B , която е успоредна на AD и правата CD . Първо ще покажем, че E лежи на отсечката CD . От условието имаме $AB \leq AD$ и $BC \leq CD$, откъдето $\sphericalangle ABD \geq \sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle CBD \geq \sphericalangle BDC$. Следователно

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC \geq \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC \geq \sphericalangle ADC.$$

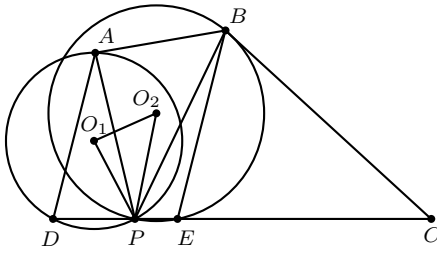
Аналогично $\sphericalangle BAD \geq \sphericalangle BCD$ и тогава $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD \geq \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA$, т.е. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD > 180^\circ$. Лесно се вижда, че $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAD > 180^\circ$ (в противен случай $ABCD$ се оказва успоредник). Оттук получаваме, че E е върху отсечката CD .

Ще докажем, че за произволна точка P от отсечката CD , различна от E , е изпълнено равенството $\sphericalangle O_1PO_2 = \sphericalangle APB$, където O_1 и O_2 са съответно центровете на описаните окръжности за $\triangle APD$ и $\triangle BPE$.

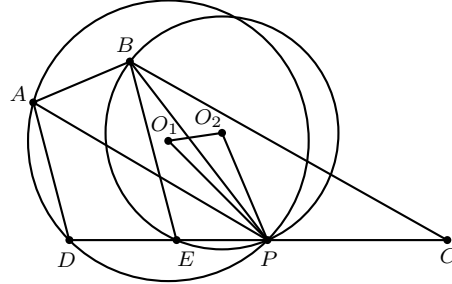
Случай 1. При $\angle ADP < 90^\circ$ имаме $\angle BEC < 90^\circ$ и точките O_1 и C са от различни страни на правата PA , а O_2 и C са от различни страни на правата PB . Тогава

$$\angle APO_1 = 90^\circ - \angle ADP = 90^\circ - \angle BEC = \angle BPO_2,$$

откъдето $\angle O_1PO_2 = \angle APB$.



Случай 1.



Случай 2.

Случай 2. При $\angle ADP \geq 90^\circ$ аналогично на случай 1 (сега точките O_1 и C са от едната страна на PA , а O_2 и C са от едната страна на PB) отново имаме $\angle O_1PO_2 = \angle APB$.

От синусовата теорема получаваме

$$\frac{AP}{BP} = \frac{2O_1P \sin \angle ADP}{2O_2P \sin \angle BEP} = \frac{O_1P}{O_2P},$$

откъдето $\triangle APB \sim \triangle O_1PO_2$. Следователно

$$O_1O_2 = \frac{AB}{AP} \cdot O_1P = \frac{AB}{2 \sin \angle ADC},$$

което не зависи от точката P .

Задача 8. Дадено е естествено число n . Да се намери минималният брой числа от вида $m!$, където m е естествено число със следното свойство:

За всяко естествено число $t \leq n!$ сборът на няколко от числата (възможно само едно) е равен на t .

Решение. Ще докажем, че търсеният минимален брой е равен на $\frac{n(n-1)}{2} + 1$. За всяко $i = 1, 2, \dots, n-1$ да изберем i числа по $i!$ и да

добавим числото $n!$. Имаме точно $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ числа. Ако $1 \leq t < n!$ нека $r_0 = t$ и да дефинираме индуктивно числата q_i и r_i по следния начин:

$$r_{i-1} = q_i(n-i)! + r_i, \quad 0 \leq r_i < (n-i)!$$

Тогава $t = \sum_{i=1}^{n-1} q_i(n-i)!$ и понеже $r_{i-1} < (n-i+1)!$ имаме, че $q_i \leq n-i$. За всяко $i = 1, 2, \dots, n-1$ можем да изберем q_i числа, всяко равно на $(n-i)!$ и сборът на тези числа е равен на t .

Да разгледаме минималния брой числа, необходими за получаване на $n! - 1$. Да означим броя на числата равни на $i!$ с c_i . Ако $c_i \geq i+1$, то можем да заменим $i+1$ числа $i!$ с едно число $(i+1)!$ и ще получим противоречие с минималността на броя на разглежданите числа. Тогава

$$n! - 1 = \sum_{i=1}^{n-1} c_i i! \leq \sum_{i=1}^{n-1} i(i!) = \sum_{i=1}^{n-1} ((i+1)! - i!) = n! - 1$$

и следователно всички неравенства трябва да са равенства, т.е. за всяко i имаме $c_i = i$. Броят на числата е $1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ и техният сбор е $n! - 1$. Остава да забележим, че за получаване на числото $n!$ е необходимо добавянето на поне още едно число и тогава общия брой е $\frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Холандия

Задача 1. Квадрат $n \times n$ е разделен на n^2 единични квадратчета. Някои от квадратчетата са оцветени в черно, а останалите в бяло. За всеки два реда и всеки два стълба четирите квадратчета, намиращи се в тези два реда и два стълба не са в един и същи цвят. Да се намери най-голямата възможна стойност на n ?

Решение. Ще докажем, че търсената най-голяма стойност е $n = 4$. Показаната таблица (клетките, означени с X са оцветени в черно) показва, че $n \geq 4$.

		X	X
	X	X	
X	X		
X			X

Да допуснем, че съществува квадрат със страна $n \geq 5$, който има исканото свойство. Тогава съществува и квадрат със страна $n = 5$ с исканото свойство. От принципа на Дирихле следва, че поне три от клетките в първия ред са едноцветни (нека тези клетки са черни). Без ограничение нека това са първите три клетки. Ако в първите три клетки на произволен ред има две черни клетки, то има два реда и два стълба, за които четирите пресечни квадратчета са едноцветни.

Следователно в първите три клетки на всеки от редовете без първия има най-много една черна клетка. Тогава там има поне две бели клетки. Тъй като редовете са поне 5, а две бели клетки могат да се разположат по три начина, то има повторение на двойка бели клетки, противоречие.

Задача 2. Да се намерят всички тройки (x, y, z) от реални числа, за които: $x + y - z = -1$, $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $-x^3 + y^3 + z^3 = -1$.

Решение. Заместваме $z = x + y + 1$ във второто уравнение и след опростяване получаваме $(x + y)(x + 1) = 0$. Следователно $x + y = 0$ или $x + 1 = 0$.

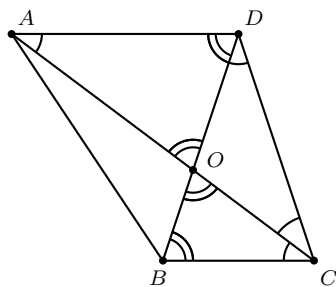
1. Ако $x + y = 0$, то $y = -x$, а от първото уравнение имаме $z = 1$. Заместваме $y = -x$ и $z = 1$ в третото уравнение и получаваме $x^3 = 1$, т.е. $x = -1$. В този случай намираме $(x, y, z) = (1, -1, 1)$.

2. Ако $x + 1 = 0$, то $x = -1$. От първото уравнение имаме $z = y$ и след заместване $x = -1$ и $z = y$ в третото уравнение получаваме $y^3 = -1$, т.е. $y = -1$. В този намираме $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$.

Директна проверка показва, че и двете тройки $(1, -1, 1), (-1, -1, -1)$ са решение.

Задача 3. Страните BC и AD на четириъгълник $ABCD$ са успоредни, а диагоналите му се пресичат в точка O . Ако $CD = AO$, $BC = OD$ и CA е ъглополовяща на ъгъл BCD , да се намери ъгъл ABC .

Решение. От $BC \parallel AD$ следва $\angle BCO = \angle CAD$, откъдето $\triangle ACD$ е равнобедрен. Следователно $AO = CD = AD$ и $\triangle AOD$ е също равнобедрен. Тогава $\angle ADO = \angle AOD$ и отново от $BC \parallel AD$ намираме $\angle CBO = \angle COB$ и значи $CB = CO$. Тогава $DO = OC = BC$ и $\triangle COD$ е равнобедрен.



Ако $\angle BCO = \alpha$, то

$$\angle CBO = \angle COB = 2\angle OCD = 2\alpha$$

и от $\triangle COB$ намираме $\alpha = 36^\circ$. Следователно $\triangle BCD$ е равнобедрен и $AD = CD = BD$, т.е. $\triangle ABD$ е равнобедрен. Тогава $\angle ABD = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$, откъдето $\angle ABC = 54^\circ + 72^\circ = 126^\circ$.

Задача 4. За естественото число n с $P(n)$ означаваме произведението на всички положителни делители на n . Например, $P(20) = 8000$ тъй като положителните делители на 20 са 1, 2, 4, 5, 10, 20 и тяхното произведение е $1.2.4.5.10.20 = 8000$.

а) Да се намерят всички естествени числа n , за които $P(n) = 15n$.

б) Да се докаже, че не съществува естествено число n , за което е изпълнено равенството $P(n) = 15n^2$.

Решение. а) От $P(n) = 15n$ следва, че 3 и 5 са делители на n , т.е. n се дели на 15. Ако $n > 15$, то 3, 5, 15 и n са делители на n и тогава

$$15n = P(n) \geq 3.5.15.n = 225n,$$

което е противоречие. Следователно единствената възможност е $n = 15$ и тогава $P(15) = 1.3.5.15 = 15.15 = 15.n$, т.е. $n = 15$ е решение.

б) Както в а) намираме, че n се дели на 15. При $n = 15$ от а) следва $P(15) = 15.15 \neq 15.15^2$, т.е. $n \geq 30$. Тогава $\frac{n}{3} > \frac{n}{5} > 5$ и значи $1 < 3 < 5 < \frac{n}{5} < \frac{n}{3} < n$ са различни делители на n . Следователно

$$P(n) \geq 1.3.5.\frac{n}{5}.\frac{n}{3}.n = n^3,$$

откъдето $15n^2 \geq n^3$, т.е. $15 \geq n$, противоречие с $n \geq 30$.

Задача 5. Колко пъти се среща цифрата 5 в десетичния запис на числото

$$S = 1 + 10 + 19 + 28 + 37 + \dots + 10^{2013}?$$

Решение. В сбора $1 + 10 + 19 + \dots + 10^n$ имаме $\frac{10^n - 1}{9} + 1$ събираеми. Тогава

$$1 + 10 + 19 + \dots + 10^n = \left(\frac{10^n - 1}{9} + 1 \right) \frac{10^n + 1}{2}.$$

Тъй като $\frac{10^n - 1}{9} + 1 = \underbrace{11\dots1}_{n-1}2$, то $\frac{10^n - 1}{9} + 1 = \underbrace{55\dots5}_{n-2}6$ е число с $n - 2$ цифри 5 и една цифра 6. Трябва да намерим броя на цифрите 5 в числото $\underbrace{55\dots5}_{n-2}6(10^n + 1)$. Понеже последните n цифри на числото $\underbrace{55\dots5}_{n-2}6.10^n$ са нули, то търсеното число е

$$\underbrace{55\dots5}_{n-2}60\underbrace{55\dots5}_{n-2}6$$

и петиците са $2(n - 2)$. При $n = 2013$ получаваме 4022.

**Контролно за определяне на отбора на Холандия за
Европейската олимпиада за момичета 2014**

Задача 1. Да се намерят всички неотрицателни цели числа n , за които съществуват такива цели числа a и b , че $n^2 = a + b$ и $n^3 = a^2 + b^2$.

Решение. Имаме

$$n^3 = a^2 + b^2 \geq 2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = (n^2)^2 - n^3 = n^4 - n^3,$$

откъдето $2n^3 \geq n^4$, т.е. $2 \geq n$. При $n = 0$ намираме $a = b = 0$, при $n = 1$ намираме $a = 0, b = 1$ и при $n = 2$ намираме $a = b = 2$. Следователно търсените числа са $n = 0, 1, 2$.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, за които

$$xf(xy) + f(-y) = xf(x)$$

за произволни реални числа x и y .

Решение. Полагаме в даденото уравнение $x = 1$ и намираме $f(-y) = f(1) - f(y)$. Полагането $y = -1$ води до $xf(-x) + f(1) = xf(x)$. В това равенство заместваме $f(-x) = f(1) - f(x)$ и получаваме

$$x(f(1) - f(x)) + f(1) = xf(x).$$

Оттук $xf(1) + f(1) = 2xf(x)$, т.е. $f(x) = c + \frac{c}{x}$ за константа $c = \frac{f(1)}{2}$. Проверяваме кога функция от дадения вид удовлетворява условието. Лявата страна на равенството от условието дава

$$xf(xy) + f(-y) = x\left(c + \frac{c}{xy}\right) + c + \frac{c}{-y} = xc + c,$$

а дясната страна се преобразува до

$$xf(x) = x\left(c + \frac{c}{x}\right) = xc + c.$$

Следователно всяка функция от вида $f(x) = c + \frac{c}{x}$ удовлетворява условието.

Задача 3. Точка I е център на вписаната окръжност за $\triangle ABC$. Окръжността, минаваща през B и допираща се до AI в точка I , пресича AB

Да допуснем, че съществува d , за което d дели $n!$ и k не дели d за всяко $k \in \{m, m+1, \dots, n\}$. Ще докажем, че $d \leq m-1$. Нека $d = p_1 p_2 \dots p_t$, където p_i , $1 \leq i \leq t$, са (не непременно различни) прости числа. От първото условие за d следва, че $p_i \leq n$ за всяко i . От второто условие за d следва, че $p_i \notin \{m, m+1, \dots, n\}$. Следователно $p_i \leq m-1$ за всяко i . Всяко от числата $p_1, p_1 p_2, \dots, p_1 p_2 \dots p_t$ е делител на d и следователно всички не са от множеството $\{m, m+1, \dots, n\}$. Освен това $p_i \leq m-1$. Нека $j \leq t$ е най-голямото число, за което $p_1 p_2 \dots p_j \leq m-1$. Ако $j < t$ имаме

$$p_1 p_2 \dots p_j p_{j+1} \leq (m-1) p_{j+1} \leq (m-1)(m-1) = m(m-2) + 1 \leq n$$

и тогава $p_1 p_2 \dots p_j p_{j+1} \leq m-1$, което е противоречие с максималността на j . Следователно $p_1 p_2 \dots p_t \leq m-1$, с което доказателството е завършено.

Задача 5. Дадено е естествено число n . Даниел и Мария играят игра. Даниел има k листа, където k е естествено число. На горната страна на всеки лист той записва някои от числата от 1 до n (може да запише произволен брой числа, включително нула числа или всички числа). На гърба на всеки лист той записва останалите числа. Мария може да обърне част от листовите (може да обърне произволен брой листове, включително нула или всичките). Ако Мария успее да направи така, че всички числа от 1 до n да се виждат, тя побеждава.

Да се намери най-малкото k , за което Мария винаги може да победи, независимо какви числа е записал Даниел.

Решение. Ще докажем, че търсеното k е най-малкото k за което $2^k > n$. Да номерираме листовите с $1, 2, \dots, k$ и за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ да означим с $A_i \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ множеството от листовите, на които е записано числото i . Тъй като $2^k > n$, то съществува множество $B \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, което е различно от A_i за всяко i . Нека Мария обърне листовите с номера от множеството B . Ако A_i не е подмножество на B , то числото i ще се появи на някои от необърнатите листове. Ако A_i е подмножество на B , то числото i ще се появи на обърнатите листове от $B \setminus A_i$.

Нека $2^k \leq n$. За всяко подмножество $\{1, 2, \dots, k\}$ Даниел може да избере едно от числата $1, 2, \dots, n$, като на всяко подмножество съответства поне едно число. След това той записва всяко от числата от $1, 2, \dots, n$ на страниците от съответното на това число множество. Ако Мария обърне листите от подмножество $B \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$, то числото (или числата), което (които) съответства(т) на това множество, няма да се вижда(т). С това доказателството е завършено.

Южна Корея

Задача 1. Дадени са положителни реални числа x, y и z със сума 1. Да се докаже, че $A \geq B^2$, където

$$A = \frac{(1 + xy + yz + zx)(1 + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2)}{9(x + y)(y + z)(z + x)},$$

$$B = \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{3+9x^2}} + \frac{y\sqrt{1+y}}{\sqrt[4]{3+9y^2}} + \frac{z\sqrt{1+z}}{\sqrt[4]{3+9z^2}}$$

Решение. От $x + y + z = 1$ намираме

$$\begin{aligned} 1 + xy + yz + zx &= (x + y + z)^2 + xy + yz + zx = \\ &= (x + y)(y + z) + (y + z)(z + x) + (z + x)(x + y) \end{aligned}$$

и като използваме неравенството на Коши-Шварц, за дясната страна на даденото неравенство имаме

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{9} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1-z} \right) ((x + 3x^2) + (y + 3y^2) + (z + 3z^2)) \geq \\ &\geq \left(\sqrt{\frac{3x^3 + x}{9(1-x)}} + \sqrt{\frac{3y^3 + y}{9(1-y)}} + \sqrt{\frac{3z^3 + z}{9(1-z)}} \right)^2. \end{aligned}$$

Следователно е достатъчно да докажем, че за всяко реално число $s \in (0, 1)$ е изпълнено неравенството

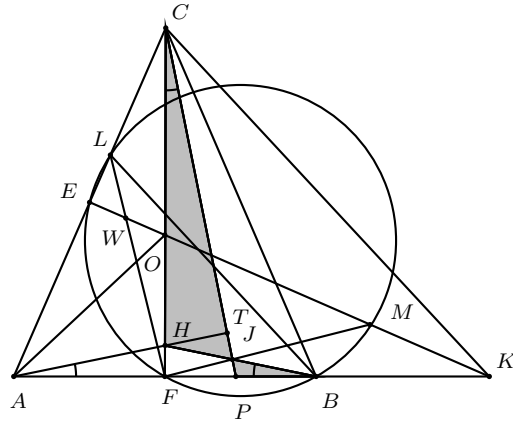
$$\sqrt{\frac{3s^3 + s}{9(1-s)}} \geq \frac{s\sqrt{1+s}}{\sqrt[4]{3+9s^2}}.$$

Това неравенство е еквивалентно на $3(9s^2 - 1)^2 \geq 0$, което е очевидно вярно. Равенство се достига при $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Задача 2. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, за който $AC = BC > AB$. Точките E и F са среди съответно на страните AC и AB . Симетралата l на AC пресича AB в точка K , а правата през B , успоредна на KC пресича AC в точка L . Нека H е ортоцентърът на $\triangle ACP$, където P е произволна точка

от отсечката BF . Отсечките BH и CP се пресичат в точка J , а правите FJ и l се пресичат в точка M . Ако W е пресечната точка на правите FL и l , да се докаже, че $AW = BW$ тогава и само тогава, когато точките B , E , F и M лежат на една окръжност.

Решение. Нека W' е центърът на вписаната окръжност на $\triangle ACP$, а L' е пресечната точка на правата FW' и страната AC . Тъй като точките A , F , C и петата на перпендикуляра T от A към PC лежат на окръжността с диаметър AC , то $\angle PAT = \angle PCF$. Понеже $AC = BC$ и F е среда на AB , получаваме $\angle HAF = \angle HBF$, откъдето $\angle PBJ = \angle HCF$. Това равенство заедно с $\angle PJB = \angle HJC$ показва, че триъгълниците PBJ и HCF са подобни.



За петите на перпендикулярите X и Y от J съответно към FP и FC имаме $\frac{XJ}{JY} = \frac{BP}{CH}$. Ако S е петата на перпендикуляра от W' към AP , то $HC = 2W'S$ и

$$BP = BF - PF = AF - (PF - FS) = AF - (AS - FS) = 2FS.$$

Следователно $\frac{XJ}{XF} = \frac{FS}{W'S}$, откъдето $\triangle JXF \sim \triangle FSW'$, т.е. $\angle JFX = \angle FW'S$. От $W'S \parallel CF$ намираме $\angle FW'S = \angle CFW'$, откъдето $\angle JFX = \angle CFW'$. Сега равенствата

$$\angle PFC = \angle JFL' = \angle JFW' = \angle MEL' = 90^\circ$$

означават, че точките E и F лежат на окръжността с диаметър ML' .

Нека сега $AW = PW$. Тогава W е центърът на описаната окръжност за $\triangle APC$, като $AW = PW = CW$. Центърът на описаната окръжност O за $\triangle ABC$ е ортоцентър за $\triangle AKC$, откъдето $AO \perp KC$. Но $BL \parallel KC$, т.е. $AO \perp BL$ и тогава $\sphericalangle ABL + \sphericalangle BAO = 90^\circ$. Тъй като A, F, O и E лежат на една окръжност, то $\sphericalangle BAO = \sphericalangle MEF$ и намираме

$$\sphericalangle FBL + \sphericalangle FEL = \sphericalangle ABL + \sphericalangle MEF + 90^\circ = 180^\circ.$$

Следователно точките F, B, M, L и E лежат на една окръжност.

Обратно, ако B, E, F и M лежат на една окръжност, то $\sphericalangle MBL' = 90^\circ$ (тъй като E и F лежат на окръжност с диаметър ML'). Лесно се вижда, че $\sphericalangle MBK = \sphericalangle MEF = \sphericalangle BAO$, откъдето следва $BM \parallel AO$. Следователно $AO \perp BL'$, откъдето $BL' = BL$, т.е. $L' = L$ и $W' = W$.

Задача 3. По окръжност, с лице към центъра на кръга, са наредени n ученици с различни имена. Имената на учениците са написани на n картички и картичките са разпределени между учениците по произволен начин, като всеки ученик има една картичка. Учениците повтарят следната операция:

Ученик, който държи картичка с неговото име напуска кръга, след което всеки от останалите ученици дава своята картичка на ученика вдясно от него.

Да се намери броят на първоначалните разпределения на картичките, при които след 4 операции не всички ученици са напуснали кръга.

Решение. За пермутация π на множеството $A = \{x_1 < x_2 < \dots < x_m\}$ дефинираме пермутация π' чрез:

$$\pi' = x_2 x_3 \dots x_1 \circ \pi.$$

За всяка пермутация π дефинираме $U(\pi)$ като броят на двойките $(x, \pi(x))$, за които $x < \pi(x)$. Тогава $U(\pi') = U(\pi) - 1$.

Да означим с $S_0 = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ множеството от учениците, а с $T_0 = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ множеството от картичките с имената. Разпределението на картичките представлява биекция $\tau_0 : T_0 \rightarrow S_0$. За опростяване записваме $\tau_0(t_i) = s_j$, като $\tau_0(i) = j$, и тогава τ_0 може да се разглежда като пермутация на $1, 2, \dots, n$. Ако F_1 е множеството от фиксирани точки на τ_0 , да дефинираме

$$S_1 = S_0 - \{s_i \mid i \in F_1\} \text{ и } T_1 = T_0 - \{t_i \mid i \in F_1\}.$$

Тогава $\tau_1 : T_1 \rightarrow S_1$ е състоянието след напускането на учениците, които държат картички със собствените си имена, като очевидно $U(\tau_0) = U(\tau_1)$.

Тъй като от пермутация π след предаване на картичките надясно се получава пермутация π' , то

$$U(\tau'_1) = U(\tau_1) - 1 = U(\tau_0) - 1.$$

Следователно след еднократно прилагане на позволената операция стойността на U се намалява с 1. Това означава, че за да напуснат всички ученици след 4 операции е необходимо и достатъчно началната пермутация τ_0 да е такава, че $U(\tau_0) \leq 3$. Тогава търсеният брой е равен на

$$n! - |\{\tau_0 \mid U(\tau_0) \leq 3\}|.$$

Нека $B(n, k)$ е броят на пермутациите π на n числа, за които $U(\pi) \leq k$ и $b(n, k) = |B(n, k)|$. Като разгледаме стойността на $\pi(n)$ лесно получаваме следната рекурентна връзка

$$b(n, k) = (k + 1)b(n - 1, k) + (n - k - 1)b(n - 1, k - 1), \quad n \geq 2,$$

като $b(n, 0) = 1$ и $b(n, k) = 0$ при $k \geq n$. За $k = 1$ имаме

$$b(n, 1) = 2b(n - 1, 1) + (n - 2), \quad b(1, 1) = 1.$$

От горната рекурентна връзка намираме $b(n, 1) = 2^n - n$. При $k = 2$ получаваме

$$b(n, 2) = 3b(n - 1, 2) + (n - 3)(2^{n-1} - n + 1), \quad b(1, 2) = 1.$$

От тази рекурентна връзка намираме $b(n, 2) = 3^n - n2^n + \binom{n}{2}$. Накрая, при $k = 3$ получаваме

$$b(n, 3) = 4b(n - 1, 3) + (n - 4) \left(3^{n-1} - (n - 1)2^{n-1} + \binom{n-1}{2} \right), \quad b(1, 3) = 1.$$

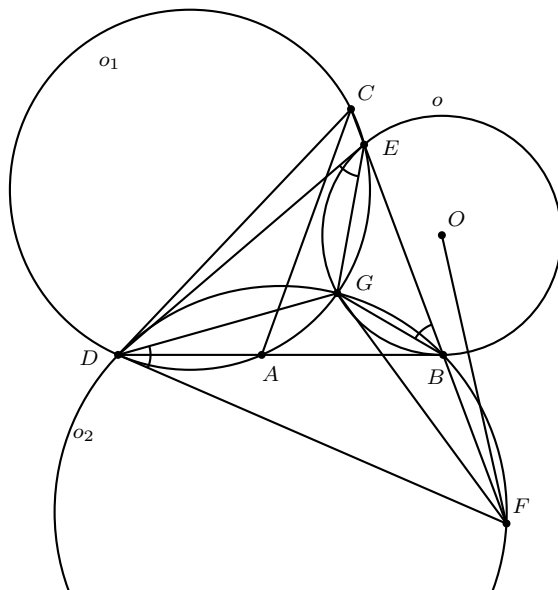
Оттук намираме $b(n, 3) = 4^n - n3^n + \binom{n}{2}2^n - \binom{n}{3}$. Окончателно, търсеният брой е

$$n! - b(n, 3) = n! - 4^n + n3^n - \binom{n}{2}2^n + \binom{n}{3}.$$

Задача 4. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, $AC = BC$. Точка D е от правата BA , като A лежи между B и D . Нека O_1 е описаната окръжност около $\triangle DAC$, като O_1 пресича BC в точка E . Точка F е от правата BC , като FD е допирателна към O_1 . Описаната окръжност O_2 около $\triangle DBF$ пресича O_1 в точка G , $G \neq D$. Ако O е описаната окръжност около $\triangle BEG$, да се докаже, че FG е допирателна към O тогава и само тогава, когато DG е перпендикулярна на FO .

Решение. Първо ще покажем, че DB и DE са допирателни към O . Понеже $DFBG$ е вписан, то $\angle FDG = \angle GBE$, а от FD допирателна към O_1 намираме $\angle DEG = \angle FDG$. Следователно $\angle GBE = \angle DEG$, което означава, че DE е допирателна към O .

От друга страна, четириъгълникът $AECD$ е вписан, откъдето $\angle BAC = \angle BED$, а $\triangle ABC$ е равнобедрен, откъдето $\angle BAC = \angle ABC = \angle DBE$. Следователно $\angle DBE = \angle DEB$ и $\triangle DBE$ е равнобедрен с $DB = DE$, което означава, че DB е допирателна към окръжността O .



Тъй като DB и DE са допирателни към O , то FE е полярата на D спрямо O . Тогава D лежи на полярата на F . Следователно FG е допирателна към O тогава и само тогава, когато DG е полярата на F , което е еквивалентно на $DG \perp FO$.

Задача 5. Дадено е просто число $p > 5$. Да се докаже, че ако съществува естествено число k , за което $k^2 + 5$ се дели на p , то съществуват естествени числа m и n , за които $p^2 = m^2 + 5n^2$.

Решение. Ще докажем, че ако съществуват цели числа x и y , за които $x^2 + 5y^2 = p$, $2p$, $3p$, $4p$ или $5p$, то съществуват естествени числа m и n , за които $p^2 = m^2 + 5n^2$. Наистина:

- Нека $x^2 + 5y^2 = p$. Тъй като p е просто, то $xy \neq 0$ и директно се проверява, че $(x^2 - 5y^2)^2 + 5(2xy)^2 = p^2$.
- Нека $x^2 + 5y^2 = 2p$. Тъй като $p > 2$, то x и y са нечетни и тогава $\left(\frac{x^2 - 5y^2}{2}\right)^2 + 5(xy)^2 = p^2$.
- Нека $x^2 + 5y^2 = 3p$. Тъй като $p > 3$, то x и y не се делят на 3. Ако $x + y$ се дели на 3, то $\left(\frac{x - 5y}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{x + y}{3}\right)^2 = 2p$.
Ако $x - y$ се дели на 3, то $\left(\frac{x + 5y}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{x - y}{3}\right)^2 = 2p$. Следователно този случай се свежда до предишния.
- Ако $x^2 + 5y^2 = 4p$, то x и y са четни и $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{y}{2}\right)^2 = p^2$.
- Ако $x^2 + 5y^2 = 5p$, то $5|x$ и тогава $y^2 + 5\left(\frac{x}{5}\right)^2 = p$. Така случаят се свежда до $r^2 + 5s^2 = p$.

От доказаното по-горе следва, че можем да считаме, че $k^2 + 5 = tp$, за $t \geq 6$, защото в противен случай $x = k$, $y = 1$ дава $x^2 + 5y^2 = tp$ за $t \leq 5$.

Да разгледаме множеството

$$A = \{a_1 + a_2k \mid 0 \leq a_1 \leq s, 0 \leq a_2 \leq s\},$$

където $s = [\sqrt{p}]$. Броят на елементите на A е равен на $(s + 1)^2 > p$ (от $k^2 + 5 = tp$, за $t \geq 6$, лесно следва, че $k > s$ и тогава в A няма равни елементи) което означава, че разликата на два елемента на A се дели на p . Следователно¹ съществуват x и y , за които $|x| \leq s$, $|y| \leq s$, $x + yk \neq 0$ и p дели $x + yk$. Тогава p дели

$$(x + yk)(x - yk) = x^2 + 5y^2 - y^2(k^2 + 5),$$

¹Всъщност доказахме т.нар. лема на Туе.

и понеже p дели $k^2 + 5$, то p дели $x^2 + 5y^2$. Но $0 < x^2 + 5y^2 \leq 6s^2 < 6p$, т.е. $x^2 + 5y^2 = p, 2p, 3p, 4p$ или $5p$.

Задача 6. На един остров има две държави A и B и краен брой замъци, като всеки замък е в едната от двете държави. Във всеки замък има точно един генерал. Някои от замъците са свързани с директен път и такива замъци се наричат съседни. Да се докаже, че следните две твърдения са еквивалентни:

1. Ако някои от генералите от страна B се придвижат до съседни замъци от страна A и ги атакуват, то генералите от страна A могат да се придвижат до съседни замъци, така че във всеки замък от A генералите от A са не по-малко от генералите от B .

2. Ако X е множество от замъци от A , то броят на генералите от A , които са в замък от X или в замък, който е съседен на замък от X е не по-малък от броя на генералите от страна B , всеки от които е в замък, който е съседен на замък от X .

Решение. Импликацията $(1) \Rightarrow (2)$ е очевидна. Ще докажем $(2) \Rightarrow (1)$. Нека $G = (V, E)$ е граф с върхове замъците, а ребрата съответстват на съседни замъци. Ако $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ са замъците в държавата A , нека $P_i \subseteq V - A$ е множеството от замъци от B , чиито генерали са решили да атакуват замък от A . Нека $Q_i \subseteq A$ да е множеството от замъци, които са или v_i или са съседни на v_i . Да разгледаме множеството от множества $Q_1(|P_1|$ пъти), $Q_2(|P_2|$ пъти), $\dots$, $Q_n(|P_n|$ пъти). За всеки множества $Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_k}$ от свойство (2) имаме

$$|P_{i_1}| + |P_{i_2}| + \dots + |P_{i_k}| \leq |Q_{i_1} \cup \dots \cup Q_{i_k}|.$$

От теоремата на Хол за представителите сега следва, че за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ можем да изберем непресичащи се множества $D_1, D_2, \dots, D_n$, за които $|D_i| = |P_i|$ и $D_i \subset Q_i$.