

Петър Бойваленков, Станислав Димитров,
Мирослав Маринов, Теофил Тодоров

Национални олимпиади по математика 2015-2016

Съюз на Математиците в България
Институт по Математика и Информатика на БАН

©УНИМАТ СМБ

Петър Бойваленков, Станислав Димитров, Мирослав Маринов, Теофил
Тодоров, Национални олимпиади по математика 2015-2016, Унимат СМБ

В настоящата книга са представени условията и решенията на задачите от финалните етапи на националните олимпиади в определени страни (по преценка на авторите). Текстът се основава на материалите, разпространявани между ръководствата на националните отбори по време на Международната олимпиада по математика, както и на материали от интернет. Авторите се надяват задачите от тази книга да послужат добре както на учениците с изявени интереси в областта на математиката, така и на специалистите, които се занимават с подготовка на олимпийци.

Авторите изказват сърдечна благодарност към всички, които помогнаха при осъществяването на този проект. Благодарим на Нгуен Чи Зунг, Любен Личев и Станислав Славов за приноса с решения на задачи и изграждането на чертежи.

Copyright © Унимат СМБ

ISBN: 978-954-8880-50-3

София, 2018

Съюз на математиците в България

Унимат СМБ

+359-2-9792806, peter@math.bas.bg (Петър Бойваленков)

ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8, София 1113

Великобритания 2016

Задача 1. Окръжности с радиуси r_1, r_2, r_3 се допират помежду си външно и до обща допирателна в точки A, B и C съответно, като B е между A и C . Да се докаже, че

$$16(r_1 + r_2 + r_3) \geq 9(AB + BC + CA).$$

Задача 2. Алисън направила списък от 20 отбора по хоккей, подредени според това колко силни тя смята че са, но отказва да го сподели. На всеки ход Бенджамин ѝ казва три отбора и тя му казва или кой от тях е най-слабият, или кой от тях е най-силният в нейния списък. Да се намери най-голямото естествено число N , за което Бенджамин може да си гарантира намирането на редица от отбори $T_1, T_2, \dots, T_N$, такива че според Алисън T_i е по-силен от T_{i+1} за всяко $1 \leq i \leq N - 1$.

Задача 3. Нека $ABCD$ е вписан четириъгълник. Диагоналите AC и BD се пресичат в P , а продълженията на DA и CB се пресичат в Q . Точка E е средата на AB . Да се докаже, че ако PQ е перпендикулярна на AC , то PE е перпендикулярна на BC .

Задача 4. Нека p е просто число, за което съществуват различни естествени числа u и v , такива че p^2 е средното аритметично на u^2 и v^2 . Да се докаже, че $2p - u - v$ е или точен квадрат, или удвоен квадрат.

Италия 2015

Задача 1. Правоъгълният паралелепипед $ABCD A' B' C' D'$ е разделен на осем части чрез равнини, успоредни на стените му. За връх P с $V(P)$ означаваме обема на частта, съдържаща P . Ако $V(A) = 40$, $V(C) = 300$, $V(B') = 360$ и $V(C') = 90$, да се намери обема на паралелепипеда.

Задача 2. Музикална услуга предлага песни, класифицирани в десет жанра, като всяка принадлежи към точно един жанр. Песните се възпроизвеждат една след друга: първите 17 се избират от потребителя, но започвайки от осемнадесетата, услугата сама определя коя песен да пусне. Елизабет забелязала, че ако правим класация (спрямо броя песни) на жанровете всеки път по последните 17 песни, следващата песен принадлежи на жанра на първо място (ако има няколко жанра на първо място, то тя принадлежи на някой от тях). Да се докаже, че от някакъв момент нататък всички песни са към един и същи жанр.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$. Точката K е петата на ъглополовящата през върха A , а точката $J \in BC$ е такава, че $\angle BAC = 3 \angle JAC$. Точките B' и C' от правата AJ са външни за отсечката AJ , като $AC = AC'$ и $AB = AB'$. Да се докаже, че четириъгълникът $ACB'B$ е вписан тогава и само тогава, когато $C'K \parallel BB'$.

Задача 4. Да се реши в цели числа уравнението $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.

Задача 5. Дадена е окръжност Γ и хорда AB от нея. Точката C лежи на хордата AB и DE е хорда през C . Окръжността Γ_D допира Γ в точка D и правата AB в точка F , а окръжността Γ_E допира Γ в точка E и правата AB в точка G . Да се докаже, че $CA = CB$ тогава и само тогава, когато $CF = CG$.

Задача 6. Ада и Чарлз играят следната игра. Първоначално на дъската е записано естественото число $n > 1$. На всеки ход играчът изтрива числото k на дъската в момента и на негово място записва едно от следните:

1. Положителен делител на k , различен от 1 и k
2. Числото $k + 1$

В началото всеки играч има по хиляда точки. Ако играч избере ход 1, той печели точка, а ако избере 2 – губи точка. Губи този, който пръв достигне нула точки. Ако Ада започва първа, то за кои n Чарлз има печеливша стратегия?

Италия 2016

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$. Точките D и E са петите на перпендикулярите от върха A към вътрешните ъглополовящи през върховете B и C . Да се докаже, че $DE \parallel BC$.

Задача 2. Математическо състезание се състои от 3 задачи, всяка от които се оценява с от 0 до 7 точки включително. Известно е, че за всеки двама участника съществува най-много една задача, на която двамата имат един и същи брой точки. Да се намери максималния възможен брой участници.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е центърът на външновписаната срещу върха A окръжност. Нека тази окръжност допира правите AB и AC съответно в точките E и F , съответно и J е пресечната точка на BD и EF . Да се докаже, че $\angle CJB = 90^\circ$.

Задача 4. Да се намерят всички двойки естествени числа (a, n) , $a \geq n \geq 2$, такива че $(a+1)^n + a - 1$ е степен на числото 2.

Задача 5. Редицата $x_0, x_1, x_2, \dots$ от рационални числа е дефинирана както следва: x_0 е произволно рационално число и за всяко $n \geq 0$ е изпълнено $x_{n+1} = \lfloor \frac{x_n}{2} - 1 \rfloor$ или $\lfloor \frac{1}{x_n} - 1 \rfloor$, съответно при четен и нечетен числител на x_n (в несъкратим вид). Да се докаже, че за всяко x_0 :

- а) редицата съдържа краен брой различни членове
- б) редицата съдържа точно едно от числата 0 и $\frac{2}{3}$

Задача 6. Мистериозна машина съдържа комбинация от 2016 цели числа $x_1, x_2, \dots, x_{2016}$. Известно е, че всички числа от комбинацията, без едно, са равни. Можем да задаваме въпрос към машината, като даваме редица от 2016 цели числа $y_1, y_2, \dots, y_{2016}$ – тогава тя връща сумата

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{2016} y_{2016}$$

Колко въпроса са необходими, за да възстановим тайната комбинация, ако в началото:

- а) знаем, че числото, различно от останалите, е равно на 0?
- б) не знаем никое от числата?

Китай 2015

Задача 1. Комплексните числа $z_1, z_2, \dots, z_n$ са такива, че $|z_i - 1| \leq r$ за всяко $1 \leq i \leq n$ и някое $r \in (0, 1)$. Да се докаже, че

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \cdot \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} \right| \geq n^2(1 - r^2)$$

Задача 2. Точките A, B, D, E, F и C лежат на една окръжност (в този ред), като $AB = AC$. Нека $P = AD \cap BE$, $R = AF \cap CE$, $Q = BF \cap CD$, $S = AD \cap BF$ и $T = AF \cap CD$. Точката $K \in ST$ е такава, че $\sphericalangle QKS = \sphericalangle ECA$. Да се докаже, че

$$\frac{SK}{KT} = \frac{PQ}{QR}$$

Задача 3. Нека $n \geq 5$ е естествено число. Да се намери най-малкото естествено число m (в зависимост от n), за което съществуват множества A и B от цели числа, изпълняващи следните условия:

1. $|A| = n$, $|B| = m$ и $A \subseteq B$
2. За всеки две различни $x, y \in B$ имаме $x + y \in B$ тогава и само тогава, когато $x, y \in A$

Задача 4. Да се намерят всички цели числа k , за които съществуват безбройно много естествени числа n , такива че $n + k$ не дели $\binom{2n}{n}$.

Задача 5. В клас от 30 ученици всеки има най-много петима приятели. За всеки петима ученици има поне една двойка, които не са приятели. Да се намери най-голямото естествено число k , за което винаги има k ученици, измежду които няма приятели.

Задача 6. Редицата $a_1, a_2, \dots$ от цели неотрицателни числа е такава, че за всеки две естествени m, n е изпълнено $\sum_{i=1}^{2m} a_{in} \leq m$. Да се докаже, че съществуват естествени числа k и d , за които

$$\sum_{i=1}^{2k} a_{id} = k - 2014.$$

Китай 2016

Задача 1. Естествените числа $a_i, b_i, 1 \leq i \leq 31$, са такива, че $a_1 < a_2 < \dots < a_{31} \leq 2015, b_1 < b_2 < \dots < b_{31} \leq 2015$ и $\sum_{i=1}^{31} a_i = \sum_{i=1}^{31} b_i$.
Да се намери най-голямата възможна стойност на

$$S = \sum_{i=1}^{31} |a_i - b_i|$$

Задача 2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Точките K, L, M и N лежат на страните AB, BC, CD и DA , съответно, и са такива, че

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AD}{BC}, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{CM}{MD} = \frac{BC}{AD}, \quad \frac{DN}{NA} = \frac{CD}{AB}$$

Лъчите AB и DC се пресичат в точка E , а лъчите AD и BC – в точка F . Вписаната в $\triangle AEF$ окръжност допира страните AE и AF съответно в точките S и T , а вписаната в $\triangle CEF$ окръжност допира страните CE и CF в точките U и V , съответно.

Ако точките K, L, M и N лежат на една окръжност, да се докаже, че точките S, T, U и V лежат на една окръжност.

Задача 3. Нека p е нечетно просто число и $a_1, a_2, \dots, a_p$ са цели числа. Да се докаже, че следните две твърдения са еквивалентни:

1. Съществува полином $f(x)$ с цели коефициенти от степен най-много $\frac{p-1}{2}$, такъв че $f(i) \equiv a_i \pmod{p}$ за всяко естествено $1 \leq i \leq p$.
2. За всяко естествено число $d \leq \frac{p-1}{2}$ е изпълнено

$$\sum_{i=1}^p (a_{i+d} - a_i)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

където индексирването се извършва по модул p .

Задача 4. Нека $n \geq 3$ е естествено число и k е броят на простите числа, ненадминаващи n . Множеството $A \subseteq S = \{2, 3, \dots, n\}$ има по-малко от k

елемента и не съдържа два, такива че единият дели другия. Да се докаже, че съществува k -елементно множество B , такова че $A \subseteq B \subseteq S$ и B не съдържа два елемента, такива че единият дели другия.

Задача 5. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Да се докаже, че съществува квадрат $A'B'C'D'$ (върховете могат да бъдат наредени по или обратно на посоката на часовниковата стрелка), такъв че $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $D \neq D'$ и правите AA' , BB' , CC' и DD' се пресичат в една точка.

Задача 6. Даден е турнир със 100 играча. Всеки двама играчи x и y играят по веднъж, като равенства няма. Ако x побеждава y , ще означаваме $x \rightarrow y$. Турнирът се нарича *приятелски*, ако за всеки двама (различни) играчи x и y съществува редица от играчи $u_1, u_2, \dots, u_k$ ($k \geq 2$), като $x = u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k = y$.

а) Да се докаже, че за всеки приятелски турнир съществува естествено число m , такова че за всяка двойка играчи x, y съществува редица $z_1, z_2, \dots, z_m$ с дължина m (играчите могат да се повтарят в тази редица), такава че $x = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_m = y$.

б) За приятелски турнир T , нека $m(T)$ е минималната стойност на m (дефинирано както в а)). Да се намери най-малката възможна стойност на $m(T)$ (спрямо всички приятелски турнири).

Русия 2015

Задача 9.1. Реалните числа a и b са такива, че квадратните тричлени $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имат по два различни реални корена, а произведението на тези два тричлена има точно три реални корена. Намерете всички възможни стойности на сумата на тези три корена.

Задача 9.2. Успоредникът $ABCD$ е такъв, че $\angle ABC < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точките E и F са избрани от описаната около $\triangle ABC$ окръжност ω така, че допирателните към ω в тези точки минават през върха D . Оказало се, че $\angle EDA = \angle FDC$. Да се намери $\angle ABC$.

Задача 9.3. Естествените числа a , x и y са по-големи от 100 и $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Да се намери най-малката възможна стойност на $\frac{a}{x}$.

Задача 9.4. Във волейболен турнир участвали 110 волейболни отбора, като всеки изиграл с всеки от останалите по една среща (във волейбола няма равни мачове). Оказало се, че във всяка група от 55 отбора има поне един, който е загубил от не повече от четири от останалите 54 отбора от тази група. Да се докаже, че в този турнир има отбор, който е загубил от не повече от четири от останалите 109 отбора.

Задача 9.5. Около окръжност са написани 100 цели числа. Всяко от числата е по-голямо от сумата на двете след него по посока на часовниковата стрелка. Да се намери максималния възможен брой положителни числа.

Задача 9.6. В една от клетките на квадратна таблица 41×41 е замаскиран танк. Изстребител с един изстрел обстрелва една клетка. Ако има попадение, танкът се премества в съседна по страна клетка, а иначе остава на място. След изстрел пилотът не знае дали има попадение или не. За да се унищожи танкът трябва да попаднат два изстрела в него. Какъв най-малък брой изстрели трябва да произведе изстребителят, за да е гарантирано унищожаването на танка?

Задача 9.7. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ ($AC > BC$), вписан в окръжност k . Точката G е медицентърът на $\triangle ABC$, а CH_c е височината му през

върха C . Лъчът GH_c пресича k в точката C' . Да се докаже, че описаната около $\triangle C'H_cB$ окръжност се допира до правата BC .

Задача 9.8. На дъската са написани $N \geq 9$ различни неотрицателни числа, по-малки от 1. Оказало се, че за всеки осем различни числа от дъската има девето число, такова че сумата на деветте числа е цяло число. Да се намерят всички N , за които това е възможно.

Задача 10.1. Ще наричаме естествено число *почти квадрат*, ако то е равно на произведението на две последователни естествени числа. Да се докаже, че всеки почти квадрат може да се представи като частно на два почти квадрата.

Задача 10.2. Даден е успоредник $ABCD$, за който $AB < AC < BC$. Точките E и F са избрани от описаната около $\triangle ABC$ окръжност ω така, че допирателните към ω в тези точки минават през върха D и отсечките AD и CE се пресичат. Оказало се, че $\angle ABF = \angle DCE$. Да се намери $\angle ABC$.

Задача 10.3. На състезание по фигурно колхозене има 100 съдии. Всеки съдия подредил участниците (от най-добрия до най-зле представилия се по негово мнение). Оказало се, че за някои трима участници A , B и C няма трима съдии, такива че първият съдия да счита A за най-добър от тримата, а B за най-слаб, вторият съдия да счита B за най-добър от тримата, а C за най-слаб и третият съдия да счита C за най-добър от тримата, а A за най-слаб. Да се докаже, че може да се направи рейтинг на състезателите, такъв че за всеки двама участници A и B , ако A е по-високо в рейтинга от B , то A е по-добър от B по мнението на поне половината съдии.

Задача 10.4. Нека $S(k)$ е сумата от цифрите на естественото число k . Естественото число a е n -добро, ако съществува редица от естествени числа $a_0, a_1, \dots, a_n$, за която $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n-1$. Вярно ли е, че за всяко естествено число n съществува естествено число b , което е n -добро, но не е $(n+1)$ -добро?

Задача 10.5. Квадрат, разделен на единични квадратчета, може да се разреже на n еднакви фигури от по k клетки всяка. Да се докаже, че същият квадрат може да се разреже и на k еднакви фигури от по n клетки всяка.

Задача 10.6. Съществува ли безкрайна редица от естествени числа, такава че за всяко естествено k сумата на всеки k последователни члена на редицата се дели на $k + 1$?

Задача 10.7. В остроъгълния неравнобедрен $\triangle ABC$ са построени медианата AM и височината AH . На правите AB и AC са избрани точките Q и P съответно, като $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Описаната около $\triangle PMQ$ окръжност пресича правата BC за втори път в точката X . Да се докаже, че $BH = CX$.

Задача 10.8. Нумизмат има 100 еднакви на външен вид монети. Той знае, че 30 от тях са истински и 70 са фалшиви. Освен това знае, че теглото на всички истински монети е едно и също, а на всички фалшиви монети е различно, като всяка фалшива монета е по-тежка от истинска. Точното тегло на монетите не му е известно. Нумизматът има везни с две блюда и без теглилки, на които той може с едно притегляне да сравни две групи от еднакъв брой монети. С колко най-малко на брой тегления с везните нумизматът може със сигурност да намери поне една истинска монета?

Задача 11.1. Вж. задача 9.2.

Задача 11.2. Нека $n > 1$ е естествено число. Записваме всяка от дробите $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ в несъкратим вид и означаваме с $f(n)$ сумата от числителите на получените дроби. За кои естествени $n > 1$ числата $f(n)$ и $f(2015n)$ са с различна четност?

Задача 11.3. Вж. задача 9.4.

Задача 11.4. Дадено е естествено число $N \geq 3$. Ще наричаме множество от N точки в координатната равнина *допустимо*, ако абсцисите на точките са различни и всяка от тези точки е оцветена или в червен, или в син цвят. Ще казваме, че полиномът $P(x)$ разделя едно допустимо множество от точки, ако или над графиката на $P(x)$ няма червени точки, а под нея няма сини точки, или обратното (на самата графика могат да лежат точки и от двата цвята). За кое най-малко естествено число k всяко допустимо множество от N точки може да се раздели от полином от степен, ненадминаваща k ?

Задача 11.5. Безсмъртна бълха се движи по целочислените точки от реалната права, като започва от 0. За всяко естествено k , тя се отмества наляво или надясно с $2^k + 1$ спрямо точката в която се намира. Вярно ли е, че за всяка естествена точка, съществува момент, в който бълхата ще достигне до нея, като ѝ е позволено да минава през една и съща точка по повече от веднъж?

Задача 11.6. Дадени са реалните числа a, b, c и d , които по модул са строго по-големи от 1 и $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Да се докаже, че

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Задача 11.7. Даден е неравнобедрен $\triangle ABC$ с описана окръжност ω . Допирателната към тази окръжност в точка C пресича правата AB в точка D . Нека I е центъра на вписаната окръжност. Правите AI и BI пресичат ъглополовящата на $\angle BDC$ в точки Q и P . Нека M е средата на PQ . Да се докаже, че правата MI разполовява дъгата $\widehat{ACB}$ от ω .

Задача 11.8. Дадени са естествените числа a и b , като $a < b < 2a$. Равнината е разделена на единични клетки и някои клетки са маркирани така, че във всеки правоъгълник с размери $a \times b$ или $b \times a$ има поне една маркирана клетка. При кое най-голямо α може да се твърди, че за всяко естествено число N ще се намери квадрат $N \times N$, в който да има поне αN^2 маркирани клетки?

Русия 2016

Задача 9.1. (Г. Жуков) На пазара работи пункт за размяна на килими. Срещу килим с размери $a \times b$, клиент може да получи или килим с размери $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ или два килима с размери $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при всяка такава размяна, числото c се избира от клиента). Пътешественик разказал, че първоначално е имал един килим със страни, по-големи от 1, а след краен брой такива размени се е сдобил с няколко килима, за всеки от които едната страна е по-голяма от 1, а другата – по-малка от 1. Възможно ли е тази история да е вярна? (Ако клиентът желае, килим с размери $a \times b$ може да се счита за килим с размери $b \times a$.)

Задача 9.2. (И. Богданов, П. Кожевников) Окръжност ω се допира до раменете на ъгъл BAC в точки B и C . Права ℓ пресича отсечките AB и AC съответно в точки K и L . Окръжността ω пресича ℓ в точки P и Q . Точките S и T са избрани от отсечката BC така, че $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Да се докаже, че точките P, Q, S и T лежат на една окръжност.

Задача 9.3. (А. Кузнецов) Нека $1 = d_1 < \dots < d_s = N$ са всички естествени делители на естественото число $N > 1$. Да се намерят всички стойности на N , за които

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) + \dots + (d_{s-1}, d_s) = N - 2$$

(както обикновено, с (a, b) е означен най-големият общ делител на числата a и b).

Задача 9.4. (С. Берлов) От правоъгълна таблица 100×100 са изрязани 1950 домина (правоъгълници 1×2 или 2×1). Да се докаже, че от останалите части може да се изреже тетрамино, евентуално ротирано. (Ако тетрамино вече се е получило, то се счита за изрязано.)

Задача 9.5. (Н. Агаханов) От цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 са съставени девет (не непременно различни) деветцифрени числа, като всяка цифра се използва във всяко число точно по веднъж. С колко най-много нули може да завършва сумата на тези девет числа?

Задача 9.6. (С. Берлов) Квадрат е разбит на $n^2 \geq 4$ правоъгълника чрез $2n - 2$ прави, $n - 1$ от които са успоредни на едната страна на квадрата,

а останалите $n - 1$ са успоредни на другата му страна. Да се докаже, че е възможно от правоъгълниците да се изберат $2n$ такива, че за всеки два от избраните единият може да се разположи в другия (евентуално след завъртане).

Задача 9.7. (И. Митрофанов) Окръжност ω е вписана в триъгълник ABC , за който $AB < AC$. Външнописаната окръжност за $\triangle ABC$ се допира до страната BC в точка A' . Точка X от отсечката $A'A$ е такава, че отсечката $A'X$ не пресича ω . Допирателните от X към ω пресичат отсечката BC в точките Y и Z . Да се докаже, че сумата $XY + XZ$ не зависи от избора на точката X .

Задача 9.8. (А. Храбров) Сумата на положителните числа a , b , c и d е равна на 3. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2 b^2 c^2 d^2}.$$

Задача 10.1. (А. Грибалко) В НБА има 30 отбора, всеки от които трябва да изиграе за един сезон 82 мача. Възможно ли е отборите да бъдат разделени на две конференции (не непременно с равен брой отбори) – Източна и Западна, и разписанието на мачовете да се направи така, че броят на мачовете между отбори от различни конференции да е равен на половината от всички мачове?

Задача 10.2. (А. Кузнецов) Диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка P . Точка Q от отсечката BC е такава, че $PQ \perp AC$. Да се докаже, че правата, минаваща през центровете на описаните около триъгълниците APD и BQD окръжности, е успоредна на правата AD .

Задача 10.3. (А. Голованов) Нека $f(x)$ е полином от трета степен с реални коефициенти. Тройката (a, b, c) от различни реални числа се нарича *циклична*, ако $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Оказало се, че съществуват осем циклични тройки (a_i, b_i, c_i) , $i = 1, 2, \dots, 8$, в които участват 24 различни реални числа. Да се докаже, че измежду осемте суми $a_i + b_i + c_i$ има поне три различни.

Задача 10.4. (С. Берлов, Ф. Петров) В изпъкнал 100-ъгълник M е избрана точка X , нележаща на страна или диагонал на M . В началото няма маркирани върхове. Петя и Вася поред маркират (немаркирани дотогава) върхове на M , като на първия ход Петя маркира два върха, а след това всеки от тях маркира по един връх, когато е на ход. Губи този, след чийто ход точката X се е оказала във вътрешността на многоъгълник с маркирани върхове. Да се докаже, че Петя има печеливша стратегия.

Задача 10.5. Виж Задача 9.5.

Задача 10.6. Виж Задача 9.6.

Задача 10.7. (И. Богданов) На дъската са написани четири две по две различни цели числа, всяко от които има абсолютна стойност, по-голяма от един милион. Известно е, че не съществува естествено число, по-голямо от 1, което да дели всяко от четирите написани числа. Петя записал в тетрадката си шестте суми на по две от числата от дъската, след това разбил тези шест суми на три двойки и умножил числата във всяка двойка. Възможно ли е тези три произведения да се окажат равни?

Задача 10.8. (М. Кунгожин) Нека ABC е остроъгълен триъгълник, в който $AC < BC$, а M е средата на страната AB . В окръжността Ω , описана около $\triangle ABC$, е построен диаметърът CC' . Правата CM пресича правите AC' и BC' съответно в точките K и L . Правата AB , перпендикулярът от K към правата AC' и перпендикулярът от L към правата BC' определят триъгълник Δ . Да се докаже, че окръжността, описана около Δ , се допира до окръжността Ω .

11.1. Виж Задача 10.1.

11.2. (П. Кожевников) Отсечките A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 се пресичат в точка P , но не лежат в една равнина. Нека O_{ijk} е центърът на сферата, минаваща през точките A_i , B_j , C_k и P . Да се докаже, че правите $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ се пресичат в една точка.

11.3. (Д. Храмцов) Върху таблица 100×100 са поставени няколко неп-ресичащи се равнобедрени правоъгълни триъгълника с катети 1, като всеки

триъгълник покрива точно половин клетка. Оказало се, че всяка страна на клетка (включително и граничните) е покрита от точно един катет на триъгълник. Да се намери максималният възможен брой на клетките, които не съдържат нито един триъгълник.

11.4. (А. Глазирин) Тримерното пространство е разбито на тетраедри и октаедри с равнини с уравнения $x \pm y \pm z = n$ (за всички цели n). Нека точката (x_0, y_0, z_0) с рационални координати не лежи в никоя от равнините на разбиването. Да се докаже, че съществува естествено число k , за което точката (kx_0, ky_0, kz_0) лежи строго вътре в някой от октаедрите от разбиването.

11.5. (И. Богданов) Нека n е естествено число. Върху всяка от $2n + 1$ карти е написано по едно ненулево цяло число, като сумата на всички написани числа не е нула. С тези карти трябва да се заменят звездичките в израза $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \dots + *x + *$ така, че полученият полином да няма *цели* корени. Винаги ли е възможно това?

11.6. (Ф. Петров) В една страна има $n > 1$ града, някои от които са свързани с двупосочни директни авиолинии, като между всеки два града съществува единствен маршрут от авиолиния (евентуално с прекачвания). Кметът на всеки град X преброил номериранията на градовете с числата от 1 до n , за които във всеки маршрут, започващ от X , номерата на градовете са в растящ ред. Всички кметове, освен един, забелязали, че техните резултати се делят на 2016. Да се докаже, че и резултатът на последния кмет също се дели на 2016.

11.7. (А. Храбров) Сумата на положителните числа a, b, c и d е равна на 3. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leq \frac{1}{a^3 b^3 c^3 d^3}.$$

11.8. (А. Якубов) В триъгълника ABC медианите AM_A , BM_B и CM_C се пресичат в точка M . Окръжността Ω_A минава през средата на отсечката AM и се допира до отсечката BC в точка M_A . Аналогично се дефинират окръжностите Ω_B и Ω_C . Да се докаже, че окръжностите Ω_A , Ω_B и Ω_C имат обща точка.

САЩ (19-20 април 2016)

Задача 1. Нека $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ са две по две различни непразни подмножества на множеството S . Известно е, че всеки две множества X_i и X_{i+1} са непресичащи се и обединението им не съвпада с S за всяко $i \in \{1, 2, \dots, 99\}$. Да се намери минималният възможен брой елементи на S .

Задача 2. Да се докаже, че за всяко естествено k , числото

$$A = (k^2)! \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

е цяло.

Задача 3. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който I_B и I_C са съответно центровете на външновписаните окръжности срещу върховете B и C , а O е центърът на описаната окръжност. Точките E и Y лежат върху отсечката AC , като $\sphericalangle ABY = \sphericalangle CBY$ и $BE \perp AC$. Аналогично, F и Z лежат на отсечката AB така, че $\sphericalangle ACZ = \sphericalangle BCZ$ и $CF \perp AB$. Правите $I_B F$ и $I_C E$ се пресичат в P . Да се докаже, че правите PO и YZ са перпендикулярни.

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, които удовлетворяват следното равенство за всички $x, y \in \mathbb{R}$

$$(f(x) + xy)f(x - 3y) + (f(y) + xy)(f(3x - y)) = (f(x + y))^2.$$

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$, в който е вписан петоъгълник $AMNPQ$ с равни страни, като $M \in AB$, $Q \in AC$ и $N, P \in BC$. Правите MN и PQ се пресичат в точка S , а с l означаваме ъглополовящата на $\sphericalangle MSQ$. Да се докаже, че $OI \parallel l$, където O и I са съответно центровете на описаната и вписаната окръжности в $\triangle ABC$.

Задача 6. Дадени са естествени числа n и k , за които $n \geq k \geq 2$. Играете следната игра със зъл Магьосник, който разполага с $2n$ на брой карти, като за всяко $i = 1, 2, \dots, n$, числото i е написано на точно две карти. Магьосникът подрежда картите с лицето надолу в произволен ред. Позволено ви е да правите ходове по следния начин: избирате k от картите на магьосника и той разкрива числата, записани на тях. Ако измежду тези k карти

има две с равни числа записани на тях, вие печелите играта. Ако не, магьосникът разбърква само картите, които сте избрали (без да го гледате) и сте отново на ход. Ще казваме, че една такава игра е *печелима* ако съществуват естествено число m и стратегия, за които вие можете да спечелите с най-много m хода, независимо от разбъркванията на магьосника. За кои стойности на n и k играта е печелима?

САЩ – Младежи (19-20 април 2016)

Задача 1. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с $AB = AC$ и описаната му окръжност ω . Нека P е произволна точка от дъгата $\widehat{BC}$, която не съдържа A . Точките I_B и I_C са съответно центровете на вписаните окръжности в $\triangle ABP$ и $\triangle ACP$. Да се докаже, че описаната около $\triangle PI_BI_C$ окръжност минава през постоянна точка, която не зависи от избора на P .

Задача 2. Да се докаже, че съществува естествено число $n < 10^6$, за което 5^n има шест последователни нули в записа си.

Задача 3. Виж задача 1 от САЩ.

Задача 4. Да се намери най-малкото естествено число N със следното свойство: които и 2016 елемента да изтрием от множеството $\{1, 2, \dots, N\}$ винаги ще има 2016 измежду останалите със сума равна на N .

Задача 5. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ и центърът O на описаната около този триъгълник окръжност. Точката H е петата на височината от A към BC , а P и Q са ортогоналните проекции на H върху AB и AC съответно. Известно е, че $AH^2 = 2AO^2$. Да се докаже, че точките O , P и Q лежат на една права.

Задача 6. Виж задача 4 от САЩ.

Тайланд 2015

Задача 1. Нека p е просто число и $a_1, a_2, a_3, \dots$ е редица от естествени числа, такива че

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p$$

за всяко естествено число n . Да се докаже, че за всяко естествено число n числото a_{n+1} дели $a_n + a_{n+2}$.

Задача 2. Нека a, b, c са положителни реални числа, такива че $abc = 1$. Да се докаже, че

$$\frac{a^5}{a^3 + 1} + \frac{b^5}{b^3 + 1} + \frac{c^5}{c^3 + 1} \geq \frac{3}{2}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 3. Нека $P = \{(x, y) | x, y \in \{0, 1, \dots, 2015\}\}$ е множество от точки в равнината. В равнината са поставени няколко хоризонтални и вертикални отсечки, всяка с единична дължина, така че краищата на всяка отсечка са от P , всяка точка от P е край на поне една отсечка и никои две отсечки нямат общ край.

Да се докаже, че съществува хоризонтална или вертикална права, минаваща през средите на поне 506 отсечки.

Задача 4. Даден е неравнобедрен $\triangle ABC$ с $\angle ACB > 90^\circ$. Вписаната окръжност с център I се допира до страните AB , BC и CA съответно в точките D , E и F . Правите AI и BI пресичат отсечката EF в точките M и N , съответно. Ако G е средата на AB , да се докаже, че точките M , N , D и G лежат на една окръжност.

Задача 5. Нека $n > 6$ е естествено число. Да се докаже, че ако $n + 1$ е просто число, то числото

$$\left\lceil \frac{(n-1)!}{n^2 + n} \right\rceil$$

е нечетно.

Задача 6. Дадени са естествени числа m и n . Да се намери броят начини да се попълнят клетките на таблица $m \times n$ с числа от множеството

$\{-2, -1, 1, 2\}$, така че произведението на числата във всеки ред и всяка колона е равно на (-2) .

Задача 7. Нека A , B и C са центровете на три две по две външнодопиращи се окръжности с радиуси r_a , r_b и r_c , съответно. Ако r е радиусът на вписаната в триъгълника ABC окръжност, да се докаже, че

$$r^2 \leq \frac{1}{9}(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2).$$

Задача 8. Естествените числа m и n са такива, че числото $m - n$ е нечетно. Да се докаже, че числото $(m + 3n)(5m + 7n)$ не е точен квадрат.

Задача 9. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива че

$$f(f(x) + 2y) = 6x + f(f(y) - x)$$

за всички $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 10. Нека $m, n \geq 2$ са естествени числа. mn момчета са разпределени на m отбора, всеки по n човека. На всеки отбор е даден уникален цвят и след това всяко момче получило кърпа с цвета на отбора си.

Всички момчета са седнали в кръг около огън, като n -те момчета във всеки отбор седят заедно.

Командирът иска от момчетата да правят представления, като в едно представление групата е от поне двама и всички имат кърпи от един и същи цвят. След края на представлението те се връщат в началните си позиции и командирът намира друга група за следващото представление. Никои две представления не се състоят от една и съща група хора, без значение от цвета на кърпата.

Ако командирът в някой момент не може да намери група от момчета, изпълняващи горните условия, той ще нареди на всяко момче да даде кърпата на левия си съсед преди да се опита да намери група отново. Това се повтаря докато е възможно да има представления, изпълняващи горните условия.

Да се намери броят на възможните представления.

Хонг Конг 2016

Задача 1. Всяка точка в равнината е оцветена в червено или синьо. Да се докаже, че съществува многоъгълник с едноцветни върхове от поне един от следните видове:

- Равностранен триъгълник с дължина на страната 2,
- Равностранен триъгълник с дължина на страната $\sqrt{3}$,
- Ромб с дължина на страната 1.

Задача 2. Нека a , b и c са различни ненулеви реални числа. Да се докаже, че ако полиномите $ax^3 + bx + c$, $bx^3 + cx + a$ и $cx^3 + ax + b$ имат общ корен, то поне един от тях има три (не непременно различни) реални корена.

Задача 3. Да се реши в цели числа уравнението

$$(b^2 + 11(a - b))^2 = a^3b.$$

Задача 4. Даден е неравнобедрен триъгълник ABC . Точките $D \in AB$ и $E \in AC$ са такива, че описаните около $\triangle ACD$ и $\triangle ABE$ окръжности се допират до BC . Нека F е пресечната точка на BC и DE . Да се докаже, че правата AF е перпендикулярна на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

Южна Корея 2015

Задача 1. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива че за всеки $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^{2015} + f(y)^{2015}) = f(x)^{2015} + y^{2015}.$$

Задача 2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с център I се допира до страните BC , AC и AB в точките D , E и F , съответно. Описаната около $\triangle ABC$ окръжност пресича правата EF в точките P и Q . Ако O_1 и O_2 са центровете на описаните около $\triangle IAB$ и $\triangle IAC$ окръжности, да се докаже, че центърът на описаната около $\triangle DPQ$ окръжност лежи на правата O_1O_2 .

Задача 3. Дадени са град с поне три метростанции, двупосочни линии на метрото и естествено число L . В града е възможно да се посетят $L + 1$ станции, като никоя станция не се посещава повече от веднъж. Да се докаже, че едно от следните две твърдения е вярно.

1. Съществуват три станции A , B , C , такива че не е възможно от A да достигнем B , без да посетим C .
2. Съществува затворен път, започващ от някоя станция, минаващ през поне $\lceil \sqrt{2L} \rceil$ станции, като никоя от тях не се посещава повече от веднъж.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H . Описаната около $\triangle HAB$ окръжност ω пресича отсечката BC за втори път в точка D . Правата DH пресича отсечката AC в точка P , а Q е центърът на описаната около $\triangle ADP$. Да се докаже, че центърът на ω лежи на описаната около $\triangle BDQ$ окръжност.

Задача 5. Дадено е естествено число k . Редиците a_n , b_n са такива че

$$a_1 = k, \quad a_2 = k, \quad a_{n+2} = a_n a_{n+1},$$
$$b_1 = 1, \quad b_2 = k, \quad b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^3 + 1}{b_n}.$$

Да се докаже, че за всяко естествено число n числото $a_{2n} b_{n+3}$ е цяло.

Задача 6. В равнината са дадени 2015 окръжности с радиус 1. Да се докаже, че измежду тях съществуват 27, такива че или всяка двойка имат общи точки или всяка двойка нямат общи точки.

Южна Корея 2016

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с височини BD и CE към срещуположните страни. Точките S и T са симетричните точки на E спрямо страните AC и BC , съответно. Описаната около $\triangle CST$ окръжност с център O пресича правата AC за втори път в точката X . Да се докаже, че правите XO и DE са перпендикулярни.

Задача 2. Дадени са естествените числа $n \geq 2$ и $k \geq \frac{5}{2}n - 1$. Да се докаже, че при всеки избор на k различни точки с цели координати (x, y) , $1 \leq x, y \leq n$ съществува окръжност, минаваща през поне четири от тези точки.

Задача 3. Да се докаже, че не съществуват рационални числа x и y , такива че

$$x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y} = 4.$$

Задача 4. Реалните числа x, y, z са такива, че $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Да се намери най-голямата възможна стойност на израза

$$(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy).$$

Задача 5. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с център I допира страните BC , AC и AB в точките D , E и F , съответно. Правата EF пресича правите BI , CI , BC и DI в точките K , L , M и Q , съответно. Правата през M и средата на CL пресича CK в точката P . Да се докаже, че

$$PQ = \frac{AB \cdot KQ}{BI}.$$

Задача 6. Дадено е множество U от m триъгълника. Да се докаже, че съществува подмножество W на U , което изпълнява следните условия:

- Броят на триъгълниците в W е поне $0.45m^{\frac{4}{5}}$.
- Не съществуват шест точки A, B, C, D, E и F , такива че всеки от триъгълниците $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDE$, $\triangle DEF$, $\triangle EFA$ и $\triangle FAB$ принадлежи на W .

Япония 2016

Задача 1. Дадено е нечетно просто число p . За $1 \leq k \leq p-1$ с a_k ще означаваме броят на делителите на $kp+1$, които са по-големи от k и по-малки от p . Да се намери сумата

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1}.$$

Задача 2. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB \cdot BC = AD \cdot CD$. Правите AD и BC се пресичат в точката X , а правите AB и CD – в точката Y . Точките E, F, G и H са средите на отсечките AB, BC, CD и DA . Ъглополовящата на $\angle AXB$ пресича отсечката EG в точка S , а ъглополовящата на $\angle AYD$ пресича отсечката FH в точката T . Да се докаже, че правите ST и BD са успоредни.

Задача 3. Дадено е естествено число n . В кралство има 2^n граждани и крал. За валута се използват банкноти със стойност 2^n долара и монети със стойности 2^a долара, където $0 \leq a \leq n-1$. Всеки гражданин има безбройно много банкноти. Нека общият брой на монетите в кралството е S . Един ден кралят решил да издаде заповед, която да се изпълнява всяка нощ:

- Всеки гражданин трябва да дава някаква крайна сума пари или на друг гражданин, или на краля.
- Всеки гражданин трябва да дава точно 1 долар повече от общата сума, която е получил от другите граждани.

Да се намери най-малката стойност на S , при която кралят всяка нощ ще може да получава пари (вечно).

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива че

$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x$$

за всеки две реални числа x и y .

Задача 5. Дадени са естествени числа $m \geq 2$ и $n < \frac{3(m-1)}{2}$. В държава има m града и n пътища, като всеки път свързва два различни града и е

възможно да има няколко пътища между два различни града. Да се докаже, че е възможно градовете да се разделят на две непразни множества α и β , така че ако всеки път от град от α до град от β се подобри до магистрала, то от всеки град излиза най-много една магистрала.

РЕШЕНИЯ

Великобритания 2016

Задача 1. Окръжности с радиуси r_1, r_2, r_3 се допират помежду си външно и до обща допирателна в точки A, B и C съответно, като B е между A и C . Да се докаже, че

$$16(r_1 + r_2 + r_3) \geq 9(AB + BC + CA).$$

Решение. За $i = 1, 2, 3$ означаваме с O_i центъра на окръжността с радиус r_i . Нека A' бъде петата на перпендикуляра от O_2 към AO_1 . Тъй като $A'O_2BA$ е правоъгълник, то $A'O_2 = AB$. Освен това $O_1A' = |r_1 - r_2|$ и $O_1O_2 = r_1 + r_2$, така че от Питагоровата теорема имаме

$$AB^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2.$$

Аналогично $AC^2 = 4r_1r_3$ и $BC^2 = 4r_2r_3$.

Понеже $AB + BC = AC$, то $\sqrt{r_1r_3} = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3}$. В такъв случай, ако $a = \sqrt{r_1}$ и $b = \sqrt{r_3}$, то

$$\sqrt{r_2} = \frac{\sqrt{r_1r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_3}} = \frac{ab}{a + b}.$$

Следователно трябва да докажем, че

$$\begin{aligned} 16 \left(a^2 + b^2 + \left(\frac{ab}{a+b} \right)^2 \right) &\geq 9 \left(2ab + \frac{2a^2b}{a+b} + \frac{2ab^2}{a+b} \right) \\ &= 18 \left(ab + \frac{ab(a+b)}{a+b} \right) = 36ab, \end{aligned}$$

т.е.

$$4((a^2 + b^2)(a + b)^2 + a^2b^2) \geq 9ab(a + b)^2.$$

Изваждайки дясната от лявата страна получаваме

$$\begin{aligned} &4((a^2 + b^2)(a + b)^2 + a^2b^2) - 9ab(a + b)^2 \\ &= 4(a^2 + b^2 - 2ab)(a + b)^2 - ab((a + b)^2 - 4ab) \\ &= (a - b)^2(4(a + b)^2 - ab) \\ &= (a - b)^2(4a^2 + 7ab + 4b^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Задача 2. Алисън направила списък от 20 отбора по хоккей, подредени според това колко силни тя смята че са, но отказва да го сподели. На всеки ход Бенджамин ѝ казва три отбора и тя му казва или кой от тях е най-слабият, или кой от тях е най-силният в нейния списък. Да се намери най-голямото естествено число N , за което Бенджамин може да си гарантира намирането на редица от отбори $T_1, T_2, \dots, T_N$, такива че според Алисън T_i е по-силен от T_{i+1} за всяко $1 \leq i \leq N - 1$.

Решение. Ще покажем, че $N = 10$ е максималното възможно.

Доказателство, че $N \geq 10$. Трябва да покажем, че Бенджамин винаги може да намери нареден списък от отбори с дължина 10. Ще наричаме двойка отбори (t_x, t_y) *проблемна* ако, независимо от въпросите си, Бенджамин не може да каже кой от тях е по-силен според Алисън. Тогава всеки отбор t_x може да участва в най-много една проблемна двойка: в противен случай, ако (t_x, t_y) и (t_x, t_z) са две такива, то Бенджамин може да попита за t_x, t_y, t_z и Алисън трябва да каже нещо за поне една от тях. Това означава, че има най-много 10 проблемни двойки. Ако Бенджамин наименува отборите в проблемните двойки (a_i, b_i) , то всеки от тях ще получи най-много едно име, а останалите отбори може се да наименуват по произволен начин. Да забележим, че сред отборите $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ не може да има проблемни двойки и следователно Бенджамин може да ги нареди по сила.

Доказателство, че $N \leq 10$. Трябва да покажем стратегия на Алисън, при която Бенджамин никога не може намери нареден списък от 11 отбора. Нека редът на отборите е $c_1, c_2, \dots, c_{20}$, като c_1 е най-слабият, а c_{20} най-силният. Ако Бенджамин попита Алисън въпрос, включващ c_{2i-1} и c_{2i} за някое $1 \leq i \leq 10$ заедно с c_j , то Алисън ще каже на Бенджамин или че c_j е най-слабият, или че е най-силният. В частност, тя никога няма да сравни c_{2i-1} и c_{2i} , и може да отговори както иска на останалите въпроси. Тъй като от принципа на Дирихле във всеки списък с дължина 11 има два отбора – единият от вида c_{2i-1} , а другият от вида c_{2i} , то Бенджамин няма да може да каже кой от тях е по-добър и следователно няма да може да нареди отборите по сила.

Задача 3. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$. Диагоналите AC и BD се пресичат в P , а продълженията на страните DA и CB се пресичат в Q . Точката E е средата на AB . Да се докаже, че ако PQ е перпендикулярна на AC , то PE е перпендикулярна на BC .

Решение. Нека описаната около триъгълника APQ окръжност пресича BC в X – тогава $\sphericalangle AXQ = \sphericalangle APQ = 90^\circ$. Тъй като $ABCD$ е вписан, то $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PBQ$; аналогично $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PXB$ от вписания $APXQ$. Тогава $\sphericalangle PXB = \sphericalangle PBQ$, т.е. PBX е равнобедрен и P лежи на симетралата на BX . Тъй като E е средата на хипотенузата AB в правоъгълния триъгълник AXB , то E също лежи на симетралата на BX и следователно PE съвпада с тази симетрала. Понеже точките B , X и C лежат на една права, исканото следва.

Задача 4. Нека p е просто число, за което съществуват различни естествени числа u и v , такива че p^2 е средноаритметичното на u^2 и v^2 . Да се докаже, че $2p - u - v$ е или точен квадрат, или удвоен квадрат.

Решение. За $p = 2$ имаме $u^2 + v^2 = 8$ и $u = v = 2$, противоречие. Нека $p \neq 2$. Да забележим, че

$$\begin{aligned}(2p - u - v)(2p + u + v) &= 4p^2 - u^2 - v^2 - 2uv \\ &= (u^2 + v^2) - 2uv \\ &= (u - v)^2.\end{aligned}$$

Тъй като $u^2 + v^2$ е четно, то u и v са от еднаква четност и следователно $2p + u + v$ и $2p - u - v$ са четни. Тогава последното равенство е еквивалентно на

$$\left(\frac{2p - u - v}{2}\right) \left(\frac{2p + u + v}{2}\right) = \left(\frac{u - v}{2}\right)^2.$$

В такъв случай $\frac{2p - u - v}{2} = qa^2$ и $\frac{2p + u + v}{2} = qb^2$ за някакви a, b и q свободно от квадрати. Понеже $2p + u + v > 0$, то $q > 0$. Освен това,

$$q \left| \frac{2p + u + v}{2} + \frac{2p - u - v}{2} \right| = 2p.$$

Ако $q = p$, то $p \mid u + v$ и следователно $p \mid \frac{u+v}{2}$. От друга страна,

$$\left(\frac{u + v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u - v}{2}\right)^2 = p^2,$$

така че $0 < \frac{u+v}{2} < p$, което е противоречие. Освен това е ясно, че $q = 2p$ е невъзможно. Оттук заключаваме, че $q = 1$ или $q = 2$. Ако $q = 1$, то $2p - u - v = 2a^2$, което е удвоен квадрат, а при $q = 2$ имаме $2p - u - v = (2a)^2$, което е точен квадрат.

Италия 2015

Задача 1. Правоъгълният паралелепипед $ABCD A' B' C' D'$ е разделен на осем части чрез равнини, успоредни на стените му. За връх P с $V(P)$ означаваме обема на частта, съдържаща P . Ако $V(A) = 40$, $V(C) = 300$, $V(B') = 360$ и $V(C') = 90$, да се намери обема на паралелепипеда.

Отговор. 2015

Решение. От броя на частите имаме, че една от равнините е успоредна на $ADD' A'$, другата – на $ABB' A'$, а третата – на $ABCD$. Нека пресечните точки на съответните равнини с отсечките $B' C'$, AB , CD и AA' са M , P , Q и N , съответно. Частите при B' и C' имат две общи измерения, откъдето

$$B' M = \frac{V(B')}{V(C')} C' M' = 4 C' M,$$

следователно ако $C' M' = x$, то $B' C' = 5x$. Частите при A и C имат едно общо измерение, в една от другите двойки се отнасят както $B' M : C' M = 4 : 1$, откъдето $\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{QC} = \frac{V(A)}{V(C)} \frac{C' M}{B' M} = \frac{1}{30}$ – така при $AP = y$ получаваме $AB = 31y$. Сега от частта при A получаваме $AN = \frac{V(A)}{4xy} = \frac{10}{xy}$, а от тази при C' – $NA' = \frac{V(C')}{30xy} = \frac{3}{xy}$ и следователно $AA' = \frac{13}{xy}$. Търсеният обем е $V_{ABCD} = AB \cdot B' C' \cdot AA' = 2015$.

Задача 2. Музикална услуга предлага песни, класифицирани в десет жанра, като всяка принадлежи към точно един жанр. Песните се възпроизвеждат една след друга: първите 17 се избират от потребителя, но започвайки от осемнадесетата, услугата сама определя коя песен да пусне. Елизабет забелязала, че ако правим класация (спрямо броя песни) на жанровете всеки път по последните 17 песни, следващата песен принадлежи на жанра на първо място (ако има няколко жанра на първо място, то тя принадлежи на някой от тях). Да се докаже, че от някакъв момент нататък всички песни са към един и същи жанр.

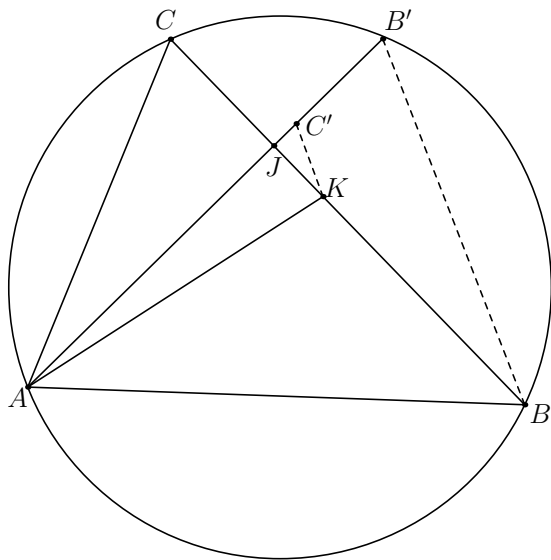
Решение. Да допуснем първо, че в някакъв момент имаме жанр A , който е единствен на първо място. Тогава следващата песен е от A , а за останалите жанрове броят песни измежду последните 17 или намалява с 1, или остава същият. Следователно A отново е единствен на първо място и индуктивно

това важи и за нататък. Аналогично се вижда, че ако жанр не е на първо място в някакъв момент, то той не достига това място и за нататък.

Ако при първите 17 песни имаме един жанр на първо място, задачата е решена. В противен случай трябва да покажем, че броят жанрове на първо място намалява. Ако допуснем, че от някакъв момент нататък броят на тези остава един и същ, то той трябва да е делител на 17 - ако е 1, задачата е решена, а не може да е 17, тъй като всички жанрове са 10. Следователно този брой или намалява строго в някои моменти (и ще достигне 1), или се увеличава. Остава да покажем, че този брой никога не се увеличава.

Да разгледаме 17-те песни $i, i+1, \dots, i+16$, като i -тата е към жанр C . Ако C не е на първо място, то $i+17$ -тата песен е от жанр на първо място и той остава сам на това място, противоречие. Ако C е на първо място и $i+17$ -тата песен е от C , то броят на песните във всеки от жанровете на първо място не се променя и следователно броят на жанровете на това място остава същият, пак противоречие.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$. Точката K е петата на ъглополовящата през върха A , а точката $J \in BC$ е такава, че $\angle BAC = 3 \angle JAC$. Точките B' и C' от правата AJ са външни за отсечката AJ , като $AC = AC'$ и $AB = AB'$. Да се докаже, че четириъгълникът $ACB'B$ е вписан тогава и само тогава, когато $C'K \parallel BB'$.



Решение. От теоремата на Талес и степен на точка следва, че трябва да докажем $JB \cdot JC = JA \cdot JB' \Leftrightarrow JC' \cdot JB = JK \cdot JB'$, като от едното и равенството $JC \cdot JK = JA \cdot JC'$ следва другото. Последното е еквивалентно на вписаността на $AKC'C$. Сега имаме:

($\Leftarrow$) Нека $CK \parallel BB'$ и да означим $\sphericalangle AB'B = \sphericalangle AC'K = x$, $\sphericalangle AC'C = y$. Оттук $\sphericalangle KC'C = x + y$. От $\triangle ABB'$, $\triangle ACC'$ и ъглополовящата AK получаваме $\sphericalangle CAK = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC = \frac{1}{2}(\sphericalangle CAC' + \sphericalangle BAB') = \frac{1}{2}((180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y)) = 180^\circ - x - y = 180^\circ - \sphericalangle KC'C$ и следователно $AKC'C$ е вписан.

($\Rightarrow$) Нека $ACB'B$ е вписан и да означим $\sphericalangle ACK = \gamma$, $\sphericalangle KCB' = \beta$. Вписаността дава $\sphericalangle AB'B = \gamma$, а от равнобедрените триъгълници имаме $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAC' + \sphericalangle BAB' = 360^\circ - 2\beta - 4\gamma$. Оттук $\sphericalangle ABC = 2\beta + 3\gamma - 180^\circ$ и $\sphericalangle AKC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle KAB = \beta + \gamma$. Но от $AC = AC'$ имаме и $\sphericalangle AC'C = \sphericalangle ACC' = \beta + \gamma = \sphericalangle AKC$ и следователно $AKC'C$ е вписан.

Забележка. Даденото решение показва, че трисектрисата AJ може да бъде заменена с произволна чевиана през върха A .

Задача 4. Да се реши в цели числа уравнението $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.

Отговор. $(-1, -1)$ и $(n, 1 - n)$, $n \in \mathbb{Z}$

Решение. От тъждеството $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ получаваме еквивалентното

$$(a + b - 1)(a^2 + b^2 + 1 - ab + a + b) = 0 \Leftrightarrow (a + b - 1)((2a - b + 1)^2 + 3(b + 1)^2) = 0$$

и отговорът следва.

Задача 5. Дадена е окръжност Γ и хорда AB от нея. Точката C лежи на хордата AB и DE е хорда през C . Окръжността Γ_D допира Γ в точка D и правата AB в точка F , а окръжността Γ_E допира Γ в точка E и правата AB в точка G . Да се докаже, че $CA = CB$ тогава и само тогава, когато $CF = CG$.

е записано естественото число $n > 1$. На всеки ход играчът изтрива числото k на дъската в момента и на негово място записва едно от следните:

1. Положителен делител на k , различен от 1 и k
2. Числото $k + 1$

В началото всеки играч има по хиляда точки. Ако играч избере ход 1, той печели точка, а ако избере 2 – губи точка. Губи този, който пръв достигне нула точки. Ако Ада започва първа, то за кои n Чарлз има печеливша стратегия?

Отговор. 8, 14, 26, 49, 91, 169 и всички прости числа с изключение на 2, 7 и 13.

Решение. Ако $n = 2$, то първият играч печели – еднозначно имаме $2-3-4-5-6-3$ и след това цикъла $3-4-5-6-3$ (във всеки такъв първият губи и печели точка, а вторият губи две точки). От тези разсъждения следва, че при написано $k = 3$ или $k = 5$ играчът, който е на ход губи, а при $k = 2$, 4 или съставно кратно на 3 или 5 – печели. Нататък, при $n = 7$, първият пише 8 и вторият губи, тъй като всяка от 4, 2 и 9 е печеливша позиция за първия (отново може да сведе до цикъла $3-4-5-6-3$). Следователно числата 2, 4, $3k$, $5k$ и $8k$ ($k > 1$) са печеливши, а оттук простите числа $3k+2$ и $5k+4$, $k \geq 1$ са губещи (заедно с 3, 5 и 8). Освен това $n = 13$ е печелившо, понеже първият получава $k = 2, 7$ или 15, които са печеливши. Така имаме:

1. Ако p е печелившо просто число, то $2p$ е губещо. Наистина, имаме $p = 3k + 1$ и тогава $2p + 1$ се дели на 3.
2. 2, 7 и 13 са единствените печеливши прости числа. Наистина, играчът на ход дава $p + 1$. Това е печелившо, ако е кратно на губещо число. Иначе, за $p > 13$ имаме или че $p + 1$ е степен на двойката (тогава ходът 8 е печеливш), или $p + 1 = 2qk$, където q е печелившо (което е невъзможно, тъй като $2p$ е печелившо от 1.).

Нещо повече, 49, 169 са губещи, а $49k$, $169k$, $k > 1$ са печеливши. Освен това, 91 е губещо, понеже играчът на ход дава 92, а опонентът може да даде 23.

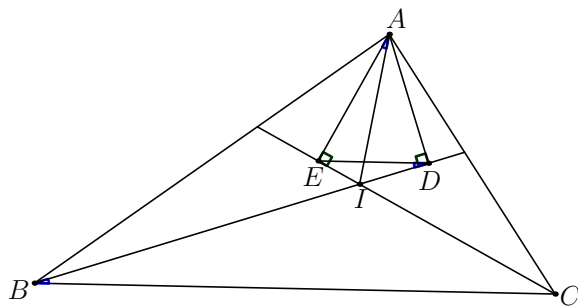
3. Ако число е съставно и не е 8, 14, 26, 49, 91, 169, то е печелившо.

Наистина, ако това число има губещ прост делител, сме готови. В противен случай, простите му делители са измежду 2, 7 и 13. Съгласно горните разсъждения, разглежданите стойности са печеливши.

С това задачата е решена.

Италия 2016

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$. Точките D и E са петите на перпендикулярите от върха A към вътрешните ъглополовящи през върховете B и C . Да се докаже, че $DE \parallel BC$.



Решение. Нека I е центърът на вписаната окръжност. Тогава $ADIE$ е вписан и $\sphericalangle IDE = \sphericalangle IAE$. Следователно

$$\begin{aligned} \sphericalangle IDE = \sphericalangle IAE &= \sphericalangle CAE - \sphericalangle CAI \\ &= 90^\circ - \frac{\sphericalangle ACB}{2} - \frac{\sphericalangle BAC}{2} = \frac{\sphericalangle ABC}{2} \\ &= \sphericalangle IBC, \end{aligned}$$

което означава, че $DE \parallel BC$.

Задача 2. Математическо състезание се състои от 3 задачи, всяка от които се оценява с от 0 до 7 точки включително. Известно е, че за всеки двама участника съществува най-много една задача, на която двамата имат един и същи брой точки. Да се намери максималния възможен брой участници.

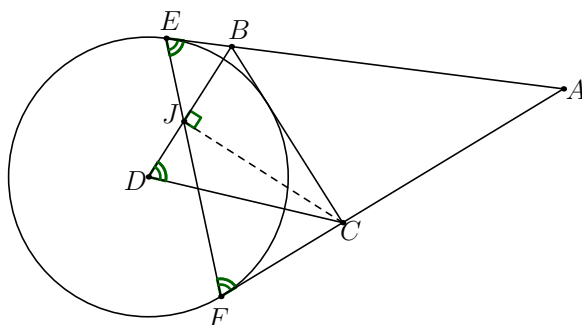
Отговор. 64

Решение. Да разгледаме целите точки (x, y, z) с $x, y, z \in [0, 7]$. Да оцветим точката (x, y, z) в червено, ако съществува ученик с точки x , y и z (в този ред) на трите задачи. Условието е еквивалентно на това ако (x, y, z) е червена, то (x, y, k) , (x, k, z) , (k, y, z) не са такива за всяко $0 \leq k \leq 7$ (в случай, че са различни от (x, y, z)).

За фиксирано k , измежду точките (x, y, k) , $x, y \in [0, 7]$ има най-много 8 червени точки – в противен случай от принципа на Дирихле следва, че има поне две точки с обща координата, противоречие.

Следователно максималният възможен брой червени точки е $8 \cdot 8 = 64$. Лесно се проверява, че това се достига например за точките $(x, y, (x - y) \pmod{8})$, $x, y \in [0, 7]$.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$. Точката D е центърът на външновписаната срещу върха A окръжност. Нека тази окръжност допира правите AB и AC съответно в точките E и F , съответно и J е пресечната точка на BD и EF . Да се докаже, че $\angle CJB = 90^\circ$.



Решение. Тъй като $\angle BDC = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}$ и $\angle EFC = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}$ (второто поради $AE = AF$), то $\angle JDC = \angle JFC$, откъдето четириъгълникът $JDFC$ е вписан и $\angle CJB = \angle CFD = 90^\circ$.

Задача 4. Да се намерят всички двойки естествени числа (a, n) , $a \geq n \geq 2$, такива че $(a + 1)^n + a - 1$ е степен на числото 2.

Отговор. $(a, n) \equiv (4, 3)$

Решение. Нека $(a + 1)^n + a - 1 = 2^b$. Понеже a дели лявата страна, то $a = 2^c$, $c \leq b$. Разделяйки двете страни на 2^c , получаваме

$$(2^c + 1)^{n-1} + (2^c + 1)^{n-2} + \dots + (2^c + 1) + 2 = 2^{b-c}$$

което може да се запише и като $2^c k + n + 1 = 2^{b-c}$. Оттук $\nu_2(n + 1) \geq c$ (иначе лявата страна би имала нечетен прост делител), т.е. a дели $n + 1$. Но $a \geq n \geq 2$, откъдето заключаваме, че $a = n + 1 = 2^c$, $c \geq 2$.

Сега от развитието на Нютоновия бином имаме $(2^c + 1)^i = 2^{2c}K + 2^c i + 1$, откъдето лявата страна на горното равенство е равна на

$$2^{2c}A + 2^c \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 2^{2c}A + 2^{c+1}(2^{2c-2} - 2^{c-2} - 2^{c-1} + 1), \quad A \in \mathbb{N}$$

При $c = 2$ получаваме $(a, n) \equiv (4, 3)$, което е решение. При $c \geq 3$ числото $2^{2c-2} - 2^{c-2} - 2^{c-1} + 1$ е нечетно – тогава, изнасяйки 2^{c+1} като общ множител ($2c > c + 1$), в скобите получаваме нечетно число, по-голямо от 1, което е противоречие с това, че дясната страна няма нечетни прости делители.

Задача 5. Редицата $x_0, x_1, x_2, \dots$ от рационални числа е дефинирана както следва: x_0 е произволно рационално число и за всяко $n \geq 0$ е изпълнено $x_{n+1} = |\frac{x_n}{2} - 1|$ или $|\frac{1}{x_n} - 1|$, съответно при четен и нечетен числител на x_n (в несъкратим вид). Да се докаже, че за всяко x_0 :

- а) редицата съдържа краен брой различни членове
- б) редицата съдържа точно едно от числата 0 и $\frac{2}{3}$.

Решение. а) Ако $x_k = 0$ за някое k , то нататък редицата е периодична с период 2 (редуват се 0 и 1 като членове) и твърдението е изпълнено. В противен случай, нека $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ и $y_n = \max\{p_n, q_n\} > 0$. Достатъчно е да докажем, че $y_{n+1} \leq y_n$ (откъдето ще следва, че $0 < p_n, q_n \leq y_0$, а оттам и твърдението). Имаме следните случаи:

1. p_n е четно. Понеже $(p_n, q_n) = 1$, числителят и знаменателят на $x_{n+1} = \frac{|\frac{p_n}{2} - q_n|}{q_n}$ също са взаимнопрости. От неравенството $|a - b| \leq \max\{a, b\}$ получаваме $y_{n+1} = \max\{|\frac{p_n}{2} - q_n|, q_n\} \leq \max\{\frac{p_n}{2}, q_n\} \leq \max\{p_n, q_n\} = y_n$, както се искаше.
2. p_n е нечетно. Тогава $x_{n+1} = \frac{|q_n - p_n|}{p_n}$. Както по-горе следва, че $y_{n+1} = \max\{|q_n - p_n|, p_n\} \leq \max\{p_n, q_n\} = y_n$, както се искаше.

б) От а) и рекурентната връзка следва, че редицата е периодична от известно място нататък.

Да отбележим първо, че 0 и $\frac{2}{3}$ едновременно не са членове на редицата – ако 0 е член, то нататък се редуват 0 и 1 като членове (и $\frac{2}{3}$ не се появява); ако $\frac{2}{3}$ е член, то всички членове нататък също са равни на $\frac{2}{3}$ (и 0 не се появява).

Сега допускаме, че 0 не е член (иначе твърдението е изпълнено) и ще намерим член, равен на $\frac{2}{3}$. Да забележим, че при това условие 1 също не е член (иначе следващият би бил 0).

От първия член нататък числото y_n (дефинирано в а)) е естествено, следователно, строгото неравенство $y_{n+1} < y_n$ се изпълнява краен брой. Сега разглеждаме следните случаи ($p_n \neq q_n$ поради $x_n \neq 1$):

1. $p_n > q_n$ и p_n е четно. Тогава $y_n = p_n$ и $y_{n+1} = \max\{|\frac{p_n}{2} - q_n|, q_n\} < p_n = y_n$.
2. $p_n < q_n$ и p_n е нечетно. Тогава $y_n = q_n$ и $y_{n+1} = \max\{|q_n - p_n|, p_n\} < q_n = y_n$.
3. $p_n > q_n$ и p_n е нечетно. Тогава $x_{n+1} = \frac{p_n - q_n}{p_n} < 1$ и попадаме в следващия случай.
4. $p_n < q_n$ и p_n е четно. Тогава $x_{n+1} = \frac{q_n - \frac{p_n}{2}}{q_n} < 1$. Понеже вторият случай се изпълнява краен брой пъти, от известно място нататък x_{n+1} попада само в този случай.

Заклучаваме, че от известно място нататък сме само в четвъртия случай. За достатъчно голямо n_0 и някакво $k \in \mathbb{N}$ имаме $x_{n_0+k} = x_{n_0}$ (поради периодичността). Сега чрез $x_{n+1} = \frac{q_n - \frac{p_n}{2}}{q_n}$ индуктивно се получава, че

$$p_{n_0} = p_{n_0+k} = \frac{2^k - (-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1}} q_{n_0} + \frac{(-1)^k}{2^k} p_{n_0}$$

като последното е еквивалентно точно на $x_{n_0} = \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} = \frac{2}{3}$.

Задача 6. Мистериозна машина съдържа комбинация от 2016 цели числа $x_1, x_2, \dots, x_{2016}$. Известно е, че всички числа от комбинацията, без едно, са равни. Можем да задаваме въпрос към машината, като даваме редица от 2016 цели числа $y_1, y_2, \dots, y_{2016}$ – тогава тя връща сумата

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{2016} y_{2016}$$

Колко въпроса са необходими, за да възстановим тайната комбинация, ако в началото:

- а) знаем, че числото, различно от останалите, е равно на 0?

б) не знаем никое от числата?

Отговор. 2

Решение. Първо ще покажем, че един въпрос не е достатъчен (дори за а)). Достатъчно е да докажем, че за произволни $y_1, y_2, \dots, y_{2016}$ съществуват две различни 2016-орки: $(a_i) = (n, n, \dots, 0, n, \dots, n)$ и $(b_i) = (m, m, \dots, 0, m, \dots, m)$, като $\sum y_i a_i = \sum y_i b_i$.

Ако за някои $i \neq j$ имаме $y_i = y_j$, то при избора $n = m = 1$ в едната 2016-орка имаме 0 на i -тото място, а при другата - на j -тото. Ако всички y_i са различни, то можем да изберем n, m , такива че

$$n \sum_{i=1}^{2015} y_i = m \sum_{i=2}^{2016} y_i$$

Сега ще покажем, че два въпроса са достатъчни (дори за б)). Нека n е стойността на 2015-те равни числа, а $n + m$ - на 2016-тото (което се намира в позиция j). Търсим числата n, m, j . Сумата, която ще връща машината е

$$S = n \sum_{i=1}^{2016} y_i + m y_j$$

За първия въпрос избираме $(y_i) = (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$. Понеже $\sum y_i = 0$, тук еднозначно определяме стойността $m' = |m|$.

За втория въпрос избираме $(y_i) = (q - 1, q + 1, q + 2, \dots, q + 2015)$, където q е такова, че $p = \sum y_i = 2016q + 2015 \cdot 1008 - 1$ е просто число (такова съществува поради $(2016, 2015 \cdot 1008 - 1) = 1$ и теоремата на Дирихле). Отговорът на машината е

$$S = np + (\pm 1)m'y_j$$

От друга страна, лесно се вижда, че елементите на множеството

$$\{e \cdot m'y_i | e \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, \dots, 2016\}$$

дават различни остатъци при деление на p . Следователно като знаем S и p , можем да определим знакът на m (а оттук и самото m) и j . Последните еднозначно определят n .

Китай 2015

Задача 1. Комплексните числа $z_1, z_2, \dots, z_n$ са такива, че $|z_i - 1| \leq r$ за всяко $1 \leq i \leq n$ и някое $r \in (0, 1)$. Да се докаже, че

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \cdot \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} \right| \geq n^2(1 - r^2)$$

Решение. Представянето $z_i = a_i + ib_i$ дава $(1 - a_i)^2 + b_i^2 \leq r^2$, т.е. $2a_i \geq (a_i^2 + b_i^2) + (1 - r^2) \geq 2\sqrt{(1 - r^2)(a_i^2 + b_i^2)}$, като последното следва от неравенството между средноаритметично и средногеометрично. Следователно $a_i > 0$ и

$$\frac{a_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \geq 1 - r^2 \quad (*)$$

Понеже $\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n a_i + i \sum_{i=1}^n b_i$ и $\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{a_i - ib_i}{a_i^2 + b_i^2}$, исканото неравенство е еквивалентно на

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^2} \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2}\right)^2} \geq n^2(1 - r^2)$$

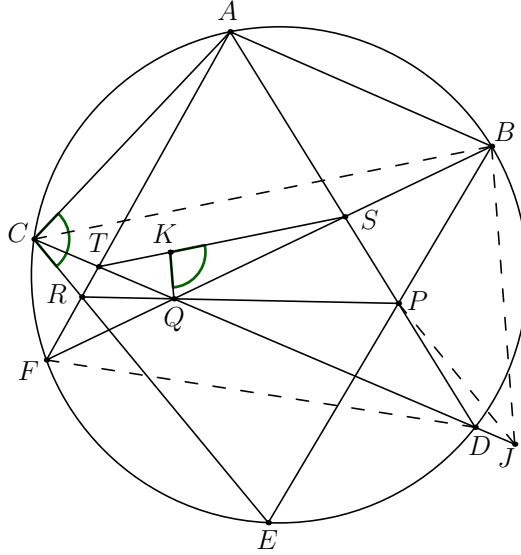
Сега чрез $(\sum_{i=1}^n b_i)^2 \geq 0$, $(\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2})^2 \geq 0$ и $(*)$ получаваме, че лявата страна е поне

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1 - r^2}{a_i}\right) \geq n^2(1 - r^2)$$

като последното следва от неравенството между средноаритметично и среднохармонично. С това задачата е решена.

Задача 2. Точките A, B, D, E, F и C лежат на една окръжност (в този ред), като $AB = AC$. Нека $P = AD \cap BE$, $R = AF \cap CE$, $Q = BF \cap CD$, $S = AD \cap BF$ и $T = AF \cap CD$. Точката $K \in ST$ е такава, че $\sphericalangle QKS = \sphericalangle ECA$. Да се докаже, че

$$\frac{SK}{KT} = \frac{PQ}{QR}.$$



Решение. Равенството $AB = AC$ дава $\sphericalangle ADC = \sphericalangle AFB$, значи точките S, D, F и T лежат на една окръжност, откъдето

$$\sphericalangle QSK = \sphericalangle TDF = \sphericalangle RAC.$$

Отчитайки условието $\sphericalangle QKS = \sphericalangle ECA$, получаваме $\triangle QSK \sim \triangle RAC$. Аналогично $\triangle QTK \sim \triangle PAB$. Следователно

$$\frac{SK}{KQ} = \frac{AC}{CR}, \quad \frac{KQ}{KT} = \frac{BP}{BA}$$

и умножаването на двете равенства, заедно с $AB = AC$, дава

$$\frac{SK}{KT} = \frac{BP}{CR}.$$

Нататък, теоремата на Паскал за $ABDEFC$ дава, че точките P, Q, R лежат на една права. Нека точката J лежи на лъча CD , като $\triangle BCJ \sim \triangle BAP$. Тъй като $\frac{BP}{BJ} = \frac{AB}{CB}$ и

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle PBA - \sphericalangle PBC = \sphericalangle JBC - \sphericalangle PBC = \sphericalangle JBP,$$

получаваме $\triangle BPJ \sim \triangle BAC$, а отгук и $PB = PJ$ (поради $AB = AC$). Нещо повече, имаме $\sphericalangle DPE = \sphericalangle BPA = \sphericalangle BJC$, така че точките B, J, D и P лежат на една окръжност и

$$\sphericalangle PJQ = \sphericalangle DBE = \sphericalangle DCE,$$

което дава $PJ \parallel CR$. Заключаваме, че

$$\frac{BP}{CR} = \frac{PJ}{CR} = \frac{PQ}{QR},$$

което заедно с $\frac{SK}{KT} = \frac{BP}{CR}$ дава искания резултат.

Задача 3. Нека $n \geq 5$ е естествено число. Да се намери най-малкото естествено число m (в зависимост от n), за което съществуват множества A и B от цели числа, изпълняващи следните условия:

1. $|A| = n$, $|B| = m$ и $A \subseteq B$
2. За всеки две различни $x, y \in B$ имаме $x + y \in B$ тогава и само тогава, когато $x, y \in A$

Отговор. $3n - 3$

Решение. Първо, нека $N \geq 2n$ е естествено число и да изберем

$$A = \{N + 1, N + 2, \dots, N + n\},$$

$$B = A \cup \{2N + 3, 2N + 4, \dots, 2N + 2n - 1\}.$$

Ясно е, че A и B изпълняват 1. За всеки $x, y \in A$, $x \neq y$, понеже $2N + 3 \leq x + y \leq 2N + 2n - 1$, имаме $x + y \in B$. От друга страна, за всеки $x, y \in B$, $x \neq y$, като поне едно от двете не принадлежи на A , имаме $x + y \geq 3N > 2N + 2n - 1$, откъдето $x + y \notin B$. Следователно A и B изпълняват и 2. Така показахме съществуването на множества A и B с исканите свойства и $m = 3n - 3$.

Сега ще докажем, че $|B| \geq 3n - 3$. Без ограничение нека считаме, че броят на положителните елементи на A е поне колкото броя отрицателни (иначе разглеждаме $-A$ и $-B$, при които дадените условия се запазват).

Нека $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ са елементите на A . Понеже $n \geq 5$, A има поне 2 положителни елемента, т.е. $a_{n-1} > 0$. Тогава $a_{n-1} + a_n > a_n$, така $a_{n-1} + a_n \in B \setminus A$ и значи $|B| \geq n + 1$. Да допуснем, че $0 \in A$. Тогава за $x \in B \setminus A$ следва че $0 + x = x \in B$. Но $0 \in A$ и $x \in A$, което противоречи на 2. Следователно $0 \notin A$ и значи A има поне три положителни елемента, т.е. $a_{n-2} > 0$. Получаваме $a_n + a_{n-2} > a_n$ и $a_n + a_{n-2} \notin A$. Имаме следните следствия:

(1) За всяко i , $1 \leq i < n$ е изпълнено: $a_n + a_i \in B \setminus A$.

Да допуснем противното, т.е. $a_n + a_i \in A$ за някое i – тогава $a_n + a_i = a_j$ за някое j и $a_i < a_j < a_n$. Ако $j = n - 1$, то

$$(a_i + a_n) + a_{n-2} = a_{n-1} + a_{n-2} \in B.$$

Но $a_i \in A$ и $a_n + a_{n-2} \in B \setminus A$, което противоречи на 2. Ако $j < n - 1$, то

$$(a_i + a_n) + a_{n-1} = a_j + a_{n-1} \in B.$$

Но $a_i \in A$ и $a_n + a_{n-1} \in B \setminus A$, което отново противоречи на 2. С това доказахме (1).

(2) За всяко i , $2 \leq i < n$ е изпълнено $a_1 + a_i \in B \setminus A$. Да допуснем противното, т.е. $a_1 + a_i = a_j$ за някое j . Тогава за $j \neq n$ получаваме

$$(a_1 + a_i) + a_n = a_j + a_n \in B$$

докато $a_1 \in A$, $a_1 + a_n \in B \setminus A$, противоречие с 2. Следователно имаме $a_1 + a_i = a_n$. Тъй като $n \geq 5$, имаме $k \in \mathbb{N}$ с $1 < k < n$ и $k \neq i$, за което $a_i + a_k > a_1 + a_k = a_n$, т.е. $a_i + a_k \in B \setminus A$. Но от

$$(a_1 + a_i) + a_k = a_n + a_k \in B$$

и $a_1 \in A$, $a_i + a_k \in B \setminus A$ пак получаваме противоречие с 2. С това доказахме и (2).

Накрая, от (1) и (2) заключаваме, че следните $2n - 3$ различни числа

$$a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \dots < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \dots < a_{n-1} + a_n$$

принадлежат на $B \setminus A$ и следователно $|B| \geq 3n - 3$, както се искаше.

Задача 4. Да се намерят всички цели числа k , за които съществуват безбройно много естествени числа n , такива че $n + k$ не дели $\binom{2n}{n}$.

Отговор. $k \neq 1$

Решение. Първо ще отбележим, че числото $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (n -тото число на Каталан) е цяло, така че $k = 1$ не е решение. Нека $k \neq 1$.

При $k > 1$ нека p е прост делител на k . Да изберем $n = p^m - k > 0$ за достатъчно голямо m – ясно е, че има безбройно много такива. Достатъчно е да докажем, че $p^m \nmid \binom{2n}{n}$. Имаме

$$\begin{aligned}
\nu_p\left(\binom{2n}{n}\right) &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2n}{p^l} \right\rfloor - 2 \sum_{l=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor \\
&= \sum_{l=1}^m \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^l} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^l} \right\rfloor \right) \quad (\text{понеже } \left\lfloor \frac{2n}{p^l} \right\rfloor = 0 \text{ за } l \geq m+1) \\
&= \sum_{l=1}^m \left(\left(2p^{m-l} + \left\lfloor \frac{-2k}{p^l} \right\rfloor \right) - 2 \left(p^{m-l} + \left\lfloor \frac{-k}{p^l} \right\rfloor \right) \right) \\
&= \left\lfloor \frac{-2k}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{-k}{p} \right\rfloor + \sum_{l=2}^m \left(\left\lfloor \frac{-2k}{p^l} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{-k}{p^l} \right\rfloor \right) \\
&\leq \left\lfloor \frac{-2k}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{-k}{p} \right\rfloor + \sum_{l=2}^m 1 \quad (\text{понеже } \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1) \\
&\leq m - 1 \\
&< m
\end{aligned}$$

и следователно $p^m \nmid \binom{2n}{n}$.

При $k \leq 0$ да изберем нечетно просто число $p > 2|k|$ и $n = p + |k|$. Имаме безбройно много такива n , понеже простите числа са безбройно много. Явно p дели $n + k$. Но от $k \leq 0$ и $p > 2|k|$ имаме $0 < n + k < 2(n + k) \leq 2n$ и $3(n + k) > 2n$ така че числителя и знаменателя на

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n \cdot (2n-1) \dots (n+1)}{n \cdot (n-1) \dots 1}$$

съдържат p точно на първа степен (в $2(n+k)$ и $n+k$, съответно). Следователно $p \nmid \binom{2n}{n}$ в този случай.

Задача 5. В клас от 30 ученици всеки има най-много петима приятели. За всеки петима ученици има поне една двойка, които не са приятели. Да се намери най-голямото естествено число k , за което винаги има k ученици, измежду които няма приятели.

Отговор. $k = 6$

Решение. Да разгледаме граф, при който учениците са върховете и всеки два върха са свързани с ребро, точно когато съответните ученици са приятели. Условието изисква графът да не съдържа пълния граф K_5 , както и всеки връх да бъде от степен най-много 5 (откъдето следва, че броят на ребрата е най-много $\frac{30 \cdot 5}{2} = 75$, а на допълнителният му – най-малко $\binom{30}{2} - 75 = 360$). Да допуснем, че съществува граф, изпълняващ горните условия, като допълнителният му не съдържа пълния граф K_6 . От теоремата на Туран този допълнителен граф има най-много

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right) \frac{30^2}{2} = 360$$

ребра. Понеже равенство се достига, единственият такъв възможен е пълният петделен граф $K_{6,6,6,6,6}$. Оттук следва, че исканият граф би съдържал пълния K_6 (дори 5 негови копия), противоречие с условието, че не съдържа K_5 . Следователно $k \geq 6$.

Сега да разгледаме граф G , състоящ се от три независими копия на графа H , който конструираме както следва. Върховете са 10 на брой, номерирани с числата от 0 до 9. Избираме ребрата на H да са от вида $\{i, i+1\}$, $\{i, i+4\}$, $\{i, i+5\}$, $\{i, i+6\}$, $\{i, i+9\}$ (стойностите се взимат $(\text{mod } 10)$) за всяко $0 \leq i \leq 9$. Ясно е, че всеки връх е от степен точно 5. Директно се проверява, че H не съдържа K_5 (а оттук това е вярно и за G) и че в H няма три върха, никои два от които не са с ребро (така в G няма седем върха с това свойство).

Задача 6. Редицата $a_1, a_2, \dots$ от цели неотрицателни числа е такава, че за всеки две естествени m, n

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{in} \leq m.$$

Да се докаже, че съществуват естествени числа k и d , за които

$$\sum_{i=1}^{2k} a_{id} = k - 2014.$$

Решение. В даденото полагаме $m = 1$ – тогава получаваме $0 \leq a_n + a_{2n} \leq 1$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. В частност, следва че $a_n \in \{0, 1\}$ за всяко n и че $a_n = 0$ за безбройно много n .

Сега ще покажем, че $a_n + a_{2n} = 0$ за безбройно много n . Да допуснем, че $a_n + a_{2n} = 1$ за всички n , с изключение на краен брой – тогава за някое $N \in \mathbb{N}$ и всяко $n \geq N$ е изпълнено $a_n + a_{2n} = 1$. Понеже $a_n = 0$ за безбройно много n , да изберем $d > N$ с $a_d = 0$. От една страна, от даденото имаме

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{id} + \sum_{i=1}^{2m} a_{2id} \leq m + m = 2m$$

От друга страна, понеже $id > N$ за всяко $i > 0$

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{id} + \sum_{i=1}^{2m} a_{2id} = \sum_{i=1}^{2m} (a_{id} + a_{2id}) = \sum_{i=1}^{2m} 1 = 2m$$

равенство се достига, така че

$$\sum_{i=1}^{2m} a_{id} = m \tag{1}$$

за всяко $m \in \mathbb{N}$. В частност

$$a_{rd} + a_{2rd} = 1 \tag{2}$$

за всяко $r \geq 1$. В (2) полагаме $r = 1, 2, 4$ – тогава $a_{2d} = 1 - a_d = 1$, $a_{4d} = 1 - a_{2d} = 0$, $a_{8d} = 1 - a_{4d} = 1$. Сега при $m = 2$ в (1) следва, че $a_{3d} = 1$. Нататък, при $r = 3, 6$ в (2) получаваме $a_{6d} = 1 - a_{3d} = 0$, $a_{12d} = 1 - a_{6d} = 1$. Така $m = 3$ в (1) дава $a_{5d} = 1$, а оттук $a_{10d} = 1 - a_{5d} = 0$. Накрая, от $m = 4, 5$ в (1) следват $a_{7d} = 0$ и $a_{9d} = 1$. Следователно

$$a_{3d} + a_{6d} + a_{9d} + a_{12d} = 1 + 0 + 1 + 1 = 3 > 2$$

което противоречи на даденото неравенство за $n = 3d$ и $m = 2$. С това заключаваме, че $a_n + a_{2n} = 0$ за безбройно много n .

Нека сега $t \in \mathbb{N}$ е такова, че съществуват поне 4028 естествени числа $n \leq t$, за които $a_n + a_{2n} = 0$. Тогава

$$\sum_{i=1}^t (a_i + a_{2i}) \leq t - 4028$$

и поне едно от $\sum_{i=1}^t a_i \leq \frac{t}{2} - 2014$ и $\sum_{i=1}^t a_{2i} \leq \frac{t}{2} - 2014$ е изпълнено. И в двата случая съществуват t и d ($d = 1$ или 2), като

$$\sum_{i=1}^t a_{id} \leq \frac{t}{2} - 2014.$$

Нека $b_s = \sum_{i=1}^s a_{id} - \frac{s}{2}$, $s = 1, 2, \dots, t$. Тогава $b_1 = a_d - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$ и $b_t \leq -2014$. Нека l е най-малкото естествено число, за което $b_l \leq -2014$ – тогава $b_{l-1} \geq -2014 + \frac{1}{2}$. Тъй като $b_l - b_{l-1} = a_{ld} - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$, имаме $b_l \geq b_{l-1} - \frac{1}{2} \geq -2014$, т.е.

$$\sum_{i=1}^l a_{id} = \frac{l}{2} - 2014.$$

Лявата страна е цяло число, следователно l е четно, $l = 2k$. Окончателно получаваме

$$\sum_{i=1}^{2k} a_{id} = k - 2014$$

както се искаше.

Китай 2016

Задача 1. Естествените числа $a_i, b_i, 1 \leq i \leq 31$, са такива, че $a_1 < a_2 < \dots < a_{31} \leq 2015, b_1 < b_2 < \dots < b_{31} \leq 2015$ и $\sum_{i=1}^{31} a_i = \sum_{i=1}^{31} b_i$.
Да се намери най-голямата възможна стойност на

$$S = \sum_{i=1}^{31} |a_i - b_i|.$$

Отговор. 30720

Решение. Множествата $\{a_1, a_2, \dots, a_{31}\} = \{1, 2, \dots, 16, 2001, 2002, \dots, 2015\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_{31}\} = \{961, 962, \dots, 991\}$ изпълняват дадените условия и дават $S = 30720$.

Нека сега a_i и $b_i, 1 \leq i \leq 31$, изпълняват дадените условия. Подреждаме двойките (a_i, b_i) в нова редица $(a_{\sigma(i)}, b_{\sigma(i)})$ съгласно стойностите $a_i - b_i$ в ненамаляващ ред. Нека също $d_i, 1 \leq i \leq 31$, е растяща аритметична прогресия с разлика 1 и $c_i, 1 \leq i \leq 31$, изпълняват $c_i - d_i = a_{\sigma(i)} - b_{\sigma(i)}$. Ясно е, че $c_1 < c_2 < \dots < c_{31}$ и $d_1 < d_2 < \dots < d_{31}$.

Нататък, от даденото условие за равни суми получаваме

$$\sum_{a_i > b_i} (a_i - b_i) = \sum_{a_i > b_i} (a_i - b_i) - \sum a_i + \sum b_i = \sum_{a_i \leq b_i} (b_i - a_i)$$

и разглежданата сума се преобразува до

$$S = \sum_{a_i > b_i} (a_i - b_i) + \sum_{a_i \leq b_i} (b_i - a_i) = \sum_{c_i > d_i} (c_i - d_i) + \sum_{c_i \leq d_i} (d_i - c_i).$$

Двете суми в последното представяне са равни, така че събирането на $(2-\lambda)$ по първата сума и λ по втората пак ще даде S . Да изберем $\lambda = \frac{2(31-k)}{31}$. Тогава

$$S = \frac{2k}{31} \sum_{k < i \leq 31} (c_i - d_i) + \frac{2(31-k)}{31} \sum_{1 \leq i \leq k} (d_i - c_i)$$

или

$$S = \frac{2}{31} \left(\sum_{k < i \leq 31} \sum_{j \leq k} ((d_j - c_j) + (c_i - d_i)) \right).$$

От дефинициите за c_i и d_i и даденото получаваме $c_i \leq 2015 - 31 + i$, $c_j \geq j$ и $d_j - d_i = j - i$. Следователно

$$\begin{aligned} S &\leq \frac{2}{31} \left(\sum_{k < i \leq 31} \sum_{j \leq k} (j - i + 2015 - 31 + i - j) \right) \\ &= \frac{2}{31} \sum_{k < i \leq 31} \sum_{j \leq k} 1984 = 128k(31 - k) \\ &\leq 30720 \end{aligned}$$

(последното е еквивалентно на $(k - 15)(k - 16) \geq 0$, което е вярно). Окончателно, най-голямата възможна стойност на S е 30720.

Задача 2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Точките K , L , M и N лежат на страните AB , BC , CD и DA , съответно, и са такива, че

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AD}{BC}, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{CM}{MD} = \frac{BC}{AD}, \quad \frac{DN}{NA} = \frac{CD}{AB}$$

Лъчите AB и DC се пресичат в точка E , а лъчите AD и BC – в точка F . Вписаната в $\triangle AEF$ окръжност допира страните AE и AF съответно в точките S и T , а вписаната в $\triangle CEF$ окръжност допира страните CE и CF в точките U и V , съответно.

Ако точките K , L , M и N лежат на една окръжност, да се докаже, че точките S , T , U и V лежат на една окръжност.

Решение. Да положим $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. От даденото получаваме

$$\begin{aligned} AK &= \frac{ad}{b+d}, & BK &= \frac{ab}{b+d}, & BL &= \frac{ab}{a+c}, & CL &= \frac{bc}{a+c}, \\ CM &= \frac{bc}{b+d}, & DM &= \frac{cd}{b+d}, & DN &= \frac{cd}{a+c}, & AN &= \frac{ad}{a+c}. \end{aligned}$$

Да допуснем, че $a + c > b + d$. Тогава $AK > AN$ и $\sphericalangle AKN < \sphericalangle KNA$. Аналогично имаме

$$\sphericalangle BKL < \sphericalangle KLB, \quad \sphericalangle CML < \sphericalangle MLC, \quad \sphericalangle DMN < \sphericalangle MND$$

откъдето се получава, че

$$360^\circ - \sphericalangle AKN - \sphericalangle BKL - \sphericalangle CML - \sphericalangle DMN > 360^\circ - \sphericalangle KNA - \sphericalangle KLB - \sphericalangle MLC - \sphericalangle MND,$$

т.е. $\sphericalangle NML + \sphericalangle NKL > \sphericalangle MNK + \sphericalangle MLK$, което противоречи на вписаността на $KLMN$. Следователно $a + c \leq b + d$. Аналогично се доказва, че $a + c \geq b + d$ и значи $a + c = b + d$, което означава, че в $ABCD$ може да се впише окръжност ω .

Нека допирните точки на ω със страните AB , BC , CD и DA са W , X , Y и Z , съответно. Имаме

$$AE - AF = WE - ZF = EY - FX = EC - CF$$

Нека вписаните окръжности на $\triangle AEF$ и $\triangle CEF$ допират EF съответно в точките G и H . Тогава

$$\begin{aligned} 2(FG - FH) &= (EF + AF - AE) - (EF + CF - CE) \\ &= (AF - AE) - (CF - CE) = 0, \end{aligned}$$

т.е. $G \equiv H$. Тъй като $ES = EG = EU$ и $FT = FG = FV$, имаме

$$\begin{aligned} \sphericalangle EUS &= \frac{180^\circ - \sphericalangle UES}{2} = \frac{\sphericalangle BAC + \sphericalangle ADC}{2} \\ \sphericalangle FTV &= \frac{180^\circ - \sphericalangle TFV}{2} = \frac{\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABC}{2} \end{aligned}$$

Отчитайки $\sphericalangle ATS = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BAC)$ и $\sphericalangle CUV = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BCD)$, получаваме

$$\begin{aligned} \sphericalangle VTS + \sphericalangle VUS &= (180^\circ - \sphericalangle FTV - \sphericalangle ATS) + (\sphericalangle CUV + 180^\circ - \sphericalangle EUS) \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

и окончателно S , T , U и V лежат на една окръжност.

Задача 3. Нека p е нечетно просто число и $a_1, a_2, \dots, a_p$ са цели числа. Да се докаже, че следните две твърдения са еквивалентни:

1. Съществува полином $f(x)$ с цели коефициенти от степен най-много $\frac{p-1}{2}$, такъв че $f(i) \equiv a_i \pmod{p}$ за всяко естествено $1 \leq i \leq p$.
2. За всяко естествено число $d \leq \frac{p-1}{2}$ е изпълнено

$$\sum_{i=1}^p (a_{i+d} - a_i)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

където индексирването се извършва по модул p .

Решение. Ще използваме следните резултати:

(1) *Крайната разлика* на f се дефинира като $\Delta f = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, а тези от по-висок ред се дефинират рекурсивно както следва:

$$\Delta^0 f = f, \quad \Delta^1 f = \Delta f, \quad \Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f), \quad n = 2, 3, \dots$$

Ако $\deg f \geq 1$, то $\deg(\Delta f) = \deg f - 1$ и старшият коефициент на Δf е произведението от този на f и степента на f . Ако $\deg f = 0$, то $\Delta f \equiv 0$.

(2) За всяко естествено число n имаме

$$f(x+n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i f(x)$$

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f(x+n-i)$$

(и двете могат да се проверят директно с индукция по n).

(3) За всяко $d \in \mathbb{Z}$ нека

$$T_d = \sum_{x=1}^p (f(x+d) - f(x))^2$$

Явно $T_0 = 0$ и $T_{p-d} \equiv T_d \equiv T_{p+d} \pmod{p}$. Също така, за всяко $i > 0$ нека

$$S_i = \sum_{x=1}^p \Delta^i f(x) \cdot f(x)$$

Ще покажем, че T_d може да се представи като линейна комбинация на

$S_1, S_2, \dots$ по модул p . Наистина, за $d > 0$

$$\begin{aligned}
T_d &= \sum_{x=1}^p f^2(x+d) + \sum_{x=1}^p f^2(x) - 2 \sum_{x=1}^p f(x+d)f(x) \\
&\equiv 2 \sum_{x=1}^p f^2(x) - 2 \sum_{i=1}^p f(x+d)f(x) \\
&= -2 \sum_{x=1}^p (f(x+d) - f(x)) \cdot f(x) \\
&= -2 \sum_{x=1}^p \left(\sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \Delta^i f(x) - f(x) \right) \cdot f(x) \\
&= -2 \sum_{x=1}^p \sum_{i=1}^d \binom{d}{i} \Delta^i f(x) \cdot f(x) \\
&= -2 \sum_{i=1}^d \binom{d}{i} S_i \pmod{p}
\end{aligned}$$

(4) Сумата $\sum_{x=1}^p x^k$ се дели на p за $0 \leq k \leq p-2$ и дава остатък -1 при деление на p при $k = p-1$ (първата част се доказва чрез разглеждане на примитивен корен, а втората – чрез теоремата на Ферма).

(5) Нека $g(x) = \sum_{i=0}^{p-1} B_i x^i$ е полином с цели коефициенти. От (4) следва, че

$$\sum_{x=1}^p g(x) \equiv -B_{p-1} \pmod{p}$$

В частност, $\sum_{x=1}^p g(x) \equiv 0 \pmod{p}$ при $\deg g \leq p-2$.

Сега се връщаме към главната задача. Първо да приемем, че 1. е вярно и нека $f(x)$ е полином, удовлетворяващ това условие. Ако $f \equiv \text{const}$, то $T_d = 0$ за всяко d . Нека сега $1 \leq \deg f \leq \frac{p-1}{2}$. Понеже

$$\deg(\Delta^i f \cdot f) \leq 2 \deg f - 1 \leq p-2,$$

от (5) следва, че

$$S_i = \sum_{x=1}^p \Delta^i f(x) \cdot f(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

откъдето (3) дава $T_d \equiv 0 \pmod{p}$ за всяко $d \leq \frac{p-1}{2}$. Следователно 2. е изпълнено.

Обратно, нека 2. е изпълнено. За всяко $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ да изберем цяло число λ_i , удовлетворяващо

$$\lambda_i \cdot \prod_{1 \leq j \leq p, j \neq i} (i - j) \equiv 1 \pmod{p},$$

и да разгледаме полинома

$$f(x) \equiv \sum_{i=1}^p \left(a_i \lambda_i \prod_{1 \leq j \leq p, j \neq i} (x - j) \right) \pmod{p}$$

като старшият му коефициент не се дели на p , освен ако $f \equiv 0$. Ясно е, че f е с цели коефициенти и степен най-много $p-1$, както и че $f(i) \equiv a_i \pmod{p}$ за всяко $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Ако $f \equiv 0, 1$. е доказано. В противен случай нека

$$f(x) = \sum_{i=0}^m B_i x^i \pmod{p}$$

с $B_m \equiv 0 \pmod{p}$. Трябва да покажем, че $m \leq \frac{p-1}{2}$. Да допуснем противното – тогава

$$T_d = \sum_{x=1}^p (f(x+d) - f(x))^2 \equiv \sum_{i=1}^p (a_{i+d} - a_i)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

за $d = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$. Всъщност, горното сравнение е изпълнено за всички естествени числа d , понеже $T_{p-d} \equiv T_d \equiv T_{p+d} \pmod{p}$. Сега от (3) по индукция получаваме, че $S_i \equiv 0 \pmod{p}$ за всяко $i \geq 1$.

От друга страна, нека $k = 2m - (p-1)$, тогава $0 < k \leq m$. От (1) знаем, че $\deg(\Delta^k f) = m - k$ със старши коефициент $B_m \prod_{i=m-k+1}^m i$. Следователно $\deg(\Delta^k f \cdot f) = (m - k) + m = p - 1$, със старши коефициент $B_m^2 \prod_{i=m-k+1}^m i$. От (5) следва, че

$$S_k = \sum_{x=1}^p \Delta^k f(x) \cdot f(x) \equiv -B_m^2 \prod_{i=m-k+1}^m i \not\equiv 0 \pmod{p}$$

което противоречи с факта, че $S_i \equiv 0 \pmod{p}$ за всяко $i \geq 1$ и с допускането, че $m > \frac{p-1}{2}$. Окончателно $\deg f = m \leq \frac{p-1}{2}$ и 1. е изпълнено.

Задача 4. Нека $n \geq 3$ е естествено число и k е броят на простите числа, ненадминаващи n . Множеството $A \subseteq S = \{2, 3, \dots, n\}$ има по-малко от k елемента и не съдържа два, такива че единият дели другия. Да се докаже, че съществува k -елементно множество B , такова че $A \subseteq B \subseteq S$ и B не съдържа два елемента, такива че единият дели другия.

Решение. За естествено число $m > 1$ с канонично разлагане $m = \prod_{i=1}^l p_i^{\alpha_i}$ дефинираме

$$f(m) = \max\{p_1^{\alpha_1}, \dots, p_l^{\alpha_l}\}$$

Понеже $|A| < k$, съществува просто $p \leq n$, такова че p не дели никое $f(a)$, $a \in A$. Да положим $\alpha = \lfloor \log_p n \rfloor$. Ще покажем, че $a \nmid p^\alpha$ и $p^\alpha \nmid a$ за всяко $a \in A$.

Ако $a \mid p^\alpha$, то $p \mid f(a) = a$, противоречие с избора на p . Така $a \nmid p^\alpha$.

Ако $p^\alpha \mid a$, то $f(a) = q^\beta$, където $q \neq p$ е просто число (понеже $p \nmid f(a)$). Получаваме $q^\beta > p^\alpha \geq p$, откъдето

$$f(a) \geq q^\beta p^\alpha \geq p \cdot p^\alpha = p^{\alpha+1} > n$$

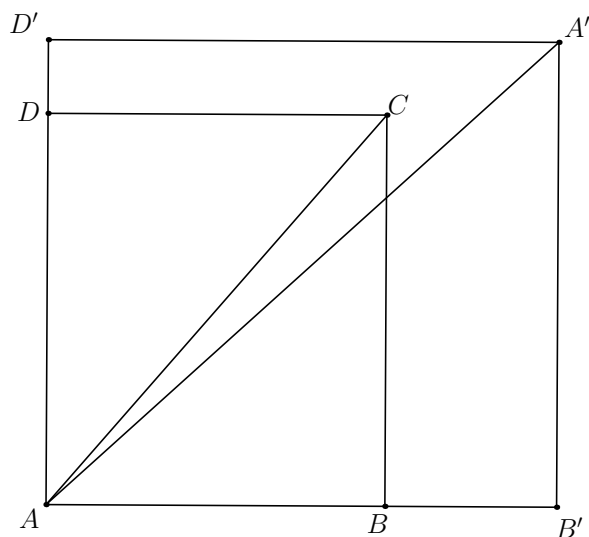
противоречие. Оттук $p^\alpha \nmid a$.

В частност, имаме $p^\alpha \notin A$. Тогава обединението на елемента p^α и A изпълнява условието, че никой елемент не дели друг. Повтаряме този процес, докато получим k -елементно подмножество на S , удовлетворяващо исканите свойства.

Задача 5. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Да се докаже, че съществува квадрат $A'B'C'D'$ (върховете могат да бъдат наредени по или обратно на посоката на часовниковата стрелка), такъв че $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $D \neq D'$ и правите AA' , BB' , CC' и DD' се пресичат в една точка.

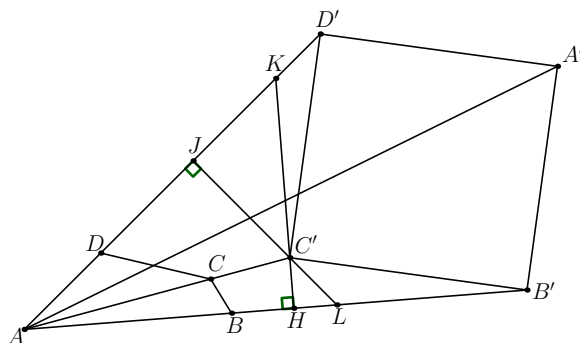
Решение. Разглеждаме два случая:

1. $ABCD$ е правоъгълник



Избираме точка A' от ъглополовящата на $\sphericalangle BAD$, такава че ортогоналните ѝ проекции $B' \in AB$ и $D' \in AD$ са различни от B и D съответно. Тогава при избор $C' \equiv A$ имаме квадрата $A'B'C'D'$ и правите AA' , BB' , CC' и DD' минават през A .

2. $ABCD$ не е правоъгълник.



Без ограничение на общността нека $\sphericalangle BAD$ е остър. Нека точката C' от продължението на AC е такава, че проекциите ѝ $H \in AB$ и $J \in AD$ за външни за AB и AD , съответно. Понеже $\sphericalangle BAD$ е остър, правата HC' пресича продължението на AJ (в точка K) и правата JC' пресича

продължението на AH (в точка L). Избираме B' и D' от продълженията на AL и AK , като $LB' = KC'$ и $KD' = LC'$. Да забележим, че $\sphericalangle B'LC' = 90^\circ + \sphericalangle LAK = \sphericalangle C'KD'$, откъдето $\triangle B'LC' \cong \triangle C'KD'$. Оттук $B'C' = C'D'$ и

$$\begin{aligned}\sphericalangle B'C'D' &= 180^\circ - \sphericalangle KC'D' - \sphericalangle B'C'H \\ &= 180^\circ - \sphericalangle LB'C' - (90^\circ - \sphericalangle LB'C') \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

Накрая, избираме A' да е четвъртият връх на квадрата $A'B'C'D'$ (A' лежи извън $AHCK$). Отново правите AA' , BB' , CC' и DD' минават през точката A , с което доказателството е завършено.

Задача 6. Даден е турнир със 100 играча. Всеки двама играчи x и y играят по веднъж, като равенства няма. Ако x побеждава y , ще означаваме $x \rightarrow y$. Турнирът се нарича *приятелски*, ако за всеки двама (различни) играчи x и y съществува редица от играчи $u_1, u_2, \dots, u_k$ ($k \geq 2$), като $x = u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k = y$.

а) Да се докаже, че за всеки приятелски турнир съществува естествено число m , такова че за всяка двойка играчи x, y съществува редица $z_1, z_2, \dots, z_m$ с дължина m (играчите могат да се повтарят в тази редица), такова че $x = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_m = y$.

б) За приятелски турнир T , нека $m(T)$ е минималната стойност на m (дефинирано както в а)). Да се намери най-малката възможна стойност на $m(T)$ (спрямо всички приятелски турнири).

Решение. а) Условието показва, че разглеждаме силно свързаните пълни ориентирани графи (турнири) със 100 върха. Ще използваме следните лема:

Лема 1. Във всеки силно свързан турнир с $n \geq 3$ върха съществува ориентиран цикъл с дължина n .

Лема 2. Във всеки силно свързан турнир с $n \geq 4$ върха съществува ориентиран цикъл с дължина $n - 1$.

Лема 3. (Фробениус) Ако a и b са взаимнопрости естествени числа, то всяко естествено число $m \geq ab - a - b + 1$ може да се представи като $m = ax + by$ за някакви неотрицателни x, y .

И трите лема са известни резултати, затова ги оставяме за упражнение на читателя.

За силно свързан турнир с $n \geq 4$ върха ще покажем, че $m = n^2$ работи. Съгласно първите две лема, съществуват ориентирани цикли C_1 и C_2 с дължини n и $n - 1$, съответно. Нека x, y са два произволни върха и да фиксираме път P от x до y с $s \leq n - 1$ ребра. Понеже $m - s - 1 \geq n^2 - n = n(n - 1)$, третата лема дава съществуването на цели неотрицателни a и b , за които $ma + (n - 1)b = m - s - 1$.

Ако y принадлежи на C_2 , започваме от x , изминаваме a ребра в C_1 , след това изминаваме пътя P и накрая b ребра в C_2 . Това дава път от x до y с $an + b(n - 1) + s = m - 1$ ребра и значи този път е с m върха.

Ако x принадлежи на C_2 , започваме от x , изминаваме b ребра в C_2 , след това a ребра в C_1 и накрая s ребра в P . Това дава път от x до y с $an + b(n - 1) + s = m - 1$ ребра и значи този път е с m върха.

б) Първо ще отбележим, че ако x и y са два върха с $x \rightarrow y$, то всеки ориентиран път от y до x съдържа поне 3 върха, т.е. $m(T) \geq 3$. Сега ще конструираме силно свързан турнир T_0 с $m(T_0) = 3$.

Нека върховете са $v_1, v_2, \dots, v_{100}$ и

$$A = \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq 49, i \neq 3\} \cup \{97\}$$

Лесно се проверява, че

$$A + A = \{a + b : a, b \in A\} = \{2, 3, \dots, 98\} \cup \{101, 102, \dots, 146\}$$

Множеството A има следните две свойства:

1. За всяко $i = 1, 2, \dots, 49$ точно едно от i и $100 - i$ принадлежи на A
2. За всяко цяло $k \not\equiv 0 \pmod{100}$ съществуват $a, b \in A$, такива че $a + b \equiv k \pmod{100}$.

Нека ребрата на T_0 са както следва: $v_k \rightarrow v_{k+50}$ за $k = 1, 2, \dots, 50$. За $1 \leq i, j \leq 100$ с $i - j \not\equiv 0, 50 \pmod{100}$ избираме $v_i \rightarrow v_j$ ако $j - i \equiv a \pmod{100}$ за някое $a \in A$. Съгласно първото свойство, точно едно от $v_i \rightarrow v_j$ и $v_j \rightarrow v_i$ е изпълнено, т.е. графът е добре дефиниран. За всеки два върха $v_i, v_j, i \neq j$, съществуват $a, b \in A$, такива че $a + b \equiv j - i \pmod{100}$ (съгласно второто свойство) – тогава имаме пътя $v_i \rightarrow v_{i+a} \rightarrow v_{i+a+b} = v_j$ (индексирането се извършва по модул 100). Така $m(T_0) = 3$.

Окончателно $\min m(T) = 3$.

Русия 2015

Задача 9.1. Реалните числа a и b са такива, че квадратните тричлени $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имат по два различни реални корена, а произведението на тези два тричлена има точно три реални корена. Намерете всички възможни стойности на сумата на тези три корена.

Решение. Отговор – 0. От условието следва, че двата тричлена имат точно един общ корен x_0 – в частност, $a \neq b$. Тогава

$$0 = (x_0^2 + ax_0 + b) - (x_0^2 + bx_0 + a) = (a - b)(x_0 - 1)$$

и следователно $x_0 = 1$. Оттук $1 + a + b = 0$. Ако x_1 е другият корен на $x^2 + ax + b$, а x_2 – на $x^2 + bx + a$, то от формулите на Виет имаме $x_0 + x_1 = -a$, $x_0 + x_2 = -b$. Следователно $x_0 + x_1 + x_2 = 1 + (-a - 1) + (-b - 1) = 0$.

Задача 9.2. Успоредникът $ABCD$ е такъв, че $\angle ABC < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точките E и F са избрани от описаната около $\triangle ABC$ окръжност ω така, че допирателните към ω в тези точки минават през върха D . Оказало се, че $\angle EDA = \angle FDC$. Да се намери $\angle ABC$.

Решение. Отговор – 60° . Нека l е ъглополовящата на $\angle EDF$. Понеже DE и DF са допирателни към ω , правата l минава през центъра O на ω .

Да разгледаме симетрията относно l . Понеже $\angle EDA = \angle FDC$, лъчът DC се изобразява в лъчът DA . Тъй като l минава през O , окръжността ω се изобразява в себе си. Следователно образът C' на C лежи както на DA , така и на ω . Също, от $AD \neq DC$ следва, че точките C' и A са различни.

Получаваме $\angle DC'C = \angle DCC'$. Понеже точките A, B, C и C' лежат на ω , имаме $\angle DC'C = \angle ABC = \angle ADC$. Следователно $\triangle DCC'$ е равнобедрен и $\angle ABC = \angle CDC' = 60^\circ$.

Задача 9.3 Естествените числа a, x и y са по-големи от 100 и $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Да се намери най-малката възможна стойност на $\frac{a}{x}$.

Решение. Отговор – 2. Да допуснем, че $a < 2x$. Тогава

$$y^2 = a^2(x^2 - 1) + 1 > a^2x^2 - 2ax + 1 = (ax - 1)^2$$

откъдето $y > ax - 1$. От друга страна, от $a > 1$ имаме

$$y^2 = a^2x^2 - a^2 + 1 < a^2x^2$$

и следователно $y < ax$. Така y се намира между две последователни естествени числа, противоречие.

За $\frac{a}{x} = 2$ е достатъчно да изберем $x = 101$, $a = 2x$ и $y = 2x^2 - 1$.

Задача 9.4 Във волейболен турнир участвали 110 волейболни отбора, като всеки изиграл с всеки от останалите по една среща (във волейбола няма равни мачове). Оказало се, че във всяка група от 55 отбора има поне един, който е загубил от не повече от четири от останалите 54 отбора от тази група. Да се докаже, че в този турнир има отбор, който е загубил от не повече от четири от останалите 109 отбора.

Решение. Първо ще докажем следната:

Лема. Дадено е естествено число $k \geq 55$. Ако във всяка група от k отбора има един, който е загубил от не повече от 4 от останалите $k - 1$ отбора, то във всяка група от $k + 1$ отбора има един, който е загубил от не повече от 4 от останалите k отбора.

Да допуснем обратното – тогава съществува множество от отбори $M = \{C_1, C_2, \dots, C_{k+1}\}$, такова че всеки отбор C_i е загубил от поне 5 от отборите в $M \setminus \{C_i\}$. От условието на лемата съществува отбор C_j , който е загубил от не повече от 4 отбора в $M \setminus \{C_i\}$, т.е. C_j е загубил от точно 5 отбора, като C_i е измежду тези. Сега ако $j(i)$ е минималния възможен индекс j за C_i , то изображението $f : M \rightarrow M$, $f(C_i) = C_{j(i)}$ е добре дефинирано. Имаме $s = |f(M)| \geq \lceil \frac{k+1}{5} \rceil \geq 12$.

От друга страна, от принципа на Дирихле следва, че поне един от отборите от $f(M)$ е загубил от поне $\frac{\binom{s}{2}}{s} = \frac{s-1}{2} > 5$ отбора, което противоречи на това, че всеки от отборите в $f(M)$ е загубил от точно 5 други. С това лемата е доказана.

Сега индуктивно по $k \geq 55$ получаваме, че сред произволни k отбора има един, който е загубил от не повече от 4 от останалите $k - 1$ отбора. Случаят $k = 55$ е верен по условие, а преходът е доказан в лемата. В частност, исканото е вярно и за $k = 110$.

Задача 9.5 Около окръжност са написани 100 цели числа. Всяко от числата е по-голямо от сумата на двете след него по посока на часовниковата стрелка. Да се намери максималния възможен брой положителни числа.

Решение. Отговор. 49. Да допуснем, че две неотрицателни числа, от

записаните около окръжността, стоят едно до друго. Тогава числото стоящо пред тях, което е по-голямо от сумата им е положително, това важи за предходното и т.н. Така получаваме, че стотите числа са неотрицателни. Избираме най-малкото между тях и то не може да е по-голямо от сумата на двете числа, които го следват по посока на часовниковата стрелка. Противоречие.

Така получихме, че сред всеки две последователни числа поне едното е отрицателно. Следователно положителните числа не са повече от 50. Да разгледаме три последователни числа $-a, b, -c$ (тук $a, b, c > 0$). Тогава $-a > b - c > -c$ и значи всяко отрицателно число е строго по-голямо от следващото отрицателно число – това е невъзможно, понеже числата са разположени в кръг.

Следователно положителните числа са не повече от 49, като множеството

$$(-200), 1, (-202), 1, (-204), 1, (-206), 1, \dots, (-296), 1, (-298), (-99)$$

изпълнява условието на задачата.

Задача 9.6 В една от клетките на квадратна таблица 41×41 е замаскиран танк. Изстребител с един изстрел обстрелва една клетка. Ако има попадение, танкът се премества в съседна по страна клетка, а иначе остава на място. След изстрел пилотът не знае дали има попадение или не. За да се унищожи танкът трябва да попаднат два изстрела в него. Какъв най-малък брой изстрели трябва да произведе изстребителят, за да е гарантирано унищожаването на танка?

Решение. Отговор – $\frac{3 \cdot 41^2 - 1}{2} = 2521$. Да оцветим шахматно дъската така, че четирите полета в ъглите да са черни. Нека пилотът в началото да стреля по всички бели полета, след това по всички черни полета и след това отново по всички бели полета. Ако танкът е на бяло поле, той ще бъде обстрелван и при първата и при втората серия. Ако пилотът е на черно поле ще бъде обстрелван при втората и третата серия. При тази схема пилотът е стрелял общо $41^2 + \frac{41^2 - 1}{2} = \frac{3 \cdot 41^2 - 1}{2}$ пъти.

Сега да разгледаме последователност от изстрели, след които танкът е улучен два пъти. Ясно е, че по всяка клетка трябва да се стреля поне веднъж. Допускаме, че има две съседни клетки A и B , в които летецът е стрелял точно по веднъж, но първо е стрелял в A , а после в B . Ако танкът

е бил в В и след изстрела е преминал в А, то той няма да бъде унищожен, ако няма второ попадение в клетка А. Следователно две такива съседни клетки не съществуват.

Покриваме дъската с $\frac{41^2-1}{2}$ домина 1×2 и една клетка 1×1 . Във всяко домино самолетът трябва да стреля поне 3 пъти, а в самостоятелната клетка поне веднъж. Следователно броят изстрели е поне $3 \cdot \frac{41^2-1}{2} + 1 = \frac{3 \cdot 41^2 - 1}{2}$.

Задача 9.7 Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ ($AC > BC$), вписан в окръжност k . Точката G е медицентърът на $\triangle ABC$, а CH_c е височината му през върха C . Лъчът GH_c пресича k в точката C' . Да се докаже, че описаната около $\triangle C'H_cB$ окръжност се допира до правата BC .

Решение. Нека правата GH_c пресича k за втори път в точката D и да означим с M_c средата на AB . Известно е, че хомотетията с център G и коефициент $-\frac{1}{2}$ изпраща k в окръжността на Ойлер за $\triangle ABC$, на която лежат M_c и H_c . Следователно при тази хомотетия отсечката CD се изобразява в M_cH_c . Оттук $AB \parallel CD$ и $ABCD$ е равнобедрен трапец.

Получаваме $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DAB$, а от окръжността k имаме и $\sphericalangle DC'B = \sphericalangle DAB$. Следователно $\sphericalangle H_cBC = \sphericalangle H_cC'B$ и исканото твърдение следва.

Задача 9.8 На дъската са написани $N \geq 9$ различни неотрицателни числа, по-малки от 1. Оказало се, че за всеки осем различни числа от дъската има девето число, такова че сумата на деветте числа е цяло число. Да се намерят всички N , за които това е възможно.

Решение. Отговор – 9. За $N = 9$ е достатъчно да изберем кои да е 9 различни неотрицателни числа със сума 1. Ще докажем, че исканото е невъзможно при $N > 9$. Да допуснем противното и да означим числата с $a_1, a_2, \dots, a_n$, нека също $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $T = a_1 + a_2 + \dots + a_7$.

Първо ще докажем, че за всяко $i > 7$ съществува единствено $j > 7$, такова че $T + a_i + a_j$ е цяло. Съществуването следва от условието. Да допуснем, че за някое i имаме два различни индекса j и k . Тогава

$$1 > |a_k - a_j| = |(T + a_i + a_j) - (T + a_i + a_k)| > 0$$

което е противоречие, понеже $(T + a_i + a_j) - (T + a_i + a_k)$ е цяло число.

Следователно числата с индекси, по-големи от 7, могат да се разделят на двойки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, като $T + x_i + y_i$ са цели. Имаме $N = 7 + 2m$ и $m > 1$.

Да разгледаме сумата $P = \sum_{i=1}^m (T + x_i + y_i) = T(m-1) + S$. Тази сума е цяло число и $T = \frac{P-S}{m-1}$. Аналогично за $T' = a_2 + a_3 + \dots + a_8$ получаваме $T' = \frac{P'-S}{m-1}$ за някое цяло P' . Следователно

$$a_1 - a_8 = T - T' = \frac{P - P'}{m-1}$$

Понеже a_1 и a_8 могат да са кои да е две числа на дъската, получаваме че разликата на всеки две цели числа е от вида $\frac{k}{m-1}$ за някакво цяло k . Сега ако t е най-малкото число на дъската, то възможните числа на нея са $t + \frac{k}{m-1}$ за $0 \leq k \leq m-2$. Следователно $7 + 2m = N < m$, противоречие.

Задача 10.1. Ще наричаме естествено число *почти квадрат*, ако то е равно на произведението на две последователни естествени числа. Да се докаже, че всеки почти квадрат може да се представи като частно на два почти квадрата.

Решение. За всяко естествено число n е изпълнено

$$n(n+1) = \frac{n(n+2)(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

и твърдението следва.

Задача 10.2. Даден е успоредник $ABCD$, за който $AB < AC < BC$. Точките E и F са избрани от описаната около $\triangle ABC$ окръжност ω така, че допирателните към ω в тези точки минават през върха D и отсечките AD и CE се пресичат. Оказало се, че $\sphericalangle ABF = \sphericalangle DCE$. Да се намери $\sphericalangle ABC$.

Решение. Отговор – 60° . Понеже D е външна за ω , ъгълът $\sphericalangle ABC$ е остър. Нека A' е втората пресечна точка на DC и ω . Понеже $BC > AC$, имаме $\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB > \sphericalangle CBA = \sphericalangle DA'A$ и следователно C е между D и A' . Сега от $180^\circ - \sphericalangle ECA' = \sphericalangle ECD = \sphericalangle ABF$ следва, че дъгите $\widehat{ACF}$ и $\widehat{ECA'}$ са равни.

Нека l е ъглополовящата на $\sphericalangle EDF$. Понеже DE и DF са допирателни към ω , правата l минава през центъра O на ω .

Да разгледаме симетрия относно l . Понеже l минава през O , окръжността ω се изобразява в себе си. От $\widehat{ACF} = \widehat{ECA'}$ следва, че A се изобразява в A' . Оттук $\sphericalangle DAA' = \sphericalangle DA'A$. От друга страна, A' лежи на ω и

значи $\sphericalangle AA'C = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADA'$. Следователно $\triangle DAA'$ е равностранен и $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

Задача 10.3 На състезание по фигурно колоездене има 100 съдии. Всеки съдия подредил участниците (от най-добрия до най-зле представилия се по негово мнение). Оказало се, че за някои трима участници A , B и C няма трима съдии, такива че първият съдия да счита A за най-добър от тримата, а B за най-слаб, вторият съдия да счита B за най-добър от тримата, а C за най-слаб и третият съдия да счита, C за най-добър от тримата, а A за най-слаб. Да се докаже, че може да се направи рейтинг на състезателите, такъв че за всеки двама участници A и B , ако A е по-високо в рейтинга от B , то A е по-добър от B по мнението на поне половината съдии.

Решение. Да разгледаме ориентиран граф, с върхове участниците в състезанието, като от A ще отива ориентирано ребро към B ($A \rightarrow B$), ако поне 51 от съдиите поставят A преди B . Между A и B няма да се поставя ребро, ако всеки от тях е по-добър от другия по мнението на точно 50 от съдиите. Ще докажем следната:

Лема. Ако $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$, то $A \rightarrow C$.

Да допуснем противното – тогава C е по-добър от A по мнението на поне 50 от съдиите. Имаме, че по мнението на не повече от 49 съдии B е по-добър от A т.е. има съдия, който счита, че C е по-добър от A и A е по-добър от B т.е. този съдия счита, че C е най-добър и B е най-слаб измежду тримата. Аналогично има втори съдия, който счита, че B е най-добър измежду тримата, а A е най-слабия измежду тях, и има трети съдия, който счита, че A е най-добър от тримата, а C е най-слабия сред тях. Това противоречи на условието и лемата е доказана.

Сега индуктивно по n ще покажем, че на всеки ориентиран граф с n върха, изпълняващ твърдението на лемата, можем да номерираме върховете така, че всяко ребро сочи от връх с по-малък към връх с по-голям номер. С това задачата ще е решена.

За $n = 2$ твърдението е очевидно. За прехода ще докажем, че съществува връх A , от който не излизат ребра – тогава можем да му дадем номер n и да номерираме останалите върхове съгласно индукционната хипотеза.

Да предположим, че такъв връх A няма. Избираме произволен връх A_1 и тръгваме обратно на посоката на стрелките. Тогава в някакъв момент ще

се върнем в A_1 и значи съществува ориентиран цикъл в графа. Да изберем цикъла $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_k \rightarrow A_1$ с минимална дължина k .

Тъй като $k = 3$ противоречи на лемата, имаме $k > 3$. Сега от $A_{k-1} \rightarrow A_k \rightarrow A_1$ и лемата имаме $A_{k-1} \rightarrow A_1$. Получихме цикъла $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{k-1} \rightarrow A_1$ с по-малка дължина, което е противоречие. С това индукцията е завършена.

Задача 10.4. Нека $S(k)$ е сумата от цифрите на естественото число k . Естественото число a е n -добро, ако съществува редица от естествени числа $a_0, a_1, \dots, a_n$, за която $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ за всяко $i = 0, 1, \dots, n-1$. Вярно ли е, че за всяко естествено число n съществува естествено число b , което е n -добро, но не е $(n+1)$ -добро?

Решение. Отговор – Да! За естествени n и k да означим $f(n) = n - S(n)$ и $f^k(n) = f(f^{k-1}(n))$. При увеличаването на n с 1, числото $S(n)$ или се увеличава с 1 (ако n не завършва на 9), или намалява. Следователно f е нестрого растяща, като $f(n+10) > f(n)$ за всяко n .

Нека естественото число d е такова, че $10^d > 20d(n+1)$ и да означим $k = 10^d$. Полагаме $b_0 = 10^k - 1$, $c_0 = 10^k - k$, $b_i = f^i(b_0)$ и $c_i = f^i(c_0)$. Ще докажем, че

$$b_n > c_n > b_{n+1}$$

Понеже $S(c_i) \leq 9k$, по индукция получаваме $c_i \geq 10^k - k - 9ki$. За $i \leq n+1$ имаме $(9i+1)k \leq 10ki \leq 10^{d+1}(n+1) < 10^{2d}$ и значи в записа на числото c_i първите $k-2d$ цифри са деветки. Оттук $S(c_i) \geq 9(k-2d)$, откъдето (отново по индукция) $c_i \leq 10^k - k - 9(k-2d)i$. Така

$$10^k - (9i+1)k \leq c_i \leq 10^k - k - 9(k-2d)i$$

Аналогично за b_i получаваме

$$10^k - 9ki - 1 \leq b_i \leq 10^k - 1 - 9(k-2d)i$$

Тогава неравенството $b_n > c_n$ ще следва от

$$10^k - k - 9(k-2d)n < 10^k - 9kn - 1$$

т.е. $10^d = k > 18dn + 1$ което е вярно поради избора на d .

Неравенството $b_{n+1} < c_n$ ще следва от

$$10^k - 1 - 9(k-2d)(n+1) < 10^k - (9n+1)k$$

т.е. $8k + 1 > 18d(n + 1)$, което е вярно. Така доказахме $b_n > c_n > b_{n+1}$.

С помощта на горното неравенство сега можем да проверим, че числото c_n е n -добро, но не е $(n + 1)$ -добро. Първото следва от $c_n = f^n(c_0)$. Остава да покажем, че $c_n \neq f^{n+1}(x)$ за всяко естествено x . При $x \leq 10^k - 1 = b_0$ имаме $f^{n+1}(x) \leq f^{n+1}(b_0) = b_{n+1} < c_n$. При $x \geq 10^k$ имаме $f(x) \geq f(10^k) = b_0$, откъдето $f^{n+1}(x) \geq f^n(b_0) = b_n > c_n$.

Задача 10.5. Квадрат, разделен на единични квадратчета, може да се разреже на n еднакви фигури от по k клетки всяка. Да се докаже, че същият квадрат може да се разреже и на k еднакви фигури от по n клетки всяка.

Решение. Ако m е дължината на страната на квадрата, то от условието имаме $m^2 = nk$.

Нека $d = (m, n)$, тогава $m = dm_1$, $n = dn_1$ и $(m_1, n_1) = 1$. Горното равенство приема вида $mm_1 = kn_1$ и следователно n_1 дели m . Това означава, че квадратът може да се раздели хоризонтално с успоредни прави, всеки две на разстояние n_1 и вертикално с успоредни прави, всеки две на разстояние d . При това разделяне квадратът е разделен на k еднакви правоъгълника от по $dn_1 = n$ клетки всеки.

Задача 10.6. Съществува ли безкрайна редица от естествени числа, такава че за всяко естествено k сумата на всеки k последователни члена на редицата се дели на $k + 1$?

Решение. Да допуснем, че такава редица има и нека тя е $a_1, a_2, a_3, \dots$. Нека $k > 1$ е естествено число. От условието следва, че сумата $a_1 + a_2 + \dots + a_{2k-1}$ се дели на $2k$ (а значи и на k) и също така всяка от сумите $a_2 + a_3 + \dots + a_k$ и $a_{k+1} + \dots + a_{2k-1}$ се дели на k . Следователно a_1 се дели на k за всяко $k > 1$, което е невъзможно.

Задача 10.7 В остроъгълния неравнобедрен $\triangle ABC$ са построени медианата AM и височината AH . На правите AB и AC са избрани точките Q и P съответно, като $QM \perp AC$ и $PM \perp AB$. Описаната около $\triangle PMQ$ окръжност пресича правата BC за втори път в точката X . Да се докаже, че $BH = CX$.

Решение. Ще използваме стандартните означения за $\triangle ABC$. Нека $PM \cap AB = Z$, $QM \cap AC = Y$ и описаната около $\triangle PMQ$ окръжност ω пресича правата AB за втори път в точката T .

Имаме $\sphericalangle PMQ = 180^\circ - \alpha$ и вписаността на $MQTP$ дава $\sphericalangle ATP = \alpha = \sphericalangle PAT$. Оттук $PT = PA$ и $AT = 2AZ$. Получаваме

$$BT = AT - AB = 2AZ - AB = AB - 2BZ = c - a \cos \beta$$

От друга страна, Синусовата теорема за $\triangle BQM$, в който $\sphericalangle BQM = 90^\circ - \alpha$ и $\sphericalangle BMQ = 90^\circ - \gamma$, дава $BQ = \frac{BM \cos \gamma}{\cos \alpha}$.

Степента на точката B относно окръжността ω дава $BX \cdot BM = BQ \cdot BT$, откъдето $BX = \frac{\cos \gamma (c - a \cos \beta)}{\cos \alpha}$. Понеже $CH = b \cos \gamma$ и $BH = CX$ точно когато $BX = CH$, исканото равенство е еквивалентно на $b \cos \alpha + a \cos \beta = c$. Последното следва от $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ и $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Задача 10.8. Нумизмат има 100 еднакви на външен вид монети. Той знае, че 30 от тях са истински и 70 са фалшиви. Освен това знае, че теглото на всички истински монети е едно и също, а на всички фалшиви монети е различно, като всяка фалшива монета е по-тежка от истинска. Точното тегло на монетите не му е известно. Нумизматът има везни с две блюда и без теглилки, на които той може с едно притегляне да сравни две групи от еднакъв брой монети. С колко най-малко на брой тегления с везните нумизматът може със сигурност да намери поне една истинска монета?

Решение. Отговор – 70. Първо ще покажем, че 70 претегляния са достатъчни. Да съберем стоте монети в купчина. За всяко претегляне избираме две монети от купчината и ги сравняваме. Ако масите им са еднакви, двете монети са истински и сме намерили исканата монета. Ако не, тогава по-тежката монета е фалшива. Изхвърляме фалшивата монета от купчината и връщаме другата.

В случай, че равенство не се достига в никое от седемдесетте претегляния, след тях 70-те фалшиви монети ще бъдат изхвърлени и в купчината ще останат всичките 30 истински монети и сме готови.

Сега ще докажем, че не съществува алгоритъм, даващ истинска монета за не повече от 69 претегляния. Да допуснем противното, т.е. нумизматът знае такъв алгоритъм.

Нека масата на истинска монета е 2^{100} , а тази на i -тата фалшива да бъде $m_i = 2^{100} + 2^i$ (такова предположение е допустимо, защото може само да улесни нумизмата).

Нека при някакво претегляне на везните има по k монети от двете страни, от които $d > 0$ са фалшиви и нека номерата на фалшивите монети са

$i_1 < i_2 < \dots < i_d$. Тогава от страната, на която е най-тежката (фалшива) монета, имаме обща маса поне не $k2^{100} + 2^{i_d}$, а общата маса от другата страна не надминава $k2^{100} + (2^1 + \dots + 2^{i_d-1}) = k2^{100} + 2^{i_d} - 1$, т.е. е по-малка. Следователно при наличие на поне една фалшива монета везната ще се наклони в посоката, в която е фалшивата монета с най-голям номер.

Нека нумизматът да действа по своя алгоритъм. Ние ще му съобщаваме резултатите от претеглянията и ще задаваме маси m_i на някои монети, като след всяко претегляне зададените маси ще са от вида $m_{70}, m_{69}, \dots, m_{70-i}$ за някое i . При това, ако съответните монети действителни имат зададените им маси (а останалите маси са разпределени произволно), то резултатите от претеглянията ще са наистина такива, каквито сме ги съобщили.

При първото претегляне избираме произволна монета измежду теглените, задаваме ѝ маса m_{70} и съобщаваме, че нейната страна е по-тежка. При всяко следващо претегляне, ако на везните има монета със зададена вече маса, избираме от всички участващи в тегленето зададени маси най-голямата и съобщаваме, че нейната страна е по-тежка. Ако пък в тегленето няма монети със зададена маса, отново избираме произволна монета измежду теглените, задаваме ѝ най-високата все още незададена маса и съобщаваме, че нейната страна е по-тежка. Лесно се вижда, че горните условия за нашите действия са изпълнени.

След като нумизматът и извършил не повече от 69 претегляния, ние сме задали не повече от 69 маси. Следователно масата m_1 не е зададена и може да принадлежи на коя да е монета, за която още няма зададена маса, като при това всички резултати от претеглянията ще останат такива, каквито сме ги съобщили. Това означава, че в този момент нумизматът не може да посочи със сигурност истинска монета.

Забележка. Отговорът не се променя, ако изоставим условието от двете страни на везната да има еднакъв брой монети.

Задача 11.1. Вж. задача 9.2.

Задача 11.2. Нека $n > 1$ е естествено число. Записваме всяка от дробите $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ в несъкратим вид и означаваме с $f(n)$ сумата от числителите на получените дроби. За кои естествени $n > 1$ числата $f(n)$ и $f(2015n)$ са с различна четност?

Решение. Отговор – за всяко естествено $n > 1$. Нека $n = 2^t m$ за $t \geq 0$

и m – нечетно. Да разгледаме дробта $\frac{k}{n}$. Ако k се дели на 2^{t+1} , то след съкращаването числителят ще е четен, а иначе – нечетен. Сред числата $1, 2, \dots, n-1$ има точно $\frac{m-1}{2}$ кратни на 2^{t+1} . Така в сумата $f(n)$ имаме $n-1-\frac{m-1}{2}$ нечетни събираеми. Следователно $f(n)$ е четно тогава и само тогава, когато $n-1$ и $\frac{m-1}{2}$ са с еднаква четност, т.е. при n – нечетно и $m \equiv 1 \pmod{4}$ или n – четно и $m \equiv 3 \pmod{4}$.

Остава да съобразим, че числата n и $2015n$ са с еднаква четност и че за нечетно m числата m и $2015m$ дават различни остатъци при деление на 4. Следователно числата $f(n)$ и $f(2015n)$ винаги имат различна четност.

Задача 11.3. Вж. задача 9.4.

Задача 11.4. Дадено е естествено число $N \geq 3$. Ще наричаме множество от N точки в координатната равнина *допустимо*, ако абсцисите на точките са различни и всяка от тези точки е оцветена или в червен, или в син цвят. Ще казваме, че полиномът $P(x)$ разделя едно допустимо множество от точки, ако или над графиката на $P(x)$ няма червени точки, а под нея няма сини точки, или обратното (на самата графика могат да лежат точки и от двата цвята). За кое най-малко естествено число k всяко допустимо множество от N точки може да се раздели от полином от степен, ненадминаваща k ?

Решение. Отговор – $k = N-2$. Да разгледаме кои да е $N-1$ от дадените точки. Тогава полином от степен най-много $N-2$, чиято графика минава през разглежданите точки (интерполация на Лагранж), разделя нашето множество.

Остава да конструираме допустимо множество, което не може да бъде разделено от полином от степен, по-малка от $N-2$. Да фиксираме полином от степен $N-2$ и да разположим по неговата графика N сини и червени точки, като цветовете се редуват. Да допуснем, че полиномът $P(x)$ от степен най-много $N-3$ разделя това (допустимо) множество. Без ограничение на общността можем да считаме, че под графиката на $P(x)$ няма червени точки, а над нея няма сини.

Нека $Q(x) = f(x) - P(x)$. Тогава степента на полинома $Q(x)$ е $N-2 > 1$ и, ако r и b са абсциси на произволни червена и синя точки, то от $P(r) \leq f(r)$ и $P(b) \geq f(b)$ следва, че $Q(r) \geq 0$ и $Q(b) \leq 0$.

Да отбележим, че ако за някои реални числа $s < t$ е известно, че

$Q(s) \leq Q(t)$, то в отворения интервал (s, t) съществува точка u , за която $Q'(u) > 0$ (използваме, че Q не е константен, т.е. расте в някакъв подинтервал (s, t)). Това означава, че във всеки интервал между червена и синя точка (червената наляво от синята) съществува точка, в която производната Q' е положителна. Аналогично, във всеки интервал между синя и червена точка (синята наляво от червената) съществува точка, в която производната Q' е отрицателна. Намерихме $N - 1$ точки, в които Q' си сменя алтернативно знака. Това означава, че Q' има поне $N - 2$ различни реални корена, което противоречи на факта, че Q' е от степен най-много $N - 3$.

Задача 11.5. Безсмъртна бълха се движи по целочислените точки от реалната права, като започва от 0. За всяко естествено k , тя се отмества наляво или надясно с $2^k + 1$ спрямо точката в която се намира. Вярно ли е, че за всяка естествена точка, съществува момент, в който бълхата ще достигне до нея, като ѝ е позволено да минава през една и съща точка по повече от веднъж?

Решение. Отговор – Да! Нека в даден момент бълхата се намира в точката $n \in \mathbb{N}$. Ще покажем операция, която осигурява преход от точката n до $n + 1$. Нека бълхата е достигнала до n с $k - 1$ отмествания. Тогава следващото отместване е с дължина $l = 2^k + 1$, съответно наляво или надясно. Нека то е в посока дясно.

$$\begin{aligned} & 2^{k+l} + 1 - (2^k + 1) - (2^{k+1} + 1) - \dots - (2^{k+l-1} + 1) = \\ & = (2^{k+l} - 2^k - 2^{k+1} - \dots - 2^{k+l-1}) + 1 - 2^k = 2^k + 1 - 2^k = 1. \end{aligned}$$

Това е операция, която ни позволява да се преместим с едно квадратче отдясно. Започвайки от 0, можем да преместим бълхата в 1, после в 2 и т.н.

Задача 11.6. Дадени са реалните числа a, b, c и d , които по модул са строго по-големи от 1 и $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Да се докаже, че

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Решение. Нека $x = \frac{a+1}{a-1}$, $y = \frac{b+1}{b-1}$, $z = \frac{c+1}{c-1}$ и $t = \frac{d+1}{d-1}$. Понеже $|a| > 1$, то тогава $x > 0$ и $x \neq 1$. Аналогично $y, z, t > 0$ и не са равни

на 1. Условието за a, b, c и d се свежда до $xyzt = 1$ и от друга страна $\frac{1}{a-1} = \frac{x-1}{2}$. Използвайки аналогичните равенства за b, c и d получаваме

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = \frac{x+y+z+t-4}{2}.$$

Сега е достатъчно да покажем, че $x+y+z+t > 4$. От неравенство САСГ следва $x+y+z+t \geq 4\sqrt[4]{xyzt} = 4$. Равенство се достига тогава и само тогава, когато $x = y = z = t = 1$, което е невъзможно, откъдето следва, че $x+y+z+t > 4$.

Задача 11.7. Даден е неравнобедрен $\triangle ABC$ с описана окръжност ω . Допирателната към тази окръжност в точка C пресича правата AB в точка D . Нека I е центъра на вписаната окръжност. Правите AI и BI пресичат ъглополовящата на $\angle BDC$ в точки Q и P . Нека M е средата на PQ . Да се докаже, че правата MI разполовява дъгата $\widehat{ACB}$ от ω .

Решение. Без ограничение на общността можем да считаме, че A лежи между B и D . Правите AI и BI пресичат ω за втори път в точки A' и B' . Нека L е средата на дъгата $\widehat{ACB}$. Тогава получаваме равенствата $\angle LA'A = \angle LBA = \frac{\angle A + \angle B}{2} = \angle B'IA$. Следователно $LA' \parallel IB'$ и аналогично $LB' \parallel IA'$. Така $IA'LB'$ е успоредник и LI разполовява $A'B'$. Ще докажем, че $PQ \parallel A'B'$. Имаме $\angle CDB = \angle CAB - \angle ACD = \angle A - \angle B$. От друга страна $\angle PQA = \angle QAB - \angle QDB = \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle A - \angle B}{2} = \frac{\angle B}{2} = \angle B'A'A$, откъдето $PQ \parallel A'B'$. Тогава LI минава през M .

Задача 11.8. Дадени са естествените числа a и b , като $a < b < 2a$. Равнината е разделена на единични клетки и някои клетки са маркирани така, че във всеки правоъгълник с размери $a \times b$ или $b \times a$ има поне една маркирана клетка. При кое най-голямо α може да се твърди, че за всяко естествено число N ще се намери квадрат $N \times N$, в който да има поне αN^2 маркирани клетки?

Решение. Отговор – $\alpha = \frac{1}{2a^2 - 2ab + b^2}$. Да въведем в равнината координатна система така, че центровете на клетките (и само те) да са с цели координати. Ще казваме, че клетката има същите координати, както центъра си. Ще

наричаме $a \times b$ правоъгълник вертикален (хоризонтален), ако страната му с дължина b е вертикална (хоризонтална).

Да положим $D = 2a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + (b - a)^2$. Да маркираме клетката $(0, 0)$ и всички клетки, които се получават от нея с трансляция на вектори, целочислено кратни на векторите $(a, b - a)$ и $(b - a, -a)$ (вж. Фиг. 1 за пример с $a = 3, b = 5$). Центровете на маркираните клетки задават квадратна мрежа със страна $\sqrt{D}$, като клетките $(D, 0)$ и $(0, D)$ са маркирани. Лесно се вижда, че при хоризонтално или вертикално преместване на разстояние D на маркирана клетка отново попадаме в маркирана клетка. Оттук следва, че във всеки квадрат със страна D има точно D маркирани клетки.

Ще докажем, че описаната маркировка върши работа, т.е. $\alpha \leq D/D^2 = 1/D$. Действително, да разгледаме произволна лента от b последователни хоризонтала. Ясно е, че в тази лента има маркирана клетка. Ако (x, y) е такава, то една от клетките $(x + a, y + b - a)$ и $(x + b - a, y - a)$ също е в лентата и е отместена спрямо предходната на не повече от a надясно. Следователно в произволни a вертикала на нашата лента има маркирана клетка. Доказателството за хоризонталните правоъгълници е аналогично.

Остава да докажем, че $\alpha = 1/D$ върши работа. Да разгледаме произволна маркировка, удовлетворяваща условието на задачата. Да съпоставим на всеки вертикален правоъгълник някоя (ако са повече от една) от най-горните маркирани негови клетки.

Ще получим оценка отгоре за броя на правоъгълниците, на които е съпоставена фиксирана маркирана клетка A (с координати $(0, 0)$). Първо да отбележим, че A се съдържа в ab вертикални правоъгълника. Да разгледаме хоризонталната лента от клетки, чиито ординати са не по-малки от 1 и не по-големи от a . Нека B е маркирана клетка в тази лента с най-малка неотрицателна абсциса, а C е маркирана клетка в тази лента с най-голяма отрицателна абсциса (вж. Фиг. 2). Тогава между B и C са разположени не повече от $b - 1$ вертикала, защото в противен случай в нашата лента между тези клетки ще се намери хоризонтален правоъгълник без маркирани клетки.

Да разгледаме сега всички $a(b - a)$ вертикални правоъгълника, съдържащи A и пресичащи поне a хоризонтала над A . Всеки от тези правоъгълници съдържа B или C с изключение на тези, които са разположени строго между B и C . Броят на последните е не по-голям от $(b - a)(b - a)$. Следователно поне $a(b - a) - (b - a)^2 = (2a - b)(b - a)$ правоъгълника съдържащи A ,

съдържат също B или C , при това положение A не им е съпоставена. В крайна сметка заключаваме, че клетката A е съпоставена на не повече от $ab - (2a - b)(b - a) = D$ вертикални правоъгълника.

Нека сега N е произволно естествено число. Да положим $K = (a + b)N^2$ и да разгледаме произволен квадрат $K \times K$. Нека в този квадрат да има s маркирани клетки. В квадрата има поне $(K - a)(K - b)$ вертикални правоъгълника на всеки от тях е съпоставена маркирана клетка. Следователно $sD \geq (K - a)(K - b)$, откъдето

$$s > \frac{K(K - a - b)}{D} = \frac{(a + b)^2 N^2 (N^2 - 1)}{D}.$$

Разбивайки нашия квадрат $K \times K$ на $(a + b)^2 N^2$ квадрата с размери $N \times N$, заключаваме от горната оценка за s , че в някой от тези квадрати има повече от $\frac{N^2 - 1}{D}$ маркирани клетки, което означава, че всъщност маркираните клетки в този квадрат са поне $\frac{N^2 - 1}{D} + \frac{1}{D} = \frac{N^2}{D}$.

Русия 2016

Задача 9.1. На пазара работи пункт за размяна на килими. Срещу килим с размери $a \times b$, клиент може да получи или килим с размери $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ или два килима с размери $c \times b$ и $\frac{a}{c} \times b$ (при всяка такава размяна, числото c се избира от клиента). Пътешественик разказал, че първоначално е имал един килим със страни, по-големи от 1, а след краен брой такива размени се е сдобил с няколко килима, за всеки от които едната страна е по-голяма от 1, а другата – по-малка от 1. Възможно ли е тази история да е вярна? (Ако клиентът желае, килим с размери $a \times b$ може да се счита за килим с размери $b \times a$.)

Решение. Отговор – пътешественикът послъгва.

Да наречем *големи* килимите със страни, по-големи от 1, и *малки* тези, чиито страни са по-малки от 1. В началото пътешественикът имал един голям килим. Ще докажем, че общият брой на големите и малките килими не намалява. Достатъчно е да разгледаме случаите, в които пътешественикът заменя голям и малък килими.

При замените от първия вид голям килим се сменя с малък и обратно, т.е. общият брой не намалява.

Да разгледаме замените от втория вид. При замяна на голям килим $a \times b$ пътешественикът ще получи килими $a_1 \times b$ и $a_2 \times b$. Ако $0 < a_1, a_2 \leq 1$, то $a = a_1 a_2 \leq 1$, което е невъзможно. Тъй като $b > 1$, поне един от новите килими ще е голям. Аналогично, при замяна на малък килим поне един от новите килими ще е малък.

Задача 9.2. Окръжност ω се допира до раменете на ъгъл BAC в точки B и C . Права ℓ пресича отсечките AB и AC съответно в точки K и L . Окръжността ω пресича ℓ в точки P и Q . Точките S и T са избрани от отсечката BC така, че $KS \parallel AC$ и $LT \parallel AB$. Да се докаже, че точките P , Q , S и T лежат на една окръжност.

Решение. Ако $\ell \parallel BC$, твърдението е очевидно поради симетрията относно симетралата на BC . Нека правите ℓ и BC се пресичат в точка X . От успоредността имаме $\frac{XB}{XT} = \frac{XK}{XL} = \frac{XS}{XC}$, откъдето $XT \cdot XS = XB \cdot XC$. Тъй като точките B , C , P и Q лежат върху ω , имаме $XB \cdot XC = XP \cdot XQ$. Тогава $XT \cdot XS = XP \cdot XQ$, което означава, че точките P , Q , S и T лежат на една окръжност.

Забележка. Може да се докаже, че получената окръжност се допира до правите KS и LT съответно в точките S и T .

Задача 9.3. Нека $1 = d_1 < \dots < d_s = N$ са всички естествени делители на естественото число $N > 1$. Да се намерят всички стойности на N , за които

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) + \dots + (d_{s-1}, d_s) = N - 2$$

(както обикновено, с (a, b) е означен най-големият общ делител на числата a и b).

Решение. Отговор – $N = 3$.

Да отбележим, че $d_{s+1-i} = N/d_i$ за всяко $i = 1, 2, \dots, s$.

Числото $d_{i+1} - d_i$ се дели на (d_i, d_{i+1}) , откъдето $(d_i, d_{i+1}) \leq d_{i+1} - d_i$. Да означим $r_i = (d_{i+1} - d_i) - (d_i, d_{i+1}) \geq 0$, $i = 1, \dots, s-1$. От условието следва, че

$$(d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \dots + (d_s - d_{s-1}) = d_s - d_1 = N - 1$$

и

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) + \dots + (d_{s-1}, d_s) = N - 2.$$

От тези равенства получаваме $r_1 + \dots + r_{s-1} = 1$. Следователно $r_k = 1$ за някое k , а $r_i = 0$ за $i \neq k$.

От равенството $1 = (d_{k+1} - d_k) - (d_k, d_{k+1})$ следва, че $(d_k, d_{k+1}) | 1$, откъдето $(d_k, d_{k+1}) = 1$ и $d_{k+1} - d_k = 2$. В частност d_k и d_{k+1} са нечетни.

Тъй като d_k и d_{k+1} са последователни делители на N , то и $\frac{N}{d_{k+1}}$ и $\frac{N}{d_k}$ са такива. Нека $\frac{N}{d_{k+1}} = d_m$ и $\frac{N}{d_k} = d_{m+1}$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} (d_m, d_{m+1}) &= \frac{d_m d_{m+1}}{[d_m, d_{m+1}]} = \frac{N}{d_k d_{k+1}} \cdot \frac{N}{[d_m, d_{m+1}]} \leq \frac{N}{d_k d_{k+1}} \\ &< \frac{N(d_{k+1} - d_k)}{d_k d_{k+1}} = d_{m+1} - d_m \end{aligned}$$

(използвахме, че N е общо кратно на d_m и d_{m+1} и следователно $N \geq [d_m, d_{m+1}]$). От полученото неравенство $(d_m, d_{m+1}) < d_{m+1} - d_m$ следва, че $r_m > 0$, т.е. $k = m$ (и следователно $s = 2k$).

Получихме $d_{k+1} = \frac{N}{d_k}$, т.е. $N = d_k d_{k+1}$ е нечетно число. Но тогава $d_{s-1} \leq \frac{N}{3}$, откъдето $(d_{s-1}, d_s) \leq d_{s-1} \leq \frac{N}{3}$. Следователно $1 \geq r_{s-1} \geq \frac{2N}{3} - \frac{N}{3} = \frac{N}{3}$,

т.е. $N \leq 3$. Лесно се вижда, че единствената останала възможност $N = 3$ е решение на задачата.

Задача 9.4. От правоъгълна таблица 100×100 са изрязани 1950 домина (правоъгълници 1×2 или 2×1). Да се докаже, че от останалите части може да се изреже тетрамино, евентуално ротирано. (Ако тетрамино вече се е получило, то се счита за изрязано.)

Решение. Да разгледаме изрязването на домината едно по едно. Във всеки момент от процеса на изрязването да наречем *цена* на всяка неизрязана още клетка броят на нейните неизрязани съседи (по страна), намален с 2. Тогава началната цена на всяка клетка е $2 - t$, където t е броят на единичните отсечки от контура на квадрата, които са гранични за тази клетка. Следователно общата начална цена е $2 \cdot 100^2 - 400 = 19\,600$.

Да проследим как се променя общата цена S на всички неизрязани клетки след изрязване на домино. Изрязването премахва две клетки с цена най-много $2 + 2 = 4$ и намалява с 1 цената на клетките, граничещи с изрязаното домино (които са не повече от шест). Следователно общата цена S намалява най-много с 10.

След изрязването на 1950 домина S ще е поне $19\,600 - 1950 \cdot 10 = 100$. Следователно ще има неизрязана клетка k с положителна цена. Това означава, че k има поне три неизрязани съседи и образува, заедно с тези три съседи, исканото тетрамино.

Задача 9.5. От цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 са съставени девет (не непременно различни) деветцифрени числа, като всяка цифра се използва във всяко число точно по веднъж. С колко най-много нули може да завършва сумата на тези девет числа?

Решение. Първо ще докажем, че сумата не може да завършва с 9 нули. Всички съставени по описания начин числа се делят на 9 (защото сумата от цифрите им се дели на 9). Следователно и сумата им се дели на 9. Най-малкото естествено число, което се дели на 9 и завършва на девет нули, е $9 \cdot 10^9$. Тогава нашата сума е поне $9 \cdot 10^9$, откъдето следва, че поне едно от числата е по-голямо от 10^9 , което е невъзможно.

Пример за числа от разглеждания вид със сума, завършваща на 8 нули, се дава например с осем числа 987654321 и числото 198765432 (сумата им е $81 \cdot 10^8$).

Задача 9.6. Квадрат е разбит на $n^2 \geq 4$ правоъгълника чрез $2n - 2$ прави, $n - 1$ от които са успоредни на едната страна на квадрата, а останалите $n - 1$ са успоредни на другата му страна. Да се докаже, че е възможно от правоъгълниците да се изберат $2n$ такива, че за всеки два от избраните единият може да се разположи в другия (евентуално след завъртане).

Решение. Ще казваме, че двойка правоъгълници е *добра*, ако е възможно едният ит тях да се разположи в другия.

Нека хоризонталната страна на квадрата се е разбила на отсечки с дължини $a_1, \dots, a_n$, а вертикалната – на отсечки с дължини $b_1, \dots, b_n$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $a_1 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq \dots \geq b_n$ (Защо?). Да означим с $Q_{i,j}$ правоъгълника от рабиването със страни a_i и b_j и да отбележим, че при $i \leq k$ и $j \leq \ell$ двойката $(Q_{i,j}, Q_{k,\ell})$ е добра.

Тъй като $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$, съществуват различни индекси i и j , за които $a_i \geq b_i$ и $a_j \leq b_j$. Можем да считаме, че $i < j$. Тогава съществува индекс $k \in [i, j]$, за който $a_k \leq b_k$ и $a_{k-1} \geq b_{k-1}$.

Твърдим, че правоъгълниците $Q_{1,1}, Q_{1,2}, \dots, Q_{1,k-1}, Q_{2,k-1}, \dots, Q_{k,k-1}$, заедно с $Q_{k-1,k}, Q_{k,k}, \dots, Q_{k,n}, Q_{k+1,n}, \dots, Q_{n,n}$, вършат работа. Броят им е $2(k-1) + 2(n-k+1) = 2n$. Всяка двойка, освен $(Q_{k,k-1}, Q_{k-1,k})$, е добра по забележката от по-горе. Последната двойка също е добра, защото $a_k \leq b_k$ и $b_{k-1} \leq a_{k-1}$.

Задача 9.7. Окръжност ω е вписана в триъгълник ABC , за който $AB < AC$. Външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ се допира до страната BC в точка A' . Точка X от отсечката $A'A$ е такава, че отсечката $A'X$ не пресича ω . Допирателните от X към ω пресичат отсечката BC в точките Y и Z . Да се докаже, че сумата $XY + XZ$ не зависи от избора на точката X .

Решение. Ще считаме, че точката Y е по-близо до B , отколкото Z , както и че страната BC е хоризонтална, а A е над нея.

Да означим с ω_A външновписаната окръжност към страната BC в $\triangle ABC$, а с ω' външновписаната окръжност към страната XZ в $\triangle XYZ$. Нека ω се допира до BC в точка A'' . Да означим с T пресечната точка на AA' и ω , която е по-близо до A . Хомотетията с център A , изпращаща ω в ω_A , изпраща T в A' и следователно допирателната към ω в точка T е успоредна на BC .

Тъй като окръжностите ω и ω' са вписани във вертикални ъгли, образувани от правите XY и XZ , съществува хомотетия с център X (и отрица-

телен коефициент), изпращаща ω в ω' . Нека при тази хомотетия точката T да отива в точка T' . Тогава T' лежи върху права AA' , допирателна към ω' в T' и успоредна на BC , и ω' е разположена над тази допирателна. Такава допирателна към ω' е правата BC и следователно T' лежи върху BC , т.е. ω' се допира до BC в точка A' .

Да означим с p полупериметъра на $\triangle XYZ$. Тъй като окръжностите ω и ω' са външнописани за този триъгълник, имаме $ZA' = YA'' = p - YZ$. Следователно

$$XY + XZ = 2p - YZ = 2(p - YZ) + YZ = ZA' + YZ + YA'' = A'A'',$$

което не зависи от избора на точката X .

Забележка. Фактът, че ω' се допира до BC в точка A' може да се докаже и с помощта на теоремата за трите хомотетии за окръжностите ω , ω_A и ω' . Центровете на тези хомотетии са A , X и някаква точка Q , лежаща върху BC (понеже BC е обща вътрешна допирателна за ω_A и ω'). Получаваме, че Q лежи върху правата AX , т.е. съвпада с A' . Тъй като ω_A се допира до BC в $Q = A'$, то и ω' също се допира до BC в тази точка.

Задача 9.8. Сумата на положителните числа a , b , c и d е равна на 3. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} \leq \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно на

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq 1. \quad (*)$$

Тъй като неравенството е симетрично, можем да считаме, че $a \geq b \geq c \geq d$. От неравенството между средното аритметично и средното геометрично за числата a , b и $c + d$ имаме

$$ab(c + d) \leq \left(\frac{a + b + (c + d)}{3} \right)^3 = 1$$

откъдето $a^2b^2(c + d)^2 \leq 1$.

Следователно за доказване на $(*)$ е достатъчно да покажем, че

$$a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq a^2b^2(c + d)^2.$$

След разкриване на скобите и опростяване получаваме неравенството

$$a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq 2a^2b^2cd,$$

което следва от събиране на двете очевидни неравенства $a^2c^2d^2 \leq a^2b^2cd$ и $b^2c^2d^2 \leq a^2b^2cd$.

Забележка. Ако допуснем неотрицателни стойности за променливите в (*), равенство ще се достига точно когато три от числата са равни на 1, а четвъртото е равно на 0.

Задача 10.1. В НБА има 30 отбора, всеки от които трябва да изиграе за един сезон 82 мача. Възможно ли е отборите да бъдат разделени на две конференции (не непременно с равен брой отбори) – Източна и Западна, и разписанието на мачовете да се направи така, че броят на мачовете между отбори от различни конференции да е равен на половината от всички мачове?

Решение. Отговор – не е възможно.

Да означим с x и y броя на мачовете изиграни съответно вътре в Източната и Западната конференции, а с z броя на мачовете между отбори от различни конференции. Трябва да докажем, че равенството $z = \frac{x+y+z}{2}$ е невъзможно.

Всеки от отборите (k на брой) от Източната конференция участва в 82 мача и следователно $82k = 2x + z$ (коефициентът 2 се появи поради факта, че всеки вътрешен мач от преброен и за двата участващи в него отбора). Тогава числото $z = 82k - 2x$ е четно. От друга страна, преброяването на общия брой мачове дава равенството $x + y + z = \frac{30 \cdot 82}{2}$, откъдето числото $\frac{x+y+z}{2} = 15 \cdot 41$ е нечетно.

Задача 10.2. Диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка P . Точка Q от отсечката BC е такава, че $PQ \perp AC$. Да се докаже, че правата, минаваща през центровете на описаните около триъгълниците APD и BQD окръжности, е успоредна на правата AD .

Решение. Нека точката $T \in QP$ е такава, че $DT \perp DA$. Тъй като $\sphericalangle APT = 90^\circ = \sphericalangle ADT$, точките A, P, D и T лежат на една окръжност. Следователно центърът на окръжността ω_1 , описана около $\triangle APD$, лежи на симетралата ℓ на отсечката DT .

Тъй като четириъгълникът $ABCD$ е вписан, имаме $\sphericalangle QBD = \sphericalangle PAD$. Четириъгълникът $APDT$ също е вписан, откъдето $\sphericalangle PAD = \sphericalangle QTD$. Получихме $\sphericalangle QBD = \sphericalangle PAD = \sphericalangle QTD$, което означава, че точките B , Q , D и T лежат на една окръжност. Тогава центърът на окръжността ω_2 , описана около $\triangle BQD$, също лежи на симетралата ℓ на отсечката DT . Следователно ℓ минава през центровете на ω_1 и ω_2 . Тъй като $\ell \perp DT$ и $AD \perp DT$, получаваме $\ell \parallel AD$, което и трябваше да се докаже.

Задача 10.3. Нека $f(x)$ е полином от трета степен с реални коефициенти. Тройката (a, b, c) от различни реални числа се нарича *циклична*, ако $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Оказало се, че съществуват осем циклични тройки (a_i, b_i, c_i) , $i = 1, 2, \dots, 8$, в които участват 24 различни реални числа. Да се докаже, че измежду осемте суми $a_i + b_i + c_i$ има поне три различни.

Решение. Да допуснем противното – тогава има четири цикъла (a_i, b_i, c_i) с еднаква сума s . За всеки от тези цикли имаме

$$s = a_i + b_i + c_i = a_i + f(a_i) + f(f(a_i)) = b_i + f(b_i) + f(f(b_i)) = c_i + f(c_i) + f(f(c_i)).$$

Следователно всичките 12 числа от нашите четири цикъла са корени на полинома $g(x) = x + f(x) + f(f(x)) - s$. Но тези 12 числа са две по две различни по условие, а $g(x)$ е от девета степен, противоречие.

Задача 10.4. В изпъкнал 100-ъгълник M е избрана точка X , нележаща на страна или диагонал на M . В началото няма маркирани върхове. Петя и Вася поред маркират (немаркирани дотогава) върхове на M , като на първия ход Петя маркира два върха, а след това всеки от тях маркира по един връх, когато е на ход. Губи този, след чийто ход точката X се е оказала във вътрешността на многоъгълник с маркирани върхове. Да се докаже, че Петя има печеливша стратегия.

Решение. Да оцветим страните на M в черно и бяло така, че всеки две съседни страни да са разноцветни. Да разгледаме две едноцветни страни AB и CD , образуващи изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Нека диагоналите AC и BD се пресичат в точка K и да предположим, че X лежи в триъгълника KBC . Тогава Петя може да спечели, избирайки на първия си ход върховете B и C . Действително, след този ход играчите могат да избират (ако не искат да загубят на момента) само върхове, лежащи в полуравнината относно правата BC , несъдържаща X . Броят на тези върхове е четен и следователно последният ход с тях е на Петя.

Остава да докажем, че винаги можем да намерим такива страни AB и CD . Да допуснем противното. Нека T е произволен връх и да предположим, че лъчът TX пресича черна страна PQ . Нека TR е черната страна, излизаща от T . Можем да считаме, че четириъгълникът $TRPQ$ е изпъкнал. Ако X лежи във вътрешността на триъгълника TRQ , то $RTQP$ има исканите свойства. В противен случай лъчът RX също пресича отсечката PQ .

Нека RS е следващата след TR страна на M . Ако лъчът SX пресича бяла страна, както по-горе се доказва, че лъчът RX също я пресича, което е невъзможно. Следователно SX пресича някаква черна страна и можем да повторим горните разсъждения за върха S . Продължавайки по същия начин, ще заключим, че за всяка черна страна $T'R'$ ще има черна страна $P'Q'$, която се пресича и от двата лъча $T'X$ и $R'X$. Но това не е изпълнено за черната страна PQ (лъчите PX и QX пресичат съответно участъците QT и RP от контура на M), противоречие.

Задача 10.5. Виж Задача 9.5.

Задача 10.6. Виж Задача 9.6.

Задача 10.7. На дъската са написани четири две по две различни цели числа, всяко от които има абсолютна стойност, по-голяма от един милион. Известно е, че не съществува естествено число, по-голямо от 1, което да дели всяко от четирите написани числа. Петя записал в тетрадката си шестте суми на по две от числата от дъската, след това разбил тези шест суми на три двойки и умножил числата във всяка двойка. Възможно ли е тези три произведения да се окажат равни?

Решение. Отговор – да! Работа вършат например числата

$$x = N^2 - 3N + 1, \quad y = N^2 - N + 1, \quad z = -3N^2 + 3N - 1, \quad t = N^2 + N - 1,$$

(N е естествено число, по-голямо от 10^6) и това не е трудно да се провери.

Задача 10.8. Нека ABC е остроъгълен триъгълник, в който $AC < BC$, а M е средата на страната AB . В окръжността Ω , описана около $\triangle ABC$, е построен диаметърът CC' . Правата CM пресича правите AC' и BC' съответно в точките K и L . Правата AB , перпендикулярът от K към правата

AC' и перпендикулярът от L към правата BC' определят триъгълник Δ . Да се докаже, че окръжността, описана около Δ , се допира до окръжността Ω .

Решение. Нека дадените перпендикуляри през K и L да пресичат AB съответно в точките U и V и да се пресичат в точка E . Да отбележим, че правите AC и KE са перпендикулярни на правата AC' и значи $AC \parallel KE$. Аналогично $BC \parallel LE$. Да означим с ω окръжността, описана около $\triangle EUV$. Нека правата $C'E$ да пресича за втори път окръжността Ω в точка X . Ще докажем, че окръжностите ω и Ω се допират именно в точка X .

Тъй като $\sphericalangle C'KE = \sphericalangle C'LE = 90^\circ$, четириъгълникът $C'KEL$ е вписан. Оттук $\sphericalangle ACX = \sphericalangle AC'X = \sphericalangle KLE = \sphericalangle LCB$, т.е. $\sphericalangle ACX = \sphericalangle MCB$ и $\sphericalangle BCX = \sphericalangle MCA$. Това означава, че правата CX е симедиана в $\triangle ABC$ и следователно минава през пресечната точка S на допирателните към Ω в точките A и B .

Нека O е центърът на Ω и $\gamma = \sphericalangle ACB$. Нека CM да пресича за втори път Ω в точка Y . Тъй като AM е височина в правоъгълния $\triangle OAS$, имаме $OM \cdot OS = OA^2 = OC^2$. Оттук следва, че триъгълниците OMC и OCS са подобни. Тогава отношението на височините им от O е равно на $\frac{OM}{OC} = \frac{OM}{OA} = \cos \gamma$. Тези височини са и средни отсечки в правоъгълните триъгълници CYC' и CXC' и значи $\frac{C'Y}{C'X} = \cos \gamma$.

Нека правите AC' и BC' да пресичат CX съответно в точките Q и P . Да забележим, че $\sphericalangle PC'Q = \sphericalangle ACB = \gamma$. Освен това $\sphericalangle YC'L = \sphericalangle YCB = \sphericalangle QC'X$ и следователно правоъгълните триъгълници $YC'L$ и $XC'Q$ са подобни. Тогава $\frac{C'L}{C'Q} = \frac{C'Y}{C'X} = \cos \gamma = \cos \sphericalangle PC'Q$. Оттук следва, че QL е височина в $\triangle PCQ$. Следователно точките L , E , Q и V лежат на една права.

Тъй като $\sphericalangle QVB = \sphericalangle VBC = \sphericalangle AXC$, четириъгълникът $AVQX$ е вписан в някаква окръжност. Понеже $\sphericalangle EKQ = \sphericalangle EXQ = 90^\circ$, точките X , E , K и Q също лежат на една окръжност. От тези две окръжности получаваме $\sphericalangle UEX = \sphericalangle KEX = \sphericalangle AQX = \sphericalangle AVX$, т.е. точките U , V , E и X лежат на една окръжност ω . Освен това $\sphericalangle EVX = \sphericalangle QAX = \sphericalangle C'AX$. Това означава, че градусните мерки на дъгите $C'X$ и EX от окръжностите Ω и ω са равни. Следователно допирателните към тези окръжности в точка X съвпадат и значи Ω и ω се допират.

Забележка 1. Не е трудно да се досетим, че окръжностите ω и Ω се допират именно в точка X . Действително, ако тези окръжности се допират, то

допирната им точка е център на хомотетия, изпращаща ω в Ω . Тази хомотетия трябва да изпраща $\triangle EUV$ в $\triangle A'B'C'$, симетричен на ABC относно O и значи допирната точка трябва да лежи върху $C'E$.

Забележка 2. Има още няколко начина да се докаже, че правите CX , AC' и EL се пресичат в една точка (Q) – например с помощта на понятието хармоничност. Да напомним, че четворката точки (A, B, C, D) , лежащи на една права или на една окръжност, се нарича *хармонична*, ако $\frac{AB}{AD} \cdot \frac{CD}{CB} = 1$, четворка прави, минаващи през една точка, е *хармонична*, ако четворка точки, определена от тях на някаква права, е такава.

11.1. Виж Задача 10.1.

11.2. Отсечките A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 се пресичат в точка P , но не лежат в една равнина. Нека O_{ijk} е центърът на сферата, минаваща през точките A_i , B_j , C_k и P . Да се докаже, че правите $O_{111}O_{222}$, $O_{112}O_{221}$, $O_{121}O_{212}$ и $O_{211}O_{122}$ се пресичат в една точка.

Решение. За дадена отсечка XU *симетрална равнина* за тази отсечка ще наричаме равнината π , която е перпендикулярна на XU и минава през средата ѝ.

Множеството от точки O_{1jk} лежат на *симетралната равнина* α_1 на PA_1 . По същия начин, множеството от точки O_{2jk} лежи на *симетралната равнина* α_2 на PA_2 . Тогава $\alpha_1 \parallel \alpha_2$. Аналогично дефинираме *симетралните равнини* β_j и γ_k съответно на PB_j и PC_k . Тогава точките O_{ijk} се явяват върхове на паралелепипеда, образуван от равнините α_i , β_j и γ_k . Тогава исканото следва, понеже диагоналите на паралелепипеда се пресичат в центъра му на симетрия.

11.3. Върху таблица 100×100 са поставени няколко непресичащи се равнобедрени правоъгълни триъгълника с катети 1, като всеки триъгълник покрива точно половин клетка. Оказало се, че всяка страна на клетка (включително и граничните) е покрита от точно един катет на триъгълник. Да се намери максималният възможен брой на клетките, които не съдържат нито един триъгълник.

Решение. Отговор – $49.50 = 2450$ клетки. Да положим $n = 50$. Ще казваме, че един триъгълник *горен*, е разположен над правата, определена от

хоризонталния му катет, и долен в противен случай. Да номерираме хоризонталните линии на мрежата с числата от 0 до $2n$ отдолу нагоре.

Да означим с u_k (съответно с d_k) броят на отсечките от k -тата линия, участващи в горни (съответно долни) триъгълатаници. Тогава $u_k + d_k = 2n$ и $u_0 = d_{2n} = 2n$. Освен това, вертикалните отсечки от мрежата, разположени между k -тата и $(k + 1)$ -вата линии, участват точно в $u_k + d_{k+1}$ триъгълника, откъдето $u_k + d_{k+1} = 2n + 1$. Оттук лесно се получава, че $d_k = k$ и $u_k = 2n - k$ за всяко k .

Да разгледаме сега клетките, разположени между k -тата и $(k + 1)$ -вата линии от мрежата. Поне $u_k = 2n - k$ от тези клетки съдържат горен триъгълник и поне $d_{k+1} = k + 1$ от тях съдържат долен такъв. Следователно свободните клетки този ред са не повече от $2n - \max\{u_k, d_{k+1}\}$, т.е. не повече от k при $k < n$ и не повече от $(2n - 1) - k$ при $k > n$. Тогава общият брой на свободните клетки не надминава $2(0 + 1 + \dots + (n - 1)) = n(n - 1)$.

Остава да посочим пример, при който се достига получената оценка. На Фиг. 1 е показан пример при $n = 4$. Пример при $n = 50$ се строи аналогично – отделя се ”правоъгълник” от клетки със страни от по $n + 1$ и n клетки, успоредни на диагоналите на мрежата, неговите клетки се оцветяват шахматно (така, че ъгловите клетки на правоъгълника са черни), и във всички черни клетки поставяме по два триъгълника (при това $n(n - 1)$ бели клетки остават свободни); в останалите четири ”ъгъла” на таблицата триъгълниците се поставят така, че правите им ъгли да са в същата посока, както и целия ”ъгъл”.

11.4. Тримерното пространство е разбито на тетраедри и октаедри с равнини с уравнения $x \pm y \pm z = n$ (за всички цели n). Нека точката (x_0, y_0, z_0) с рационални координати не лежи в никоя от равнините на разбиването. Да се докаже, че съществува естествено число k , за което точката (kx_0, ky_0, kz_0) лежи строго вътре в някой от октаедрите от разбиването.

Решение. Лема. Нека a, b, c и $a + b + c$ са рационални числа, които не са цели. Тогава съществува естествено k , за което ka, kb и kc не са цели, и $1 < \{ka\} + \{kb\} + \{kc\} < 2$.

Доказателство. Без ограничения на общността, можем да считаме, че $a, b, c \in (0, 1)$. Нека $f(t) = \{ta\} + \{tb\} + \{tc\}$. Ако $1 < a + b + c < 2$, то $k = 1$ върши работа.

Ако $a + b + c < 1$, избираме такова естествено m , за което ma, mb и

m са цели. Тогава $f(m-1) = f(-1) = 3 - (a+b+c) > 2 > 1$. Нека k е минималното естествено число, за което $f(k) > 1$ (т.е. $f(k-1) \leq 1$). Ще докажем, че за избраното k имаме $f(k) < 2$. Използваме неравенството $\{ka\} \leq \{(k-1)a\} + a$ и аналогичните му, следва

$$f(k) \leq f(k-1) + (a+b+c) < f(k-1) + 1 \leq 2.$$

Остава да докажем, че ka , kb и kc не са цели. Да допуснем, че някое от тях е цяло, например ka . Тогава $\{ka\} = \{(k-1)a\} + a - 1$ и оттам извеждаме $f(k) \leq f(k-1) + (a+b+c) - 1 < f(k-1) \leq 1$, което противоречи на избора на k .

Ако $a+b+c > 2$, то разглеждаме числата $a' = 1-a$, $b' = 1-b$, $c' = 1-c$, за които $a', b', c' \in (0,1)$ и $a' + b' + c' < 1$, което означава, че за a', b' и c' съществува k , удовлетворяващо условието на лемата. Това k ще изпълнява условието и за a, b и c .

Преминаваме към решението на задачата. Да въведем координатната система $Oabc$, за която на всяка точка с координати (x, y, z) от $Oxyz$ поставяме точка с координати (a, b, c) , където $a = y+z-x$, $b = z+x-y$, $c = x+y-z$. Тогава $x = \frac{b+c}{2}$, $y = \frac{c+a}{2}$ и $z = \frac{a+b}{2}$. Имаме $x+y+z = a+b+c$. Тогава равнините от условието съответстват на равнините $a = n$, $b = n$, $c = n$ и $a+b+c = n$ в $Oabc$. Нека $a_0 = y_0 + z_0 - x_0$, $b_0 = z_0 + x_0 - y_0$ и $c_0 = x_0 + y_0 - z_0$ с условието, че a_0 , b_0 , c_0 и $a_0 + b_0 + c_0$ не са цели.

Нека (u, v, w) е точка от $Oabc$ с нецели координати. Тогава тя лежи в някой куб от вида $A \leq a \leq A+1$, $B \leq b \leq B+1$, $C \leq c \leq C+1$. Този куб пресича равнините $a+b+c = A+B+C+1$ и $a+b+c = A+B+C+2$, които го разбиват на два тетраедъра и октаедър (който може да е неправилен). Ако (u, v, w) лежи във вътрешността на този октаедър, тя изпълнява условието $1 < \{u\} + \{v\} + \{w\} < 2$. Съгласно лемата, приложена за числата a_0 , b_0 и c_0 , можем да намерим число k , което изпълнява условието.

11.5. Нека n е естествено число. Върху всяка от $2n+1$ карти е написано по едно ненулево цяло число, като сумата на всички написани числа не е нула. С тези карти трябва да се заменят звездичките в израза $*x^{2n} + *x^{2n-1} + \dots + *x + *$ така, че полученият полином да няма *цели* корени. Винаги ли е възможно това?

Решение. Нека $p_0, p_2, \dots, p_{2n}$ са числата върху картичките, така че p_{2n} е числото с най-голяма абсолютна стойност, а p_i е коефициентът пред x^i .

Нека a е цяло, за което $|a| \geq 2$. Тогава

$$\begin{aligned} |a_{2n}x^{2n}| &> |p_{2n}a^{2n-1} + a^{2n-2} + \dots + 1| \\ &\geq |p_{2n-1}a^{2n-1}| + |p_{2n-2}a^{2n-2}| + \dots + |p_0| \\ &\geq |p_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + p_0|. \end{aligned}$$

Следователно при този избор на числата, няма цял корен с абсолютна стойност поне 2. Остава да разгледаме кога $-1, 0$ и 1 са корени. Понеже $p_0 \neq 0$, то 0 не е корен. От друга страна $p_{2n} + p_{2n-1} + \dots + p_0 \neq 0$, което означава че $x = 1$ също не е корен. Да допуснем, че $x = -1$ е корен на уравнението при произволно размястване на коефициентите p_i за $i \leq 2n - 1$. Да забележим, че полиномът не си променя стойността в $x = -1$ при размяната на коефициентите p_i и p_{i-1} , където $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$. Тогава $p_i = p_{i-1}$ и полиномът има вида $p_{2n}x^{2n} + p_0(x^{2n-1} + \dots + x + 1) = p_{2n} \neq 0$, което дава противоречие.

11.6. В една страна има $n > 1$ града, някои от които са свързани с двупосочни директни авиолинии, като между всеки два града съществува единствен маршрут от авиолиния (евентуално с прекачвания). Кметът на всеки град X преброил номериранията на градовете с числата от 1 до n , за които във всеки маршрут, започващ от X , номерата на градовете са в растящ ред. Всички кметове, освен един, забелязали, че техните резултати се делят на 2016 . Да се докаже, че и резултатът на последния кмет също се дели на 2016 .

Решение. Да изберем някакъв град A за столица. Ще наричаме един град четен, ако маршрутът от A до него е с четен брой полети, и нечетен в противен случай (в частност, A е четен град). Тогава четността на всеки два града, между които има директен полет, е различна. Ще докажем, че сумата на числата, получени от кметовете на четните градове, е равна на сумата на числата, получени от кметовете на нечетните градове, а от това лесно следва твърдението на задачата.

Да наречем едно номериране на градовете подходящо за град X , ако кметът на X я е броил. Ясно е, че във всяко номериране, подходящо за града X , той има номер 1 , така че всяко номериране е подходящо за не повече от един град.

Да разгледаме номериране, подходящо за четен град E . Нека в това номериране с номер 2 е град W . Тогава W е нечетен град, свързан с дирек-

тен полет с E (в противен случай по маршрута от E до W ще има град с по-голям номер). Разменяйки местата на номерата 1 и 2 получаваме номериране, в което номер 1 е за нечетен град (а именно W).

Да разгледаме произволен маршрут m , започващ от W . Този маршрут се получава от маршрут, започващ от E или с добавяне на W в началото (ако m минава през E), или с премахване на E от началото (в противен случай). Тогава лесно се вижда, че след размяната на 1 и 2 номерата в m са в нарастващ ред.

От горното следва, че след размяната на 1 и 2 от номериране, подходящо за четен град, се получава номериране, подходящо за нечетен град (и обратно). Това съпоставяне е взаимнооднозначно. Следователно имаме един и същи брой и от двата вида номерации, което и искахме да докажем.

11.7. Сумата на положителните числа a , b , c и d е равна на 3. Да се докаже неравенството

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leq \frac{1}{a^3 b^3 c^3 d^3}.$$

Решение. Умножаваме и двете страни на неравенството по $a^3 b^3 c^4 d^3 > 0$ и остава да докажем, че

$$b^3 c^3 d^3 + a^3 c^3 d^3 + a^3 b^3 d^3 + a^3 b^3 c^3 \leq 1.$$

Понеже неравенството е симетрично, без ограничение на общността можем да считаме, че $a \geq b \geq c \geq d$. От САСГ за числата a , b и $c+d$ получаваме $ab(c+d) \leq \left(\frac{a+b+(c+d)}{3}\right)^3 = 1$, което означава, че $a^3 b^3 (c+d)^3 \leq 1$. Сега ще покажем, че

$$b^3 c^3 d^3 + a^3 c^3 d^3 + a^3 b^3 d^3 + a^3 b^3 c^3 \leq a^3 b^3 (c+d)^3.$$

Последното неравенство е еквивалентно на

$$a^3 c^3 d^3 + b^3 c^3 d^3 \leq 3a^3 b^3 c^2 d + 3a^3 b^3 c d^2.$$

Да разгледаме неравенствата $a^3 c^3 d^3 \leq a^3 b^3 c^2 d$, $b^3 c^3 d^3 \leq a^3 b^3 c d^2$ и $0 < 2a^3 b^3 c^2 d + 2a^3 b^3 c d^2$. Те са верни и като ги съберем почленно, получаваме исканото.

11.8. В триъгълника ABC медианите AM_A , BM_B и CM_C се пресичат в точка M . Окръжността Ω_A минава през средата на отсечката AM и се допира до отсечката BC в точка M_A . Аналогично се дефинират окръжностите Ω_B и Ω_C . Да се докаже, че окръжностите Ω_A , Ω_B и Ω_C имат обща точка.

Решение. Лема. Външно за $\triangle ABC$ са построени $\triangle ABC_1$, AB_1C и A_1BC . Ако сборът $\sphericalangle BA_1C + \sphericalangle AB_1C + \sphericalangle AC_1B$ е кратен на 180 градуса, то тогава описаните окръжности около построените триъгълници се пресичат в една точка.

Доказателство. Нека X е втората пресечна точка на окръжностите, описани около $\triangle A_1BC$ и $\triangle ABC_1$. Тогава $\sphericalangle (BX, XC) = \sphericalangle BA_A, A_1C$ и $\sphericalangle (AX, XB) = \sphericalangle (AC_1, C_1B)$, откъдето

$$\begin{aligned}\sphericalangle (AX, XC) &= \sphericalangle (AX, XB) + \sphericalangle (XB, XC) \\ &= \sphericalangle (AC_1, C_1B) + \sphericalangle (BA_1, A_1C) \\ &= \sphericalangle (AB_1, B_1C).\end{aligned}$$

Тогава X лежи на описаната около $\triangle AB_1C$ окръжност.

Да се върнем към задачата. Нека K_A, K_B и K_C са средите съответно на AM_A, BM_B и CM_C . Тогава $M_C K_B \parallel AB$ и $K_B M_A \parallel MC$ като средни отсечки съответно в $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$, откъдето $\sphericalangle M_C K_B M_A = \sphericalangle AMC$. Аналогично $\sphericalangle M_C K_A M_B = \sphericalangle BMC$ и $\sphericalangle M_A K_C M_B = \sphericalangle BMA$. Тогава

$$\sphericalangle M_C K_A M_B + \sphericalangle M_B K_C M_A + \sphericalangle M_A K_B M_C = 360^\circ.$$

Съгласно лемата, описаните окръжности около триъгълниците $M_C K_A M_B$, $M_B K_C M_A$ и $M_A K_B M_C$ имат обща точка X . От тези окръжности имаме

$$\begin{aligned}\sphericalangle (K_B X, XM_C) &= \sphericalangle (K_B X, XM_C) + \sphericalangle (M_C X, XM_B) \\ &= \sphericalangle (K_B M_A, M_A M_C) + \sphericalangle (M_C M_A, K_A M_B) \\ &= \sphericalangle (MC, CA) + \sphericalangle (BM, MC) \\ &= \sphericalangle (K_B M_B, AC),\end{aligned}$$

което означава, че X лежи на Ω_B . Аналогично тя лежи и на останалите две окръжности от условието.

САЩ (19-20 април 2016)

Задача 1. Нека $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ са две по две различни непразни подмножества на множеството S . За всяко $i \in \{1, 2, \dots, 99\}$ е известно, че множествата X_i и X_{i+1} са непресичащи се и че обединението им не съвпада с S . Да се намери минималния възможен брой елементи в S .

Решение. Ще докажем, че $|S| \geq 8$.

Първо ще направим индуктивна конструкция на множество $S = \{1, 2, \dots, n\}$, за което $|S| = n \geq 4$, която се състои от $2^{n-1} + 1$ елемента в редица. При $n = 8$ имаме $129 > 100$ елемента, което ни е достатъчно. Разглеждаме следната конструкция за $n = 4$:

$$34, 1, 23, 4, 12, 3, 14, 2, 13.$$

Сега прилагаме следната индуктивна стъпка за верига от n към верига от $n + 1$ елемента. Избираме веригата с n елемента, задраскваме последния и правим копие на получената редица, като двете копия са разделени едно от друго със знака $\emptyset$. Задрасканият елемент от редицата с дължина n се добавя като последна цифра на всеки елемент с нечетен индекс (считаме, че първият елемент е с индекс 1), като знакът за празното множество се счита за елемент (т.е. влияе на четността на индексите). Така за $|S| = 8$ имаме конструкция.

Ще покажем, че при $n = 7$ исканото е невъзможно. Да разгледаме всички подмножества на S с поне 4 елемента. Те могат да се комбинират единствено с 2-елементни и 1-елементни подмножества на S , които са $\binom{7}{1} + \binom{7}{2} = 28$ на брой. Така имаме най-много 30 подмножества с поне 4 елемента. От друга страна, имаме $\binom{7}{3} = 35$ подмножества с 3 елемента и общо 28 с 1 или 2 елемента. Така броят на подмножествата е по малък или равен на $28 + 35 + 30 = 93$, което е по-малко от 100. При $|S| \leq 6$ пък имаме, че S има най-много $2^6 = 64$ подмножества, което отново не изпълнява условието.

Задача 2. Да се докаже, че за всяко естествено k , числото

$$A = (k^2)! \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$

е цяло.

Решение. Достатъчно е да докажем, че каноничната степен в A на всяко просто число p е неотрицателна. Преди това ще припомним, че степенята на простото p в каноничното разлагане на $n!$ е равна на $\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$. Тогава е достатъчно да докажем, че за всяко просто p е в сила неравенството

$$\left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor \geq \sum_{j=0}^{k-1} \left(\left\lfloor \frac{j+k}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{p} \right\rfloor \right).$$

Тъй като двете страни на последното неравенство са цели числа, то е еквивалентно на

$$\left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor > -1 + \sum_{j=0}^{k-1} \left(\left\lfloor \frac{j+k}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j}{p} \right\rfloor \right).$$

С $\{x\}$ означаваме дробната част на числото x , т.е. $\{x\} = x - [x]$. Така последното неравенство се свежда до

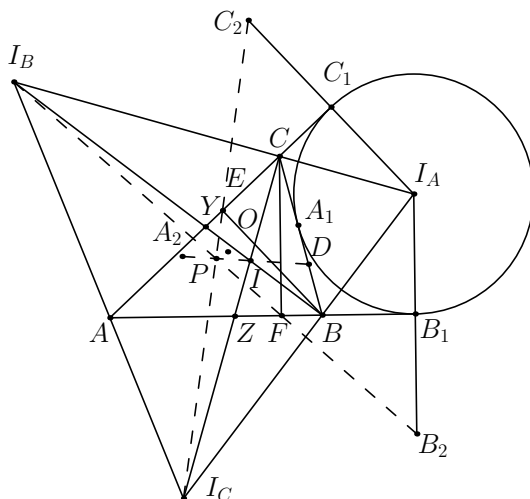
$$(*) \quad \left\{ \frac{k^2}{p} \right\} + \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{j}{p} \right\} < 1 + \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{j+k}{p} \right\}.$$

Сега отбелязваме, че сумата от остатъците на $0, 1, \dots, k-1$ при деление на p е по-малка или равна от сумата на остатъците на $k, k+1, \dots, 2k-1$. Тогава получаваме

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{j}{p} \right\} \leq \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ \frac{j+k}{p} \right\}.$$

От друга страна, $\left\{ \frac{k^2}{p} \right\} < 1$ и събирайки почленно последните две неравенства, получаваме $(*)$, което ни дава искания резултат.

Задача 3. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който I_B и I_C са съответно центровете на външновписаните окръжности срещу върховете B и C , а O е центърът на описаната окръжност. Точките E и Y лежат върху отсечката AC , като $\sphericalangle ABY = \sphericalangle CBY$ и $BE \perp AC$. Точките F и Z лежат на отсечката AB , като $\sphericalangle ACZ = \sphericalangle BCZ$ и $CF \perp AB$. Правите $I_B F$ и $I_C E$ се пресичат в точката P . Да се докаже, че правите PO и YZ са перпендикулярни.



Решение. Означаваме с I_A центърът на външновписаната окръжност срещу върха A в $\triangle ABC$. Нека тя допира правите BC , AB и AC съответно в точките A_1 , B_1 и C_1 , и точките A_2 , B_2 и C_2 са образите на I_A при симетрия относно A_1 , B_1 и C_1 съответно. Нека I е центърът на вписаната окръжност в същия триъгълник. Точката $D \in BC$ е петата на височината през A . Да означим с S центърът на описаната окръжност в триъгълник II_BI_C .

Точките D , I и A_2 лежат на една права. Тройките точки E , I_C , C_2 и F , I_B , B_2 са също колинеарни.

Да забележим, че $B_2C_2 \parallel B_1C_1 \parallel I_BI_C$, откъдето $B_2C_2 \parallel I_BI_C$. Аналогично с другите страни, получаваме $\triangle II_BI_C$ и $\triangle A_2B_2C_2$ са хомотетични и нека P е центърът им на хомотетия. Тогава D, I, P и A_2 лежат на една права, както и $P \in I_AS$. От друга страна I_AS се явява права на Ойлер в $\triangle II_BI_C$. Тази права минава през центъра на окръжността на деветте точки в $\triangle II_BI_C$. Обаче този център съвпада с O , откъдето P , O и I_A лежат на една права.

Остава да докажем, че $OS \perp YZ$. За целта ще докажем, че YZ е радикалната ос на описаните окръжности около $\triangle ABC$ и $\triangle II_BI_C$. Обаче Y се оказва радикалният център за окръжността с диаметър II_B и двете разглеждани. Аналогично Z е радикалния център за окръжността с диаметър II_C и двете разглеждани. Така получаваме искания резултат.

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива че за

всички $x, y \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$(f(x) + xy)f(x - 3y) + (f(y) + xy)(f(3x - y)) = (f(x + y))^2$$

Решение. Заместваме с $x = y = 0$, откъдето $f(0) = 0$. Нека сега $x = 0$. Получаваме $f(y)f(-y) = f(y)^2$ и аналогично $f(-y)f(y) = f(-y)^2$. Следователно f е четна функция.

Заместваме $x = -y$ и получаваме, че за всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено $f(x) = x^2$ или $f(4x) = 0$ (*).

Ще покажем, че за всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено точно едно от равенствата $f(x) = x^2$ или $f(x) = 0$ (**). Ще докажем това твърдение като изберем $t \in \mathbb{R}$ (ако има такова), за което $f(t) \neq 0$. Ясно е, че $t \neq 0$. Тогава $f\left(\frac{t}{4}\right) = \frac{t^2}{16}$ съгласно резултата от (*). Заместваме в условието с $x = \frac{3t}{4}$ и $y = \frac{t}{4}$. Оттук $\frac{t^2}{4}f(2t) = f(t^2)$ (***) за всяко t . Получаваме $f(2t) \neq 0$. Аналогично $f(4t) \neq 0$ и замествайки $x = t$ в (*) получаваме $f(t) = t^2$.

Сега ще докажем, че ако $f(a) = 0$ за някое $a \neq 0$, то $f \equiv 0$.

Нека $b \in \mathbb{R}$. Ще докажем, че $f(b) = 0$. От (*) имаме, че $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Съгласно (***) можем да изберем $c > 100b$, за което $f(c) = 0$. Нека $x, y > 0$ и $x - 3y = b$ и $x + y = c$, което е еквивалентно на $(x, y) = \left(\frac{3c+b}{4}, \frac{c-b}{4}\right)$. Заместваме в условието на задачата и получаваме

$$(f(x) + xy)f(b) + (f(y) + xy)f(3x - y) = 0.$$

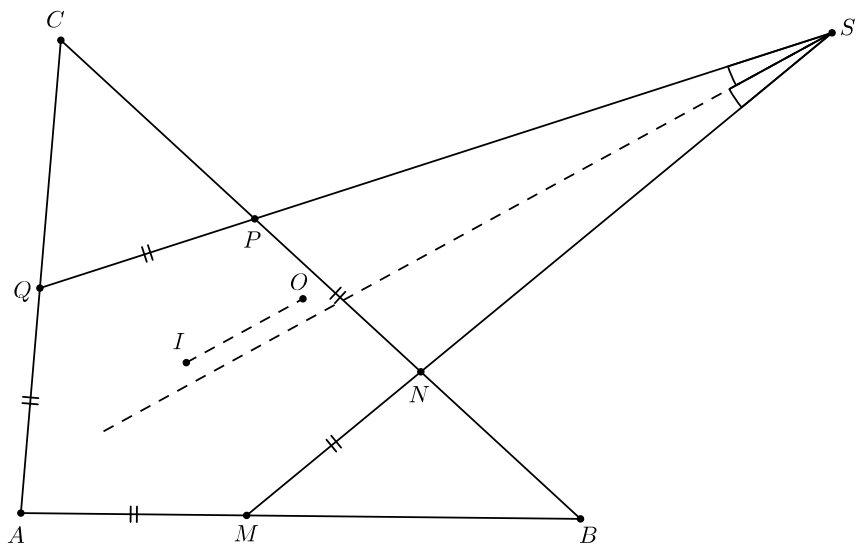
Но всички събираеми от лявата страна на последното равенство са неотрицателни и в частност $f(x) + xy > 0$ и $f(y) + xy > 0$. Оттук следва директно $f(b) = f(3x - y) = 0$, с което доказателството завършва.

Тогава ако съществува $a \neq 0$, за което $f(a) = 0$, то $f(x) = 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. След директна проверка се установява, че тази функция е решение. Ако за всяко $a \neq 0$ имаме $f(a) \neq 0$, то тогава $f(a) = a^2$, откъдето получаваме, че $f(x) = x^2$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Тази функция също е решение на уравнението, в което можем да се уверим след директна проверка.

Търсените функции са $f(x) = x^2$ и $f(x) = 0$.

Задача 5. В $\triangle ABC$ е вписан петоъгълник $AMNPQ$ с равни страни, като $M \in AB$, $Q \in AC$ и $N, P \in BC$. Правите MN и PQ се пресичат в

точка S , а с l означаваме ъглополовящата на $\angle MSQ$. Да се докаже, че $OI \parallel l$, където O и I са съответно центровете на описаната и вписаната окръжности в $\triangle ABC$.



Решение. Означаваме с $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ϵ съответно $\angle BAC, \angle ABC, \angle ACB, \angle MNB$ и $\angle CPQ$. Без ограничение на общността считаме, че страната на $AMNPQ$ е равна на 1. Разглеждаме случая, в който $AB < BC$.

Тогава $BN = (c - 1) \cos \beta + \cos \delta$ и $CP = (b - 1) \cos \gamma + \cos \epsilon$. Обаче $a = 1 + BN + CP$, което е еквивалентно на $\cos \delta + \cos \epsilon = \cos \beta + \cos \gamma - 1$.

От синусова теорема в $\triangle BNM$ получаваме $\frac{c - 1}{\sin \delta} = \frac{1}{\sin \beta}$, а от същата теорема в $\triangle CPQ$ извеждаме $\frac{b - 1}{\sin \epsilon} = \frac{1}{\sin \gamma}$. От последните две равенства

достигахме до $\sin \varepsilon - \sin \delta = \sin \beta - \sin \gamma$. Следователно

$$\tan \left(\frac{\varepsilon - \delta}{2} \right) = \frac{\sin \varepsilon - \sin \delta}{\cos \delta + \cos \varepsilon} = \frac{\sin \beta - \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma - 1}.$$

Понеже l сключва ъгъл от $90^\circ + \frac{\varepsilon - \delta}{2}$ с правата BC . Нека φ е острият ъгъл, който правите IO и BC сключват. Тогава $\tan \varphi = \frac{r - R \cos \alpha}{\frac{1}{2}(b - c)}$.

Ще покажем, че $\tan \varphi = \cot \left(\frac{\varepsilon - \delta}{2} \right)$, откъдето исканите прави ще са перпендикулярни. Последното равенство е еквивалентно на

$$\frac{r - R \cos \alpha}{\frac{1}{2}(b - c)} = \frac{\cos \beta + \cos \gamma - 1}{\sin \beta - \sin \gamma}.$$

Представяме $b = 2R \sin \beta$ и $c = 2R \sin \gamma$ и последното равенство се свежда до $\frac{r}{R} + 1 = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma$. Използвайки добре известната формула $r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$ и с подходящи преобразувания ще получим искания резултат.

Задача 6. Дадени са естествени числа n и k , за които $n \geq k \geq 2$. Играта следната игра със зъл Магьосник, който разполага с $2n$ на брой карти, като за всяко $i = 1, 2, \dots, n$, числото i е написано на точно две карти. Магьосникът подрежда картите с лицето надолу в произволен ред. Позволено ви е да правите ходове по следния начин: избирате k от картите на магьосника и той разкрива числата, записани на тях. Ако измежду тези k карти има две с равни числа записани на тях, вие печелите играта. Ако не, магьосникът разбърква само картите, които сте избрали (без да го гледате) и сте отново на ход. Ще казваме, че една такава игра е *печелима* ако съществуват естествено число m и стратегия, за които вие можете да спечелите с най-много m хода, независимо от разбъркванията на магьосника. За кои стойности на n и k играта е печелима?

Решение. Играта е печелима тогава и само тогава, когато $n \neq k$.

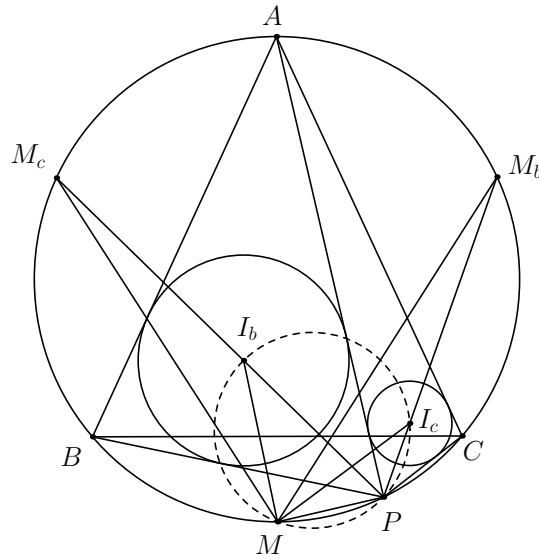
Нека $2 \leq k < n$. Да номерираме картите последователно с числата от 1 до $2n$. Питаме последователно за $\{1, 2, \dots, k\}$, $\{2, 3, \dots, k+1\}$ и т.н., накрая за $\{2n-k+1, 2n\}$. Отчитайки разликите от две съседни запитвания,

научаваме стойностите на картите $1, 2, \dots, 2n - k$. Тъй като $k < n$, знаем повече от n карти и следователно можем да намерим две еднакви.

При $k = n$ да отбележим първо следното: на всеки ход след първия, ако играта не е спечелена, имаме n карти, показващи всяко $i = 1, 2, \dots, n$ точно по веднъж, като играчът няма (след разбъркването) информация за реда на тези карти. Твърдим, че това означава, че играта не е печелима. Действително, нека S е множеството от тези карти, а $\bar{S}$ да е множеството от останалите n карти. Играчът няма как да спечели, ако избира само от S или от $\bar{S}$. Ако пък избере няколко карти от S и останалите от $\bar{S}$, може да се случи изборът от $\bar{S}$ да е допълнението на този от S . Ясно е, че никаква стратегия не може да предотврати това.

САЩ – Младежи (19-20 април 2016)

Задача 1. Равнобедреният $\triangle ABC$ ($AB = AC$) е вписан в окръжност ω . Нека P е произволна точка от дъгата $\widehat{BC}$, която не съдържа A . Точките I_B и I_C са съответно центровете на вписаните окръжности в $\triangle ABP$ и $\triangle ACP$. Да се докаже, че описаната около $\triangle PI_BI_C$ окръжност минава през постоянна точка, която не зависи от избора на P .



Решение. Нека M е средата на дъгата $\widehat{BC}$, която не съдържа точката A . Ще докажем, че M изпълнява исканите свойства.

Понеже $\angle MPA = 90^\circ$ и PA разполовява $\angle I_BPI_C$, то PM е външна ъглополовяща за този ъгъл и значи е достатъчно да докажем, че $MI_B = MI_C$. Означаваме M_B и M_C вторите пресечни точки на правите PI_B и PI_C с ω . Тогава имаме $M_BI_B = M_BB = M_C C = M_C I_C$ и $\angle I_B M_B M = \frac{\widehat{PB}}{2} = \angle I_C M_C M$. Следователно $\triangle I_B M_B M \cong \triangle I_C M_C M$, откъдето получаваме $MI_B = MI_C$ като съответни елементи в тези триъгълници.

Задача 2. Да се докаже, че съществува естествено число $n < 10^6$, за което 5^n има шест последователни нули в записа си.

Решение. Ще покажем, че $n = 20 + 2^{19}$ удовлетворява условието. Ясно е, че $5^n \equiv 5^{20} \pmod{5^{20}}$. Ще покажем, че $5^n \equiv 5^{20} \pmod{2^{20}}$. Понеже $\varphi(2^{20}) = 2^{19}$, то от теоремата на Ойлер $5^{2^{19}} \equiv 1 \pmod{2^{20}}$, откъдето $5^{2^{19}+20} \equiv 5^{20} \pmod{2^{20}}$, с което доказахме $5^n \equiv 5^{20} \pmod{2^{20}}$. Така можем да заключим, че $5^n \equiv 5^{20} \pmod{10^{20}}$.

Обаче $5^{20} = \frac{1}{2^{20}} \cdot 10^{20} < \frac{1}{1000^2} 10^{20} = 10^{14}$. Така последните 20 цифри на 5^{20} ще започват с шест нули, което доказва, че избраното n работи. Остава да отбележим, че $20 + 2^{19} < 10^6$.

Задача 3. Виж задача 1 от САЩ.

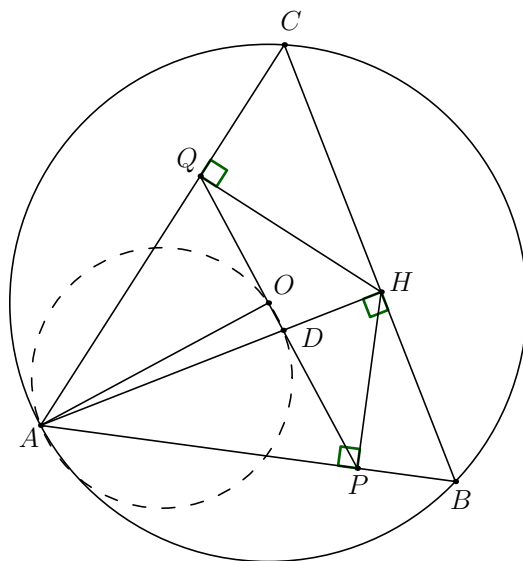
Задача 4. Да се намери най-малкото естествено число N със следното свойство: които и 2016 елемента да изтрием от множеството $\{1, 2, \dots, N\}$ винаги ще има някои 2016 измежду останалите със сума N .

Решение. Отговорът е $N = 2017 + 2018 + \dots + 4032 = 1008.6049$.

Ще докажем, че N не може да бъде по-малко. За целта премахваме числата от 1 до 2016 включително. Така измежду останалите числа сумата на кои да е 2016 от тях ще бъде винаги по-голяма или равна на $2017 + 2018 + \dots + 4032$.

Остава да се уверим, че отговорът наистина изпълнява условието на задачата. Разглеждаме двойките $(1, 6048), (2, 6047), (3, 6046), \dots, (3024, 3025)$ (3024 на брой). Които и 2016 числа да изтрием, ще останат поне 1008 от тези двойки, в които и двете числа няма да са изтрети. Но сумата на всяка от числата на всяка от разглежданите двойки е равна на 6049, което дава искания резултат.

Задача 5. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с център на описаната окръжност O . Точката H е петата на височината от A към BC , а P и Q са ортогоналните проекции на H върху AB и AC , съответно. Известно е, че $AH^2 = 2AO^2$. Да се докаже, че точките O, P и Q лежат на една права.



Решение. Понеже $AP \cdot AB = AH^2 = AQ \cdot AC$, следва че $PQCB$ е вписан. Получаваме $AO \perp PQ$. Нека K е петата на перпендикуляра от A към PQ . Означаваме с D диаметрално противоположната точка на A . Тогава A , K , O и D са колинеарни.

От друга страна, четириъгълникът $KQCD$ е вписан, защото $\angle QKD = \angle QCD = 90^\circ$. Тогава получаваме $AK \cdot AD = AQ \cdot QC = AH^2$ и отгук $AK = \frac{AH^2}{AD} = \frac{AH^2}{2AO} = AO$. Тогава $K \equiv O$.

Задача 6. Виж задача 4 от САЩ.

Тайланд 2015

Задача 1. Нека p е просто число и $a_1, a_2, a_3, \dots$ е редица от естествени числа, такива че

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p$$

за всяко естествено число n . Да се докаже, че за всяко естествено число n числото a_{n+1} дели $a_n + a_{n+2}$.

Решение. Разсъждаваме индуктивно по n . Имаме $a_1 a_3 + a_3^2 = a_2 a_4 + a_2^2$, откъдето a_2 дели $a_3(a_1 + a_3)$. Ако допуснем, че $d = (a_2, a_3) > 1$, то d дели $a_1 a_3 - a_2^2 = p$ и значи $d = p$ – тогава p дели a_2 и a_3 и от $p = a_3 a_5 - a_4^2$ имаме p дели a_4 . Оттук следва, че p^2 дели $a_2 a_4 - a_3^2 = p$, противоречие. Следователно $(a_2, a_3) = 1$ и сега $a_2 | a_3(a_1 + a_2)$ дава $a_2 | (a_1 + a_3)$, с което базата е завършена.

Да допуснем, че за някое $k \in \mathbb{N}$ имаме $a_{k+1} | (a_k + a_{k+2})$. Чрез рекурентната формула директно се проверява, че

$$\frac{a_k + a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} + a_{k+3}}{a_{k+2}}$$

Тъй като a_{k+1} дели $a_k + a_{k+2}$, двете страни на горното равенство са цели числа, откъдето a_{k+2} дели $a_{k+1} + a_{k+3}$, както се искаше.

Задача 2. Нека a, b, c са положителни реални числа, такива че $abc = 1$. Да се докаже, че

$$\frac{a^5}{a^3 + 1} + \frac{b^5}{b^3 + 1} + \frac{c^5}{c^3 + 1} \geq \frac{3}{2}.$$

Кога се достига равенство?

Решение. От Хубавото неравенство имаме

$$\begin{aligned} \frac{a^5}{a^3 + 1} + \frac{b^5}{b^3 + 1} + \frac{c^5}{c^3 + 1} &= \frac{a^5}{a^3 + abc} + \frac{b^5}{b^3 + abc} + \frac{c^5}{c^3 + abc} \\ &= \frac{a^4}{a^2 + bc} + \frac{b^4}{b^2 + ac} + \frac{c^4}{c^2 + ab} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^2 + bc) + (b^2 + ac) + (c^2 + ab)}, \end{aligned}$$

а от САСГ имаме и

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3.$$

Следователно

$$\begin{aligned} \frac{a^5}{a^3+1} + \frac{b^5}{b^3+1} + \frac{c^5}{c^3+1} &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+bc) + (b^2+ac) + (c^2+ab)} \\ &\geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2} \\ &\geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Равенство се достига при $a = b = c = 1$.

Задача 3. Нека $P = \{(x, y) | x, y \in \{0, 1, \dots, 2015\}\}$ е множество от точки в равнината. В равнината са поставени няколко хоризонтални и вертикални отсечки, всяка с единична дължина, така че краищата на всяка отсечка са от P , всяка точка от P е край на поне една отсечка и никои две отсечки нямат общ край.

Да се докаже, че съществува хоризонтална или вертикална права, минаваща през средите на поне 506 отсечки.

Решение. Понеже има 2016^2 точки в P , имаме общо $\frac{2016^2}{2}$ отсечки. Всяка вертикална отсечка има долен край върху правата $y = i$ за някое $i = 0, 1, \dots, 2014$ и всяка хоризонтална отсечка има ляв край върху правата $x = j$ за някое $j = 0, 1, \dots, 2014$. От принципа на Дирихле следва, че има поне $\lceil \frac{2016^2}{2 \cdot 2015} \rceil = 505$ успоредни отсечки, чиито леви (долни) краища лежат на една и съща права. Без ограничение на общността нека тези отсечки са вертикални и долният им край лежи на правата $y = i^*$.

Да допуснем, че тези отсечки са точно 505 и нека те са $r_1, r_2, \dots, r_{505}$. Да забележим, че има точно $2016 \cdot (2016 - i - 1)$ точки от P , които са над правата $y = i^*$. Точно 505 от тези са горните краища на $r_1, r_2, \dots, r_{505}$, а другите могат да се разпределят в двойки краища на отсечка над правата $y = i^*$. Последното е невъзможно, понеже $2016 \cdot (2016 - i - 1) - 505$ е нечетно.

Следователно има поне 506 вертикални отсечки с долен край върху

$y = i^*$. Сега е ясно, че правата $y = i^* + \frac{1}{2}$ изпълнява условието на задачата.

Задача 4. Даден е неравнобедрен $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB > 90^\circ$. Вписаната окръжност с център I се допира до страните AB , BC и CA съответно в точките D , E и F . Правите AI и BI пресичат отсечката EF в точките M и N , съответно. Ако G е средата на AB , да се докаже, че точките M , N , D и G лежат на една окръжност.

Решение. Да отбележим, че M и N са външни за $\triangle ABC$. При стандартните означения за триъгълник имаме

$$\sphericalangle MEB = \sphericalangle CEF = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} = \sphericalangle MIB$$

и следователно $IBME$ е вписан и $\sphericalangle AMB = 90^\circ$. Аналогично $AIFN$ е вписан и $\sphericalangle ANB = 90^\circ$. Оттук $ABMN$ е вписан с център G .

Сега от радикалните оси на окръжностите $MBDI$, $NADI$ и $ABMN$ получаваме, че пресечната точка X на AN и BM лежи на DI . Сега в $\triangle ABX$ имаме M , N и D като пети на височини в него. Следователно описаната окръжност на $\triangle MND$ е окръжността на Ойлер за $\triangle ABX$, която минава през средата на AB . Следователно точките M , N , D , G лежат на окръжността на Ойлер за $\triangle ABX$, с което задачата е решена.

Задача 5. Нека $n \geq 6$ е естествено число. Да се докаже, че ако $n + 1$ е просто число, то числото

$$\left\lceil \frac{(n-1)!}{n^2+n} \right\rceil$$

е нечетно.

Решение. Да означим $p = n + 1 \geq 7$. Тогава $p - 1$ е съставно – нека $p - 1 = ab$ за $1 < a, b \leq p - 2$. Имаме, че $p - 1$ дели $(p - 2)!$ понеже $(p - 2)!$ съдържа различните множители 2 и $\frac{p-1}{2}$. Нека $(p - 2)! = k(p - 1)$. Понеже $p \geq 7$, измежду числата от 1 до $p - 2$ има поне две четни. Нека l е максималното естествено число, за което $2^l | p - 1$. Тогава множеството $\{1, 2, \dots, p - 2\} \cup \{2^l, \frac{p-1}{2^l}\}$ съдържа поне едно четно число. Следователно k е четно. Имаме $(p - 1)! \equiv k(p - 1)^2 \equiv k \pmod{p}$ и от теоремата на Уилсън следва, че $k \equiv -1 \pmod{p}$. Така съществува естествено число m , за което $k = mp - 1$, като освен това m е нечетно (понеже k е четно). Получаваме

$$\frac{(n-1)!}{n^2+n} = \frac{(p-1)!}{(p-1)^2p} = \frac{k}{p} = m - \frac{1}{p}$$

и от четността на m твърдението следва.

Задача 6. Дадени са естествени числа m и n . Да се намери броят начини да се попълнят клетките на таблица $m \times n$ с числа от множеството $\{-2, -1, 1, 2\}$, така че произведението на числата във всеки ред и всяка колона е равно на (-2) .

Решение. Нека с a_{ij} означим числото в i -тия ред и j -тия стълб, за $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ и $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

При $m \neq n$ попълване с исканите условия не съществува – наистина, във всеки ред трябва да има точно едно число с абсолютна стойност 2 (и значи общо m на брой), аналогично и за колоните (и значи общо n на брой).

Нека $m = n$. Първо имаме $n!$ начина да изберем полетата с абсолютна стойност 2 (не е възможно да има поне две числа с модул 2 на един и същи ред или колона). Останалите числа са с модул 1.

Можем да изберем знакът на a_{ij} свободно за $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ – има $2^{(n-1)^2}$ начина за това. Понеже произведението на числата във всеки ред и всяка колона е фиксирано, всеки от горните избори еднозначно определя знаците на a_{in} и a_{nj} за $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Накрая, да забележим, че

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_{in} = \prod_{j=1}^{n-1} a_{nj}$$

понеже произведението вляво (съответно, вдясно), умножено по $\prod_{1 \leq i, j \leq n-1} a_{ij}$, е равно на произведението на числата в първите $n-1$ реда (съответно, колони), т.е. на $(-2)^{n-1}$. Следователно знакът на a_{nn} е еднозначно определен. Така отговорът е $n!2^{(n-1)^2}$.

Задача 7. Нека A , B и C са центровете на три две по две външнодопиращи се окръжности с радиуси r_a , r_b и r_c , съответно. Ако r е радиусът на вписаната в триъгълника ABC окръжност, да се докаже, че

$$r^2 \leq \frac{1}{9}(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2).$$

Решение. Ще използваме стандартните означения за страните на $\triangle ABC$. Ясно е, че

$$p = \frac{a+b+c}{2} = r_a + r_b + r_c.$$

От Хероновата формула, $S = pr$, $s - a = r_a$ и аналогичните получаваме

$$r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{r_a r_b r_c}{r_a + r_b + r_c}.$$

Остава да съобразим, че от неравенството между средноаритметично и средногеометрично имаме

$$\frac{r_a r_b r_c}{r_a + r_b + r_c} \leq \frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{9}$$

и твърдението следва.

Задача 8. Естествените числа m и n са такива, че числото $m - n$ е нечетно. Да се докаже, че числото $(m + 3n)(5m + 7n)$ не е точен квадрат.

Решение. Да допуснем противното и нека $d = (m, n)$. Тогава $m = dx$, $n = dy$ с $(x, y) = 1$ и

$$(m + 3n)(5m + 7n) = d^2(x + 3y)(5x + 7y).$$

Понеже $m - n$ е нечетно, същото важи и за $x - y$.

Нека c е най-големия общ делител на $x + 3y$ и $5x + 7y$. Двете са нечетни, така че c също е нечетно. Подходящи линейни комбинации дават, че c дели $8x$ и $8y$, а значи и x и y . Понеже $(x, y) = 1$, следва че $c = 1$.

Сега от допускането следва, че числата $x + 3y = a^2$ и $5x + 7y = b^2$ са точни квадрати на (нечетни) естествени числа. От четността на a и b получаваме $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{8}$. От друга страна

$$a^2 - b^2 = 4(x - y)$$

като $x - y$ е нечетно, противоречие. С това задачата е решена.

Задача 9. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива че

$$f(f(x) + 2y) = 6x + f(f(y) - x)$$

за всички $x, y \in \mathbb{R}$.

Решение. Полагаме $y = -\frac{f(x)}{2}$ в даденото уравнение и получаваме

$$f\left(f\left(-\frac{f(x)}{2}\right) - x\right) = f(0) - 6x$$

Сега ако за произволно $y \in \mathbb{R}$ изберем $x = \frac{f(0)-y}{6}$, последното уравнение дава

$$f(A(y)) = y$$

където $A(y)$ е функция на y . Следователно f е сюрективна.

Сега ще покажем, че f е инективна. Нека $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ са такива, че $f(x_1) = f(x_2)$. Понеже f е сюрективна, съществува y , за което $f(y) = x_1 + x_2$. Тогава

$$\begin{aligned} 6x_1 + f(x_2) &= 6x_1 + f(f(y) - x_1) \\ &= f(f(x_1) + 2y) \\ &= f(f(x_2) + 2y) \\ &= 6x_2 + f(f(y) - x_2) \\ &= 6x_2 + f(x_1) \end{aligned} \tag{3}$$

и оттук $x_1 = x_2$.

Сега $x = 0$ в даденото уравнение дава $f(f(0) + 2y) = f(f(y))$ и инективността дава $f(y) = f(0) + 2y$ за всяко $y \in \mathbb{R}$. Директно се проверява, че всяка функция от вида $f(x) = 2x + c$ е решение на задачата.

Задача 10. Нека $m, n \geq 2$ са естествени числа. mn момчета са разпределени на m отбора, всеки по n човека. На всеки отбор е даден уникален цвят и след това всяко момче получило кърпа с цвета на отбора си.

Всички момчета са седнали в кръг около огън, като n -те момчета във всеки отбор седят заедно.

Командирът иска от момчетата да правят представления, като в едно представление групата е от поне двама и всички имат кърпи от един и същи цвят. След края на представлението те се връщат в началните си позиции и командирът намира друга група за следващото представление. Никои две представления не се състоят от една и съща група хора, без значение от цвета на кърпата.

Ако командирът в някой момент не може да намери група от момчета, изпълняващи горните условия, той ще нареди на всяко момче да даде кърпата на левия си съсед преди да се опита да намери група отново. Това се повтаря докато е възможно да има представления, изпълняващи горните условия.

Да се намери броят на възможните представления.

Решение. Да забележим, че в група от момчета в някакъв момент всички ще имат кърпи от един цвят (и значи ще бъдат избрани за представление)

тогава и само тогава когато има най-много $n - 2$ човека между най-левия и най-десния в групата. Следователно броят на възможните представления е равен на броят начини да изберем човек за най-ляв и след това да изберем поне едно от $n - 1$ момчета, седящи вдясно от него. Така търсеният брой е $mn(2^{n-1} - 1)$.

Хонг Конг 2016

Задача 1. Всяка точка в равнината е оцветена в червено или синьо. Да се докаже, че съществува многоъгълник с едноцветни върхове от поне един от следните видове:

- Равностранен триъгълник с дължина на страната 2,
- Равностранен триъгълник с дължина на страната $\sqrt{3}$,
- Ромб с дължина на страната 1.

Решение. Първо ще докажем, че или съществува едноцветен равностранен триъгълник с дължина на страната 1, или такъв с дължина на страната $\sqrt{3}$. Да допуснем, че триъгълник от първия тип няма – тогава съществуват две точки A и B , като A е червена, B е синя и $AB = 1$. Да разгледаме точка C , за която $AC = BC = 2$.

Без ограничение нека C е синя. Ако M е средата на AC , то тя има същия цвят като на A или на C – нека без ограничение е на A . Да разгледаме равностранните триъгълници ADM и AEM – тогава по допускането D и E са в синьо и лесно се проверява, че триъгълникът CDE е син и равностранен с дължина на страната $\sqrt{3}$.

Сега да допуснем, че съществува едноцветен (червен) триъгълник PQR , който е равностранен с дължина на страната 1. Външно за него построяваме равностранните триъгълници PQW , QRU и RPV . Тогава или U , V и W са едновременно сини (и получаваме равностранен триъгълник с дължина на страната 2), или например U е червена и $PQUR$ е ромб с исканите свойства.

Задача 2. Нека a , b и c са различни ненулеви реални числа. Да се докаже, че ако полиномите $ax^3 + bx + c$, $bx^3 + cx + a$ и $cx^3 + ax + b$ имат общ корен, то поне един от тях има три (не непременно различни) реални корена.

Решение. Нека t е общият корен на трите полинома. Събирайки трите съответни уравнения, получаваме $(a + b + c)(t^3 + t + 1) = 0$.

Ако $t^3 + t + 1 = 0$, от $at^3 + bt + c = 0$ получаваме $(b - a)t + c - a = 0$, откъдето $t = \frac{c - a}{a - b}$. Аналогично $t = \frac{a - b}{b - c}$ от $bt^3 + ct + a = 0$ и $t = \frac{b - c}{c - a}$

от $ct^3 + at + b = 0$. Умножавайки трите, получаваме $t^3 = 1$, което води до противоречие с $t^3 + t + 1 = 0$.

Следователно $a + b + c = 0$. Сега е ясно, че $t = 1$ е общ корен за трите полинома. Достатъчно е да докажем, че някой от полиномите има поне още един реален корен. Имаме два случая:

1. Точно две от a , b и c са положителни, да речем a и b . Да разгледаме $f(y) = by^3 + cy + a$. Имаме $f(0) = a > 0$ и понеже при $y \rightarrow -\infty$ имаме $f(y) < 0$, следва че f има и отрицателен корен (т.е. различен от 1).
2. Точно две от a , b и c са отрицателни, да речем a и b . Тогава $f(0) = a < 0$ и при $y \rightarrow -\infty$ Както в предходния случай получаваме, че $g(y) = -f(y)$ има реален корен, различен от 1.

Задача 3. Да се реши в цели числа уравнението

$$(b^2 + 11(a - b))^2 = a^3b.$$

Решение. Отговор. $(0, 11)$ и (t, t) , $t \in \mathbb{Z}$. Уравнението е еквивалентно на

$$(a - b)(a^2b + ab^2 + b^3 - 22b^2 - 121(a - b)) = 0.$$

Случаят $a = b$ е ясен. Нека $a \neq b$ и $a^2b + ab^2 + b^3 - 22b^2 - 121(a - b) = 0$. Ако $b = 0$, то $a = 0$, противоречие. Разглеждаме еквивалентното уравнение

$$ba^2 + (b^2 - 121)a + b^3 - 22b^2 + 121b = 0$$

като квадратно относно a с дискриминанта $D = (3b + 11)(11 - b)^3$. Условието $D \geq 0$ дава $-\frac{11}{3} \leq b \leq 11$ и чрез директни проверки получаваме само решението $(0, 11)$.

Задача 4. Даден е неравнобедрен триъгълник ABC . Точките $D \in AB$ и $E \in AC$ са такива, че описаните около $\triangle ACD$ и $\triangle ABE$ окръжности се допират до BC . Нека F е пресечната точка на BC и DE . Да се докаже, че правата AF е перпендикулярна на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

Решение. Нека H е ортоцентърът на $\triangle ABC$ и D' и E' са симетричните точки на A относно височините CH и BH . Тогава D' лежи на AB , E' лежи на AC и H е центърът на описаната около $\triangle AD'E'$ окръжност.

Следователно е достатъчно да докажем, че AF е радикалната ос на окръжностите, описани около $\triangle ABC$ и $\triangle AD'E'$, понеже техните центрове лежат на правата на Ойлер за $\triangle ABC$.

Ясно е, че A лежи на тази радикална ос, като обща точка за двете окръжности. Нататък, от

$$\sphericalangle BD'C' = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BE'C$$

следва, че точките B, C, E', D' лежат на една окръжност. Също, от

$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BD'C$$

и аналогичното $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CE'B$ следва, че BE и CD се допират до тази окръжност. Сега от теоремата на Паскал за $BBCCE'D'$ следва че D, E и пресечната точка на BC и $D'E'$ лежат на една права, откъдето D', E' и F лежат на една права. Следователно F е радикален център за $ABC, AD'E'$ и $BCD'E'$ и твърдението следва.

Южна Корея 2015

Задача 1. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива че за всеки $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^{2015} + f(y)^{2015}) = f(x)^{2015} + y^{2015}.$$

Решение. Отговор. $f(x) = x$ и $f(x) = -x$. Първо ще докажем следната:

Лема. Ако функцията $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ изпълнява $f(x) + f(y) = f(x + y)$ и $f(x^{2015}) = f(x)^{2015}$ за всеки две реални x, y , то $f(x)$ е тъждествено равна на x , $-x$ или 0 .

Доказателство на лемата. Както при уравнението на Коши получаваме $f(q_0x) = q_0f(x)$ за всяко рационално q_0 и реално x . Тогава

$$\begin{aligned} f(x + q_0)^{2015} &= (f(x) + f(q_0))^{2015} \\ &= \sum_{i=0}^{2015} \binom{2015}{i} (q_0f(1))^i f(x)^{2015-i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x + q_0)^{2015} &= f((x + q_0)^{2015}) \\ &= \sum_{i=0}^{2015} \binom{2015}{i} f(x^i q_0^{2015-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{2015} \binom{2015}{i} q_0^{2015-i} f(x^i) \end{aligned}$$

При фиксирано x , двете представяния са тъждествено равни полиноми на q_0 (понеже са валидни за всяко рационално q_0). Сравнявайки коефициентите пред първите степени, получаваме $f(x^{2014}) = f(1)f(x)^{2014}$ и следователно върху неотрицателните реални числа f приема знака на $f(1)$ и в частност е ограничена. Следователно $f(x) = cx$ и директна проверка дава възможностите $c = 1, 0, -1$, както се искаше.

Полагането $x = 0$ дава

$$f(f(y)) = f(0)^{2015} + y^{2015},$$

откъдето следва, че f е биективна. Замествайки x с $f(x)$ в даденото, получаваме

$$f(f(x)^{2015} + f(y)^{2015}) = f(f(x))^{2015} + y^{2015},$$

а замествайки y с $f(y)$ в даденото, получаваме

$$f(x^{2015} + f(f(y))^{2015}) = f(x)^{2015} + f(y)^{2015}.$$

Оттук достигахме до

$$f(f(f(x))^{2015} + f(y)^{2015}) = f(x^{2015} + f(f(y))^{2015}) = f(x)^{2015} + f(y)^{2015}.$$

Понеже f е биективна, имаме $f(f(x)) = x$, откъдето

$$\begin{aligned} f(f(x)^{2015} + f(y)^{2015}) &= x^{2015} + y^{2015} \\ &= f(f(x)^{2015}) + f(f(y)^{2015}) - 2f(0)^{2015}. \end{aligned}$$

и тъй като f е биективна, следва че $f(x + y) = f(x) + f(y) - 2f(0)^{2015}$.

Полагаме $x = y = 0$ в последното и получаваме, че $f(0) = 0$ или $f(0) = (\pm \frac{1}{2})^{\frac{1}{2014}}$. Но при ненулевите възможности полиномът $x^{2015} - x + f(0)^{2015}$ (който има за корени $f(-1)$, $f(0)$ и $f(1)$) няма три различни реални корена. Следователно $f(0) = 0$ и $f(1) = \pm 1$. Сега достигахме до $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(y^{2015}) = f(y)^{2015}$. Сега от лемата и възможните стойности за $f(1)$ достигахме до отговора (като директно се проверява, че и двете функции са решения).

Задача 2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с център I се допира до страните BC , AC и AB в точките D , E и F , съответно. Описаната около $\triangle ABC$ окръжност пресича правата EF в точките P и Q . Ако O_1 и O_2 са центровете на описаните около $\triangle IAB$ и $\triangle IAC$ окръжности, да се докаже, че центърът на описаната около $\triangle DPQ$ окръжност лежи на правата O_1O_2 .

Решение. Нека M е средата на BC и X е пресечната точка на правите PQ и BC . От теоремата на Менелай получаваме

$$\frac{BX \cdot CE \cdot AF}{XC \cdot EA \cdot FB} = 1.$$

Тъй като $AF = AE$, $BD = BF$, $CD = CE$, то $BX \cdot CD = XC \cdot BD$ и отгук $2XB \cdot XC = (XB + XC) \cdot XD$. Сега от $XM = \frac{XB+XC}{2}$ следва, че $XB \cdot XC = XM \cdot XD$. Заключаваме, че M лежи на описаната около $\triangle DPQ$ окръжност.

Да означим с O' средата на O_1O_2 – ще покажем, че тя е центърът на описаната около $\triangle DPQ$ окръжност.

Нека първо $AB \neq AC$. Понеже AI е перпендикулярна на PQ и O_1O_2 , тези две прави са успоредни и значи O' лежи на симетралата на PQ . Освен това, ако I_A , I_B и I_C са центровете на съответните външновписани към $\triangle ABC$ окръжности, то е известно че описаната около $\triangle ABC$ окръжност се явява окръжност на Ойлер за $\triangle I_AI_BI_C$. Да отбележим, че хомотетията с център I и коефициент 2 изпраща $\triangle O_1O_2O_3$ в $\triangle I_CI_BI_A$, откъдето следва, че O' е средата на IS . Понеже ID и SM са перпендикулярни на BC , заключаваме, че O' лежи на симетралата на DM . Твърдението следва.

Нека сега $AB = AC$. В този случай O' е средата на AI . Тъй като $\sphericalangle AEI = 90^\circ = \sphericalangle AFI$, точките A , F , I , E лежат на окръжност с център O' – да означим нейния радиус с R . Тогава $O'D^2 - R^2 = DI \cdot DA = DA^2 - AI \cdot DA$. Понеже точките B , D , I и F лежат на една окръжност, имаме $AI \cdot DA = AF \cdot AB$. Сега от $DA^2 = AB^2 - BD^2$ получаваме

$$\begin{aligned} O'D^2 - R^2 &= (AB^2 - BD^2) - AF \cdot AB \\ &= AB^2 - BF^2 - AF \cdot AB = BF \cdot AF. \end{aligned}$$

Аналогично, $O'P^2 - R^2 = PE \cdot PF$. Но $BF \cdot AF = QF \cdot PF = PE \cdot PF$ и заключаваме, че

$$O'D^2 - R^2 = O'P^2 - R^2,$$

т.е. $O'D = O'P$. Аналогично се доказва, че $O'D = O'Q$ и твърдението следва.

Задача 3. Дадени са град с поне три метростанции, двупосочни линии на метрото и естествено число L . В града е възможно да се посетят $L + 1$ станции, като никоя станция не се посещава повече от веднъж. Да се докаже, че едно от следните две твърдения е вярно.

1. Съществуват три станции A , B , C , такива че не е възможно от A да достигнем B , без да посетим C .
2. Съществува затворен път, започващ от някоя станция, минаващ през поне $\lceil \sqrt{2L} \rceil$ станции, като никоя от тях не се посещава повече от веднъж.

Решение. Да разгледаме граф с върхове станциите, като две станции са свързани с ребро точно когато има директен път между тях. Да допуснем,

че първото твърдение не е вярно – тогава графът е 2-свързан. Достатъчно е да докажем, че максималната дължина m на цикъл в графа изпълнява неравенството $m \geq \lceil \sqrt{2L} \rceil$.

Да разгледаме път $P : v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_L$ с дължина L . От теоремата на Менгер¹ съществуват два пътя P_1 и P_2 от v_0 към v_L , които нямат общи върхове освен v_0 и v_L . Нека a_i , $i = 1, 2$, е общият брой върхове на P и P_i (без v_0 и v_L). Съединяването на P_1 и P_2 дава цикъл с дължина $a_1 + a_2 + 2$, откъдето $a_1 + a_2 + 2 \leq m$.

От друга страна, понеже P_i дели P на $a_i + 1$ части, получаваме $a_i + 1$ цикъла от обединението на P_i и P . Ясно е, че поне един от тези цикли съдържа поне $\frac{L}{a_i+1}$ ребра. Следователно $\frac{L}{a_i+1} \leq m$. Заклучаваме, че

$$2L \leq (a_1 + 1)m + (a_2 + 1)m = (a_1 + a_2 + 2)m \leq m^2$$

и исканото неравенство следва.

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H . Описаната около $\triangle HAB$ окръжност ω пресича отсечката BC за втори път в точка D . Правата DH пресича отсечката AC в точка P , а Q е центърът на описаната около $\triangle ADP$. Да се докаже, че центърът на ω лежи на описаната около $\triangle BDQ$ окръжност.

Решение. Да означим с R центърът на ω и нека E е пресечната точка на правите BH и AC . Тогава имаме

$$\begin{aligned} \sphericalangle RBD &= 90^\circ - \frac{1}{2} \sphericalangle DRB \\ &= 90^\circ - \sphericalangle DHB = 90^\circ - \sphericalangle PHE \\ &= \sphericalangle BPH = 180^\circ - \sphericalangle APD. \end{aligned}$$

От друга страна, ако M е средата на AD , то точките M , Q и R лежат на една права и

$$\begin{aligned} \sphericalangle MQD &= \frac{1}{2} \sphericalangle AQD = \frac{1}{2}(360^\circ - 2 \sphericalangle APD) \\ &= 180^\circ - \sphericalangle APD = \sphericalangle RBD, \end{aligned}$$

с което заключаваме, че R лежи на описаната около $\triangle BDQ$ окръжност.

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Menger%27s_theorem

Задача 5. Дадено е естествено число k . Редиците a_n, b_n са такива че

$$a_1 = k, \quad a_2 = k, \quad a_{n+2} = a_n a_{n+1},$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = k, \quad b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^3 + 1}{b_n}.$$

Да се докаже, че за всяко естествено число n числото $a_{2n} b_{n+3}$ е цяло.

Решение. Нека f_n е редицата на Фибоначи с $f_1 = f_2 = 1, f_0 = 0, f_{-1} = 1, f_{-2} = -1$. Индуктивно получаваме $a_n = k^{f_n}$ за $n \geq -2$.

За $n \geq -1$ нека $c_n = a_{2n} b_{n+3} = k^{f_{2n}} b_{n+3}$. Директни пресмятания дават $c_{-1} = 1, c_0 = k^3 + 1, c_1 = c_0^3 + 1$ и $c_2 = b_3^6 + 3b_3^5 + 3b_3^2 + 1$ и значи c_{-1}, c_0, c_1 и c_2 наистина са естествени числа.

Лема 1. За всяко $n \geq -1$ са изпълнени $f_{2n} + f_{2n+4} = 3f_{2n+2}$ и $c_n c_{n+2} = c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$. (Равенствата се проверяват директно.)

С допускането, че $c_{-1}, c_0, \dots, c_{n+1}$ ($n \geq 1$) са естествени числа, ще покажем и че c_{n+2} е естествено. Съгласно последното равенство, достатъчно е да докажем, че c_n дели $c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$.

Лема 2. За всеки нечетен прост делител p на k е изпълнено $(c_m, p) = 1$ за $-1 \leq m \leq n+1$. (Следва по индукция и Лема 1.)

Лема 3. За $-1 \leq m \leq n-1, (c_m, c_{m+1}) = 2^\alpha$ за някое цяло неотрицателно число α .

Наистина, ако c_m и c_{m+1} имат общ нечетен прост делител, то от Лема 1 следва, че p дели k , което противоречи на Лема 2.

Лема 4. За нечетно просто число p и естествено число m , такива че $p^m \parallel c_n$ е изпълнено, че p^m дели $c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$. Това следва от факта, че p не дели c_{n-1} и твърдението (което се проверява директно)

$$c_{n+2} = \frac{c_n^8 + 3c_n^5 k^{3f_{2n}} + 3c_n^2 k^{6f_{2n}} + k^{3f_{2n+2}} c_{n-2}}{c_{n-1}^3}.$$

За естествено число n ще означаваме с $\nu(n)$ каноничната степен на двойката в разлагането му. За рационалното число $q = \frac{m}{n}$ дефинираме $\nu(q) = \nu(m) - \nu(n)$.

Лема 5. Ако k се дели на 4, то $\nu(c_n) = f_{2n}$ за всяко $n \geq 1$. (Следва по индукция с допускането $\nu(c_n) = f_{2n}$, $\nu(c_{n+1}) = f_{2n+2}$ и Лема 4.)

Лема 6. Нека $k \equiv 2 \pmod{4}$. Ако $n \equiv 2 \pmod{3}$, то $\nu(c_n) > f_{2n}$, а ако $n \not\equiv 2 \pmod{3}$, то $\nu(c_n) = f_{2n}$. (Отново следва по индукция.)

От Лема 5 и Лема 6 получаваме, че ако 2^m точно дели c_n , то 2^m дели $c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$. Тогава чрез Лема 4 заключаваме, че c_n дели $c_{n+1}^3 + k^{3f_{2n+2}}$, както се искаше.

Задача 6. В равнината са дадени 2015 окръжности с радиус 1. Да се докаже, че измежду тях съществуват 27, такива че или всяка двойка имат общи точки или всяка двойка нямат общи точки.

Решение. Да допуснем, че няма 27 окръжности, всеки две от които да имат общи точки. Да изберем за абсцисна ос права, която не е нито успоредна, нито перпендикулярна на коя да е от отсечките съединяващи два от центровете на окръжностите. Номериране окръжностите с $C_1, C_2, \dots, C_{2015}$ спрямо нарастващия ред на абсцисите на центровете им. Първо ще покажем, че за всяко $2 \leq i \leq 2015$, измежду $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ има най-много 75 окръжности, които имат обща точка с C_i .

Поради горната наредба $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ са наляво спрямо C_i . Нека C'_i е окръжността с център този на C_i и радиус 2. Да разделим лявата (спрямо абсцисната ос) полуокръжност на C'_i на три еднакви сектора. Допускането в началото ни дава, че всеки сектор съдържа най-много 25 центъра на $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$. Тогава лявата полуокръжност съдържа най-много 75 такива центъра и значи пресича най-много 75 от съответните окръжности.

Сега ще оцветим 2015-те окръжности в 76 цвята. Да допуснем, че можем да оцветим $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ като всеки две пресичащи се окръжности са в различен цвят. Имаме, че C_i пресича най-много 75 окръжност измежду $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ и следователно такова оцветяване наистина е възможно.

Накрая, понеже $\frac{2015}{76} > 26$, от принципа на Дирихле съществува множество от 27 едноцветни окръжности. Ясно е, че измежду тях няма две с общи точки.

Южна Корея 2016

Задача 1. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ с височини BD и CE към срещуположните страни. Точките S и T са симетричните точки на E спрямо страните AC и BC , съответно. Описаната около $\triangle CST$ окръжност с център O пресича правата AC за втори път в точката X . Да се докаже, че правите XO и DE са перпендикулярни.

Решение. Първо ще докажем следната:

Лема. Даден е $\triangle ABC$ с център на описаната окръжност O . Точките D и E от страните AB и AC са такива, че точките D , E , C и B лежат на една окръжност. Тогава правите AO и DE са перпендикулярни.

Доказателство. Понеже $AO = OB$, имаме следното

$$\sphericalangle DAO = \sphericalangle BAO = 90^\circ - \frac{\sphericalangle AOB}{2} = 90^\circ - \sphericalangle ACB = 90^\circ - \sphericalangle ADE$$

откъдето $\sphericalangle DAO + \sphericalangle ADE = 90^\circ$ и исканото следва.

Да означим с M и N пресечните точки на правите ET с BC и ES с AC , съответно. Тогава

$$\sphericalangle ECN = \sphericalangle EMN = \sphericalangle KTS = \sphericalangle NCS = \sphericalangle XTS$$

и

$$\sphericalangle EDB = \sphericalangle NED = \sphericalangle DSE = \sphericalangle ECB = \sphericalangle ENM = \sphericalangle EST,$$

откъдето точките S , D и T лежат на една права. Тогава

$$\sphericalangle ETD = \sphericalangle XCS = \sphericalangle DCE$$

и значи точките T , C , D и E лежат на една окръжност. От лемата заключаваме, че $XO \perp DE$.

Задача 2. Дадени са естествените числа $n \geq 2$ и $k \geq \frac{5}{2}n - 1$. Да се докаже, че при всеки избор на k различни точки с цели координати (x, y) , $1 \leq x, y \leq n$ съществува окръжност, минаваща през поне четири от тези точки.

Решение. Да означим с a_i броят на избраните точки върху правата $y = i$. Ако $a_i \geq 2$ и $x_1 < x_2 < \dots < x_{a_i}$ са абсцисите на избраните точки върху тази права, то понеже

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_2 + x_4 < x_3 + x_4 < \dots < x_{a_i-1} + x_{a_i},$$

получаваме, че броят на различните суми на две абсциси на точки измежду избраните от $y = i$ е поне $2a_i - 3$. Същото очевидно е изпълнено и за $a_i < 2$.

От друга страна, броят на стойностите, които могат да се получат като сума на две различни естествени числа между 1 и n включително е точно $2n - 3$ (от 3 до $2n - 1$). Понеже

$$\sum_{i=1}^n (2a_i - 3) = 2k - 3n \geq 2n - 2 > 2n - 3,$$

от принципа на Дирихле следва, че съществуват четири различни избрани точки (x_1, y_1) , (x'_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x'_2, y_2) , такива че $x_1 + x'_1 = x_2 + x'_2$ и $y_1 \neq y_2$. Остава да съобразим, че съществува окръжност, минаваща през тези четири точки.

Задача 3. Да се докаже, че не съществуват рационални числа x и y , такива че

$$x - \frac{1}{x} + y - \frac{1}{y} = 4.$$

Решение. Да допуснем противното и нека (x, y) е решение на уравнението. Понеже $(-\frac{1}{x}, y)$, $(x, -\frac{1}{y})$ и $(-\frac{1}{x}, -\frac{1}{y})$ също са решения, можем да считаме, че $x > 0$, $y > 0$.

Полагаме $u = xy > 0$, тогава $x + y = \frac{4xy}{xy-1} = \frac{4u}{u-1}$ (ясно е, че $u = 1$ не дава решения). Понеже $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$ е квадрат на рационално число, същото важи и за $(\frac{4u}{u-1})^2 - 4u$, а оттук и за

$$4u^2 - u(u-1)^2 = u(6u - u^2 - 1)$$

Да положим $u = \frac{q}{p}$, $p \neq q$, $(p, q) = 1$. Тогава

$$u(6u - u^2 - 1) = \frac{1}{p^4}pq(6pq - p^2 - q^2)$$

откъдето $pq(6pq - p^2 - q^2)$ е точен квадрат на цяло число. Понеже $p, q, 6pq - p^2 - q^2$ са две по две взаимно прости, то съществуват естествени числа s, t, w , за които

$$p = s^2, \quad q = t^2, \quad w^2 = 6pq - p^2 - q^2$$

Достигахме до $w^2 = 6s^2t^2 - t^4 - s^4 = (2st)^2 - (s^2 - t^2)^2$ за $s \neq t, (s, t) = 1$. Без ограничение на общността ще считаме $s > t > 0$. Нека (s, t, w) е решение на последното уравнение, за което сумата $s + t$ е минимална.

Понеже $2st$ е четно, следва (например по модул 4), че $s^2 - t^2$ също е четно, откъдето s и t са нечетни. Оттук $(\frac{s^2 - t^2}{2}, st) = 1$. Тогава

$$\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{s^2 - t^2}{2}\right)^2 = (st)^2$$

дава примитивната Питагорова тройка $(\frac{w}{2}, \frac{s^2 - t^2}{2}, st)$, т.е. съществуват взаимнопрости естествени числа m и n , за които $s^2 - t^2 = 4mn$ и $st = m^2 + n^2$. Оттук $(s - t)(s + t) = 4mn$ и следователно съществуват две по две взаимнопрости естествени числа A, B, C и D , такива че

$$s + t = 2AB, \quad s - t = 2CD, \quad m = AC, \quad n = BD.$$

Замествайки в $st = m^2 + n^2$, получаваме $2A^2B^2 = (A^2 + D^2)(B^2 + C^2)$. Освен това, C е четно, а A, B и D са нечетни. Получаваме $A^2 = B^2 + C^2$, $2B^2 = A^2 + D^2$, като първото дава $A = a^2 + b^2$, $B = a^2 - b^2$, $C = 2ab$ за взаимнопрости a и b , $a > b > 0$. Тогава $2B^2 = A^2 + D^2$ е еквивалентно на $D^2 = a^4 + b^4 - 6a^2b^2$, т.е. на

$$(2D)^2 = 6(a + b)^2(a - b)^2 - (a + b)^4 - (a - b)^4,$$

като $s + t = 2AB = 2B(a^2 + b^2) > 2a = (a + b) + (a - b) > 0$. Последното противоречи на минималността на $s + t$ и с това задачата е решена.

Задача 4. Реалните числа x, y, z са такива, че $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Да се намери най-голямата възможна стойност на израза

$$(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy).$$

Решение. Отговор. $\frac{1}{8}$. Нека $f(x, y, z) = (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$. Разглеждането на $f(x, 0, z) = -x^3z^3$ лесно дава, че исканият максимум е положителен. Понеже f е симетрична относно x, y, z и $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$,

можем да считаме, че $x \geq y \geq z$, $x + y + z \geq 0$, откъдето $x^2 - yz > 0$. Ако f достига максимума си в (x, y, z) , то

$$f(x, y, z) - f(x, -y, -z) = -2x(x^2 - yz)(y^3 + z^3) \geq 0$$

и значи $y^3 + z^3 \leq 0$. Ако $z = 0$, то $y = 0$ и $f(x, y, z) = 0$. Следователно $z < 0$ и $y^2 - zx > 0$. Понеже $f(x, y, z) > 0$, получаваме и че $z^2 - xy > 0$. Сега от неравенството между средноаритметично и средногеометрично следва

$$f(x, y, z)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{(x^2 - yz) + (y^2 - zx) + (z^2 - xy)}{3} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x + y + z)^2}{3} = \frac{1}{2},$$

откъдето заключаваме, че търсената максимална стойност е $\frac{1}{8}$ (и се достига точно при $x + y + z = 0$).

Задача 5. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с център I допира страните BC , AC и AB в точките D , E и F , съответно. Правата EF пресича правите BI , CI , BC и DI в точките K , L , M и Q , съответно. Правата през M и средата на CL пресича CK в точката P . Да се докаже, че

$$PQ = \frac{AB \cdot KQ}{BI}.$$

Решение. Понеже $BD = BF$ и BI разполовява $\angle DBF$, то правите DF и BI са перпендикулярни. Аналогично, правите DE и CI са перпендикулярни. Оттук $\angle BKD = \angle BKF = 90^\circ - \angle DFK$ и $\angle CED + \angle ECI = 90^\circ$. Понеже AC се допира до описаната около $\triangle DEF$ окръжност, $\angle DFK = \angle CED$ и значи $\angle BKD = 90^\circ - \angle CED$. Тогава $\angle BKD = \angle ECI = \angle DCI$, откъдето точката K лежи на окръжността, описана около четириъгълника $CEID$. Заключаваме, че $\angle BKC = 90^\circ$; аналогично $\angle BLC = 90^\circ$.

Теоремата на Менелай за $\triangle CKL$ и правата MP води до равенството $\frac{KP}{PC} \cdot \frac{CJ}{JL} \cdot \frac{LM}{MK} = 1$ и понеже $CJ = JL$, следва че $\frac{KP}{PC} = \frac{MK}{ML}$. Понеже DI и DM са вътрешната и външната ъглополовяща на ъгъла при върха D в $\triangle DKL$, имаме $\frac{KQ}{QL} = \frac{KD}{DL} = \frac{KM}{ML}$. Следователно $\frac{KP}{PC} = \frac{KQ}{QL}$ и правите PQ и CL са успоредни.

Да означим с A' пресечната точка на правите BL и CK . Да отбележим, че I е ортоцентърът на $\triangle A'BC$. Лесно се вижда, че $\angle BA'D = \frac{1}{2} \angle ACB$ и $\angle CA'D = \frac{1}{2} \angle ABC$, откъдето $\angle BA'C = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$. Получава се, че $\angle KPQ = \angle A'CL = 90^\circ - \angle BA'C = \frac{1}{2} \angle BAC = \angle IAB$. Тъй като

точките A', L, C, D лежат на една окръжност, имаме $\sphericalangle A'KL = \sphericalangle A'BC$ и тогава $\sphericalangle PKQ = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle ACB = \sphericalangle AIB$. Тъй като $\sphericalangle KPQ = \sphericalangle IAB$ и $\sphericalangle PKQ = \sphericalangle AIB$, заключаваме че $\triangle KPQ \sim \triangle IAB$ и

$$\frac{PQ}{KQ} = \frac{AB}{BI},$$

както се искаше.

Задача 6. Дадено е множество U от m триъгълника. Да се докаже, че съществува подмножество W на U , което изпълнява следните условия:

- Броят на триъгълниците в W е поне $0.45m^{\frac{4}{5}}$.
- Не съществуват шест точки A, B, C, D, E и F , такива че всеки от триъгълниците $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDE, \triangle DEF, \triangle EFA$ и $\triangle FAB$ принадлежи на W .

Решение. Да построим подмножеството U' на U чрез независим случаен избор на всеки от триъгълниците в U , с вероятност p (която ще изберем по-късно). Тогава $\mathbb{E}[|U'|] = mp$.

Ще наричаме шесторката от точки $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ *лоша*, ако всеки от триъгълниците $x_1x_2x_3, x_2x_3x_4, \dots, x_6x_1x_2$ принадлежи на U .

Броят на лошите шесторки в U е не повече от $m(m-1)(3!)^2 \leq 36m^2$, понеже не надминава броя начини да изберем два триъгълника, върховете x_1, x_2, x_3 от единия и x_4, x_5, x_6 от другия. Но отчитайки всички циклични пермутации и симетрии в $(x_1, x_2, \dots, x_6)$ (които са $6 \cdot 2 = 12$ на брой), получаваме, че този брой е всъщност най-много $3m^2$. Вероятността за избор на шесторка е p^6 и значи очакваният брой лоши шесторки е най-много $3m^2p^6$. Следователно очакването на разликата на мощността на U' с броя лоши шесторки е поне $mp - 3m^2p^6$.

Да изберем $p = \frac{1}{2}m^{-\frac{1}{5}}$. Тогава

$$mp - 3m^2p^6 = \frac{1}{2}m^{\frac{4}{5}} - \frac{3}{64}m^{\frac{4}{5}} > 0.45m^{\frac{4}{5}}$$

и следователно съществува подмножество U' , за което горната разлика е поне $0.45m^{\frac{4}{5}}$. Остава да построим W , като от всяка лоша шесторка в U' премахнем един триъгълник.

Япония 2016

Задача 1. Дадено е нечетно просто число p . За $1 \leq k \leq p-1$ с a_k ще означаваме броят на делителите на $kp+1$, които са по-големи от k и по-малки от p . Да се намери сумата

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1}.$$

Решение. Отговор. $p-2$. Всяко число $m \in \{2, 3, \dots, p-1\}$ допринася по веднъж в сумата $a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1}$, защото сравнението $mx \equiv 1 \pmod{p}$ (т.е. $mx = k_m p + 1$ за някое k_m) има единствено решение. Следователно търсената сума е равна на броя на възможните стойности на m , а именно $p-2$.

Задача 2. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$, за който $AB \cdot BC = AD \cdot CD$. Правите AD и BC се пресичат в точката X , а правите AB и CD – в точката Y . Точките E, F, G и H са средите на отсечките AB, BC, CD и DA . Ъглополовящата на $\angle AXB$ пресича отсечката EG в точка S , а ъглополовящата на $\angle AYD$ пресича отсечката FH в точката T . Да се докаже, че правите ST и BD са успоредни.

Решение. Понеже $\triangle XBA \sim \triangle XDC$, имаме $\angle CXG = \angle AXE$, но тъй като XS разполовява $\angle AXB$, то XS разполовява $\angle GXE$. Следователно

$$\frac{CD}{AB} = \frac{XG}{XE} = \frac{GS}{SE}$$

Аналогично YT разполовява $\angle FYN$ и

$$\frac{BC}{AD} = \frac{YF}{YH} = \frac{FT}{TH}$$

Сега от $\frac{CD}{AB} = \frac{BC}{AD}$ следва, че $\frac{GS}{SE} = \frac{FT}{TH}$, което заедно с $FG \parallel EH$ дава $TS \parallel FG \parallel EH$. Накрая, от $FG \parallel BD$ заключаваме, че $ST \parallel BD$, както се искаше.

Задача 3. Дадено е естествено число n . В кралство има 2^n граждани и крал. За валута се използват банкноти със стойност 2^n долара и монети със стойности 2^a долара, където $0 \leq a \leq n-1$. Всеки гражданин има безбройно много банкноти. Нека общият брой на монетите в кралството е S . Един ден кралят решил да издаде заповед, която да се изпълнява всяка нощ:

- Всеки гражданин трябва да дава някаква крайна сума пари или на друг гражданин, или на краля.
- Всеки гражданин трябва да дава точно 1 долар повече от общата сума, която е получил от другите граждани.

Да се намери най-малката стойност на S , при която кралят всяка нощ ще може да получава пари (вечно).

Решение. Отговор. $n2^{n-1}$. За цялото неотрицателно число a да означим с $s(a)$ сумата от цифрите в двоичното му представяне.

Пример за $S = n2^{n-1}$ е както следва – номерираме гражданите с $0, 1, \dots, 2^n - 1$ и гражданинът с номер a първоначално разполага с $s(a)$ долара в монети, в първата нощ за всяко $1 \leq a \leq 2^n - 1$ гражданинът с номер a дава всичките си монети на този с номер $a + 1 \pmod{2^n}$, а този с номер 0 дава една банкнота на краля. Ясно е, че този процес може циклично да продължава завинаги и че използва точно

$$s(0) + s(1) + \dots + s(2^n - 1) = n2^{n-1}$$

монети.

Ако процесът продължава безкрайно, понеже броят монети е краен, от някой ден нататък той не се променя. Нека този ден е ден 0 и да разгледаме дните $0, 1, \dots, 2^n - 1$. През тях всеки гражданин има различно количество пари по модул 2^n , измежду $0, 1, \dots, 2^n - 1$. Сумирайки през тези 2^n дни получаваме, че всеки гражданин има поне

$$\frac{s(0) + s(1) + \dots + s(2^n - 1)}{2^n}$$

монети (делим на 2^n , понеже всяка монета се брои по веднъж за всеки от дните). Понеже броят на гражданите е точно 2^n , получаваме исканата оценка.

Задача 4. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такива че

$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x$$

за всеки две реални числа x и y .

Решение. Отговор. $f(x) = -2x$ и $f(x) = 1 - x$. При $x = y = 0$ получаваме $f(0)^2 = f(0)$, т.е. $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$. В първия случай заместваме x с $-x$ и y с 0 , за да получим $f(x) = -2x$ (като директно се проверява, че тази функция е решение на задачата).

Нека $f(0) = 1$ и да означим даденото уравнение с $P(x, y)$. При $P(x, 0)$ получаваме $f(-x) = f(x) + 2x$. Тогава събирайки $P(x, -y)$ с $P(-yf(x) - x, 0)$, достигахме до

$$f(x + yf(x)) = f(x)(f(-y) - 2y) = f(x)f(y)$$

и даденото уравнение се преобразува до

$$f(yf(x) - x) = f(x + yf(x)) + 2x$$

Ако $f(x) \neq 0$ за някое x , то при $y = \frac{x}{f(x)}$ получаваме $f(2x) = 1 - 2x$.

Да разгледаме x_0 , за което $f(x_0) = 0$ (с допускането, че такова има). Ясно е, че $x_0 \neq 0$ и значи $f(-x_0) = 2x_0 \neq 0$. Съгласно по-горе имаме $f(2(-x_0)) = 1 + 2x_0$, откъдето

$$f(2x_0) = f(-2x_0) - 4x_0 = (1 + 2x_0) - 4x_0 = 1 - 2x_0$$

Следователно $f(2x) = 1 - 2x$ за всяко x , а отгук и $f(x) = 1 - x$. Директно се проверява, че тази функция е решение на задачата.

Задача 5. Дадени са естествени числа $m \geq 2$ и $n < \frac{3(m-1)}{2}$. В държава има m града и n пътища, като всеки път свързва два различни града и е възможно да има няколко пътища между два различни града. Да се докаже, че е възможно градовете да се разделят на две непразни множества α и β , така че ако всеки път от град от α до град от β се подобри до магистрала, то от всеки град излиза най-много една магистрала.

Решение. Да наречем разделяне от искания вид *добро*. Чрез силна индукция по m ще докажем, че добро разделяне съществува. Случаите $m = 2$ и $m = 3$ се проверяват директно. Нека $m \geq 4$.

В общия случай можем да обединим два града X и Y в нов град $X \oplus Y$ – тогава пътят, свързващ X и Y , ще се пренебрегва, а броят пътища от град Z (различен от X и Y) до X и до Y е равен на този от Z до $X \oplus Y$. Аналогични разсъждения важат и при обединяването на три от дадените градове.

Ако съществува добро разделяне на градовете след обединявания, то такова има и в началото – достатъчно е всеки два (три) обединени града да са в една и съща група. Нещо повече, неравенството $n < \frac{3}{2}(m-1)$ остава вярно, ако намалим общия брой градове и намалим броя пътища с поне $\frac{3}{2}$ пъти от градовете. Сега ще докажем няколко лема.

Лема 1. Всеки два града A и B са свързани с най-много един път.

Доказателство. Да допуснем, че пътищата са поне два. Обединяването на двата града намаля общия брой градове с 1 и общия брой пътища с поне $2 > \frac{3}{2}$. От индукционното допускане следва, че сега съществува добро разделяне на градовете – следователно такова е имало и преди обединението на A и B , противоречие.

Лема 2. Не съществуват три града A , B и C , всеки два от които са свързани.

Доказателство. Наистина, обединяването на трите града би намалило общия брой градове с 2 и броя пътища с $3 = \frac{3}{2} \cdot 2$. Получаваме противоречие както в предната лема.

Лема 3. Не съществуват четири града A , B , C и D и пътища AB , BC , CD и DA .

Доказателство. Да допуснем противното и да разгледаме $A \oplus B$ и $C \oplus D$. Тогава общия брой градове намалява с 2, а броят пътища – с $3 = \frac{3}{2} \cdot 2$ (остава само един път, а именно от $A \oplus B$ до $C \oplus D$). Получаваме противоречие както в предните лема.

Сега да отбележим, че ако от някой град излиза точно един път, то за добро разделяне е достатъчно него да поставим в α , а останалите – в β . За нататък ще считаме, че от всеки град излизат поне два пъти. Нещо повече, имаме следната:

Лема 4. Ако от град A излизат точно два пъти и A е свързан с B , то от B излизат поне 4 пъти.

Доказателство. Да допуснем, че от B излизат точно 2 пъти. От Лема 2 следва, че няма град, който е свързан и с A , и с B . Тогава можем да поставим A и B в α , а останалите градове – в β , като получаваме добро разделяне.

Нека сега от B излизат точно 3 пъти и освен пътя AB имаме и AC , BD , BE . От Лема 2 имаме, че A , B , C , D и E са различни и че няма път между D и E . Сега ако премахнем градовете A и B и въведем пътя DE , то

общият брой градове е намален с 2, а общият брой пътища – с 3. Съгласно индукционното допускане съществува добро разделяне в моментната конфигурация. Сега ако поставим A в групата, съдържаща C , а B – или при C , ако D и E са в различни групи, или при D и E , ако са в една и съща, отново получаваме добро разделяне.

Следователно можем да считаме, че от B излизат поне 4 пътя, както се искаше.

Лема 5. Измежду градовете, свързани с A чрез път, който не е магистрала, съществуват поне два, от всеки от които излизат поне три пътя.

Доказателство. Да допуснем, че има най-много един град с исканото свойство. Нека $B_1, \dots, B_{k-1}, B_k$ са всички градове, свързани с A и да допуснем, че от всеки от тях (с изключение на B_k) излизат точно два пътя. От втората и третата лема имаме, че не съществува град, свързан с два или повече от градовете $A, B_1, \dots, B_{k-1}$. Тогава ако тези градове са в α , а останалите – в β , получаваме добро разделяне. Следователно можем да считаме, че е изпълнено условието на лемата.

Нека сега a, b, c, d представляват броя градове, от които излизат точно 2, 3, 4 и повече от 4 пътя, съответно. Поради Лема 4 съществуват $2a$ пътя, свързани с градове от степен 2, от Лема 5 съществуват повече от $2c$ от тези, свързани с градове от степен поне 3. Оттук $d \geq 2a + 2c$, което заедно с очевидното $d \geq 4c$ дава $d \geq a + 3c$. Освен това, общият брой пътища е $2a + 3b + d$ и получаваме

$$2n = 2a + 3b + d \geq 3(a + b + c) = 3m$$

което противоречи на $n < \frac{3(m-1)}{2}$. С това индукцията е завършена.

СЪДЪРЖАНИЕ

	Условия	Решения
Великобритания 2016	3	29
Италия 2015	4	32
Италия 2016	6	38
Китай 2015	7	43
Китай 2016	8	51
Русия 2015	10	61
Русия 2016	14	76
САЩ 2016	18	91
САЩ 2016 – Младежи	20	98
Тайланд 2015	21	101
Хонг Конг 2016	23	108
Южна Корея 2015	24	111
Южна Корея 2016	25	117
Япония 2016	26	122