

Олимпийски Теми 2010

Американска Фондация за България
Съюз на Математиците в България
Институт по Математика и Информатика на БАН
©УНИМАТ СМБ

Олимпийски теми 2010

Настоящият сборник от теми за подготовка за олимпиади се основава до голяма степен на лекциите за националните ученически отбори при подготовката им за участие в Балканската олимпиада в Крагуевац (Сърбия), Международната олимпиада в Бремен (Германия) през 2009 г., и задочната подготовка на разширение на националния отбор през есента на 2009 и зимата на 2010 г. Тези подготовки бяха осъществени с ценното съдействие на Американска Фондация за България, която от 2004 г. е основен спонсор на националните отбори по математика.

Авторите на темите искрено се надяват, че материалите в този сборник ще бъдат полезни за ученици (за подготовка за участие в олимпиади) и учители (за подготовка на техни лекции на олимпийски теми). Всеки от авторите е следвал своя собствен стил за представяне на материала, като намесата на редакторите е минимална.

София, март 2010 г.

Редактори: Иван Ланджев, Петър Бойваленов

Copyright 2010

УНИМАТ СМБ

София 1113, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8

тел. 979-28-06, e-mail: peter@math.bas.bg

София, 2010 г. ISSN 1314-0493

СЪДЪРЖАНИЕ

Александър Иванов. Теория на числата. "Комплексни числа" в крайна аритметика	3
Емил Колев. Комбинаторни твърдения	7
Ивайло Кортезов. Релации	15
Невена Събева. Толкова много квадрати	22
Николай Белухов. Няколко приложения на една лема за вписаната окръжност	30
Николай Николов. Обобщение на четири функционални уравнения от МОМ	39
Петър Бойваленов. Задачи по теория на числата	45
Стефан Герджиков. Комбинаторика и теория на графите	59
Стоян Боев. Хармонично отношение	75

Теория на числата. "Комплексни числа" в крайна аритметика

АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ

alexandur1964@abv.bg

Ще използваме някои факти и твърдения, които, ако не са известни на читателя, могат да бъдат намерени в произволен учебник по теория на числата.

Нека p е нечетно просто число, а t е цяло число, което е квадратичен неостатък по модул p , т.е. сравнението $x^2 \equiv t \pmod{p}$ няма решение; ако използваме символа на Лъожандър, то $\left(\frac{t}{p}\right) = -1$. Комплексни числа ще наричаме числата от вида $a + bj$, където по дефиниция $j^2 = t$, a и b са рационални числа, числителите и знаменателите на които не се делят на p , като ако s е цяло, p не дели s , то $\frac{1}{s}$ е обратния елемент на s , т.е. $\frac{1}{s} = s'$, където $ss' \equiv 1 \pmod{p}$.

Всички действия разглеждаме по модул p . Ще бележим $z = (a, b)$. Операциите събиране, изваждане и умножение се дефинират както при обикновените комплексни числа. Коректно е дефинирано и понятието обратен елемент $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 - tb^2}, \frac{-b}{a^2 - tb^2}\right)$, поради $\left(\frac{t}{p}\right) = -1$.

Твърдение. Имаме $\bar{z} = z^p$, където $\bar{z}$ е комплексно спрягнатия на z , т.е. $\bar{z} = a - bj$.

Доказателство. Имаме $(x + y)^p = x^p + y^p \pmod{p}$, защото биномните коефициенти $\binom{p}{i}$ се делят на p при $0 < i < p$. Следователно

$$z^p = (a + bj)^p = a^p + b^p j^p = a + bj^p \pmod{p}$$

съгласно теоремата на Ферма ($b^p = b \pmod{p}$). Но $j^p = j^{p-1}j = t^{\frac{p-1}{2}} \cdot j = -j$ понеже $t^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ съгласно свойството на символа на Лъожандър, че $\left(\frac{t}{p}\right) \equiv t^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$. Следователно $z^p = a - bj = \bar{z}$, с което твърдението е доказано.

Следствие. Нека p е просто число и $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$. Тогава за числата $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ имаме:

$$(1) \alpha^p = \beta \pmod{p} \text{ и } \beta^p = \alpha \pmod{p};$$

$$(2) \alpha^{p+1} = \beta^{p+1} = \alpha\beta = -1 \pmod{p}.$$

От следствието се получават следните твърдения за редиците на Фибоначи и Люка. Да напомним, че редицата на Фибоначи е дефинирана чрез равенствата $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ при $n \geq 2$, като общият член е $u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$. Аналогично, за редицата на Люка, дефинирана чрез $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$ при $n \geq 2$, общият член е $v_n = \alpha^n + \beta^n$.

Ако p е такова нечетно просто число, че $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$, то $u_{p+1} = \frac{\alpha^{p+1} - \beta^{p+1}}{\alpha - \beta} \equiv 0 \pmod{p}$ и $v_p = \alpha^p + \beta^p \equiv \alpha + \beta \equiv 1 \pmod{p}$.

Твърдение. Имаме $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$, ако $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ и $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$, ако $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Доказателство. Това следва лесно от закона за реципрочност $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$. Наистина $\left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right) = 1$, следователно $\left(\frac{5}{p}\right) = -1 \iff \left(\frac{p}{5}\right) = -1 \iff p \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Ще докажем сега следната

Теорема. (Теорема на Люка) Нека q е просто число от вида $4k + 3$ и $M = 2^q - 1$. Числото M е просто тогава и само тогава, когато $V_{\frac{M+1}{2}} = V_{2^{q-1}} \equiv 0 \pmod{M}$ (тук V_i е редицата на Люка).

Доказателство Лесно се вижда, че $M \equiv 2 \pmod{5}$.

1) Нека M е просто число и да означим $N = 2^{q-1} = \frac{M+1}{2}$. Тогава $\left(\frac{5}{M}\right) = -1$ и $\alpha^{M+1} = \beta^{M+1} = -1 \pmod{M}$. Имаме $V_N^2 = (\alpha^N + \beta^N)^2 = \alpha^{M+1} + \beta^{M+1} + 2 \cdot (-1)^N = -2 + 2 = 0 \pmod{M}$ и следователно $M | V_N = V_{\frac{M+1}{2}}$.

2) Нека сега е известно, че $V_N \equiv 0 \pmod{M}$. Понеже $M \equiv 2 \pmod{5}$, то съществува прост делител p на M , такъв че $p \equiv \pm 2 \pmod{5}$, $\left(\frac{5}{p}\right) = -1$, следователно $\alpha^{p+1} = \beta^{p+1} = -1 \pmod{p}$. Но $p | M$, следователно $V_N = \alpha^N + \beta^N \equiv 0 \pmod{p}$. Нека $\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}$. Имаме, че $\varepsilon^N = -1 \pmod{p}$ и $\varepsilon^{p+1} = 1 \pmod{p}$.

Следователно $\varepsilon^{2N} = \varepsilon^{2^q} = 1 \pmod{p}$. Сега с техника, аналогична на прилаганата при понятието "показател" получаваме, че ако $d = (2^q, p+1)$, то $\varepsilon^N = -1 \pmod{p}$. Ако $d = p+1 = 2^q$, то $p = M$ и значи M е просто. В противен случай (т.е. $d = 2^s$, $s < q$) имаме $d | N = 2^{q-1}$ и тогава от $\varepsilon^d = 1 \pmod{p}$ следва, че $\varepsilon^N = 1 \pmod{p}$, противоречие.

Тази техника може да се приложи успешно към следната задача от Шортлиста на Международната олимпиада през 2003 г.:

Задача 1. Редицата $x_{i=0}^\infty$ е зададена с равенствата $x_0 = 2$ и $x_{k+1} =$

$2x_k^2 - 1, k \geq 0$. Да се докаже, че ако простото число p дели x_n , то 2^{n+3} дели $p^2 - 1$.

Решение. По индукция лесно се доказва, че $x_n = \frac{(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}}{2}$ за всяко $n \geq 0$.

Случай 1. Нека $p|x_n$ и $\left(\frac{3}{p}\right) = 1$. Ако $m^2 \equiv 3 \pmod{p}$, не е трудно да се види, че $p|(2+m)^{2^n} + (2-m)^{2^n}$. Но $(2-m)(2+m) \equiv -1 \pmod{p}$ и значи $(2+m)^{2^{n+1}} \equiv -[(2+m)^{2^n}(2-m)^{2^n}] \equiv -1 \pmod{p}$. Следователно показателят на $2+m$ по модул p е точно 2^{n+2} . Тогава $2^{n+2}|p-1$ и понеже $2|p+1$, получаваме $2^{n+3}|p^2-1$.

Случай 2. Нека $p|x_n$ и $\left(\frac{3}{p}\right) = -1$. Да означим $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ и $\beta = 2 - \sqrt{3}$. Имаме $\alpha^{2^n} = -\beta^{2^n} \pmod{p}$ и следователно $\alpha^{2^{n+1}} = -\alpha^{2^n}\beta^{2^n} = -(\alpha\beta)^{2^n} = -1 \pmod{p}$, откъдето $\alpha^{2^{n+2}} = 1 \pmod{p}$. Следователно "показателят" на α по модул p е точно 2^{n+2} . Но $\alpha^{p+1} = \alpha\beta \pmod{p}$ (от следствието в началото), т.е. $\alpha^{p+1} = 1 \pmod{p}$ и следователно $2^{n+2}|p+1$, откъдето $2^{n+3}|p^2-1$.

Накрая ще решим две задачи за рационални числа.

Задача 2. (Национална олимпиада на САЩ, 2009, зад. 6) Нека $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ са две неконстантни редици от рационални числа. Известно е, че за всеки два индекса i и j числото $(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ е цяло. Да се докажем, че съществува рационално число r , такова че за всеки две i, j , числата $r(a_i - a_j)$ и $\frac{b_i - b_j}{r}$ са цели.

Решение. Нека i, j и k са три произволни индекса. Да положим $a_i - a_j = \frac{p_1}{q_1}$, $a_j - a_k = \frac{p_2}{q_2}$ и $a_k - a_i = \frac{p_3}{q_3}$; аналогично $b_i - b_j = \frac{m_1}{n_1}$, $b_j - b_k = \frac{m_2}{n_2}$ и $b_k - b_i = \frac{m_3}{n_3}$ – числителите и знаменателите са взаимнопрости, ако някоя разлика е 0, считаме съответния знаменател за равен на 1.

Нека p е произволно просто число и p^α е максималната степен, която дели n_1, n_2 или n_3 . Без ограничение на общността можем да считаме, че $p^\alpha || n_1$. Ако допуснем, че степените на p в n_2 и n_3 са по-малки от α , то от $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \frac{m_3}{n_3} = 0$ след привеждане под общ знаменател, лесно получаме противоречие по модул p .

Следователно $p^\alpha || n_2$ например. Но от условието имаме, че $n_1|p_1$ и $n_2|p_2$, т.е. $p^\alpha|p_1$ и $p^\alpha|p_2$. Имаме $\frac{p_3}{q_3} = -(\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2})$ откъдето лесно следва, че $p^\alpha|p_3$.

Това разсъждение означава, че ако p^t е каноническата степен на p в кой да е от знаменателите n_1, n_2 или n_3 , то $p^t|p_1, p_2$ и p_3 . По този начин можем да заключим, че ако $b_i - b_j = \frac{m_1}{n_1}$, i, j са произволни, и $p^\alpha || n_1$, то ако k, l са произволни и $a_k - a_l = \frac{p_1}{q_1}$, то $p^\alpha|p_1$.

Наистина, след модифициране на по-горните разсъждения следва, че p^α дели числителя на $(a_j - a_k) - (a_j - a_l) = a_l - a_k$. Но редицата a_i е неконстантна, следователно съществуват фиксирани k, l , такива че $a_k - a_l \neq 0$ и тогава степента на произволно просто число в знаменателите на $b_i - b_j$ е не по-голяма от тази в числителя на $a_k - a_l$. Това означава, че простите делители на знаменателите $b_i - b_j$ са краен брой и освен това съществува НОК на всички тези знаменатели; да го означим с B . При това B дели числителите на всевъзможните разлики $a_k - a_l$. Съвсем аналогично разсъждения показват, че съществува A - НОК на знаменателите на $a_i - a_j$, като A дели числителите на всевъзможните $b_l - b_k$. Ясно е, че ако положим $r = \frac{A}{B}$, то r е търсеното число.

Задача 2. (Олимпиада на Япония, 2008) Съществува ли естествено число n , такова че всяко рационално число може да се представи във вида $a + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}$, където $a, b_1, b_2, \dots, b_k$ са цели числа и $k \leq n$ е естествено число (k зависи от конкретното число!)?

Решение. За фиксирано естествено число n полагаме

$$A_n = \{z \in \mathbb{Q} | z = a + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}, a, b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{Z}, k \leq n\}.$$

Очевидно имаме $\mathbb{Z} \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$. Да допуснем, че за някое N множеството A_N съдържа всички рационални числа и нека N е минималното с това свойство. Тогава съществува $l \in \mathbb{Q}$, такова че $l \in A_N$, но $l \notin A_{N-1}$ (*). Съществува редица от различни рационални числа $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, такова че $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = l$. Понеже $r_i \in A_N$, съществува фиксирано $k \leq N$, такова че да имаме безкрайна подредица на r_i , да речем $m_1, m_2, \dots$, такова че $m_i = a + \frac{1}{b_1^i} + \dots + \frac{1}{b_k^i}$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = l$, като считаме $|b_1^i| \leq |b_2^i| \leq \dots \leq |b_k^i|$. Тук k е едно и също за всички m_i .

Да разгледаме фиксирано t , $1 \leq t \leq k$. Редицата $|b_t^i|$ се състои от естествени числа и или се "стабилизира", или съществува нейна подредица, клоняща към $+\infty$. Понеже редицата r_i се състои от различни рационални числа, лесно се съобразява, че съществува $t < k$, $\lim_{i \rightarrow \infty} |b_s^i| = \infty$ за всяко s , $t < s \leq k$. Разбира се, това е изпълнено за подходяща безкрайна подредица на $\{r_i\}_{i=1}^\infty$. В крайна сметка можем да изберем подредица, за която $m_i = a + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \dots + \frac{1}{\beta_t} + \frac{1}{b_{t+1}^i} + \dots + \frac{1}{b_k^i}$, като $a, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ са фиксирани, а $\lim_{i \rightarrow \infty} |b_{t+1}^i| = \infty$. Но имаме $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = l$, защото m_i е безкрайна подредица на r_i , т.е. $l = a + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \dots + \frac{1}{\beta_t}$, $t < k$, което обаче противоречи на (*). Следователно отговорът на първоначалния въпрос е отрицателен.

Комбинаторни тъждества

Емил КОЛЕВ

emilkol@gmail.com

Нека A е множество с n елемента и k , $0 \leq k \leq n$, е естествено число. Броят на подмножествата на A с точно k елемента се бележи с $\binom{n}{k}$ (този символ се нарича биномен коефициент и се чете " n над k "), като

$$(1) \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Като използваме горната дефиниция, лесно получаваме следното тъждество

$$(2) \quad (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Целта на настоящата статия е да предложи комбинаторен подход при доказване на тъждества между биномни коефициенти. При този подход елементите на дадено множество се преброяват по два начина и като резултат се получава исканото тъждество. Основната трудност е правилният избор на множеството, чийто елементи ще се броят.

Задача 1. (*Основни тъждества*) Да се докаже тъждеството:

$$\begin{aligned} \text{а) } \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}; & \text{в) } \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} &= 2^n; \\ \text{б) } \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \binom{n}{k}; & \text{г) } \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots &= 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Решение. а) *Първи начин.* Използвайки формулата за биномния коефициент, намираме

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Втори начин. Ще докажем тъждеството, като използваме комбинаторния смисъл на биномните коефициенти. Знаем, че $\binom{n}{k}$ е равен на броя на подмножествата B с k елемента на множество A с n елемента. На всяко такова множество B можем да съпоставим множеството $A \setminus B$, което има точно $n - k$ елемента и обратно. Следователно $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

б) Даденото тъждество може да се докаже директно чрез използване на (1). Може да се използва и комбинаторния смисъл на биномните коефициенти по следния начин. Нека A е множество с n елемента. Да означим с $\mathcal{A}$ всички подмножества на A с k елемента. Знаем, че в $\mathcal{A}$ има точно $\binom{n}{k}$ множества. Да изберем произволен елемент $a \in A$ и да разделим елементите на $\mathcal{A}$ на две части. В първата част да са всички елементи на $\mathcal{A}$, които не съдържат елемента a . Тогава всички k елемента трябва да бъдат избрани от останалите $n - 1$ елемента на A и следователно в тази първа част има точно $\binom{n-1}{k}$ множества. Във втората част на $\mathcal{A}$ остават всички множества, които съдържат елемента a . Останалите $k - 1$ елемента трябва да бъдат избрани от останалите $n - 1$ елемента на A . Това може да стане по $\binom{n-1}{k-1}$ начина. Следователно

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

в) *Първи начин.* Да положим $a = b = 1$ в (2). Получаваме

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Втори начин. Нека $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ е множество с n елемента. Ще преброим по два начина всички подмножества на A .

Нека B е подмножество на A . За елемента a_1 има две възможности – или $a_1 \in B$ или $a_1 \notin B$. Същото е в сила и за всеки от елементите $a_2, a_3, \dots, a_n$. Тъй като множеството B се определя от това кои елементи на A са и негови елементи, то за B имаме точно $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n = 2^n$ възможности.

От друга страна, от дефиницията на $\binom{n}{k}$ знаем, че броят на подмно-

жествата на A с k елемента е $\binom{n}{k}$. Следователно всички подмножества на A са точно

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

г) *Първи начин.* Да положим $a = 1$ и $b = -1$ в (2). Полученото твърждение

$$0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}$$

събираме с

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

и получаваме исканото.

Втори начин. Нека A е множество с $n \geq 1$ елемента. Ще докажем, че броят на подмножествата на A с нечетен брой елементи е равен на броя на подмножествата на A с четен брой елементи.

За целта ще конструираме взаимно-еднозначно съответствие между множествата с четен брой елементи и множествата с нечетен брой елементи. Нека a е произволен елемент от множеството A . Нека B е подмножество на A с четен брой елементи. Ако $a \in B$, то на B съпоставяме множеството $B \setminus \{a\}$, което има нечетен брой елементи. Ако $a \notin B$, то на B съпоставяме множеството $B \cup \{a\}$, което също има нечетен брой елементи. Това е взаимно-еднозначно съответствие, което означава, че броят на подмножествата с четен брой елементи е равен на броя на подмножествата с нечетен брой елементи. Следователно

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2k+1} + \cdots$$

и понеже $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, то

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1},$$

което трябваше да се докаже.

Задача 2. Да се докаже, че за всеки три естествени числа $n \geq m \geq p$ е изпълнено тъждеството $\binom{n}{m} \binom{m}{p} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{m-p}$

Решение. Нека A е множество с n елемента. Ще преброим по два начина двойките подмножества (B, C) , съответно с m и p елемента, за които C е подмножество на B . Множеството B може да бъде избрано по $\binom{n}{m}$ начина, след което множеството C може да се избере по $\binom{m}{p}$ начина. Следователно имаме точно $\binom{n}{m} \binom{m}{p}$ такива двойки.

За преброяване по втори начин най-напред да изберем множеството C . Това може да стане по $\binom{n}{p}$ начина. Тъй като C е подмножество на B , за да получим множеството B трябва да изберем $m-p$ елемента от останалите $n-p$ елемента. Това може да стане по $\binom{n-p}{m-p}$ начина. Получихме точно $\binom{n}{p} \binom{n-p}{m-p}$ двойки, откъдето следва търсеното тъждество.

Задача 3. Да се докаже тъждеството

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k} = \binom{2n}{n}.$$

Решение. За доказване на това тъждество ще преброим по два начина таблиците с два реда и n стълба, в които има точно n отбелязани клетки. От една страна, този брой очевидно е $\binom{2n}{n}$.

За произволно k , $0 \leq k \leq n$, в таблицата може да има k стълба, в които са отбелязани и двете клетки. Тези k стълба могат да се изберат по $\binom{n}{k}$ начина. Тъй като отбелязаните клетки са точно половината, то броят на стълбовете, в които и двете клетки не са отбелязани е също k . Тези стълбове могат да бъдат избрани по $\binom{n-k}{k}$ начина. В останалите $n-2k$ стълба ще има по една отбелязана клетка. Тъй като тя може да бъде в първия или втория ред, имаме точно 2^{n-2k} възможности. Следователно търсеният брой е

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k},$$

с което твърдението е доказано.

Задача 4. Да се докаже твърдението

$$1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \cdots + k \cdot \binom{n}{k} + \cdots + n \cdot \binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Решение. Дясната част на даденото твърдение може да ни подсети кое множество да разгледаме. Ако разгледаме група от n човека имаме точно $n2^{n-1}$ начина да изберем един член от групата, който ще обявим за председател, и след това от останалите $n - 1$ члена да изберем няколко (възможно 0) за членове на комисия. Следователно дясната част на твърдението е равна на броят на начините, по които от група от n човека можем да изберем комисия с председател.

Ще преброим тези комисии по друг начин като първо фиксираме броя на членовете на комисията, заедно с председателя. Този брой може да бъде всяко число k , като $1 \leq k \leq n$. При това членовете на комисията могат да се изберат по $\binom{n}{k}$ начина, след което председателят може да бъде кой да е от тези k човека. Общо получаваме $k \cdot \binom{n}{k}$ комисии с точно k члена.

От горните два начина на броене следва верността на твърдението.

Задача 5. Да се докаже твърдението

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

Решение. Да разгледаме група от n учители и n ученици. Да преброим начините по които от тези $2n$ човека можем да изберем комисия от n представители, с председател, който е учител. Председателят може да бъде избран по n начина, след което останалите $n - 1$ члена могат да бъдат избрани по $\binom{2n-1}{n-1}$ начина.

За всяко k , $1 \leq k \leq n$, да преброим комисиите с точно k учителя и съответно $n - k$ ученика. Учителите могат да бъдат избрани по $\binom{n}{k}$ начина, като председателят може да бъде кой да е от тях, т.е. той може да бъде избран по k начина. Учениците в комисията са $n - k$ и те могат да бъдат избрани по $\binom{n}{n-k}$ начина. Следователно броят на комисиите с точно k

учители е равен на

$$k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = k \binom{n}{k}^2.$$

Сумирайки за $1 \leq k \leq n$ получаваме търсеното тъждество.

Задача 6. Да се докаже тъждеството

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Решение. Дясната част на тъждеството ни подсказва, че трябва да преброим подмножествата с n елемента на множество с $2n$ елемента.

Нека $A = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ е множество с $2n$ елемента. Всяко подмножество с n елемента се получава като изберем k елемента от $\{a_1, \dots, a_n\}$ и $n-k$ елемента от $\{b_1, \dots, b_n\}$, като $0 \leq k \leq n$. Следователно подмножествата с n елемента на A са точно

$$\binom{n}{0} \binom{n}{n} + \binom{n}{1} \binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} + \cdots + \binom{n}{n-1} \binom{n}{1} + \binom{n}{n} \binom{n}{0}.$$

Като използваме тъждеството $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ можем да запишем горния сбор като

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2,$$

с което тъждеството е доказано.

Използваните в решението на задача 5. разсъждения могат да се използват за обобщаване на тъждеството.

Задача 7. Да се докаже тъждеството

$$\sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{k} \binom{n}{k} = \binom{m+n}{n}.$$

Решение. Нека $A = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$ е множество с $m+n$ елемента. Броят на начините, по които можем да изберем n елемента от A е равен на $\binom{m+n}{n}$. От друга страна при всеки избор на k , $0 \leq k \leq n$, елемента от

$a_1, \dots, a_m$ трябва да изберем още $n-k$ елемента от множеството $\{b_1, \dots, b_n\}$. Следователно n елемента от A могат да бъдат избрани по

$$\binom{m}{0}\binom{n}{n} + \binom{m}{1}\binom{n}{n-1} + \dots + \binom{m}{n}\binom{n}{0} = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{k}\binom{n}{n-k}$$

начина. Тъй като $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, твърдеството е доказано.

Задача 8. Да се докаже, че при $n > m$ е изпълнено твърдеството:

$$\sum_{r=m+1}^n \binom{r-1}{m} 2^{n-r} = \sum_{r=m+1}^n \binom{n}{r}.$$

Решение. Да разгледаме множеството $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Ще преброим по два начина подмножествата на A с поне $m+1$ елемента. От една страна този брой е точно равен на

$$\binom{n}{n+1} + \binom{n}{n+2} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{r=m+1}^n \binom{n}{r}.$$

Нека $B = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ е подмножество на A с поне $m+1$ елемента, т.е. $s \geq m+1$. Можем да считаме, че $a_1 < a_2 < \dots < a_t$. Тогава $m+1 \leq a_{m+1} \leq n$. Множествата, за които $a_{m+1} = m+1$ са точно 2^{n-m-1} защото тогава $\{1, 2, \dots, m+1\} \subset B$, а за всеки от останалите $n-m-1$ елемента на A има две възможности – или е елемент на B , или не е елемент на B . Когато $a_{m+1} = m+2$ множествата са точно $\binom{m+1}{m} 2^{n-m-2}$, защото от елементите $\{1, 2, \dots, m+1\}$ точно m са от B , а за всеки от останалите $n-m-2$ отново има по две възможности. Аналогично, ако $a_{m+1} = t$ множествата са точно $\binom{t-1}{m} 2^{n-t}$, защото от елементите $\{1, 2, \dots, t-1\}$ точно m са от B , а за всеки от останалите $n-t$ има по две възможности. Следователно търсеният брой е равен на

$$\binom{m}{m} 2^{n-m-1} + \dots + \binom{t-1}{m} 2^{n-t} + \dots + \binom{n-1}{m} = \sum_{k=m+1}^n \binom{k-1}{m} 2^{n-k},$$

с което твърдеството е доказано.

Задача 9. Да се докаже, че при $n \geq r$ е изпълнено тъждеството:

$$\sum_{t=r}^n \binom{t}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Решение. Нека $A = \{1, 2, \dots, n+1\}$. Дясната част на тъждеството е равна на броя на подмножествата на A с точно $r+1$ елемента. Да разделим тези множества на групи в зависимост от най-големия им елемент. Ако този елемент е t (ясно е, че $t \geq r+1$), то има точно $\binom{t-1}{r}$ такива множества. Следователно има само едно множество с най-голям елемент $r+1$, има точно $\binom{r+1}{r}$ множества с най-голям елемент $r+2$ и т.н., има точно $\binom{n}{r}$ множества с най-голям елемент $n+1$. Получаваме

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1},$$

с което тъждеството е доказано.

Релации

ИВАЙЛО КОРТЕЗОВ

kortezov@math.bas.bg

Нека X е дадено множество. Всяко подмножество на множеството от наредени двойки с елементи от X се нарича релация над X . Казано неформално, релацията показва двойката елементи на X , които са свързани по определен начин. Например, ако X е множеството от целите числа, то релации над X са $=$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $|$ (дели) и др. Ако X е множеството на правите в равнината, там релации са $\perp$ (е перпендикулярна), $\parallel$ (е успоредна или съвпада с), $\mathbf{z}$ (има общи точки с) и др. Ако X е множеството на триъгълниците в равнината, там релации са $\cong$ (е еднакъв с), $\sim$ (е подобен на) и др.

Ще казваме, че релацията $@$ е *рефлексивна* в случай, че $\forall x \in X, x @ x$. От гореспоменатите релации рефлексивни са $=$, $\geq$, $\leq$, $|$ (дели), $\parallel$, $\mathbf{z}$, $\cong$, $\sim$.

Ще казваме, че релацията $@$ е *симетрична* в случай, че $\forall x, y \in X$, ако $x @ y$, то $y @ x$. От гореспоменатите релации симетрични са $=$, $\perp$, $\parallel$, $\mathbf{z}$, $\cong$, $\sim$. Всеки (неориентиран) граф дефинира симетрична релация над множеството от върховете си (ребрата показват кои върхове са в релация).

Ще казваме, че релацията $>$ е *антисиметрична* в случай, че не съществуват различни $x, y \in X$, за които $x > y$ и $y > x$. От гореспоменатите релации антисиметрични са $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, както и делимостта сред естествените числа.

Релацията $@$ е *транзитивна* в случай, че $\forall x, y, z \in X$, ако $x @ y$ и $y @ z$, то $x @ z$. От гореспоменатите релации транзитивни са $=$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $|$, $\parallel$, $\cong$, $\sim$.

За замявка няма да ви е трудно да намерите грешката в следното „доказателство“, твърдящо че всяка симетрична и транзитивна релация $@$ над множество X е задължително рефлексивна. Ето го: Нека x е произволен елемент на X . Трябва да докажем, че $x @ x$. Да вземем произволно $y \in X$, за което $x @ y$. От симетричността следва $y @ x$. Сега от транзитивността следва $x @ x$.

Разбира се, проблемът е в наличието на елемента y . Ако искаме да

подкрепим това с контрапример, ето един: Нека X е множеството на реалните числа, като $x, y \in X$ са в релация $@$ точно когато за всеки $a, b \in X$ от $xa = yb$ следва $a = b$. Лесно се вижда, че $@$ съвпада с релацията $=$ с уговорката, че 0 не е в релация със себе си.

Този пример заедно с посочените при илюстрацията на свойствата сочат, че свойствата рефлексивност, симетричност и транзитивност са независими едно от друго (наличието на едно от тях не влияе на наличието на останалите).

Релацията $@$ е *релация на еквивалентност* (РЕ), ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна. От гореспоменатите, релации на еквивалентност са $=$, $\parallel$, $\cong$, $\sim$. Всяка РЕ разбива множеството X на непресичащи се подмножества, наречени *класове на еквивалентност*, такива, че елементите в един клас са в релация помежду си, а тези в различните класове не са.

Откриването на релация на еквивалентност понякога помага в комбинаторните задачи. Въпреки горното „доказателство“, понякога на примерите, излизащи от тях, липсва именно рефлексивността и е необходимо да дефинираме внимателно желаната от нас релация, за да я набавим (например в Задача 1 това е наложило употребата на думата „поне“).

Задача 1. Даден е правилен n -ъгълник, $n \geq 5$. Построени са $n + 1$ различни триъгълника с върхове сред тези на n -ъгълника. Докажете, че някои два от тях имат точно един общ връх.

Решение. Да допуснем противното. Тогава всеки два триъгълника T и U , които имат общ връх, имат поне два общи върха. В такъв случай ще бележим $T@U$. Релацията $@$ е явно рефлексивна и симетрична. Да се уверим, че е и транзитивна: ако $ABC@ABD$ и $ABC@T$, то T има два общи върха с ABC , сред които е A или B . Така T има общи върхове с ABD и значи $ABD@T$. И така, $@$ е релация на еквивалентност и следователно триъгълниците се разбиват на класове на еквивалентност. За броя k на върховете на триъгълниците от един клас има следните възможности:

I. $k=3$. Тогава в класа има само един триъгълник.

II. $k=4$. Тогава в класа има не повече от 4 триъгълника.

III. $k>4$. Ако в класа има триъгълници ABC и ABD , а E е друг връх на триъгълник от класа, то този триъгълник трябва да е ABE . Сега всеки друг триъгълник от класа съдържа върховете A, B . Така триъгълниците в класа са не повече от $k - 2$.

И в трите случая броят на триъгълниците в класа е не по-голям от броя на върховете в този клас. Така общият брой триъгълници от всички класове е не повече от n – противоречие.

Едно приложение. Нека X е множество от волейболни отбори, участвали в турнир на принципа „всеки срещу всеки по един мач“ (мачовете не могат да завършат наравно). Редица от един или повече различни отбори $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, такава че x_{i-1} е победил x_i за всяко $i = 1, 2, \dots, n$, ще наричаме *път от x_1 до x_n* . Ако в един такъв път x_n е победил x_1 , ще наричаме пътя *цикъл*.

Ще казваме, че два отбора x и y са в релация $@$, ако съществуват път от x до y и път от y до x . Проверката, че $@$ е релация на еквивалентност е просто упражнение. Възможно е да има класове на еквивалентност, съдържащи само един отбор (например такъв, който е победил във всичките си мачове). Класове от два отбора няма поради антисиметричността на релацията „ x е победил y “.

Класовете на еквивалентност на X са наредени по „сила“. По-конкретно, можем да дефинираме релация $>$ сред класовете, така че ако $C_1 > C_2$ за два класа на еквивалентност C_1 и C_2 , то от $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$ следва, че x_1 е победил x_2 . Наистина, в противен случай има отбори $x_1, y_1 \in C_1, x_2, y_2 \in C_2$, такива че x_1 е победил x_2 и y_2 е победил y_1 ; в същото време заради РЕ има пътища от x_2 до y_2 и от y_1 до x_1 , така че има път от x_1 до y_2 и от y_2 до x_1 – противоречие с принадлежността им към различни класове на еквивалентност.

С подобни средства можем да се убедим, че наредбата $>$ на класовете е транзитивна и антисиметрична.

Ще покажем, че всеки клас на еквивалентност, съдържащ поне два отбора, представлява цикъл. Пътищата, които свързват двата отбора, осигуряват наличието на някакъв цикъл (не е задължително тези два отбора да участват в цикъла). Да разгледаме цикъл $C = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ с максимална дължина, съставен от отбори в този клас на еквивалентност. Остава да докажем, че той обхваща всички отбори в класа. Да допуснем, че отбор y от класа е извън C и да проследим мача му с x_1 .

Ако y е загубил от x_1 , то трябва y да е загубил и от x_2 , защото в противен случай бихме могли да получим цикъл, по-дълъг от максималния, с добавяне на отбора y след x_1 и преди x_2 . Аналогично трябва y да е загубил и от x_3 , и от x_4 , и т.н., т.е. y да е загубил от всички отбори в цикъла. Да означим

с A множеството на всички отбори в класа, загубили от отборите на C .

Ако y е победил x_1 , то трябва y да е победил и x_n , защото в противен случай бихме могли да получим цикъл, по-дълъг от максималния, с добавяне на отбора y след x_n и преди x_1 . Аналогично трябва y да е загубил и от x_{n-1} , и от x_{n-2} , и т.н., т.е. y да победил всички отбори в цикъла. Да означим с B множеството на всички отбори в класа, победили отборите на C .

Ако $a \in A$ и $b \in B$, то трябва b да е победил a , защото иначе бихме могли да удължим максималния цикъл с добавяне между x_1 и x_2 на a , последван от b .

И преди се усещаше, че работата отива натам, но сега става безпоощадно ясно, че не съществува път от отбор от A до отбор от C (отборите от A биха могли да побеждават само отбори от A и пътят няма как да напусне A). Това противоречи на принадлежността им към класа на еквивалентност, така че $A = \emptyset$. Аналогично, не съществува път от отбор от C до отбор от B (отборите от B биха могли да бъдат победени само отбори от B и пътят няма как да влезе в B). Това противоречи на принадлежността им към класа на еквивалентност, така че $B = \emptyset$. И така, целият клас на еквивалентност принадлежи на максималния си цикъл C .

Задача 2. Множеството X има n елемента. За всяка наредена двойка подмножества на X (не непременно различни) е пресметнат броят на елементите в сечението им (който може и да е 0). Какъв е сборът на получените числа?

Решение. Нека A и C са две подмножества на X . Ще пишем $A \sim C$, ако $A = C$ или $A = X \setminus C$. Броят наредени двойки подмножества на X е $(2^n)^2 = 4^n$. Ще казваме, че две двойки $(A; B)$ и $(C; D)$ са в релация $@$, ако $A \sim C$ и $B \sim D$.

Директно проверяваме, че $@$ е релация на еквивалентност. Всеки клас на еквивалентност има 4 двойки множества, така че имаме 4^{n-1} класа. Всеки елемент на X принадлежи на точно едно от сеченията $A \cap B$ за елемент $(A; B)$ от даден клас, така че сеченията $A \cap B$ на четирите елемента от класа имат общо n елемента. Следователно търсеният общ сбор е $n \cdot 4^{n-1}$.

Задача 3. Нека p е просто число. Да се намери най-голямото естествено k , за което $(p!)^k$ дели $(p^2)!$.

Решение. Явно $k \leq p + 1$, понеже в $(p^2)!$ има само p множителя, кратни

на p , от които само един е кратен на p^2 (самият p^2). Ще се уверим, че $k = p + 1$.

Да разгледаме азбука от p^2 букви. Образоваме всевъзможните квадратни таблици $p \times p$, чиито полета са запълнени с различни букви. Броят на тези таблици е $(p^2)!$. Ще казваме, че две таблици са в релация @, ако можем да получим едната от другата чрез разместване на редове и/или разместване на елементите в даден ред. Например, ако $p = 2$ и азбуката е $\{a, b, c, d\}$, то

таблицата

a	b
c	d

 е в релация @ с точно тези таблици, в които буквите a и b са на един ред (техният брой е 8, понеже има 2 начина да изберем кой да е този ред и по 2 начина да изберем реда на буквите на всеки от двата реда).

Ясно е, че @ е релация на еквивалентност. Да преброим по колко елемента има във всеки клас на еквивалентност. Има $p!$ начина да разместим редовете и по $p!$ начина да разместим елементите във всеки от p -те реда, така че всеки клас на еквивалентност обхваща $(p!)^{p+1}$ таблици. Така $(p!)^{p+1}$ дели $(p^2)!$ и значи $k = p + 1$.

Задача 4. (Теорема на Туран) Нека G е граф с n върха, несъдържащ като подграф K_{r+1} . Тогава броят на ребрата на G не надхвърля броя на ребрата в пълен r -делен граф с n върха от вида $D(k, \dots, k, k+1, \dots, k+1)$, т.е. такъв, в който дяловете са колкото се може по-равни (тук $n = rk + t$, където $t < r$). Този граф се нарича *Граф на Туран* и се бележи с $T(n, r)$.

Решение. Нека G е граф с n върха, несъдържащ като подграф K_{r+1} , и с максимален брой ребра. Твърдим, че в G не съществуват три върха u, v, w , между които да е прекарано само едно от ребрата. Да допуснем, че такива има и е прекарано само реброто uv .

Случай А. $d(w) < d(u)$. Изтриваме върха w (и всички ребра през него) и го заменяме с нов връх u' , свързан само със съседите на u . В новия граф G' един пълен подграф може да съдържа не повече от един от върховете u и u' . Значи G' също не съдържа K_{r+1} като подграф, а има повече ребра от G , понеже $d(u) > d(w)$. Това противоречи на максималността на броя на ребрата в G .

Случай Б $d(w) < d(v)$. Разглежда се аналогично на случай А.

Случай В $d(w) \geq d(u)$ и $d(w) \geq d(v)$. Изтриваме върховете u, v (и всички ребра през тях) и ги заменяме с нови върхове w', w'' , свързани само

със съседите на w . В новия граф G' един пълен подграф може да съдържа не повече от един от върховете w, w', w'' . Значи G' също не съдържа K_{r+1} като подграф, а има повече ребра от G , понеже са изтрети $d(u) + d(v) - 1$ ребра, а са добавени $2d(w)$ ребра. Това противоречи на максималността на броя на ребрата в G .

Доказаното твърдение гарантира, че за дадения граф G релацията между върхове „ x не е свързан с y “, която ще бележим с $x@y$, е транзитивна. Понеже тя е рефлексивна и симетрична, тя е и релация на еквивалентност. Класовете ѝ на еквивалентност образуват дяловете на r -делен граф (те не може да са повече от r , понеже G не съдържа K_{r+1} като подграф; засега допускаме възможността да има празни дялове).

Остава да покажем, че бройките върхове в дяловете на G не се различават с повече от 1. Да допуснем, че има два дяла A, B и $|A| > |B| + 1$. Да прехвърлим връх от A в B . При това се губят $|B|$ ребра, а се печелят $|A| - 1$ ребра: новият граф противоречи на максималността на G .

Задача 5. (Теорема на Мантел.) Максималният брой ребра в граф с n върха без триъгълници е $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Теоремата на Мантел е може би най-често срещания частен случай от теоремата на Туран.

Задача 6. Докажете, че броят на ребрата в $T(n, r)$ не надхвърля числото $\left\lfloor \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} \right\rfloor$. Можем ли да твърдим, че всъщност той е равен на това число?

Решение. Нека $n = rk + t$, където k и t са цели числа и $t < r$. Графът $T(n, r)$ има t дяла с по $k+1$ върха и $r-t$ дяла с по k върха. От всевъзможните $\frac{n(n-1)}{2}$ ребра липсват t пъти по $\frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + k$ ребра и $r-t$ пъти по $\frac{k(k-1)}{2}$ ребра. Така броят на ребрата е

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1) - rk(k-1) - 2tk}{2} &= \frac{n^2 - n - rk^2 + rk - 2tk}{2} \\ &= \frac{n^2 - t - rk^2 - 2tk}{2}. \end{aligned}$$

Остава да докажем, че $\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} \geq \frac{n^2 - t - rk^2 - 2tk}{2}$, т.е.

$$\frac{1}{r} \frac{n^2}{2} \leq \frac{t + rk^2 + 2tk}{2}.$$

Заместваме $n = rk + t$ и получаваме $r^2k^2 + 2rtk + t^2 \leq tr + r^2k^2 + 2rtk$, което е вярно поради $t < r$.

За да имаме равенство, трябва да е в сила неравенството

$$\frac{n^2 - t - rk^2 - 2tk}{2} > \left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{n^2}{2} - 1,$$

т.е. $\frac{t + rk^2 + 2tk}{2} < \frac{1}{r} \frac{n^2}{2} + 1$. Заместваме $n = rk + t$ и опростяваме до $t^2 + 2r > tr$. Последното обаче не е вярно например за $t = 3$, $r = 9$, $n = 12$. Действително графът $D(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2)$ има $66 - 3 = 63$ ребра, а формулата дава $\frac{8}{9} \cdot \frac{144}{2} = 64$.

Толкова много квадрати

НЕВЕНА СЪБЕВА – КОЛЕВА

newena@math.bas.bg

В тази лекция ще разгледаме съставени от квадрати геометрични конфигурации, някои от които изглеждат доста внушително. Но често ключът към големите проблеми е в малките неща. Така и тук с помощта на няколко лесни свойства ще разплетем „засукани“ олимпийски задачи.

Част I. За начинаещи

Да припомним свойствата на конфигурацията от два квадрата ($ABCD$ и $DEFG$) с общ връх.

- [1] Медианата DM в $\triangle AED$ е перпендикулярна на CG и два пъти по-малка от нея.

Доказателство. Ако построим успоредника AD_1ED , получаваме еднакви триъгълници CDG и AD_1D . Тогава $CG = DD_1 = 2DM$ и $\angle ADD_1 = \angle DCG$, откъдето $CG \perp DM$.

- [2] Лицата на $\triangle AED$ и $\triangle CDG$ са равни.

Доказателство. Триъгълниците CDG и AD_1D са еднакви, а $S_{AD_1D} = \frac{1}{2}S_{AD_1ED} = S_{AED}$.

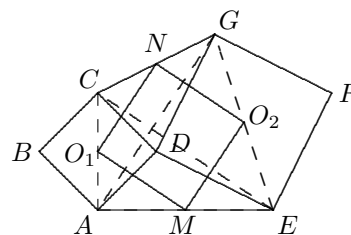
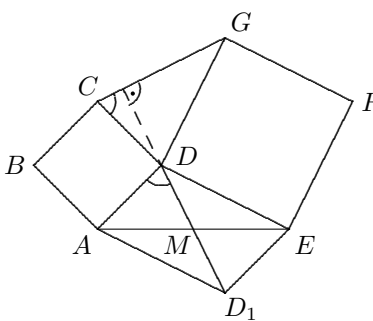
- [3] Отсечките AG и CE са равни и перпендикулярни.

Доказателство. Достатъчно е да забележим, че отсечката CE е образ на AG при ротация около D на ъгъл 90° .

Доказаните свойства имат някои интересни следствия.

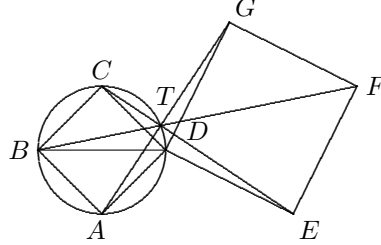
Следствие 1. Центровете на квадратите и средите на AE и CG са върхове на квадрат.

Доказателство. При означенията на чертежа, MO_1 и MO_2 са средни отсечки съответно в $\triangle AEC$ и $\triangle AEG$ и от [3] следва, че MO_1 е перпендикулярна и равна на MO_2 . Аналогично NO_1 е перпендикулярна и равна на NO_2 , т.е. O_1MO_2N е квадрат.



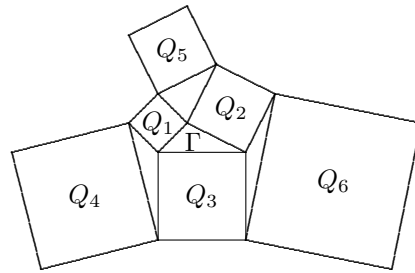
Следствие 2. Правите AG , CE и BF се пресичат в една точка.

Доказателство. Нека T е пресечната точка на AG и CE . От свойство [3] имаме, че $\angle ATC = 90^\circ$, следователно T лежи на описаната около квадрата $ABCD$ окръжност. Оттук получаваме, че BT е ъглополовяща на $\angle ATC$. Аналогично FT е ъглополовяща на $\angle ETG$, т.е. точките T , B и F лежат на една права.



Следствие 3. При означенията на чертежа, сборът от лицата на „външните“ квадрати Q_4, Q_5 и Q_6 е три пъти по-голям от сбора на лицата на „вътрешните“ квадрати Q_1, Q_2 и Q_3 .

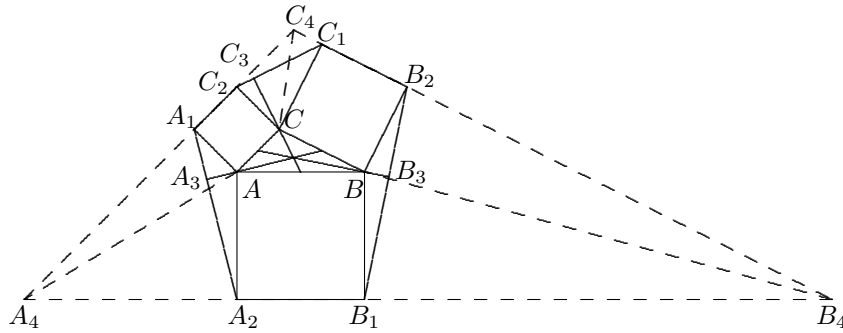
Доказателство. От свойство [1] знаем, че страните на квадратите Q_4, Q_5 и Q_6 са два пъти по-големи от съответните медиани в триъгълника Γ .



Като означим страните на Γ с a, b и c и използваме формулата за медианата, получаваме

$$S_4 + S_5 + S_6 = 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3(S_1 + S_2 + S_3).$$

Следствие 4. На страните на $\triangle ABC$ външно са построени квадратите ABB_1A_2 , BCC_1C_2 и CAA_1C_3 . Тогава височините AA_3 , BB_3 и CC_3 съответно в $\triangle AA_1A_2$, $\triangle BB_1B_2$ и $\triangle CC_1C_2$ се пресичат в една точка.



Доказателство. Достатъчно е да забележим, че според [1] правите, определени от дадените височини, съдържат медианите на $\triangle ABC$.

С тази конфигурация е свързан още един факт: ако $A_1C_2 \cap A_2B_1 = A_4$, $A_2B_1 \cap B_2C_1 = B_4$ и $B_2C_1 \cap A_1C_2 = C_4$, то правите AA_4 , BB_4 и CC_4 се пресичат в една точка. Това се доказва, например, с теоремата на Чева за триъгълника $A_4B_4C_4$, като се използва, че AA_4 разделя страната B_4C_4 в отношение $\frac{S_{AA_4C_4}}{S_{AA_4B_4}} = \frac{A_4C_4 \cdot b}{A_4B_4 \cdot c}$ и т.н.

Задача 1. (Московска олимпиада, 2005 г.) На страните на $\triangle ABC$ външно са построени квадратите ABB_1A_2 , BCC_1C_2 и CAA_1C_3 . На отсечките A_1A_2 и C_1C_2 външно съответно за $\triangle AA_1A_2$ и $\triangle CC_1C_2$ са построени квадратите $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Да се докаже, че правата C_3A_4 е успоредна на AC .

Първо решение, с лица. От свойство
2 имаме равенствата

$$\begin{aligned} S_{A_1A_4C_2} &= S_{AA_1A_2} = S_{ABC} \\ &= S_{CC_1C_2} = S_{AC_2C_3}. \end{aligned}$$

От $S_{A_1A_4C_2} = S_{AC_2C_3}$ следва, че правата C_3A_4 е успоредна на A_1C_2 , т.е. на AC .

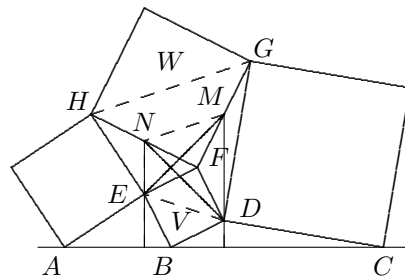
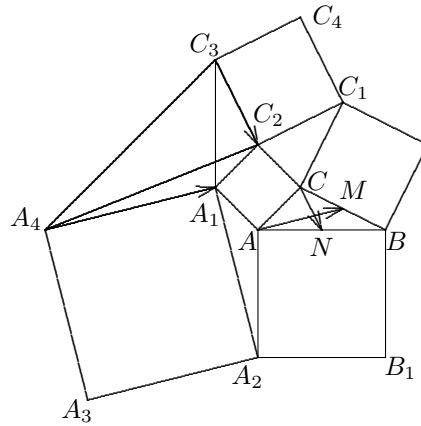
Второ решение, с вектори. Ако AM и CN са медиани в $\triangle ABC$, от свойство
1 имаме равенствата $\vec{A_4A_1} = 2 \vec{AM}$ и $\vec{C_3C_2} = 2 \vec{CN}$. Тогава

$$\vec{A_4C_3} = \vec{A_4A_1} + \vec{A_1C_2} + \vec{C_2C_3} = (\vec{AC} + \vec{AB}) + \vec{AC} + (\vec{CA} + \vec{CB}) = 4 \vec{AC}.$$

Оттук следва, че отсечката C_3A_4 е успоредна на AC и, нещо повече, е 4 пъти по-голяма от нея.

Задача 2. (Сангаку) В дадената конфигурация от четири квадрата, да се докаже, че страната на квадрата W е два пъти по-голяма от страната на квадрата V .

Решение. Ще използваме означенията на чертежа. Твърдението е еквивалентно на $HG = 2ED$, т.е. $NM = ED$, където N и M са средите съответно на HF и FG .

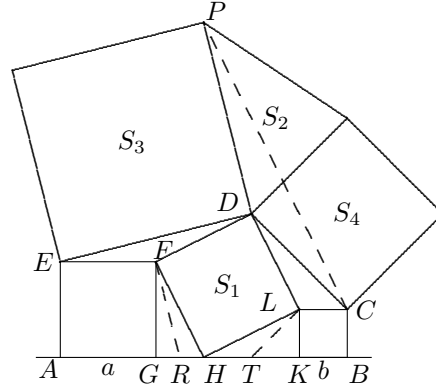


Но медианите EN и MD са перпендикулярни на правата AB (свойство [1]), следователно EN и MD са успоредни, т.е. $ENMD$ е трапец. Ако разгледаме квадрата V и квадрата с върхове N, F, M и центъра на W , от свойство [3] получаваме, че $EM = DN$. Следователно $ENMD$ е равнобедрен трапец, т.е. $NM = ED$, което искахме да докажем.

Задача 3. (Сангаку) В дадената конфигурация от пет квадрата да се докаже, че:

- а) $S_1 = S_2$;
- б) отсечката PC е успоредна на DL и 3 пъти по-голяма от нея;
- в) $S_3 + S_4 = 5S_1$.

Решение. а) Ще използваме означенията на чертежа. Триъгълниците FGH и HKL са еднакви и лицата им са равни на $\frac{ab}{2}$, където a и b са страните съответно на $AGFE$ и $KBC L$.



От свойство [2] имаме, че $S_{EFD} = S_{FGH} = S_{HKL} = S_{DLC}$ и

$$S_2 = S_{EDC} = S_{ABCDE} - S_{ABCE} = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} + S_1 - (a+b)^2 = S_1.$$

- б) Нека FR е медиана в $\triangle FGH$; тогава $\vec{PD} = 2 \vec{FR}$ от свойство [1] и изразяваме:

$$\begin{aligned} \vec{PC} &= \vec{PD} + \vec{DL} + \vec{LC} = 2 \vec{FR} + \vec{DL} + \vec{GH} = \\ &= (\vec{FG} + \vec{FH}) + \vec{DL} + \vec{GH} = 2 \vec{DL} + \vec{FG} + \vec{GH} = 3 \vec{DL}. \end{aligned}$$

- в) Ако LT е медиана в $\triangle HKL$, намираме

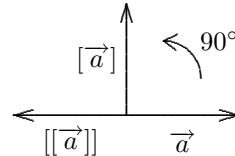
$$\begin{aligned} S_3 + S_4 &= ED^2 + DC^2 = 4FR^2 + 4LT^2 = \\ &= 4 \left(a^2 + \frac{b^2}{4} \right) + 4 \left(b^2 + \frac{a^2}{4} \right) = 5(a^2 + b^2) = 5DF^2 = 5S_1. \end{aligned}$$

Задачите, които разгледахме дотук, могат да се решат с използване на ротация на ъгъл 90° . На свойствата на ротацията ще се спрем по-подробно в следващата част.

Част II. За напреднали

За даден вектор $\vec{a}$ с $[\vec{a}]$ ще означаваме образа на $\vec{a}$ при ротация на ъгъл 90° по посока обратна на часовата стрелка. В сила са следните свойства:

1. $[k\vec{a}] = k[\vec{a}]$
2. $[\vec{a} + \vec{b}] = [\vec{a}] + [\vec{b}]$
3. $[[\vec{a}]] = -\vec{a}$



Да разгледаме едно обобщение на следствие 1. от първа част.

Задача 4. Дадени са положително ориентирани квадрати $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Ако A_2, B_2, C_2 и D_2 са средите съответно на AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 , да се докаже, че $A_2B_2C_2D_2$ е квадрат.

Решение. Да означим $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{A_1B_1} = \vec{b}$; тогава $\vec{AD} = [\vec{a}]$ и $\vec{A_1D_1} = [\vec{b}]$. Тъй като A_2 и B_2 са средите съответно на AA_1 и BB_1 , то

$$\vec{A_2B_2} = \frac{\vec{AB} + \vec{A_1B_1}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$

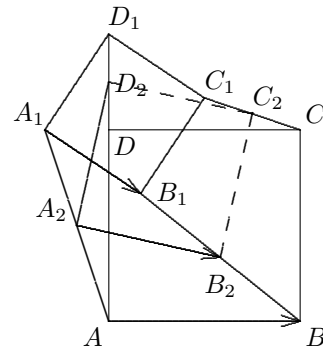
Аналогично получаваме $\vec{A_2D_2} = \frac{\vec{AD} + \vec{A_1D_1}}{2} = \frac{[\vec{a}] + [\vec{b}]}{2} = \frac{[\vec{a} + \vec{b}]}{2}$.

Следователно $\vec{A_2D_2} = [\vec{A_2B_2}]$, което означава, че отсечките A_2D_2 и A_2B_2 са перпендикулярни и равни. Аналогично твърдение е вярно и за C_2D_2 и C_2B_2 , т.е. $A_2B_2C_2D_2$ е квадрат.

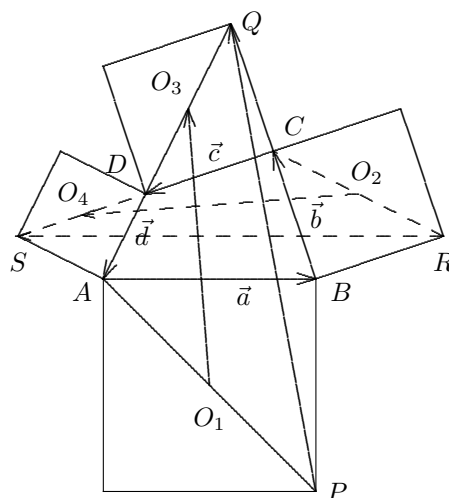
Забележка. Същото твърдение е в сила и когато точките A_2, B_2, C_2 и D_2 делят в едно и също отношение отсечките AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 .

Задача 5. На страните AB, BC, CD и DA на четириъгълника $ABCD$ външно са построени квадрати с центрове съответно O_1, O_2, O_3 и O_4 . Да се докаже, че отсечките O_1O_3 и O_2O_4 са перпендикулярни и равни.

Решение. Нека $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{CD} = \vec{c}$ и $\vec{DA} = \vec{d}$. Да изразим $\vec{O_1O_3}$ и $\vec{O_2O_4}$, като използваме означенията на чертежа.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{O_1O_3} &= \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{PQ}}{2} = \\
&= \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ}}{2} = \\
&= \frac{-\vec{d} + [\vec{a}] + \vec{b} - [\vec{c}]}{2}; \\
\overrightarrow{O_2O_4} &= \frac{\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{RS}}{2} = \\
&= \frac{\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AS}}{2} = \\
&= \frac{\vec{c} + [\vec{b}] - \vec{a} - [\vec{d}]}{2}.
\end{aligned}$$



Да завъртим вектора $\overrightarrow{O_1O_3}$ на 90° :

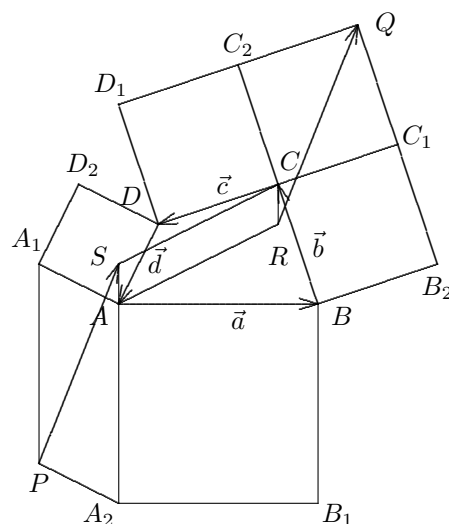
$$[\overrightarrow{O_1O_3}] = \frac{-[\vec{d}] + [[\vec{a}]] + [\vec{b}] - [[\vec{c}]]}{2} = \frac{-[\vec{d}] - \vec{a} + [\vec{b}] + \vec{c}}{2} = \overrightarrow{O_2O_4}.$$

Следователно $\overrightarrow{O_2O_4}$ е образ на $\overrightarrow{O_1O_3}$ при ротация на 90° , т.е. отсечките O_1O_3 и O_2O_4 са перпендикулярни и равни.

Забележка. Тази задача може да се реши и с композиция от ротации.

Задача 6. (Българско предложение за МОМ) На страните на четириъгълника $ABCD$ външно са построени квадратите ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CDD_1C_2 и DAA_1D_2 . Точките P и Q са такива, че AA_1PA_2 и CC_1QC_2 са успоредници. Нека R е произволна вътрешна точка за четириъгълника $ABCD$. Да се докаже, че успоредниците $RASC$ и $RPTQ$ имат два общи върха.

Решение. Ще докажем, че точките S и T съвпадат. Нека отново означим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ и $\overrightarrow{DA} = \vec{d}$ и да изразим векторите $\overrightarrow{PS}$ и $\overrightarrow{RQ}$.

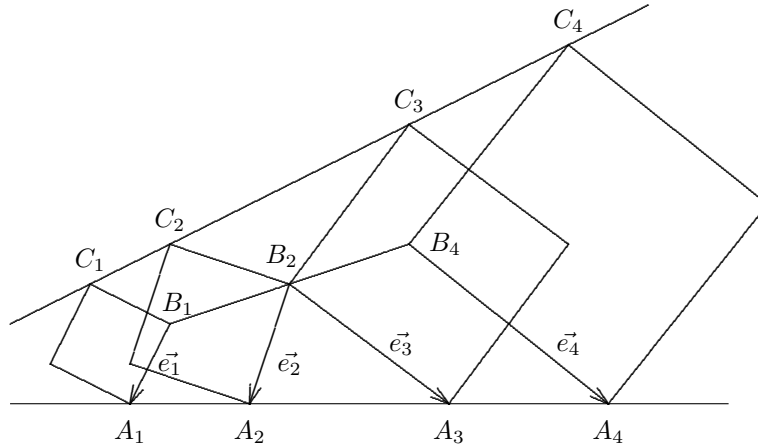


$$\begin{aligned}\vec{PS} &= \vec{PA}_2 + \vec{A_2A} + \vec{AS} = [\vec{d}] + [\vec{a}] + \vec{RC}, \\ \vec{RQ} &= \vec{RC} + \vec{CC_1} + \vec{C_1Q} = \vec{RC} - [\vec{b}] - [\vec{c}].\end{aligned}$$

Тяхната разлика е $\vec{PS} - \vec{RQ} = [\vec{a}] + [\vec{b}] + [\vec{c}] + [\vec{d}] = [\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}] = \vec{0}$, откъдето следва, че $\vec{PS} = \vec{RQ} = \vec{PT}$, т.е. точките S и T съвпадат, което искаме да докажем.

Решението на следващата задача използва скалярно произведение на вектори. Да припомним, че скалярно произведение на ненулевите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се нарича числото $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$. От определението следва, че $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ и ако $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (в частност $\vec{a} \cdot [\vec{a}] = 0$).

Задача 7. (Китайска математическа олимпиада, 2005 г.) Дадени са четири квадрата $Q_i = A_iB_iC_iD_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.



(Върховете A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, са колинеарни; върховете C_i , $i = 1, 2, 3, 4$, са колинеарни и върховете B_i , $i = 1, 2, 3, 4$, също са колинеарни, $B_2 \equiv B_3$.)

Да се докаже, че ако $B_1B_2 = B_3B_4$, то сборът от лицата на квадратите със страни A_1A_2 и A_3A_4 е равен на сбора от лицата на квадратите със страни C_1C_2 и C_3C_4 .

Решение. Да означим $\vec{B_iA_i} = \vec{e_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогава имаме

$$\begin{aligned}\vec{e_1} - \vec{e_2} &= \vec{B_1B_2} - \vec{A_1A_2} \implies [\vec{e_1} - \vec{e_2}] = [\vec{B_1B_2}] - [\vec{A_1A_2}], \\ [\vec{e_1}] - [\vec{e_2}] &= \vec{B_1B_2} - \vec{C_1C_2} \implies [\vec{e_1} - \vec{e_2}] = \vec{B_1B_2} - \vec{C_1C_2}.\end{aligned}$$

Следователно

$$(1) \quad \overrightarrow{B_1B_2} - \overrightarrow{C_1C_2} = [\overrightarrow{B_1B_2}] - [\overrightarrow{A_1A_2}].$$

За Q_3 и Q_4 аналогично имаме

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4} &= \overrightarrow{B_3B_4} - \overrightarrow{A_3A_4} \implies [\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}] = [\overrightarrow{B_3B_4}] - [\overrightarrow{A_3A_4}], \\ [\overrightarrow{e_3}] - [\overrightarrow{e_4}] &= \overrightarrow{C_3C_4} - \overrightarrow{B_3B_4} \implies [\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}] = \overrightarrow{C_3C_4} - \overrightarrow{B_3B_4}. \end{aligned}$$

Следователно $[\overrightarrow{B_3B_4}] - [\overrightarrow{A_3A_4}] = \overrightarrow{C_3C_4} - \overrightarrow{B_3B_4}$ и оттук с ротация на 90° получаваме

$$(2) \quad -\overrightarrow{B_3B_4} + \overrightarrow{A_3A_4} = [\overrightarrow{C_3C_4}] - [\overrightarrow{B_3B_4}].$$

Като съберем равенства (1) и (2) и вземем предвид, че векторите $\overrightarrow{B_1B_2}$ и $\overrightarrow{B_3B_4}$ са равни, получаваме

$$\overrightarrow{A_3A_4} + [\overrightarrow{A_1A_2}] = \overrightarrow{C_1C_2} + [\overrightarrow{C_3C_4}].$$

Като вдигнем на квадрат полученото векторно равенство и отчетем, че скаларното произведение на перпендикулярните вектори $\overrightarrow{A_3A_4}$ и $[\overrightarrow{A_1A_2}]$ (също $\overrightarrow{C_1C_2}$ и $[\overrightarrow{C_3C_4}]$) е равно на 0, стигама до

$$A_3A_4^2 + A_1A_2^2 = C_1C_2^2 + C_3C_4^2,$$

откъдето следва твърдението на задачата.

Две задачи за самостоятелна работа

Задача 8. Външно за остроъгълния триъгълник ABC са построени квадратите $ABKH$, $BCED$ $CAGF$. Ако $CH \cap BG = M$ и $CK \cap AD = N$, да се докаже, че:

- точките A, B, M и N лежат на една окръжност;
- пресечната точка на AD и BG лежи на височината през C в $\triangle ABC$.

Задача 9. (Игор Шаригин) Външно за $\triangle ABC$ са построени квадратите $ABKH$, $BCDE$, $CAGF$ и външно за тях — успоредниците $BKPE$ и $CDQF$. Да се докаже, че триъгълникът APQ е правоъгълен и равнобедрен.

Няколко приложения на една лема за вписаната окръжност

НИКОЛАЙ БЕЛУХОВ

nbeluhov@abv.bg

В тази лекция ще разгледаме няколко приложения на една лема за вписаната окръжност.

Лема. В $\triangle ABC$, вписаната окръжност ω допира страната AC в точката B_1 . Диагонално противоположната точка на B_1 в ω е B'_1 . Накрая, външно-вписаната окръжност ω_b срещу върха B допира страната AC в точката B_2 . Тогава, точките B, B'_1 и B_2 лежат на една права.

Доказателство. Да разгледаме хомотетията с център B , изобразяваща ω в ω_b . Допирателната към ω в точката B'_1 е успоредна на AC . Но пък AC е допирателната към ω_b в точката B_2 . Следователно, хомотетията ще изобрази първата от тези допирателни във втората, а също така и първата допирна точка във втората. Но центърът на хомотетия винаги лежи на една права с образа и първообраза, откъдето исканото следва.

Бележка. Още две (несвързани директно с изложението) полезни лемии за вписаната окръжност са следните.

Задача. Нека ω допира AB и BC в C_1 и A_1 . Докажете, че диаметърът $B_1B'_1$, отсечката A_1C_1 и медианата през върха B се пресичат в една точка.

Задача. Докажете, че средната отсечка, успоредна на страната BC , отсечката A_1C_1 и ъглополовящата на $\sphericalangle A$ се пресичат в една точка.

Задача. Нека M_b бъде средата на AC и I бъде центърът на вписаната окръжност на $\triangle ABC$. Докажете, че $IM_b \parallel AB_2$.

Решение. IM_b е средна отсечка в $\triangle B_1B'_1B_2$.

Правите AA_2, BB_2, CC_2 се наричат нагелиани за $\triangle ABC$. Както лесно се вижда, всяка от тях разполюва неговия периметър. Те се пресичат в една точка N , наречена точка на Нагел за триъгълника $\triangle ABC$.

Теорема. Нека M бъде медицентърът на $\triangle ABC$. Точките N, M, I лежат на една права, като $NM : MI = 2 : 1$.

Доказателство. Разгледайте хомотетия с коефициент $-\frac{1}{2}$, изобразяваща $\triangle ABC$ в $\triangle M_a M_b M_c$. Поради успоредността, доказана в предната задача, тя ще изобразява и нагелианите в правите $M_a I, M_b I, M_c I$. Следователно, същата хомотетия ще изобразява и пресечната точка N на първите три прави в пресечната точка I на вторите три. Оттук исканото следва.

Това доказателство използва същата идея като класическото извеждане на Ойлеровата права. Този трик (въвеждане на подходяща хомотетия) често се използва в решаването на задачи, в които трябва да се докаже, че три особени точки лежат на една права.

Упражнение. Покажете, че Ойлеровата права на $\triangle A_1 B_1 C_1$ съдържа центъра O на описаната окръжност k на $\triangle ABC$ (Упътване. Разгледайте триъгълника с върхове в средите на дъгите $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CA}$ от k).

Задача. (Френски контролни за МОМ, 2005) Даден е $\triangle ABC$, в който $AB = 2|AC - BC|$. Нека точката P лежи върху отсечката AB и е такава, че $AP = 3PB$. Докажете, че $\sphericalangle PAC = 2 \sphericalangle APC$.

Решение. Можем да приемем, че $BC > AC$. Нека точките M и N лежат в отсечките BC и BA така, че $CM = CA$ и N е среда на AB . Тогава, $\triangle CMA$ и $\triangle BNM$ са равнобедрени. Следователно, CI и BI са симетрала на отсечките AM и MN . Оттук, I е център на описаната окръжност на $\triangle AMN$, и $\triangle IAN$ е равнобедрен. Тогава $\sphericalangle INA = \sphericalangle IAN = \frac{1}{2} \sphericalangle A$. Но като използваме условието, ще получим и $BP = \frac{1}{4}BA = \frac{1}{2}(BA + AC - BC) \Rightarrow P \equiv B_2$. Сега по предишните задачи $CP \parallel IN \Rightarrow \sphericalangle CPA = \sphericalangle INA = \frac{1}{2} \sphericalangle PAC$, както се искаше.

Оказва се, че триъгълник от същия особен вид играе роля и в следната

Задача. (Предложение за МОМ, 1998) Четири точки A, B, C, D лежат на една права в същия ред така, че $2AB = BC = 2CD$. Точката E е такава, че $\sphericalangle EDB = 2 \sphericalangle EBD$. Докажете, че $180^\circ + \sphericalangle EAC = 2 \sphericalangle ECA$ (тоест, ако единия вътрешен ъгъл на $\triangle EBD$ е равен на половината от другия, то единия външен ъгъл на $\triangle EAC$ е половината от другия).

Решение. Ще се стремим да докажем, че $\triangle EAD$ е от описания в предната задача вид. В този случай, ако I и J са центровете на вписаната и

външно вписаната му окръжност, M е средата на отсечката BC и $EA > ED$, то триъгълниците $\triangle IDM$ и $\triangle JAM$ ще бъдат равнобедрени, и твърдението следва веднага от $EC \parallel JA$.

Нека симетралата на отсечката MD и ъглополовящата на $\angle EDA$ се пресичат в някаква точка I (особени свойства на която все още не знаем). Условието и равнобедрения $\triangle MID$ ни дават $IM \parallel EB$. Нека CI и EB се пресичат в F . По теоремата на Талес, I е среда на FC , и можем да разгледаме окръжността с център I и диаметър FC .

Нека правата през F , успоредна на AD , пресича EA и ED съответно в K и L . Нашата окръжност допира AD , DL и LK . Ще покажем, че тя допира и KA . Отсечката LI разполовява $\angle KLD$, откъдето триъгълниците $\triangle LFI$, $\triangle LID$ и $\triangle ICD$ са подобни. Оттук $FL \cdot CD = IC \cdot IF$. Но също така $KF : FL = AB : BD = DC : CA$, откъдето $FL \cdot CD = KF \cdot AC$ и $KF \cdot AC = IF \cdot IC$. По този начин, триъгълниците $\triangle KFI$, $\triangle ICA$, а значи и $\triangle KIA$, също са подобни. Следователно, KI и AI разполовяват $\angle FKA$ и $\angle KAC$, и исканото следва: установихме, че I е център на вписаната окръжност на $\triangle EAD$.

Да въведем сега J като центъра на съответната външно вписана окръжност. Равенството $AB = CD$ ни дава, че B е нейната допирна точка със страната AD . Исканата равнобедреност на $\triangle JAM$ следва веднага, и задачата е решена.

Попътено получихме следния резултат:

Нека две успоредни прави l_1, l_2 допират окръжността ω в точките A и B . Точките P и K лежат на l_1 , а точките Q и L – на l_2 , така че правите PL , AB и KQ се пресичат в една точка. Тогава, KL допира ω тогава и само тогава, когато PQ допира ω .

Това твърдение представлява едно важно проективно свойство на описания четириъгълник (по-точно, един граничен случай на теоремата на Брианшон). То остава вярно и когато правите l_1, l_2 не са успоредни.

Най-накрая представяме и едно по-красиво обличане в задача на свойствата на същия вид триъгълници.

Упражнение. (Олимпиада в памет на И. Ф. Шаригин, 2009, Н. Белухов)
Докажете, че ако $\angle ABC = 2 \angle B_1 B B_2$, то $AC = 2 B_1 B_2$.

Още няколко интересни задачи с половинки ъгли (нямащи конкретна връзка с излагания материал) са следните.

Упражнение. Нека $AB = AC$, и точката P лежи в отсечката BC така, че $BP = 2PC$. Точка Q лежи в отсечката AP и е такава, че $\sphericalangle BQP = \sphericalangle BAC$. Докажете, че $\sphericalangle BQP = 2 \sphericalangle PQC$.

Упражнение. Нека $\sphericalangle B = 60^\circ$, и точката P лежи в отсечката AB така, че $IP \parallel BC$. Нека още точка Q лежи в отсечката AC така, че $2AQ = QC$. Докажете, че $\sphericalangle BAC = 2 \sphericalangle APQ$.

Упражнение. Нека $CA = CB$, и точките D и E лежат съответно в отсечките AB и BD , така че $BD = 2AD = 4BE$. Да се докаже, че $\sphericalangle EDC = 2 \sphericalangle CED$.

Задача. (Московска олимпиада, 2001, А. Заславски) Нека центровете на ω и ω_b да бъдат I и I_b . Докажете, че правите IB_2, I_bB_1 и височината през върха B се пресичат в една точка.

Решение. Да означим височината през върха B със BH_b , и нека $B_2B'_2$ бъде диаметър в ω_b . Аналогично на доказателството на лемата, можем да установим, че и точките B, B_1, B'_2 лежат на една права. Имаме освен това $BH_b \parallel B_1B'_1 \parallel B_2B'_2$. Но тогава, щом I_bB_1 разполовява отсечката $B_2B'_2$, тя ще разполовява и BH_b . Аналогично и IB_2 разполовява BH_b . Исканото следва.

Задача. (Българско предложение за МОМ, 2002) Нека N бъде средата на BH_b , и нека T бъде втората пресечна точка на ω и NB_1 . Докажете, че ω и описаната окръжност на $\triangle ATC$ се допират в T .

Решение. Да забележим, че е достатъчно да докажем, че правата TB_1 разполовява $\sphericalangle ATC$. Наистина, нека TB_1 пресича (ATC) в L . Да разгледаме хомотетия с център T , изобразяваща B_1 в L . Тя ще изобразява също така и допирателната към ω в B_1 в успоредната ѝ (понеже L е среда на $\widehat{AC}$) допирателна към (ATC) в точката L . Оттук следва, че (ATC) и образа на ω съвпадат, и исканото следва.

Нека точката K е такава, че $B_1B_2I_bK$ е правоъгълник, и L' бъде неговия център. Съгласно предната задача, правите I_bB_1 и NB_1 съвпадат, и следователно L' лежи на TB_1 . Тогава, $\triangle TIB_1$ и $\triangle KL'B$ са равнобедрени с общ ъгъл при основата, и следователно са подобни. Оттук $TB_1 \cdot B_1L' = IB_1 \cdot B_1K$. Освен това, петоъгълникът IAI_bKC очевидно е вписан в окръжност с диаметър II_b , откъдето $IB_1 \cdot B_1K = AB_1 \cdot B_1C$. По този начин имаме $TB_1 \cdot B_1L' = AB_1 \cdot B_1C$ и $ATCL'$ се оказва вписан четириъгълник. Следователно $L \equiv L'$.

Но L лежи на общата симетрала на B_1B_2 и AC , откъдето TB_1 наистина е ъглополовяща, и задачата е решена.

Задача. (Всерусийска олимпиада, 2000, П. Кожевников) Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност ω с център O . Продълженията на страните AB и CD , със среди съответно M и N , се пресичат в X . Окръжността ω_1 допира отсечката BC в K и продълженията на AB и CD . Окръжността ω_2 допира отсечката AD в L и продълженията на AB и CD . Докажете, че ако точките X, K, L лежат на една права, то и точките O, M, N лежат на една права.

Решение. Нека ω допира BC и AD съответно в S и T , и нека техните диаметрално противоположни в нея да бъдат S', T' . Лемата, приложена за $\triangle XBC$ ни дава, че точките X, S', K лежат на една права. Аналогично, на една права (която от условието се вижда, че съвпада с първата) лежат и точките X, L, T' - този път прилагаме аналога на лемата за външновписаната окръжност в $\triangle XAD$.

Да забележим сега, че M и N са среди също така и на SK и TL . Освен това, средните линии на трапеца $LTSK$ и правоъгълника $STT'S'$ съвпадат, понеже основите им лежат на едни и същи прави.

Остава да отбележим, че O очевидно лежи на втората от тези средни отсечки, и задачата е решена.

Това е една от няколко интересни задачи, разглеждащи свойствата на четириъгълника, в който центърът на вписаната окръжност съвпада с центъра на тежестта. Още няколко подобни задачи са следните.

Упражнение. Ако центърът на вписаната окръжност на един четириъгълник лежи на правата през средите на две срещуположни негови страни, покажете, че той лежи и на правата през средите на другите две страни.

Упражнение. (сп. Квант, П. Кожевников и др.) Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, $AB = AC$. Окръжност ω с център върху BC допира AB и AC . Точките M и N лежат върху правата AB и са равноотдалечени от точката B . Покажете, че допирателните, спуснати от тях към ω , пресичат AC в две точки, равноотдалечени от C .

В решенията на тези две задачи може да се използва например следната

Теорема на Нютон. Във всеки описан четириъгълник, средите на диагоналите и центъра на вписаната окръжност лежат на една права.

Между другото, тази теорема има и едно силно обобщение за вписани конични сечения. То може да се формулира на ученически език по следния начин (и притежава елементарно, макар и дълго, решение с лица).

Задача (Българско предложение за БОМ, 2009, Н. Белухов). Проекциите на вътрешната точка P върху страните на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ лежат на една окръжност с център O . Докажете, че O лежи на правата през средите на отсечките AC и BD .

Втората от задачите може да се реши кратко и с използване на подобни триъгълници. Това алтернативно решение се пренася директно и върху следното нейно обобщение, предлагано през около 5 години последователно на Южноафриканска, Петербургска и Българска национална олимпиада.

Упражнение. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с център O , и (за определеност) е такъв, че $\sphericalangle A + \sphericalangle D > 180$. Точките X, Y върху отсечките AB, CD са такива, че O е среда на XY . Докажете, че $AX \cdot DY = BX \cdot CY$.

Накрая, един последен резултат по темата е следният.

Упражнение. (Всерусийска олимпиада, 2005, А. Заславски, М. Исаев, Д. Цветов) Четириъгълникът $ABCD$ без успоредни страни е описан около окръжност с център O . Докажете, че O е пресечна точка на средните линии на $ABCD$ тогава и само тогава, когато $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

Задача. (Всерусийска олимпиада, 2005, П. Кожевников) В остроъгълния $\triangle ABC$, окръжността ω'_b е симетрична на външновписаната окръжност ω_b спрямо средата на страната AC . Аналогично е построена и окръжността ω'_c . Покажете, че правата през пресечните точки на тези две окръжности разполюва периметъра на $\triangle ABC$.

Решение. По-горе вече разгледахме няколко прави, разполюващи периметъра на триъгълника - неговите нагелиани. Ще докажем, че правата в задачата е нагелианата през A .

Понеже тази права е радикална ос на ω'_b и ω'_c , достатъчно е да посочим две точки върху нагелианата, имащи равни степени относно тези две окръжности. Ясно е, че ω'_b и ω'_c допират AC и AB в B_1 и C_1 . По този начин, допирателните, спуснати към тях от A , са равни, и едната точка е намерена.

Втората точка (и тук прилагаме лемата) ще бъде A'_1 . Именно, да забележим, че правата през A , успоредна на BC , е симетрична на BC както спрямо средата на AB , така и спрямо тази на AC . Следователно, ω'_b и ω'_c допират тази права в две точки, да речем P_b, P_c . Хомотетията с център B_1 , изпращаща ω в ω'_b , ще изпраща (отново заради успоредните допирателни) и A'_1 в P_b , откъдето $A'_1 \in B_1P_b$. Аналогично и $A'_1 \in C_1P_c$. Но четириъгълникът

$B_1P_cP_bC_1$ е вписан в окръжност с център A и радиус $AB_1 = AP_b = AP_c = AC_1$ (като равни допирателни).

Следователно, $B_1A'_1.A'_1P_b = C_1A'_1.A'_1P_c$. Но това са точно степените на A'_1 спрямо ω'_b и ω'_c . С това тази точка също лежи на радикалната им ос, и задачата е решена.

Радикалната ос е едно от най-важните геометрични места. Тя се използва в много различни ситуации, като например в класическото извеждане на следната

Права на Обер. При пресичането на четири прави в общо положение се образуват 4 различни триъгълника (по един от всяка тройка прави). Техните ортоцентрове винаги лежат на една права.

Упътване. Нека две от правите се пресичат в точка A , а другите две в B . Постройте окръжността с диаметър AB , а аналогично и още две подобни окръжности. Покажете, че съответните ортоцентрове имат равни степени относно трите окръжности. Изведете оттук, че те лежат на общата им радикална ос. Изведете още и че след като подобна обща ос съществува, то центровете на окръжностите (или, все едно, средите на диагоналите на пълния четиристранник, образуван от четирите прави) лежат на една права - тя се нарича права на Гаус.

Задача. (МОМ, 2008, В. Шмаров) Нека $ABCD$ бъде изпъкнал четириъгълник, в който $BA \neq BC$. Нека вписаните окръжности на $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ бъдат ω_1 и ω_2 . Известно е, че съществува окръжност ω , която допира лъча BA в точка след A , лъча BC в точка след C и правите AD и CD . Да се докаже, че общите външни допирателни на ω_1 и ω_2 се пресичат върху ω .

Решение. Нека ω допира по указания в условието начин AB, BC, CD, DA съответно в точките A_1, B_1, C_1, D_1 . Нека също така ω_1 и ω_2 допират AC съответно в точките E_1, E_2 .

Да означим външно вписаните за триъгълниците $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$ окръжности (допиращи отсечката AC) съответно с ω_3 и ω_4 . Равни допирателни ни дават $DA + AB = -DD_1 + D_1A + AB = -DC_1 + A_1A + AB = -DC_1 + A_1B = -DC_1 + BB_1 = -DC_1 + BC + CB_1 = -DC_1 + BC + CC_1 = DC + BC$.

Понеже $AE_1 = \frac{1}{2}(CA + AB - BC)$, то съгласно горното имаме и $AE_1 = \frac{1}{2}(CA + DC - DA)$, което всъщност означава, че окръжността ω_3 се допира до отсечката AC в точката E_1 . Аналогично, ω_4 се допира до AC в точката

E_2 .

Нека P е пресечната точка на общите външни допирателни на ω_1 и ω_2 , а P' е пресечната точка на общите външни допирателни на ω_3 и ω_4 . Ще покажем, че окръжността с диаметър PP' допира AB, BC, CD, DA . Оттук би следвало, че тя съвпада с ω , а това доказва и твърдението на задачата.

Да означим центровете на окръжностите ω_i с O_i . Понеже ω_1 и ω_3 допират AC в една и съща точка, то $O_1O_3 \perp AC$ и аналогично $O_2O_4 \perp AC$. В частност, $O_1O_3 \parallel O_2O_4$. Ще докажем, че $PP' \parallel O_1O_3 \parallel O_2O_4$.

За целта е достатъчно да покажем, че

$$d(P, O_1O_3) : d(P, O_2O_4) = d(P', O_1O_3) : d(P', O_2O_4)$$

(тук с $d(X, YZ)$ означаваме разстоянието от точката X до правата YZ). Понеже $P \in O_1O_3$ и $P' \in O_2O_4$, последното равенство е еквивалентно на $PO_1 : PO_2 = P'O_3 : P'O_4 \Leftrightarrow r_1 : r_2 = r_3 : r_4$.

Да забележим, че като ъглополовящи $O_1C \perp O_4C$, откъдето следва, че $\triangle CO_1E_1 \sim \triangle O_4CE_2$. Оттук $r_1r_4 = CE_1 \cdot CE_2$. Аналогично и $r_2r_3 = CE_1 \cdot CE_2$, с което желаната успоредност е доказана.

Нека точките, диаметрално противоположни на E_1 съответно в ω_1, ω_3 да бъдат F_1, F_3 , и точките, диаметрално противоположни на E_2 съответно в ω_2, ω_4 , да бъдат F_2, F_4 . По лемата, приложена за ω_1 и ω_2 , точките P, E_2, F_1 лежат на една права. Пак по лемата за ω_1 и ω_4 , точките B, E_2, F_1 също лежат на една права, откъдето $P \in BF_1$. Аналогично за ω_4 и ω_3 , получаваме, че P', F_4, E_1 лежат на една права, и от ω_1 и ω_4 , получаваме, че B, E_1, F_4 лежат на една права. Така $P' \in BE_1$.

От тези два факта и от $PP' \parallel E_1F_1$ следва, че отсечката PP' е хомотетична на E_1F_1 с център B , а това означава, че при същата тази хомотетия окръжността ω' с диаметър PP' ще е хомотетична на ω_1 . Следователно, ω' допира AB и BC . Аналогично, ω' допира и DA и DC . Така $\omega \equiv \omega'$, и задачата е решена.

Друга трудна задача на същия автор е следната.

Упражнение. (Всерусийска олимпиада, 2008, В. Шмаров) Даден е четириъгълникът $ABCD$, и са построени точките $E = AB \cap CD$ и $F = AD \cap BC$, като (за определеност) точката C лежи във вътрешността на $\triangle AEF$. Точката P е проекцията на C върху правата EF . Докажете, че четириъгълникът $ABCD$ е описан тогава и само тогава, когато вписаните окръжности на $\triangle CBE, \triangle CDF$ се виждат от P под равни ъгли (*Упътване.*

Използвайте теоремата за трите центъра на хомотетия и Аполониевата окръжност като геометрично място на точки).

Двата резултата, които получихме в началото – че $DA + AB = DC + CB$ и че вписаната окръжност на $\triangle ABC$ и външновписаната окръжност на $\triangle ADC$ се допират – са директна аналогия на добре известните свойства на описания четириъгълник. Една друга задача, предложена много години по-рано от И. Шаригин, и използваща подобни метрични съотношения, е следната.

Упражнение. (И. Шаригин) Върху страните AB, AC на $\triangle ABC$ са избрани точките M, N и след това е построена точката $K = BN \cap CM$. Докажете, че ако $MB + BN = MC + CN$, то $AB + BK = AC + CK$.

Ще завършим с още една класическа задача на същия автор, използваща суми от отсечки като критерий за описаност.

Упражнение. (И. Шаригин) Даден е четириъгълникът $ABCD$, и са построени точките $E = AB \cap CD$ и $F = AD \cap BC$. Две прави, през E и F съответно, разделят четириъгълника на четири по-малки четириъгълника. Покажете, че ако в два от тях, които нямат обща страна, могат да се впишат окръжности, то и в целия четириъгълник може да се впише окръжност.

Обобщение на четири функционални уравнения от MOM

СТ.Н.С. НИКОЛАЙ НИКОЛОВ

nik@math.bas.bg

Задача 1. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ такива, че

$$f(y)f(xf(y)) = f(x+y)$$

за всеки $x, y \geq 0$. ($\mathbb{R}_0^+$ е множеството на неотрицателните реални числа.)

Забележка. При допълнителните предположения $f(2) = 0$ и $f(x) \neq 0$ за $0 \leq x < 2$, задачата е предложена на MOM '86 (Варшава). Заменейки $\mathbb{R}_0^+$ с $\mathbb{R}^+$, задачата е предложена от автора на 7. Международно математическо състезание за студенти през 2000 г. (Лондон).

Решение. При $x = 0$ получаваме, че $f(0)f(y) = f(y)$. В частност, $f(0) = 0$, и тогава $f \equiv 0$, или $f(0) = 1$. При $f(0) = 1$ ще разгледаме два случая.

1. $f(y) = 0$ за някое $y > 0$. Нека $a = \inf\{y > 0 : f(y) = 0\}$. Ако $x > a$, можем да изберем y така, че $a < y < x$ и $f(y) = 0$. Тогава

$$f(x) = f(y)f((x-y)f(y)) = 0.$$

Следователно, ако $a = 0$, то $f(x) = 0$ за всяко $x > 0$.

Нека $a > 0$. Първо ще намерим $f(y)$ при $0 < y < a$. За $\varepsilon > 0$ имаме, че

$$f(y)f((a+\varepsilon-y)f(y)) = f(a+\varepsilon) = 0.$$

Тъй като $f(y) > 0$, следва, че $(a+\varepsilon-y)f(y) \geq a$. От друга страна,

$$f\left(\frac{a+\varepsilon}{f(y)} + y\right) = f(a+\varepsilon)f(y) = 0$$

и значи $\frac{a+\varepsilon}{f(y)} + y \geq a$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ от последните две неравенства заключаваме, че $f(y) = \frac{a}{a-y}$ за всяко $0 < y < a$. Сега при $x = y = \frac{a}{2}$ получаваме, $2f(a) = f(a)$, т.е. $f(a) = 0$.

2. $f(y) > 0$ за всяко $y > 0$. Първо ще докажем, че $f(y) \leq 1$ за всяко $y > 0$. Ако допуснем, че $f(y) > 1$ за някое $y > 0$, след полагането $x = \frac{y}{f(y) - 1}$ в началното равенство достигахме до противоречието $f(y) = 1$. Пак от условието и доказаното следва, че f е намаляваща функция.

Нека сега $f(y) = 1$ за някое $y > 0$. Тогава $f(x + y) = f(x)$ за всяко $x \geq 0$ и монотонността на f вече показва, че $f \equiv 1$.

Накрая остава да разгледаме случая, когато $f(y) < 1$ за всяко $y > 0$. Тогава f е строго намаляваща функция и значи е инективна. Сега от равенствата

$$\begin{aligned} f(y)f(xf(y)) &= f(x + y) = f(xf(y) + y + x(1 - f(y))) \\ &= f(xf(y))f((y + x(1 - f(y)))f(f(xf(y)))) \end{aligned}$$

следва, че

$$y = (y + x(1 - f(y)))f(xf(y)).$$

Като положим $y = 1$, $xf(1) = z$ и $\frac{f(1)}{1 - f(1)} = a$, получаваме, че $f(z) = \frac{a}{a + z}$ за всяко $z > 0$.

И така, всички намерени функции са следните:

$$f \equiv 0, \quad f \equiv 1, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0, \end{cases}, \quad f(x) = \frac{a}{a + x} \quad \text{и} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a}{a - x} & x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

($a > 0$ е произволно число). Директно се проверява, че първите четири функции са решения на задачата. Ще проверим това и за последната. Ако $x, y \geq 0$ и $x + y < a$, то

$$f(y)f(xf(y)) = \frac{a}{a - y} f\left(\frac{ax}{a - y}\right) = \frac{a}{a - y} \cdot \frac{a - y}{a - (x + y)} = f(x + y).$$

Нека $x, y \geq 0$ и $x + y \geq a$. Тогава $f(x + y) = 0$. Ако $y \geq a$, то $f(y) = 0$. Ако пък $y < a$, то $\frac{ax}{a - y} \geq a$ и значи $xf(y) \geq a$, откъдето $f(xf(y)) = 0$. Следователно и при двете възможности

$$f(y)f(xf(y)) = 0 = f(x + y),$$

с което проверката е завършена.

Задача 2. Нека $k \in \mathbb{N}$ е четно число. Да се намери броят на всички функции $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ такива, че

$$f(f(n)) = n + k$$

за всяко $n \in \mathbb{N}_0$. ($\mathbb{N}_0$ е множеството на неотрицателните цели числа).

Забележка. Решението по-долу показва, че за нечетно $k \in \mathbb{N}$ не съществува функция с даденото свойство. При $k = 1987$ задачата е предложена на МОМ '87 (Хавана).

Решение. Имаме, че

$$f(n + k) = f(f(f(n))) = f(n) + k$$

и с индукция по m следва, че

$$f(n + km) = f(n) + km$$

за всеки $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Нека сега $0 \leq p \leq k - 1$ и $f(p) = kq + r$, където $q \in \mathbb{N}_0$ и $0 \leq r \leq k - 1$. Тогава

$$p + k = f(f(p)) = f(kq + r) = f(r) + kq.$$

Следователно $q = 0$ или $q = 1$ и значи

$$f(p) = r, f(r) = p + k \quad \text{или} \quad f(p) = r + k, f(r) = p.$$

И в двата случая $p \neq r$, което показва, че f дефинира разбиване на множеството $A = \{0, 1, \dots, k\}$ на наредени двойки. Да отбележим, че на различни функции съответстват различни разбивания.

Обратно, всяко разбиване на множеството A на наредени двойки определя функция $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ с даденото свойство. Наистина, дефинираме f върху A по следния начин: $f(p) = r, f(r) = p + k$ за всяка двойка (p, r) от разбиването и полагаме $f(n) = f(q) + ks$, където q и s са остатъкът и частното на n при деление на k .

Така броят на функциите с даденото свойство е равен на броя на разбиванията A на наредени двойки. Лесно се съобразява, че този брой е равен на $\frac{k!}{(k/2)!}$.

Задача 3. Нека $2 \leq n \in \mathbb{N}$. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такива, че

$$(3.1) \quad f(x^n + f(y)) = f^n(x) + y$$

за всеки $x, y \in \mathbb{R}$.

Забележка. При $n = 2$ задачата е предложена на МОМ '92 (Москва). Ако $n = 1$, то съществуват безбройно много функции, изпълняващи (3.1).

Решение. Ще сведем (3.1) до адитивното уравнение на Коши

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Полагаме $f(0) = a$. От (3.1) получаваме, че

$$(3.2) \quad f(f(y)) = y + a^n.$$

Прилагаме двукратно това равенство:

$$f(f(x^n + f(f(y)))) = x^n + f(f(y)) + a^n = x^n + y + 2a^n.$$

От друга страна, от (3.1) и (3.2) намираме, че

$$f(f(x^n + f(f(y)))) = f(f^n(x) + f(y)) = f^n(f(x)) + y = (x + a^n)^n + y.$$

Следователно $x^n + 2a^n = (x + a^n)^n$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Като сравним коефициентите пред x^{n-1} , заключаваме, че $a = 0$. Тогава $f(f(y)) = y$ и

$$(3.3) \quad f(x^n) = f^n(x).$$

Нека сега $x \geq 0$ и $y \in \mathbb{R}$ са произволни. От последните две равенства и (3.1) следва, че

$$f(x + y) = f((\sqrt[n]{x})^n + f(y)) = f^n(\sqrt[n]{x}) + y = f(x) + f(y),$$

откъдето

$$(3.4) \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ за всеки } x \geq 0, y \in \mathbb{R}.$$

Достигнахме до адитивното уравнение на Коши. В частност,

$$(3.5) \quad f(rx) = rf(x) \text{ за всеки } x \geq 0, r \in \mathbb{Q}^+.$$

и значи

$$(3.6) \quad f(r) = br, \text{ където } b = f(1).$$

С помощта на (3.3) ще докажем, че f е ограничена отдолу или отгоре функция върху $\mathbb{R}^+$, откъдето (както е добре известно) ще следва, че $f(x) = bf(x)$ и за всяко $x \in \mathbb{R}^+$. (При четно n директно имаме, че $f(x) = f^n(\sqrt[n]{x}) \geq 0$.) От (3.3), (3.4), (3.5) и (3.6) намираме, че произволни $x > 0, r \in \mathbb{Q}^+$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(x^k) r^{n-k} &= f((x+r)^n) = f^n(x+r) \\ &= (f(x) + br)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k(x) (br)^{n-k}. \end{aligned}$$

Като сравним коефициентите пред r^{n-k} , получаваме, че $f(x^k) = b^{n-k} f^k(x)$ за всеки $x > 0, k \leq n$. В частност, $f(x^2) = b^{n-2} f^2(x)$, което показва, че ако $b^{n-2} \geq 0$, то $f(x) \geq 0$ за всяко $x > 0$, а ако $b^{n-2} \leq 0$, то $f(x) \leq 0$ за всяко $x > 0$.

И така, $f(x) = bx$ при $x \geq 0$. Оттук $f(x) = bx$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Наистина, да изберем $y > 0$ така, че и $x + y > 0$. Тогава от доказаното по-горе следва, че $f(x) = f(x+y) - f(y) = b(x+y) - by = bx$.

Накрая, заместване в (3.1) показва, че $b = 1$ при нечетно n и $b = \pm 1$ при четно n .

Задача 4. Нека $k > 0$. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такива, че

$$f(x)f(y) = kf(x + yf(x))$$

за всеки $x, y > 0$.

Забележка. При $k = 1$ това е уравнението на Голаб-Шинцел, а при $k = 2$ – задача на автора от материалите на Журито на МОМ '05 (Мерида).

Решение. Първо ще покажем, че f е растяща функция. Да допуснем противното, т.е. $f(x) < f(z)$ за някои $x > z > 0$. Полагайки $y = \frac{x-z}{f(z)-f(x)} > 0$, то $x + yf(x) = z + yf(z)$. Следователно

$$f(x)f(y) = kf(x + yf(x)) = kf(z + yf(z)) = f(z)f(x),$$

откъдето $f(x) = f(z)$, противоречие.

Понеже $x + yf(x) > x$, следва, че

$$f(x)f(y) = kf(x + yf(x)) \geq kf(x),$$

т.е. $f(y) \geq k$ за всяко $y > 0$.

Ако $f(y_0) = k$ за някое $y_0 > 0$, то

$$k^2 = f^2(y_0) = kf((k+1)^ny_0)$$

и по индукция получаваме, че $f((k+1)^ny_0) = k$ за всяко $n \in \mathbb{N}_0$. Понеже $\lim_{n \rightarrow \infty} (k+1)^ny_0 = \infty$ и $f \geq k$ е растяща функция, следва, че $f \equiv k$. Тази функция очевидно изпълнява даденото условие.

Нека сега $f(y) > k$ за всяко $y > 0$. Ако $z > x$, при $y = \frac{z-x}{f(x)}$, следва, че

$$kf(x) < f(x)f(y) = kf(x + yf(x)) = kf(z),$$

откъдето $f(x) < f(z)$. Значи f е строго растяща функция и, в частност, монотонна.

Тогава от

$$kf(x + f(x)) = f(x)f(1) = f(1)f(x) = kf(1 + xf(1))$$

следва, че $x + f(x) = 1 + xf(1)$, т.е. $f(x) = cx + 1$. Замествайки в условието в условието намираме, че $k = 1$.

И така, търсените функции са $f \equiv k$ при $k \neq 1$ и $f(x) = cx + 1$ при $k = 1$, където $c \geq 0$.

Задачи по теория на числата

ПЕТЪР БОЙВАЛЕНКОВ

peter@math.bas.bg

С малки изключения, задачите по-долу са побрани за лекции при подготовката на националните отбори за БОМ2009. Изложението следва тематично книгата "Елементарна теория на числата" (ISBN 978-7-5428-4767-6, на китайски), от Фън Циганг, Шанхай, Наука и образование, 2009.

Задача 1. Да се докаже, че ако m и n са цели числа, $n \geq m$, то числото $\frac{(m,n)}{n} \binom{n}{m}$ е цяло.

Решение. От теоремата на Безу следва, че съществуват цели числа u и v , за които $(m,n) = um + vn$. Тогава имаме

$$\frac{(m,n)}{n} \binom{n}{m} = \frac{um + vn}{n} \binom{n}{m} = u \binom{n-1}{m-1} + v \binom{n}{m},$$

като последното число очевидно е цяло.

Задача 2. Да се намерят всички ограничени редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от естествени числа, за които $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{(a_n, a_{n+1})}$ за всяко естествено n .

Решение. Да означим $d_n = (a_n, a_{n+1})$. От равенството $d_n a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$ следва, че $d_{n+1} | a_n$. Тогава d_{n+1} е общ делител на a_n и a_{n+1} , откъдето $d_{n+1} | d_n$ и значи $d_{n+1} \leq d_n$. Получихме, че редицата от естествени числа $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща, което означава, че тя се стабилизира, т.е. съществува такова $N \in \mathbb{N}$, че $d := d_N = d_{N+1} = \dots$. Ще разгледаме три възможности за d .

Случай 1. Ако $d = 1$, имаме $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ за всяко $n \geq N$, което противоречи на ограничеността на редицата.

Случай 2. Ако $d \geq 3$, от $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{d} < \max\{a_n, a_{n+1}\}$ следва, че $a_{n+2} < \max\{a_n, a_{n+1}\} - 1$. Оттук по индукция лесно следва, че $a_{N+m-2} \leq \max\{a_N, a_{N+1}\} - m$ за всяко естествено m , което е невъзможно за редица от естествени числа.

Случай 3. Ако $d = 2$, първо ще докажем, че $a_n = a_{n+1}$ за $n \geq N$. Да допуснем, че $a_n \neq a_{n+1}$ за някое $n \geq N$. Тогава от рекурентната формула

следва, че $\min\{a_n, a_{n+1}\} < a_{n+2} < \max\{a_n, a_{n+1}\}$ и следователно $a_{n+2} \neq a_{n+1}$. Аналогично (по индукция) получаваме $\min\{a_n, a_{n+1}\} < a_{n+m+1} < \max\{a_n, a_{n+1}\}$ за всяко естествено m , което е невъзможно за редица от естествени числа.

Следователно $a_n = a_{n+1}$ за всяко $n \geq N$, което веднага дава $a_n = 2$ за всяко $n \geq N$. В частност, имаме $a_N = a_{N+1} = 2$, което означава, че $a_{N-1} = 2 = d_{N-1}$. Спускането може да продължи аналогично и имаме $a_n = 2$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Нека m и n , $m > n$, са естествени числа. Да се докаже, че

$$[m, n] + [m+1, n+1] > \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}.$$

Решение. Да отбележим, че $(a, b) = (a-b, b) = (a+b, b)$. Нека $k = m-n$. Имаме последователно

$$\begin{aligned} [m, n] + [m+1, n+1] &= \frac{mn}{(m, n)} + \frac{(m+1)(n+1)}{(m+1, n+1)} \\ &> \frac{mn}{(n+k, n)} + \frac{mn}{(n+k+1, n+1)} = \frac{mn}{(k, n)} + \frac{mn}{(k, n+1)}. \end{aligned}$$

Да означим $(n, k) = d_1$ и $(n+1, k) = d_2$. Очевидно d_1 и d_2 са взаимно-прости делители на k и следователно $d_1 d_2 \leq k$. Сега имаме

$$\frac{mn}{(k, n)} + \frac{mn}{(k, n+1)} = mn \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \geq \frac{2mn}{\sqrt{d_1 d_2}} \geq \frac{2mn}{\sqrt{k}},$$

с което доказателството е завършено.

Задача 4. (МОМ2001) Нека $a > b > c > d$ са естествени числа, за които

$$ac + bd = (b+d+a-c)(b+d-a+c).$$

Да се докаже, че числата $ab + cd$, $ac + bd$ и $ad + bc$ са съставни.

Решение. Да означим $b+d+a-c = k$ и $b+d+c-a = m$. Тогава

$$\begin{aligned} km &= ac + bd = a(b+d-a-k) + bd = \\ &= a^2 + a(b+d) + bd - ak = (a+b)(a+d) - ak, \end{aligned}$$

откъдето се вижда, че $k|(a+b)(a+d)$. Тъй като $k = a + d + b - c > a + d$, числата k и $a + b$ не са взаимно прости.

Нека p_1 е прост делител на k и $a + b$. От равенството $c - d = a + b - k$ следва, че $p_1|c - d$ и значи $p_1 \leq c - d$. Освен това, от равенството $ad + bc = d(a + b) + b(c - d)$ следва, че $p_1|ad + bc$. За да заключим, че $ad + bc$ е съставно число, остава да отбележим, че $p_1 \leq c - d < c + d < ad + bc$.

Тъй като $c - d < b < a$, имаме $c - d < \frac{a+b}{2}$. Тогава $a + b = k + c - d < k + \frac{a+b}{2}$, откъдето $k > \frac{a+b}{2}$. Оттук, от $k \neq a + b$ (иначе $c = d$) и от $k|(a+b)(a+d)$ следва, че k и $a + d$ не са взаимно прости.

Нека p_2 е прост делител на k и $a + d$. От равенството $b - c = k - (a + d)$ следва, че $p_2|b - c$ и значи $p_2 \leq b - c$. Освен това, от равенството $ab + cd = b(a + d) + d(b - c)$ следва, че $p_2|ab + cd$. За да заключим, че $ab + cd$ е съставно число, остава да отбележим, че $p_2 \leq b - c < b + c < ab + cd$.

Накрая, от $ac + bd = kt$ и $ac + bd > 2a + b > a + b > k$ следва, че и $ac + bd$ е съставно.

Задача 5. Нека a, b, c, d, e и f са естествени числа, за които числото $S = a + b + c + d + e + f$ дели $abc + def$ и $ab + bc + cd - de - ef - fd$. Да се докаже, че S е съставно число.

Решение. Нека

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+a)(x+b)(x+c) - (x-d)(x-e)(x-f) \\ &= Sx^2 + (ab+bc+cd-de-ef-fd)x + abc+def. \end{aligned}$$

От условието следва, че $S|f(x)$ за всяко цяло x . В частност, имаме $S|f(d) = (d+a)(d+b)(d+c)$. Ако S е просто число, то дели поне едно от числата $a + d$, $b + d$ и $c + d$. Но очевидно S е по-голямо и от трите.

Задача 6. Нека a и b са естествени числа. Вярно ли е, че ако произведенията на делителите на a и b са равни, то $a = b$.

Решение. Ако $d|n$, то $\frac{n}{d}|n$ и следователно делителите на n се групират по двойки с произведение n , откъдето заключаваме, че произведението на всички делители на n е равно на $n^{\frac{\tau(n)}{2}}$. Ще докажем, че от $a^{\tau(a)} = b^{\tau(b)}$ следва, че $a = b$.

Нека $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ и $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$, където p_i са различни прости числа, α_i, β_i са цели неотрицателни числа, като $\max\{\alpha_i, \beta_i\} > 0$. Тогава

$\alpha_i \tau(a) = \beta_i \tau(b)$ за $i = 1, 2, \dots, s$, откъдето, в частност, следва, че α_i, β_i са естествени числа.

Ако $a \neq b$, от $a^{\tau(a)} = b^{\tau(b)}$ следва, че $\tau(a) \neq \tau(b)$ (иначе ще коренуваме за $a = b$). Нека например $\tau(a) > \tau(b)$. Тогава $\frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\tau(a)}{\tau(b)} > 1$, т.е. $\beta_i > \alpha_i$ за $i = 1, 2, \dots, s$. Но от последното следва, че $\tau(a) = \prod_{i=1}^s (\alpha_i + 1) < \prod_{i=1}^s (\beta_i + 1) = \tau(b)$, противоречие.

Задача 7. Нека a и b са различни естествени числа. Да се докаже, че ако $a^2 + ab + b^2 \mid ab(a+b)$, то $|a-b| > \sqrt[3]{ab}$.

Решение. Имаме $a^2 + ab + b^2 \mid (a^2 + ab + b^2)a - ab(a+b) = a^3$ и аналогично $a^2 + ab + b^2 \mid b^3$. Тогава $a^2 + ab + b^2 \mid (a^3, b^3) = (a, b)^3$. Следователно

$$|a-b|^3 \geq (a, b)^3 \geq a^2 + ab + b^2 \geq 3ab,$$

откъдето следва исканото.

Задача 8. Нека n , a и b са естествени числа, за които $n \mid a^n - b^n$. Да се докаже, че $n \mid \frac{a^n - b^n}{a-b}$.

Решение. Нека p е просто число и $p^\alpha \parallel n$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Достатъчно е да докажем, че $p^\alpha \mid \frac{a^n - b^n}{a-b}$. Ако p не дели $a-b$, това е очевидно.

Нека $p \mid a-b$ и $a = b + px$, $x \in \mathbb{N}$. Тогава имаме

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{(b+px)^n - b^n}{px} = \sum_{k=1}^n T_k,$$

където $T_k = (px)^{k-1} b^{n-k} \binom{n}{k}$. От представянето $T_k = (px)^{k-1} b^{n-k} \frac{n}{k} \binom{n}{k}$ се вижда, че ако $p^\beta \parallel k$, то степента на p в каноничното разлагане на T_k е поне $\alpha - \beta + p^\beta \geq \alpha$, т.е. $p^\alpha \mid T_k$.

Задача 9. Да се намерят всички естествени числа n , които се представят във вида $a^2 + b^2$, където a и b са взаимнопрости естествени числа, и са такива, че всяко просто число $p \leq \sqrt{n}$ дели ab .

Решение. Ако $a = b$, то $a = b = 1$ и $n = 2$, което е решение на задачата. Нека $a \neq b$ и за определеност $a < b$. Ако $b-a > 1$ и p е прост делител на $b-a$, то $p \leq b-a < \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{n}$ и значи $p \mid ab$. Оттук p дели a и b , което е невъзможно.

Нека $b - a = 1$, $n = a^2 + (a + 1)^2 = 2a^2 + 2a + 1$. При $a = 1$ и $a = 2$ получаваме съответно $n = 5$ и $n = 13$, които са решения. Нека $a \geq 3$ и p е прост делител на $a + 2$. Тогава $p \leq a + 2 \leq \sqrt{2a^2 + 2a + 1} = \sqrt{n}$ и значи $p|a(a + 1)$. Оттук и от $p|a + 2$ следва, че a е четно число. Аналогично с прост делител на $a - 1$ заключаваме, че a е нечетно, противоречие.

Задача 10. Нека $p_1, p_2, \dots, p_n$ са нечетни прости числа, различни от 3. Да се докаже, че числото $2^{p_1 p_2 \dots p_n} + 1$ има поне 4^n различни естествени делителя.

Решение. Да отбележим, че ако $(u, v) = 1$, където u и v са нечетни, то $(2^u + 1, 2^v + 1) = 2^{(u, v)} + 1 = 3$.

При $n = 1$ числото $2^{p_1} + 1$ се дели на 1, 3, $\frac{2^{p_1} + 1}{3}$ и $2^{p_1} + 1$ и остава да видим, че $3 < \frac{2^{p_1} + 1}{3}$.

Нека твърдението е вярно за $n - 1$, т.е. числото $2^{p_1 p_2 \dots p_{n-1}} + 1$ има поне 4^{n-1} различни естествени делителя. Да означим $p_1 p_2 \dots p_{n-1} = u$ и $p_n = v$. Тогава $(2^u + 1, \frac{2^v + 1}{3}) = 1$, като $\frac{2^v + 1}{3} > 1$.

Нека $d_1 | 2^u + 1$ и $d_2 | \frac{2^v + 1}{3}$, d_1 и d_2 са естествени числа. Тогава $(d_1, d_2) = 1$ и следователно $d_1 d_2 | m = \frac{(2^u + 1)(2^v + 1)}{3}$. Това означава, че m има поне $2 \cdot 4^{n-1}$ различни естествени делителя. Тези делители делят и $2^{uv} + 1$, защото числата $2^u + 1$ и $\frac{2^v + 1}{3}$ делят $2^{uv} + 1$ и са взаимнопрости.

Нито един от получените делители не надминава m . Тъй като

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{(2^{u+v} + 2^u + 2^v + 1)^2}{9} < \frac{(2 \cdot 2^{u+v} + 1)^2}{9} < \frac{6 \cdot 2^{2(u+v)} + 1}{9} \\ &< 2^{2(u+v)} + 1 < 2^{uv} + 1, \end{aligned}$$

на всеки такъв делител d отговаря делител $\frac{2^{uv} + 1}{d} > d$, т.е. общо имаме поне 4^n различни естествени делителя.

Задача 11. Нека n и k са естествени числа, $n > k$. Да се докаже, че числата $\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k}$ са взаимнопрости.

Решение. Ако d е общ делител на $\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k}$, то за $j = 1, 2, \dots, k$ имаме $d | \binom{n+j}{k} - \binom{n+j-1}{k} = \binom{n+j-1}{k-1}$. Следователно d е общ делител на $\binom{n-1}{k-1}, \binom{n}{k-1}, \dots, \binom{n+k-1}{k-1}$. Продължаваме по същия начин, докато достигнем до $d | \binom{n-k}{0} = 1$, т.е. $d = 1$.

Задача 12. а) Да се намерят всички естествени числа n , за които съществуват $a, b \in \mathbb{N}$, за които $(a, b) = 2009$ и $[a, b] = n!$.

б) Да се намерят тези n , за които броят на двойките (a, b) , $a \leq b$, от а) е минимален.

Решение. а) Тъй като $2009 = 7^2 \cdot 41$, имаме $41 | n!$, т.е. $n \geq 41$. Очевидно за всяко $n \geq 41$ двойката $a = 2009$, $b = n!$ има исканите свойства.

б) Нека $a = 2009x$ и $b = 2009y$, където $(x, y) = 1$. Тогава в каноничното разлагане на $xy = \frac{ab}{2009}$ участват поне 12 прости числа (всичките от 2 до 37 включително) и всяко от тях участва в каноничното разлагане на точно една от числата x и y . Следователно имаме поне 2^{11} такива двойки. При $n = 41$ и 42 тези двойки са точно 2^{11} , а при $n \geq 43$ те са вече поне 2^{12} .

Задача 13. Да се намерят всички двойки естествени числа (a, b) , за които $(a, b) > 1$ и

$$(a, b) + 9[a, b] + 9(a + b) = 7ab.$$

Решение. Нека $a = dx$ и $b = dy$, където $(x, y) = 1$. Тогава уравнението добива вида $1 + 9xy + 9(x + y) = 7dxy$. Имаме

$$9 < 7d = 9\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{xy} \leq 9 \cdot 3 + 1 = 28,$$

откъдето $d = 2, 3$ или 4 . Оттук лесно получаваме решенията $(4, 4)$, $(4, 38)$ и $(38, 4)$.

Задача 14. Нека $k, n \in \mathbb{N}$ и да означим $Q_k(n) = [n, n + 1, \dots, n + k]$. Съществуват ли естествени числа n , за които $Q_k(n) > Q_k(n + 1)$.

Решение. Нека $r \geq 3$ е естествено число и $n = rk! - 1$. Ще докажем, че $Q_k(n) > Q_k(n + 1)$.

Да означим $m = [n + 1, n + 2, \dots, n + k]$. Тъй като $(n, n + j) = 1$ за $j = 1, 2, \dots, k$, имаме $(m, n) = 1$ и следователно $Q_k(n) = mn$.

Тъй като k дели $n + k + 1 = rk! + k$ и m (защото m се дели на $k!$), имаме $k | (m, n + k + 1)$. Тогава $k \leq (m, n + k + 1)$ и последователно получаваме

$$\begin{aligned} Q_k(n + 1) &= [m, n + k + 1] = \frac{m(n + k + 1)}{(m, n + k + 1)} \leq \frac{m(n + k + 1)}{k} \\ &\leq \frac{m(n + k + 1)}{2} = \frac{mn}{2} \left(1 + \frac{k + 1}{n}\right) < mn = Q_k(n). \end{aligned}$$

Задача 15. Нека $a, n \in \mathbb{N}$ и $a^n + 1$ е нечетно просто число. Да се докаже, че $\tau(a^n - 1) \geq n$.

Решение. От условието следва, че $n = 2^k$ за някое $k \in \mathbb{N}$. Тогава

$$a^n - 1 = a^{2^k} - 1 = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) \dots (a^{2^{k-1}} + 1).$$

Тъй като $(a^{2^m} - 1, a^{2^m} + 1) = 1$, числата $a + 1, a^2 + 1, \dots, a^{2^{k-1}} + 1$ са взаимнопрости две по две. Следователно $a^n - 1$ има поне $2^k = n$ различни естествени делителя.

Задача 16. Нека $n > 1$ е естествено число и p е просто число, като $p|n^3 - 1$ и $n|p - 1$. Да се докаже, че $4p - 3$ е точен квадрат.

Решение. От $n|p - 1$ следва, че $n < p$ и тогава от $p|n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ заключаваме, че $p|n^2 + n + 1$. Нека $p = mn + 1$ за някое $m \in \mathbb{N}$. Тогава

$$n^2 + n + 1 = n^2 + n + p - mn = n(n + 1 - m) + p$$

и значи $p|n(n + 1 - m)$, т.е. $p|n + 1 - m$. Но от $mn + 1 = p \leq n^2 + n + 1$ следва, че $m \leq n + 1$, което означава, че $0 \leq n + 1 - m < n < p$, т.е. $n + 1 - m = 0$. Тогава $p = n^2 + n + 1$ и $4p - 3 = (2n + 1)^2$.

Задача 17. Нека A е число с 1000 цифри и следното свойство: всяко число, образувано от 10 последователни цифри на A в същия ред, се дели на 2^{10} . Да се докаже, че A се дели на 2^{1000} .

Решение. Нека $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_{1000}}$ и да означим $x = \overline{a_{991} a_{992} \dots a_{999}}$. Тогава от условието следва, че $2^{10}|\overline{a_{990} x} = 10^9 a_{990} + x$ и $2^{10}|\overline{x a_{1000}} = 10x + a_{1000}$. Оттук

$$2^{10}|10(10^9 a_{990} + x) - (10x + a_{1000}) = 10^{10} a_{990} - a_{1000},$$

което означава, че $a_{1000} = 0$. Аналогично получаваме $a_{999} = a_{998} = \dots = a_{12} = a_{11} = 0$. Следователно $A = 10^{990} \overline{a_1 a_2 \dots a_{10}}$ и остава да отбележим, че $\overline{a_1 a_2 \dots a_{10}}$ се дели на 2^{10} по условие.

Задача 18. Нека $n \geq 2$ е естествено число, $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ са такива, че $(d_1, d_2, \dots, d_n) = 1$ и $d_i | \sum_{j=1}^n d_j$ за $i = 1, 2, \dots, n$. Да се докаже, че:

а) $d_1 d_2 \dots d_n | (\sum_{j=1}^n d_j)^{n-2}$;

б) степенният показател $n - 2$ в а) не може да се замени с по-малък.

Решение. а) Както обикновено, означаваме с $v_p(a)$ степента на простото число p в каноничното разлагане на a , т.е. $p^{v_p(a)} \parallel a$. Нека $k = \max\{v_p(d_i) : 1 \leq i \leq n\}$. Тогава от условието следва, че $p^k \mid \sum_{j=1}^n d_j$ и следователно $p^{k(n-2)} \mid (\sum_{j=1}^n d_j)^{n-2}$. Тъй като $(d_1, d_2, \dots, d_n) = 1$ и $p \mid \sum_{j=1}^n d_j$, поне две от числата $d_1, d_2, \dots, d_n$ не се делят на p . Тогава $v_p(\prod_{j=1}^n d_j) \leq k(n-2)$, откъдето следва исканото.

б) Нека $d_1 = 1$, $d_2 = n-1$ и $d_3 = \dots = d_n = n$. Тогава $d_i \mid \sum_{j=1}^n d_j = (n-1)n$ и условията са изпълнени. Имаме $\prod_{j=1}^n d_j = (n-1)n^{n-2}$, което трябва да дели $[(n-1)n]^m$ и вече очевидно имаме $m \geq n-2$.

Задача 19. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Да се докаже, че съществува естествено число m , за което $3^n \parallel m^3 + 17$.

Решение. При $n = 2$ имаме $m = 1$. Нека твърдението е вярно за някое $n \geq 2$, т.е. имаме $m \in \mathbb{N}$, за което $m^3 + 17 = 3^n(3q + r)$, където $q \in \mathbb{N}$, $r \in \{1, 2\}$. Да отбележим, че m не се дели на 3 и значи $m^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Ще докажем, че съществува $s \in \{1, 2\}$, за което $(m + s3^{n-1})^3 + 17 \equiv 0 \pmod{3^{n+1}}$. Действително, имаме

$$(m + s3^{n-1})^3 + 17 = m^3 + 17 + 3^n m^2 s + 3^{2n-1} m s^2 + 3^{3n-3} s^3 \equiv 3^n(r+s) \pmod{3^{n+1}}$$

и следователно трябва да изберем $s = 3 - r$.

Нека $x_1 = m + 3^{n-1}(3 - r)$ и $x_2 = x_1 + 3^n = m + 3^{n-1}(6 - r)$. Тогава от горното следва, че 3^{n+1} дели $x_1^3 + 17$ и $x_2^3 + 17$. Ще докажем, че поне едно от числата $x_1^3 + 17$ и $x_2^3 + 17$ не се дели на 3^{n+2} , откъдето ще следва исканото. Да допуснем за момент обратното. Тогава имаме последователно

$$0 \equiv x_2^3 + 17 = (x_1 + 3^n)^3 + 17 = x_1^3 + 17 + 3^{n+1}x_1^2 + 3^{2n+1}x_1 + 3^{3n} \equiv 3^{n+1} \pmod{3^{n+2}},$$

противоречие (използвахме $x_1^2 \equiv 1 \pmod{3}$).

Задача 20. а) Да се намерят всички двойки естествени числа (a, b) , $a \neq b$, за които $b^2 + a$ е точна степен на просто число и дели $a^2 + b$.

б) Да се докаже, че не съществуват двойки естествени числа (a, b) , $a \neq b$, $a > 1$, $b > 1$, за които $b^2 + a - 1$ не е точна степен на просто число и дели $a^2 + b - 1$.

Решение. а) Нека $b^2 + a = p^m$, където p е просто число и $m \in \mathbb{N}$. Имаме $a \equiv -b^2 \pmod{b^2 + a}$, откъдето $0 \equiv a^2 + b \equiv (-b^2)^2 + b = b(b^3 + 1) \pmod{b^2 + a}$,

т.е. $p^m = b^2 + a|b(b^3 + 1)$. Тъй като $(b, b^3 + 1) = 1$ и $p^m > b^2 \geq b$, заключаваме, че $p^m | b^3 + 1 = (b + 1)(b^2 - b + 1)$.

Ако $(b + 1, b^2 - b + 1)$ не се дели на p , от $b^2 - b + 1 < b^2 + a$ следва, че $p^m = b^2 + a | b + 1$, т.е. $a = b = 1$, което е невъзможно по условие. Следователно p дели $b + 1$ и $b^2 - b + 1$, т.е. $p | b^2 - b + 1 - (b + 1)(b - 2) = 3$ и $p = 3$.

При $m = 1$ и $m = 2$ имаме съответно $b^2 + a = 3$, което не дава решение, и $b^2 + a = 9$, което дава решението $a = 5$, $b = 2$.

Нека $m \geq 3$. Тъй като $(b + 1, b^2 - b + 1) = 1$ или 3 както по-горе, едно от числата $b + 1$ и $b^2 - b + 1$ се дели на 3^{m-1} . Тъй като $b + 1 < \sqrt{b^2 + a} + 1 = 3^{m/2} + 1 < 3^{m-1}$, заключаваме, че $3^{m-1} | b^2 - b + 1$. Тогава $9 | 4(b^2 - b + 1) = (2b - 1)^2 - 3$, което е невъзможно.

б) От условието следва, че

$$b^2 - a + 1 | (b^2 - 1)^2 - a^2 + a^2 + b - 1 = b(b - 1)(b^2 + b - 1).$$

Тъй като числата b , $b - 1$ и $b^2 + b - 1$ са две по две взаимнопрости, заключаваме, че $b^2 - a - 1 | b^2 + b - 1$. Тогава $b^2 - a - 1 \leq b^2 + b - 1$, откъдето $a \leq b$. От друга страна, имаме $b^2 - a - 1 \leq a^2 + b - 1 \iff (a - b)(a + b + 1) \geq 0$, т.е. $a \geq b$, противоречие.

Задача 21. Да се намерят всички прости числа, които се представят във вида $m^2 + n^2$ и делят $m^3 + n^3 - 4$ (m и n са естествени числа).

Решение. Нека $p = m^2 + n^2$ е просто число, което дели $m^3 + n^3 - 4$. Тогава p дели $3(m^2 + n^2)mn - 2(m^3 + n^3 - 4) = (m + n)^3 + 8 = (m + n + 2)((m + n)^2 - 2(m + n) + 4)$. При $m, n \in \{1, 2\}$ намираме решенията $p = 2$ и $p = 5$. Тъй като $p = m^2 + n^2 > m + n + 2$ при $m, n \notin \{1, 2\}$, заключаваме, че p е нечетно просто число, което дели $mn - m - n + 2$. Но последното е по-малко от $mn \leq \frac{m^2 + n^2}{2} < p$.

Задача 22. Да се намери броят на естествените числа a , за които съществуват цели неотрицателни числа $x_0, x_1, \dots, x_{2009}$, такива, че $a^{x_0} = a^{x_1} + a^{x_2} + \dots + a^{x_{2009}}$?

Решение. Да разгледаме даденото уравнение по модул $a - 1$. Получаваме $1 \equiv 2009 \pmod{a - 1}$, т.е. $a - 1$ е делител на 2008 . Следователно имаме 8 възможности за a . Всяка от тях се реализира – например чрез $x_0 = k$, a от x_i равни на 0 и по $a - 1$ от x_i равни на j за $j = 1, 2, \dots, k - 1$. Действително,

дясната страна е

$$\begin{aligned} a + (a-1)a + \dots + (a-1)a^{k-1} &= 1 + (a-1)(1+a+a^2+\dots+a^{k-1}) \\ &= 1 + (a-1)\frac{a^k-1}{a-1} = a^k. \end{aligned}$$

Задача 23. Нека p е просто число, $m, n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq m+2$, и $p = k2^n + 1 | 2^{2^m} + 1$. Да се докаже, че $k^{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p}$.

Решение. От $k2^n \equiv -1 \pmod{p}$ следва, че $k^{2^{n-1}}2^{n2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Освен това $2^{2^m} \equiv -1 \pmod{p}$, откъдето $2^{2^{m+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Но $m+1 \leq n-1$ и следователно $2^{m+1} | n2^{n-1}$. Тогава $2^{n2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p}$, откъдето $k^{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{p}$.

Задача 24. Нека $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Да се докаже, че съществува естествено число a , за което $1 \leq a \leq \frac{n}{4} + 1$ и n^2 не дели $a^n - a$.

Решение. Ако n е четно или $n = 5, 7$, $a = 2$ върши работа. Оттук нататък ще считаме, че $n \geq 9$ е нечетно. Да отбележим следните два факта:

Факт 1: ако $a^n - a \equiv 0 \pmod{n^2}$, то $(n-a)^n - (n-a) \not\equiv 0 \pmod{n^2}$. Действително, имаме последователно

$$\begin{aligned} (n-a)^n - (n-a) &= n^n - \binom{n}{1}n^{n-1}a + \dots + \binom{n}{n-1}na^{n-1} - a^n - n + a \\ &\equiv -n \pmod{n^2}. \end{aligned}$$

Факт 2: ако $a^n - a \equiv 0 \pmod{n^2}$ и $b^n - b \equiv 0 \pmod{n^2}$, то $(ab)^n - ab \equiv 0 \pmod{n^2}$.

Нека $n = 4k+1$, $k \geq 2$, и да допуснем, че $a^n - a \equiv 0 \pmod{n^2}$ за $1 \leq a \leq \frac{n}{4} + 1$. Тогава $(3k)^n - 3k \not\equiv 0 \pmod{n^2}$ съгласно Факт 1, приложен за $a = k+1$, а $(3k)^n - 3k \equiv 0 \pmod{n^2}$ съгласно Факт 2, приложен за $a = 3$ и $b = k$, противоречие.

Аналогично, нека $n = 4k+3$, $k \geq 2$, и да допуснем, че $a^n - a \equiv 0 \pmod{n^2}$ за $1 \leq a \leq \frac{n}{4} + 1$. Тогава $(3(k+1))^n - 3(k+1) \not\equiv 0 \pmod{n^2}$ съгласно Факт 1, приложен за $a = k$, а $(3(k+1))^n - 3(k+1) \equiv 0 \pmod{n^2}$ съгласно Факт 2, приложен за $a = 3$ и $b = k+1$, противоречие.

Задача 25. Редицата $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ е дефинирана чрез равенствата $a_0 = 1$, $a_{n-1} + a_{[n/3]}$. Да се докаже, че за всяко $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ съществуват безбройно много членове на редицата, които се делят на p .

Решение. Да отбележим, че $2|a_6 = 12$, $3|a_2 = 3$, $5|a_3 = 5$, $7|a_4 = 7$, $11|a_{11} = 22$ и $13|a_{20} = 117$, т.е. за всяко $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ съществува член на редицата, който се дели на p .

Да допуснем, че за някое $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ само краен брой членове на редицата се делят на p . Нека m е такава, че $p|a_m$ и при $k > m$ имаме $a_k \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Нека $3m \leq i \leq 3m + 2$, $i \in \mathbb{N}$. Тогава $a_i = a_{i-1} + a_m \equiv a_{i-1} \pmod{p}$ и значи $a_{3m+2} \equiv a_{3m+1} \equiv a_{3m} \equiv a_{3m-1} \equiv r \pmod{p}$, където $r \in \{1, 2, \dots, p-1\}$.

Нека сега $9m - 3 \leq i \leq 9m + 8$, $i \in \mathbb{N}$. Тогава $3m - 1 \leq [i/3] \leq 3m + 2$ и от горното следва, че $a_i - a_{i-1} = a_{[i/3]} \equiv r \pmod{p}$. Следователно

$$a_{9m-4+j} \equiv a_{9m-4+j-1} + r \equiv a_{9m-4+j-2} + 2r \equiv \dots \equiv a_{9m-4} + jr \pmod{p}$$

за всяко $j = 0, 1, \dots, 13$. Тъй като $p \leq 13$ и $(r, p) = 1$, числата $r, 2r, \dots, 13r$ дават всички възможни остатъци по модул p . В частност, имаме $j_0 r \equiv -a_{9m-4} \pmod{p}$ за някое j_0 . Тогава $a_{9m-4+j_0} \equiv 0 \pmod{p}$, като очевидно $9m - 4 + j_0 > m$, противоречие.

Задача 26. Нека $m, n \in \mathbb{N}$, m е нечетно и $(m, 2^n - 1) = 1$. Да се докаже, че $m|1^n + 2^n + \dots + m^n$.

Решение. Тъй като m е нечетно, числата $2, 1, 2, 2, \dots, 2m$ образуват пълна система остатъци по модул m . Тогава $\sum_{k=1}^m k^n \equiv \sum_{k=1}^m (2k)^n \pmod{m}$, т.е. $m|(2^n - 1) \sum_{k=1}^m k^n$, откъдето следва исканото. Да отбележим, че при нечетно n имаме $m|k^n + (m - k)^n$ и оттук следва, че $m|(2^n - 1) \sum_{k=1}^m k^n$.

Задача 27. Нека $a > 1$ е естествено число. Да се докаже, че множеството $\{a^2 + a - 1, a^3 + a^2 - 1, \dots, a^{n+1} + a^n - 1, \dots\}$ съдържа безбройно много две по две взаимно прости числа.

Решение. Лесно се вижда, че всеки две съседни числа от разглежданото множество са взаимно прости (ако имат общ прост делител, той дели $a - 1$, оттам дели $a -$ противоречие). Нека $a^{n_1+1} + a^{n_1} - 1, a^{n_2+1} + a^{n_2} - 1, \dots, a^{n_k+1} + a^{n_k} - 1$ са k , $k \geq 2$, числа от дадените, всеки две от които са взаимно прости. Ще покажем, към тях може да се добави още едно от дадените, което е взаимно просто с всяко от тях.

Нека $N = \prod_{i=1}^k (a^{n_i+1} + a^{n_i} - 1)$. Тогава не е трудно да се види, че $(a, N) = 1$ и оттук следва, че $a^{\varphi(N)+1} + a^{\varphi(N)} - 1$ е взаимно просто с N , оттам и с всяко от числата $a^{n_1+1} + a^{n_1} - 1, a^{n_2+1} + a^{n_2} - 1, \dots, a^{n_k+1} + a^{n_k} - 1$.

Задача 28. Нека $a, m \in \mathbb{N}$. Да се докаже, че $a^m \equiv a^{m-\varphi(m)} \pmod{m}$.

Решение. Ако a и m са взаимнопрости, твърдението очевидно следва от Теоремата на Ойлер. Ако a и m не са взаимнопрости, можем да представим m във вида $m = m_1 m_2$, където $(a, m_1) = (a, m) > 1$ и $(a, m_2) = (m_1, m_2) = 1$. Достатъчно е да докажем, че $a^m \equiv a^{m-\varphi(m)} \pmod{m_1}$ и $a^m \equiv a^{m-\varphi(m)} \pmod{m_2}$.

Второто е еквивалентно на $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m_2}$, което следва от равенството $\varphi(m) = \varphi(m_1)\varphi(m_2)$. За да докажем първото, да разгледаме общ прост делител p на a и m_1 . Имаме последователно

$$\begin{aligned} v_p(m_1) &= v_p(m) \leq 2^{v_p(m)-1} \leq p^{v_p(m)-1} \leq (p-1)p^{v_p(m)-1} \\ &\leq (p-1)p^{v_p(m)-1}\varphi\left(\frac{m}{p^{v_p(m)}}\right) = p^{v_p(m)}\varphi\left(\frac{m}{p^{v_p(m)}}\right) - p^{v_p(m)-1}\varphi\left(\frac{m}{p^{v_p(m)}}\right) \\ &\leq p^{v_p(m)}\frac{m}{p^{v_p(m)}} - \varphi(p^{v_p(m)})\varphi\left(\frac{m}{p^{v_p(m)}}\right) = m - \varphi(m) \\ &\leq v_p(a)(m - \varphi(m)). \end{aligned}$$

Следователно $m_1 | a^{m-\varphi(m)}$, откъдето следва исканото.

Задача 29. Нека $p > 3$ е просто число и $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} = \frac{r}{ps}$, където $r, s \in \mathbb{N}$ и $(r, s) = 1$. Да се докаже, че $p^3 | r - s$.

Решение. Да разгледаме полинома $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-(p-1)) - (x^{p-1} - 1)$. Тъй като $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ за всяко x , а $\deg(f) = p-2$, всички коефициенти на $f(x)$ се делят на p , т.е. $a_{p-2} \equiv a_{p-3} \equiv \dots \equiv a_1 \equiv a_0 \equiv 0 \pmod{p}$, където $f(x) = a_{p-2}x^{p-2} + a_{p-3}x^{p-3} + \dots + a_1x + a_0$.

Да отбележим, че $a_0 = f(0) = (p-1)! + 1$. Тогава при $x = p$ получаваме равенството $a_{p-2}p^{p-2} + a_{p-3}p^{p-3} + \dots + a_1p + a_0 = (p-1)! + 1 + p^{p-1} = a_0 + p^{p-1}$, откъдето $a_{p-2}p^{p-2} + a_{p-3}p^{p-3} + \dots + a_1p \equiv 0 \pmod{p^3}$. Следователно $a_1p \equiv 0 \pmod{p^3}$, откъдето

$$p^2 | a_1 = -(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} = -(p-1)! \left(\frac{r}{ps} - \frac{1}{p} \right).$$

От последното лесно следва, че $p^3 | r - s$.

Задача 30. Нека $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$. Да се докаже, че ако $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ за всяко $a = 1, 2, \dots, n$, то $(m, n) = (p, p-1)$ за някое просто число p .

Решение. Нека p е прост делител на m . Тогава $p > n$, защото в противен случай условието не е изпълнено за $a = p$. Да разгледаме полинома $f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n) - (x^n - 1)$. Имаме $f(a) = a^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ за всяко $a = 1, 2, \dots, n$. Следователно сравнението $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ от степен $n-1$ има поне n решения, което означава, че всички коефициенти на $f(x)$ се делят на p .

В частност, p дели старшия коефициент на $f(x)$, т.е. $p | 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Оттук и от $p > n$ следва, че $p = n + 1$. Нещо повече, от последното равенство следва, че m няма други прости делители, т.е. $m = p^a$, където a е естествено число. Ще докажем, че $a = 1$.

Да допуснем, че $a > 1$ и да разгледаме сравнението $n^n \equiv 1 \pmod{m} \iff (p-1)^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^a}$. Тогава $0 \equiv (p-1)^{p-1} - 1 \equiv -(p-1)p \equiv p \pmod{p^2}$, което е невъзможно.

Задача 31. Да се докаже, че не съществуват естествени числа m и n , за които $m^3 + n^4 = 19^{19}$.

Решение. Да допуснем, че $m^3 + n^4 = 19^{19}$ и да разгледаме това равенство по модул 13 (защото $13 - 1 = [3, 4]$). Да предположим засега, че $(m, 13) = (n, 13) = 1$. Тъй като $(m^3)^4 = m^{12} \equiv 1 \pmod{13}$, не е трудно да се провери, че възможностите за m^3 са $m^3 \equiv \pm 1, \pm 5 \pmod{13}$. Аналогично се вижда, че $n^4 \equiv 1, 3, -4 \pmod{13}$. Отчитайки и нулевите остатъци, получаваме, че $m^3 + n^4 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 \pmod{13}$. От друга страна, имаме $19^{19} \equiv 7 \pmod{13}$.

Задача 32. Нека $p \geq 5$ е просто число. Да се докаже, че съществува число $a \in \{1, 2, \dots, p-2\}$, за което нито едно от числата $a^{p-1} - 1$ и $(a+1)^{p-1} - 1$ не се дели на p^2 .

Решение. Да означим $A = \{a \in \{1, 2, \dots, p-1\} : a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}\}$. Целта ни е да докажем, че в множеството $\overline{A} = \{1, 2, \dots, p-1\} \setminus A$ има две последователни числа.

Да допуснем за момент, че за някое a имаме $\{a, p-a\} \subset A$. Тогава по модул p^2 имаме

$$0 \equiv (p-a)^{p-1} - a^{p-1} \equiv -p(p-1)a^{p-2} \not\equiv 0 \pmod{p^2},$$

противоречие. Следователно $|A| \geq \frac{p-1}{2}$.

Да допуснем, че твърдението не е вярно, т.е. $|\{a, a+1\} \cap A| \geq 1$ за всяко $a \in \{1, 2, \dots, p-2\}$. Тогава всъщност имаме $|\{a, a+1\} \cap A| = 1$ за всяко

$a \in \{1, 2, \dots, p-2\}$, защото в противен случай имаме $|\{p-a, p-a-1\} \cap A| = 0$ за някое $a \in \{1, 2, \dots, p-2\}$. Сега от $1 \in A$ следва, че $A = \{1, 3, \dots, p-2\}$.

Условието $p-a \in A$ е еквивалентно последователно на

$$\begin{aligned} 1 \equiv (p-a)^{p-1} \pmod{p^2} &\iff a \equiv a(p-a)^{p-1} \pmod{p^2} \\ &\iff a \equiv a(a^{p-1} - (p-1)pa^{p-2}) \equiv a^p + p \pmod{p^2} \end{aligned}$$

Следователно $2 \equiv 2^p + p \pmod{p^2}$ (следва от $p-2 \in A$) и $4 \equiv 4^p + p \pmod{p^2}$ (следва от $p-4 \in A$). Тогава

$$\begin{aligned} 4^p + p \equiv (2^p + p)^2 \pmod{p^2} &\iff p \equiv p(2^{p+1} + p) \pmod{p^2} \\ &\iff 1 \equiv 2^{p+1} + p \pmod{p} \\ &\iff 2^{p+1} \equiv 1 \pmod{p} \\ &\iff 4 \equiv 1 \pmod{p} \iff p = 3, \end{aligned}$$

противоречие.

Задача 33. (Австрийско-полско състезание, 1996) Да се докаже, че не съществуват естествени числа k и m , за които $k! + 48 = 48(k+1)^m$.

Решение. Да допуснем противното. От $48|k!$ следва, че $k \geq 6$. Тъй като $k=6$ и $k=7$ не са решения (Проверете!), всъщност имаме $k \geq 8$.

Ако $k+1$ не е просто число, то има прост делител p , за който $2 \leq p < k$ и следователно $p|k!$. Тогава p дели 48, откъдето следва, че $p=2$ или 3. Но p дели $\frac{k!}{48} + 1 = 840.9 \dots k + 1$, което е невъзможно.

Следователно $k+1$ е просто число. От теоремата на Уилсън следва, че $k! + 1$ се дели на $k+1$ и значи $k+1$ дели $47 = k! + 48 - (k! + 1)$. Тогава $k=46$ и противоречие следва по модул 23^2 ; може и да проверим, че $\frac{46!}{48} + 1$ не е точна степен на 47; има достигане до противоречие и с два модула.

Комбинаторика и теория на графите

СТЕФАН ГЕРДЖИКОВ

st_gerdjikov@abv.bg

Задача 1. В един шахматен турнир всеки от участниците е изиграл по една партия с всеки от останалите. След края на турнира всеки от участниците получава коефициент, който се получава по следния начин: сумата от точките на участниците, победени от съответния шахматист минус сумата от точките, спечелени от участниците, победили шахматиста. Възможно ли е всички шахматисти да получат отрицателен коефициент?

Решение. Да означим броя на участниците в турнира с n и да ги номерираме с $1, 2, \dots, n$. С A_i означаваме множеството от онези участници, които са загубили от i , а с C_i – онези, които са спечелили срещу i . Накрая с p_i означаваме броя на точките на участника с номер i , а с k_i – неговия коефициент.

Тогава от дефиницията на k_i , следва, че

$$k_i = \sum_{j \in A_i} p_j - \sum_{j \in C_i} p_j.$$

Разглеждаме сумата $\sum_{i=1}^n k_i p_i$, в която заместваем k_i по горната формула

$$\sum_{i=1}^n k_i p_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in A_i} p_i p_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j \in C_i} p_i p_j.$$

Да забележим, че $j \in C_i$, точно когато $i \in A_j$ (j е победил i , точно когато i е загубил от j). Тогава

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n k_i p_i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \in A_i} p_i p_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j \in C_i} p_i p_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \in A_i} p_i p_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j: i \in A_j} p_i p_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in A_i} p_i p_j - \sum_{j=1}^n \sum_{i \in A_j} p_i p_j = 0. \end{aligned}$$

Предпоследното равенство отразява факта, че всяко събираемо $p_i p_j$ участва и в двете суми $\sum_{i=1}^n \sum_{j: i \in A_j} p_i p_j$ и $\sum_{j=1}^n \sum_{i \in A_j} p_i p_j$ тогава и само тогава, когато $i \in A_j$.

С това показваме, че $\sum_{i=1}^n k_i p_i = 0$ и тъй като $p_i \geq 0$ за всяко i и не всички $p_i = 0$, то има както неположителни, така и неотрицателни коефициенти k_i .

Задача 2. В един биологически справочник растенията са класифицирани по 100 различни характеристики. Да се докаже, че в този справочник не може да има повече от 50 растения, всеки две от които се различават по поне 51 характеристики. (Всяко растение или притежава, или не притежава дадена характеристика.)

Решение. Да допуснем, че m растения $P_1, P_2, \dots, P_m$ имат свойството, че всеки две от тях се различават по поне 51 характеристики. Ще оценим по два начина броя S на тройките (P_i, P_j, k) , за които растението P_i притежава характеристиката k , а растението P_j – не притежава характеристиката k . Ако фиксираме две различни растения $P_i \neq P_j$ броят на тройките (P_i, P_j, k) и (P_j, P_i, k) с горното свойство са поне 51. Тъй като всевъзможните различни двойки (P_i, P_j) са $\binom{m}{2}$, то получаваме, че

$$S \geq 51 \binom{m}{2} = 51 \frac{m(m-1)}{2}.$$

Сега ще преброим тройките (P_i, P_j, k) , за които k е фиксирано, а P_i притежава k и P_j не притежава k . За целта да означим с m_k броя на растенията, които притежават характеристиката k . Ясно е тогава, че $m - m_k$ не притежават характеристиката k и тогава общият брой тройки (P_i, P_j, k) при фиксирано k , за които P_i притежава k , а P_j – не, е $m_k(m - m_k)$. Това показва, че

$$S = \sum_{k=1}^{100} m_k(m - m_k),$$

защото общият брой характеристики е 100. Сега от неравенството между средно-геометрично и средно-аритметично получаваме, че $m_k(m - m_k) \leq \frac{m^2}{4}$, като равенството е налице само за $m_k = \frac{m}{2}$.

Използваме това наблюдение и получаваме, че

$$51 \frac{m(m-1)}{2} \leq S = \sum_{k=1}^{100} m_k(m - m_k) \leq \sum_{k=1}^{100} \frac{m^2}{4},$$

откъдето

$$51 \frac{m(m-1)}{2} \leq 100 \frac{m^2}{4} \iff 51(m-1) \leq 50m \iff m \leq 51.$$

Остана да забележим, че ако $m = 51$, то трябва да имаме равенства и на първата верига неравенства, в частност $m_k(m - m_k) = \frac{m^2}{4}$. Тъй като 51 е нечетно, а m_k е цяло, последното равенство е невъзможно. Следователно $m \neq 51$, тоест $m \leq 50$. Това означава, че не може да има повече от 50 растения, всеки две от които да се различават по поне 51 характеристики.

Задача 3. В група от n човека всеки двама са или приятели, или врагове. В групата има общо q приятелски двойки и освен това измежду всеки трима има двама, които са врагове. Да се докаже, че има участник в тази група, чиито врагове включват не повече от $q \left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$ приятелски двойки. (Приятелствата и враждите са взаимни.)

Решение. Да номерираме участниците в групата $1, 2, \dots, n$. С A_i означаваме множеството от всички приятели на i , а с F_i множеството от неговите врагове. Нека S_i са двойките приятели измежду множеството F_i . Трябва да покажем, че $|S_i| \leq q \left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$ за някое i .

Да допуснем, че това не е така. Тогава $|S_i| > q \left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$ за всяко i .

Ще преброим различните (ненаредени) тройки $T = (i, j, k)$, за които (i, j) е приятелска двойка, k е враг на i и на j . При фиксирано k броят на тройките (i, j, k) с това свойство е равен точно на броя на приятелските двойки измежду множеството F_k , тоест е равен на $|S_k|$. Тогава

$$|T| = \sum_{k=1}^n |S_k| > \sum_{k=1}^n q \left(1 - \frac{4q}{n^2}\right) = nq - \frac{4q^2}{n}.$$

Сега ще преброим тройките T при фиксирана приятелска двойка (i, j) . Очевидно (щом (i, j) са приятели) една тройка $(i, j, k) \in T$ точно когато k е враг и на i , и на j , тоест $k \in F_i \cap F_j$. Тогава броят на тройките $(i, j, k) \in T$ при фиксирана приятелска двойка (i, j) е

$$|F_i \cap F_j| = |F_i| + |F_j| - |F_i \cup F_j| = |F_i| + |F_j| - (n - 2).$$

Последното равенство е в сила, защото няма трима човека в групата, всеки двама от които да са приятели. Но тъй като (i, j) са приятели, това означава, че всеки от останалите $n - 2$ е враг с поне един от тях, тоест е в обединението $F_i \cup F_j$. Освен това е ясно, че $i, j \notin F_i \cup F_j$.

Сега можем да получим общия брой на тройките T като съберем величините $|F_i| + |F_j| - (n - 2)$ за всевъзможните приятелски двойки (i, j) ,

тоест

$$\begin{aligned} |T| &= \sum_{(i,j): \text{приятели}} (|F_i| + |F_j| - (n-2)) = \\ &= \sum_{(i,j): \text{приятели}} |F_i| + \sum_{(i,j): \text{приятели}} |F_j| - \sum_{(i,j): \text{приятели}} (n-2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in A_i} |F_i| + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i \in A_j} |F_j| - q(n-2) \end{aligned}$$

В последното равенство използвахме (два пъти), че всяка приятелска двойка (i, j) съответства на $i \in A_j$ и $j \in A_i$. Сега лесно се съобразява, че $|F_i| = n - 1 - |A_i|$ и $\sum_{j \in A_i} |F_j| = |A_i| |F_i|$. Тогава

$$|T| = 2 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |A_i| |F_i| - q(n-2) = \sum_{i=1}^n (n-1) |A_i| - \sum_{i=1}^n |A_i|^2 - q(n-2).$$

Както отбелязахме по-горе, всяко приятелство (i, j) участва като $i \in A_j$ и като $j \in A_i$. Поради това $\sum_{i=1}^n |A_i| = 2q$. Освен това от неравенството между средно-квадратично и средно-аритметично имаме

$$\sum_{i=1}^n |A_i|^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n |A_i| \right)^2.$$

Сега сме готови да довършим оценката за $|T|$:

$$\begin{aligned} |T| &= (n-1) \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i=1}^n |A_i|^2 - q(n-2) \\ &\leq (n-1) \sum_{i=1}^n |A_i| - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n |A_i| \right)^2 - q(n-2) \\ &= 2q(n-1) - \frac{4q^2}{n} - q(n-2) = qn - \frac{4q^2}{n}, \end{aligned}$$

където първо използвахме неравенството, а след това заместихме сумата с нейното равно $(2q)$. Така получихме, че $|T| \leq qn - \frac{4q^2}{n}$, което противоречи на оценката, получена в началото $|T| > qn - \frac{4q^2}{n}$. Това показва, че допускането е грешно и следователно поне за един участник в компанията броят на приятелските двойки измежду неговите врагове е не повече от $q(1 - \frac{4q}{n^2})$.

Задача 4. Нека $k \geq 1$ и $r \geq 1$ са естествени числа. За едно безкрайно множество C с $\binom{C}{r}$ означаваме всички r -елементни подмножества на C .

Нека A е безкрайно множество, а $f : \binom{A}{r} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ е функция. Да се докаже, че съществува безкрайно подмножество $B \subseteq A$, за което за всеки две множества $X \in \binom{B}{r}$ и $Y \in \binom{B}{r}$ е изпълнено $f(X) = f(Y)$.

Решение. Нека с $P(r)$ да означим твърдението "За всяко k , всяко безкрайно множество A и всяка функция $f : \binom{A}{r} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ съществува безкрайно подмножество $B \subset A$, за което $f(X) = f(Y)$ за произволни $X, Y \in \binom{B}{r}$ ".

Ще докажем, че $P(r)$ е вярно за всяко $r \geq 1$ с индукция по r .

1. $r = 1$. Тъй като $\binom{A}{1} = A$, а A е безкрайно, то е ясно, че съществуват безброй много елементи $a \in A$, които се изобразяват от f в един и същ елемент от множеството $\{1, 2, \dots, k\}$. Това показва, че $P(1)$ е вярно.
2. Нека $P(r)$ е вярно за някое r . Ще покажем, че $P(r+1)$ е вярно. За целта фиксираме произволно безкрайно множество A , k и функция $f : \binom{A}{r+1} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Строим безкрайна редица от безкрайни множества $\{B_i\}$, елементи $b_i \in B_i$ и числа $c_i \in \{1, 2, \dots, k\}$ със следните свойства:

- $B_0 = A$.
- $B_{i+1} \subseteq B_i \setminus \{b_i\}$.
- за всяко $X \in \binom{B_{i+1}}{r}$ е изпълнено, че $f(X \cup \{b_i\}) = c_i$.

Редиците $\{B_i\}$, $\{b_i\}$ и $\{c_i\}$ могат да се построят индуктивно, като на всяка стъпка използваме предположението $P(r)$. Именно да допуснем, че B_i е безкрайно (и вече е определено) за някое i . Избираме произволен негов елемент b_i и разглеждаме множеството $C = B_i \setminus \{b_i\}$. Ясно е, че C също е безкрайно. Сега определяме функцията $g : \binom{C}{r} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ като полагаме

$$g(X) = f(X \cup \{b_i\}).$$

Прилагаме индуктивното предположение $P(r)$ за множеството C , k и функцията g . Така определяме безкрайно множество $B_{i+1} \subseteq C = B_i \setminus \{b_i\}$, за което за произволни $X, Y \in \binom{B_{i+1}}{r}$ е изпълнено

$$g(X) = g(Y).$$

От дефиницията на g , обаче, това означава, че $f(X \cup \{b_i\}) = f(Y \cup \{b_i\})$. Дефинираме c_i като стойността $f(X \cup \{b_i\})$ за $X \in \binom{B_{i+1}}{r}$. От

конструкцията е ясно, че редиците $\{B_i\}$, $\{b_i\}$ и $\{c_i\}$ удовлетворяват желаните свойства. Да забележим, че от факта $b_i \notin B_{i+1}$ и $B_l \subset B_{i+1}$ за $l > i+1$ следва, че $b_i \notin B_l$ за $l > i$. Тогава, тъй като $b_l \in B_l$, то $b_l \neq b_i$ за $l > i$, в частност в редицата $\{b_i\}$ няма повтарящи се елементи.

Тъй като всяко $c_i \in \{1, 2, \dots, k\}$, то съществува j , за което $c_i = j$ за безброй много индекси i .

Сега дефинираме множеството $B = \{b_i \mid c_i = j\}$. От дефиницията на j следва, че $b_i \in B$ за безброй много индекси i , а тъй като $b_{i_1} \neq b_{i_2}$ за $i_1 \neq i_2$, то B е безкрайно.

Нека сега $X \in \binom{B}{r+1}$ е произволно множество. Нека $b_i \in X$ е такова, че i е минимално с това свойство. Тогава $X \setminus \{b_i\} \subset B_{i+1}$ и от дефиницията на c_i следва, че $f(X \setminus \{b_i\} \cup \{b_i\}) = c_i$. Това показва, че $f(X) = c_i$. Остана да отчетем, че $b_i \in B$, тоест $c_i = j$ или $f(X) = j$, което не зависи от избора на множеството X . С това показхме, че множеството B има желаните свойства (при предположение за $P(r)$). Тъй A , k и f бяха произволни, то това доказва и верността на $P(r+1)$ при предположение за $P(r)$. Тогава от принципа за математическа индукция следва, че $P(r)$ е вярно за всяко $r \geq 1$, което решава задачата.

Задача 5. За едно множество A с $\binom{A}{9}$ означаваме множествата от 9-елементните подмножества на A , а с $\binom{A}{10}$ – 10-елементните.

1. Ако $A = \{1, 2, \dots, 20\}$ и $f : \binom{A}{9} \rightarrow A$ е произволна функция, да се докаже, че съществува множество $T \in \binom{A}{10}$ със свойството, че за всяко $k \in T$, $f(T \setminus \{k\}) \neq k$.
2. Остава ли в сила горното твърдение при $A = \{1, 2, \dots, 19\}$. По-точно, вярно ли е, че за **всяка** функция $f : \binom{A}{9} \rightarrow A$, съществува множество $T \in \binom{A}{10}$ със свойството, че $f(T \setminus \{k\}) \neq k$ за всеки елемент $k \in T$?

Решение. 1. Нека $B = \{f(X) \mid X \in \binom{A}{9}\}$. Тъй като $\left| \binom{A}{10} \right| = \binom{20}{10} > \binom{20}{9} = \left| \binom{A}{9} \right| \geq |B|$, то има 10-елементно множество T , което не принадлежи на множеството B . Нека $k \in T$ е произволно. Тогава от дефиницията на B следва, че $\{f(T \setminus \{k\})\} \cup T \setminus \{k\} \in B$. Тъй като $T \notin B$, то $f(T \setminus \{k\}) \neq k$.

2. Ще построим функция $f : \binom{A}{9} \rightarrow A$, която не удовлетворява условието на задачата (т.е. за всяко 10-елементно множество T съществува $k \in T$ със свойството $f(T \setminus \{k\}) = k$).

За целта ще използваме теоремата на Хол. Разглеждаме двуделен граф $G = (U \cup V, E)$, където $U = \binom{A}{9}$, $V = \binom{A}{10}$. Множеството от ребрата се състои от всички двойки (C, D) , за които $|D \setminus C| = 1$. Да забележим тогава, че всеки елемент $C \in U$ има точно $|A| - |C| = 19 - 9 = 10$ съседа в множеството V и всеки елемент $D \in V$ има точно $|D| = 10$ съседа в множеството U . Нека $X \subset U$ е произволно. Тогава сумата от броя на съседите на всеки $C \in X$ е $10|X|$. Тъй като всеки съсед на X при това е преброен най-много 10 пъти, то броят на всички съседни на X е поне $\frac{10|X|}{10} = |X|$. Сега от теоремата на Хол следва, че можем да намерим $|U|$ на брой ребра в графа G , някои две от които нямат общ връх. Нека това са ребрата $(C_1, D_1), \dots, (C_m, D_m)$, $m = |U| = \binom{19}{9} = \binom{19}{10} = |V|$. Дефинираме функцията $f : \binom{A}{9} \rightarrow A$ с равенството

$$f(C_i) = D_i \setminus C_i.$$

Тъй като (C_i, D_i) е ребро в G и ребрата (C_i, D_i) нямат общи върхове, то дефиницията е коректна. Нека $T \in \binom{A}{10}$ е произволно. Тъй като $m = |V|$ и някои две ребра (C_i, D_i) нямат общ връх, то $T = D_j$ за някое j . Тогава $f(C_j) = D_j \setminus C_j$ и следователно

$$T = D_j = C_j \cup f(C_j),$$

което показва, че твърдението от 1 не остава в сила за $A = \{1, 2, \dots, 19\}$.

Задача 6. Нека A е множество от n елемента, а $\mathcal{F}$ е множество от подмножества на A . Ако **не** съществува редица от $t+1$ различни множества $C_1 \subset C_2 \subset \dots \subset C_{t+1}$ от елементи на $\mathcal{F}$, колко най-много елемента може да има $\mathcal{F}$? (n и t са дадени естествени числа.)

Решение. Без ограничение на общността можем да смятаме, че $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Ще разгледаме случая, когато $\emptyset \notin \mathcal{F}$ и $A \notin \mathcal{F}$. Лесно се вижда, че ако някое от тези множества участва, то отстраняването му ще намали дължината на максималната верига във $\mathcal{F}$ с 1. Това ще ни помогне лесно да се справим с тези случаи, след като сме разгледали случая $\emptyset \notin \mathcal{F}$ и $A \in \mathcal{F}$.

Нека с f_i означим броят на i -елементните множества във $\mathcal{F}$. Разглеждаме множеството T от двойки (P, C) , където $P = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ е циклична пермутация на $\{1, 2, \dots, n\}$, а $C \in \mathcal{F}$, като $C = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{(i+j) \pmod n}\}$. (циклична означава, че не различаваме $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ от $(a_2, \dots, a_n, a_1)$). Ще оценим броя на елементите на T по два начина.

Да разгледаме онези двойки $(P, C) \in T$, за които $P = (a_1, \dots, a_n)$ е фиксирана циклична пермутация. Тогава за всяко i има най-много t множества $C_j = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_{(i+s_j) \pmod n}\}$, които са елементи на $\mathcal{F}$, защото в

противен случай във $\mathcal{F}$ ще има верига от поне $t + 1$ множества, което не е вярно. С това установихме, че

$$|T| \leq \sum_{P: \text{циклична пермутация}} nt = (n-1)!nt = n!t.$$

Използвахме, че броят на цикличните пермутации е равен на броя на всички пермутации ($n!$), разделен на броя на възможните "циклични завъртания" на една пермутация (n).

Сега да преброим онези двойки $(P, C) \in T$, за които $C \in \mathcal{F}$ е фиксирано и има i елемента. Тогава броят на цикличните пермутации, в които елементите на C се появяват последователно, могат да се разглеждат като получени от произволна пермутация на елементите на C , към която сме добавили произволна пермутация на $A \setminus C$. По-точно ако $(c_1, c_2, \dots, c_i)$ е произволна пермутация на C , а $(a_1, a_2, \dots, a_{n-i})$, то дефинираме цикличната пермутация $(c_1, c_2, \dots, c_i, a_1, a_2, \dots, a_{n-i})$. Да забележим, че тъй като C не е празното и не е цялото множество, получените циклични пермутации са различни. Обратно, ако $(P, C) \in T$, то лесно разбиваме P на две пермутации на C и на $A \setminus C$, съответно.

Така получаваме, че броят на $(P, C) \in T$ при фиксирано C е $|C|!(n-|C|)!$. Оттук следва, че

$$|T| = \sum_{C \in \mathcal{F}} |C|!(n-|C|)! = \sum_{i=0}^n \sum_{C \in \mathcal{F}: |C|=i} i!(n-i)! = \sum_{i=0}^n i!(n-i)!f_i.$$

Следователно

$$n!t \geq |T| = \sum_{i=0}^n i!(n-i)!f_i,$$

откъдето

$$t \geq \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{\binom{n}{i}}.$$

Да си спомним, че f_i означаваше броя на i -елементните множества във $\mathcal{F}$ и затова $0 \leq f_i \leq \binom{n}{i}$. Ние се интересуваме, кога $|\mathcal{F}| = \sum_{i=0}^n f_i$ е максимално, като установихме, че f_i удовлетворяват условието

$$t \geq \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{\binom{n}{i}}.$$

Да допуснем, че за някои $\{f_i\}_{i=0}^n$, сумата $\sum_{i=0}^n f_i$ е максимална при тези ограничения и да допуснем, че за някои различни i и j , за които $\binom{n}{i} \geq \binom{n}{j}$, $f_j > 0$, а $f_i < \binom{n}{i}$. Тогава ако увеличим f_i с 1 и намалим f_j с 1, сумата $\sum_{i=0}^n f_i$ ще се запази, условието

$$t \geq \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{\binom{n}{i}}$$

също ще е изпълнено (неравенството ще стане по-силно, защото дясната страна се променя с $\frac{1}{\binom{n}{i}} - \frac{1}{\binom{n}{j}} \leq 0$). Това показва, че ако $\sum_{i=0}^n f_i$ достига максимум при ограниченията $0 \leq f_i \leq \binom{n}{i}$ и

$$\sum_{i=0}^n \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \leq t,$$

то този максимум се достига и за такъв набор $\{f_i\}_{i=0}^n$, за които $0 < f_i < \binom{n}{i}$ най-много за едно i . Сега от неравенството

$$\sum_{i=0}^n \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \leq t,$$

следва, че ненулеви са не повече от t на брой f_i , иначе t от тях щяха да изпълняват $f_i = \binom{n}{i}$ и щеше да има още поне едно ненулево f_i . С това показваме, че $\sum_{i=0}^n f_i$ не надминава сумата на най-големите t биномни коефициента. Тъй като броят на всички i -елементни подмножества на A са $\binom{n}{i}$ и верига могат да образуват само множества, всеки две от които имат различна големина, то лесно можем да построим фамилия $\mathcal{F}$, която достига този максимум (намираме най-големите биномни коефициенти $\binom{n}{i_1}, \dots, \binom{n}{i_t}$ и полагаме $\mathcal{F} = \{B \subset A \mid |B| = i_j \text{ за някое } j\}$).

Накрая ще отбележим, че отговорът се запазва и в случаите, когато $\emptyset \in \mathcal{F}$ или $A \in \mathcal{F}$, защото всеки биномен коефициент е по-голям или равен на 1.

Задача 7. В клетките на таблица 10×10 са записани нули и единици, като броят на единиците е поне 41. Да се докаже, че могат да се изберат пет **различни** реда - a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и пет **различни** стълба - b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 , така че числото, записано във всяка от петте клетки (a_i, b_i) , $1 \leq i \leq 5$ да е едно.

Решение. Нека k е максималното цяло число, за което съществуват k различни реда $a_1, \dots, a_k$ и k различни стълба $b_1, \dots, b_k$, за които елементът на позиция (a_i, b_i) в таблицата е 1 за всяко $i \leq k$. Да разгледаме произволен ред $a \in \{1, 2, \dots, 10\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ и произволен стълб $b \in \{1, 2, \dots, 10\} \setminus \{b_1, \dots, b_k\}$. От максималността на k следва, че елементът на позиция (a, b) в таблицата е 0. Оттук получаваме, че броят на нулевите елементи, които не се намират нито в ред a_i , нито в стълб b_j е $(10 - k)^2$.

Нека сега $i \leq k$ е произволно да разгледаме елементите на позиции (a, b_i) и (a_i, b) . Ако и двамата елемента са 1, то изключвайки елемента (a_i, b_i) и добавяйки (a_i, b) и (a, b_i) получаваме $k + 1$ различни реда $a_1, a_2, \dots, a_i, a, a_{i+1}, \dots, a_k$ и $k + 1$ различни стълба $b_1, \dots, b_{i-1}, b, b_i, \dots, b_k$, които определят $k + 1$ елемента 1, някои два от които не са в един и същ ред или стълб. От това разсъждение следва, че най-много един от елементите (a_i, b) и (a, b_i) е 1. Тъй като a и b бяха произволни, за които $a \notin \{a_1, \dots, a_k\}$ и $b \notin \{b_1, \dots, b_k\}$, то оттук следва, че или всички елементи (a_i, b) са 0 за всяко $b \notin \{b_1, \dots, b_k\}$, или всички елементи (a, b_i) са 0 за всяко $a \notin \{a_1, \dots, a_k\}$. Тъй като i беше произволно, то получаваме, че нулевите елементи в таблицата са поне

$$(10 - k)^2 + k(10 - k) = 10(10 - k).$$

(($(10 - k)^2$ са елементите от вида (a, b) , $a \notin \{a_1, \dots, a_k\}$ и $b \notin \{b_1, \dots, b_k\}$.) Сега обаче броят на единиците в таблицата е 41 и следователно броят на нулите не надхвърля 59. Следователно $10(10 - k) < 60$, откъдето $k > 4$. Тъй като k е цяло, то $k \geq 5$, което решава задачата.

Задача 8. В една държава има 1983 града. Някои от градовете са свързани с двупосочни пътища, а други - не. Общият брой пътища е 4000. Да се докаже, че съществува $3 \leq k \leq 20$ и маршрут, който минава през k различни града и се връща в изходния град. (Между всеки два града има не повече от един директен път. Маршрут е последователност от градове всеки два последователни от които са свързани с път.)

Решение. Да разгледаме граф $G = (V, E)$ с върхове градовете на държавата и ребра – пътищата, които съществуват в държавата. Тогава $|E| = 4000 > 2 \cdot 1983 = 2|V|$. Да забележим, че в произволен граф с m ребра и n върха, в който $m > 2n$, можем да отстраним произволен връх от степен по-малка от 3 заедно с инцидентните му ребра и новополученият граф ще има $n' = n - 1$ върха и $m' \geq m - 2$ ребра. Тогава е ясно, че от $m > 2n$ следва, че $m' > 2n'$.

Прилагаме тази конструкция итеративно към графа G , докато не получим граф $G' = (V', E')$, в който всеки връх има степен поне 3 и, разбира

се $|E'| > 2|V'|$, което в частност означава, че $V' \neq \emptyset$. Ако $G_j = (V_j, E_j)$ са компонентите на свързаност на G' , то $\sum_j |E_j| = |E| > 2|V| = \sum_j |V_j|$ и следователно за поне едно j е изпълнено, че $|E_j| > 2|V_j|$. Без ограничение на общността можем да смятаме, че $|E_1| > 2|V_1|$.

Тъй като G_1 е подграф на G , то достатъчно е да покажем, че в G_1 има цикъл, който съдържа по-малко от 21 върха. Да допуснем, че това не е така, тоест всеки цикъл в G_1 съдържа поне 21 различни върха. С $d(v, u)$ дължината в брой ребра на най-късия път от v до u в G_1 . Нека $r \in V_1$ е произволен, определяме

$$L_i = \{u \in V_1 \mid d(r, u) = i\}$$

Да забележим, че ако $(u, v) \in E_1$, то е изпълнено неравенството на триъгълника $|d(r, u) - d(r, v)| \leq 1$. В частност, оттук следва, че ако $u \in L_i$, то всички съседи $N(u)$ на u са в множествата $L_{i-1} \cup L_i \cup L_{i+1}$. Нека сега $i \leq 9$ и $u \in L_i$, $v \in L_{i+1}$ са произволни. Ще покажем, че u има поне двама съседи в множеството L_{i+1} и v има най-много един съсед в множеството L_i .

Наистина, да допуснем, че v има двама съседи $u_1, u_2 \in L_i$. Тогава има път от r до u_1 , който минава през $i+1$ върха и път от u_2 до r , който минава през $i+1$ върха. Сега като използваме тези два пътя и ребрата (v, u_1) и (v, u_2) лесно се вижда, че има цикъл, който съдържа $2(i+1) - 1 + 1 = 2(i+1)$ върха (минус 1 отразява, че сме преброили r два пъти, $+1$ – заради v). Тъй като $i \leq 9$, това означава, че намерихме цикъл, който съдържа $\leq 2 \cdot 10 = 20$ върха, което е противоречие с допускането, че такъв цикъл в G_1 няма.

Горното разсъждение показва, че и никой връх $u \in L_i$ няма повече от един съсед в множеството L_{i-1} . Да допуснем, че $u \in L_i$ има съсед $u' \in L_i$. Тогава в G_1 има път от r до u , който съдържа $i+1$ върха и път от u' до r , който съдържа $i+1$ върха. Използвайки и реброто (u, u') можем да построим цикъл, който съдържа $2(i+1) - 1 = 2i+1$ върха. Като вземем в предвид, че $i \leq 9$, получаваме, че в G_1 има цикъл, който съдържа не повече от 19 върха, което е противоречие с нашето допускане.

С това установихме, че всеки връх $u \in L_i$ ($i \leq 9$) има не повече от (точно за $i > 0$) един съсед в множеството $L_{i-1} \cup L_i$. Тъй като всички съседи на u са в множеството $L_{i-1} \cup L_i \cup L_{i+1}$ и степента на u е поне 3, това показва, че u има поне двама съседи в L_{i+1} . Сега ако означим с $T = \{(u, v) \in E_1 \mid u \in L_i, v \in L_{i+1}\}$, множеството от ребрата между L_i и L_{i+1} от горните разсъждения следва, че

$$|T| \geq 2|L_i|.$$

От друга страна ние видяхме, че всеки връх $v \in L_{i+1}$ ($i \leq 9$) има не повече (точно) един съсед в L_i . Поради това

$$|T| \leq |L_{i+1}|.$$

Като сравним двете неравенства получаваме, че за всяко $i \leq 9$ $|L_{i+1}| \geq 2|L_i|$. Тъй като $|L_0| = |\{r\}| = 1$ лесно се вижда, че $|L_i| \geq 2^i$ за $i \leq 10$. Тогава броят на върховете в G_1 е

$$|V_1| \geq \sum_{i=0}^1 0|L_i| \geq \sum_{i=0}^1 02^i = 2^{11} - 1 = 2047 > 1983.$$

От друга страна $V_1 \subseteq V$ и следователно $|V_1| \leq 1983$. Полученото противоречие показва, че в държавата действително има цикъл, който съдържа между 3 и 20 различни града.

Задача 9. Нека $n \geq k \geq 2$ и m са естествени числа. Ако B е n -елементно множество, а $A_1, A_2, \dots, A_m$ са различни подмножества на B , за които

$$k \text{ дели } |A_i \cap A_j| \iff i \neq j,$$

да се докаже, че $m \leq n$.

Решение. Без ограничение на общността можем да предположим, че $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Вместо множествата A_i ще разглеждаме техните характеристични вектори $v_i \in \{0, 1\}^n$, които се дефинират като

$$v_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ако } j \in A_i \\ 0, & \text{ако } j \notin A_i. \end{cases}$$

Тук и по-нататък с v_{ij} означаваме j -тата координата на вектора v_i . Да забележим, че

$$\sum_{j=1}^n v_{ij}v_{lj} = |A_i \cap A_l|,$$

за всеки две множества A_i и A_l . Да допуснем, че $m > n$, тогава ще докажем, че съществуват цели числа $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$, не всички нулеви, за които

$$\sum_{i=1}^m a_i v_{ij} = 0 \text{ за всяко } j \leq n.$$

Достатъчно е да разгледаме случая $m = n + 1$. Тогава съществуването на подходящи параметри $a_1, \dots, a_n$ се доказва лесно с индукция по n . Базата $n = 1$ е очевидна (тогава $v_{11} = v_{21}$ или едно от двете v_{11} и v_{21} е 0).

Нека твърдението е вярно за някое n , по-точно нека за всеки $n + 1$ вектора $u_1, u_2, \dots, u_{n+1} \in \{0, 1\}^n$ съществуват цели числа $a_1, \dots, a_{n+1}$ не всички равни на нула, за които

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i u_{ij} = 0, \text{ за всяко } j \leq n.$$

Нека сега $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, v_{n+2} \in \{0, 1\}^{n+1}$ са произволни $(n + 1)$ -мерни вектори. За всяко $l \leq n + 1$ определяме векторите $v_i^{(l)}$, които се получават от v_i чрез задраскването на l -тата координата. Тогава $v_1^{(l)}, \dots, v_{n+1}^{(l)}$ са n -мерни вектори и от индукционното предположение съществуват цели числа $a_1^{(l)}, \dots, a_{n+1}^{(l)}$, за които

$$\sum_{i=1}^n a_i^{(l)} v_{ij}^{(l)} = 0, \text{ за всяко } j \leq n,$$

но това означава, че

$$\sum_{i=1}^n a_i^{(l)} v_{ij} = 0, \text{ за всяко } j \neq l,$$

Нека $b_l = \sum_{i=1}^n a_i^{(l)} v_{il}$. Ако $b_l = 0$ за някое l , то полагайки $a_i = a_i^{(l)}$ и $a_{n+1} = 0$ получаваме търсения набор от цели числа. Тъй като не всички $a_i^{(l)}$ са нули, то и числата a_i не са едновременно нули.

Да допуснем, че всички числа $b_l \neq 0$. Тогава определяме a_i за $i < n + 1$ като

$$a_i = \sum_{l=1}^{n+1} a_i^{(l)} v_{n+2,l} b_1 \dots b_{l-1} b_{l+1} \dots b_{n+1}.$$

и полагаме $a_{n+2} = -b_1 b_2 \dots b_{n+1}$. Нека $j \leq n+1$ е произволно. Тогава

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n+2} a_i v_{ij} &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i v_{ij} + a_{n+2} v_{n+2,j} \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} a_i^{(l)} v_{ij} v_{n+2,l} b_1 \dots b_{l-1} b_{l+1} \dots b_{n+1} - b_1 \dots b_{n+1} v_{n+2,j} \\
 &= \sum_{l=1}^{n+1} v_{n+2,l} b_1 b_2 \dots b_{l-1} b_{l+1} \dots b_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(l)} v_{i,j} - b_1 \dots b_{n+1} v_{n+2,j} \\
 &= b_1 \dots b_{n+1} v_{n+2,j} - b_1 \dots b_{n+1} v_{n+2,j} = 0,
 \end{aligned}$$

защото $\sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(l)} v_{i,j} = 0$ за $l \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(l)} v_{i,j} = b_l = b_j$ при $l = j$.

Тъй като $b_1, \dots, b_{n+1}$ не са нули, то и $a_{n+2} \neq 0$. С това индукционната стъпка е завършена и следователно, за всяко n и всяко $m > n$ съществува набор от цели числа $a_1, \dots, a_m$ не всички нулеви, за които

$$\sum_{i=1}^m a_i v_{ij} = 0 \text{ за всяко } j \leq n.$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че $\text{НОД}(a_1, \dots, a_n) = 1$. Нека $k = p^\alpha$, където p е просто. Тогава, в частност някое от числата a_i не се дели на p . Нека $(a_l, p) = 1$. Тогава умножавайки всяко от равенствата

$$\sum_{i=1}^m a_i v_{ij} = 0$$

с v_{lj} получаваме, че за всяко j

$$\sum_{i=1}^m a_i v_{ij} v_{lj} = 0,$$

откъдето и

$$0 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_i v_{ij} v_{lj} = \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=1}^n v_{ij} v_{lj}.$$

Но както отбелязахме всяка от сумите $\sum_{j=1}^n v_{ij} v_{lj} = |A_i \cap A_l|$. Следователно

$$0 = \sum_{i=1}^m a_i |A_i \cap A_l|.$$

По условие k дели $|A_i \cap A_l|$ точно когато $i \neq l$, но тогава разглеждайки горното равенство по модул k , получаваме, че

$$a_l |A_l \cap A_l| \equiv 0 \pmod{k}.$$

Тъй като $(a_l, p) = 1$, а $k = p^\alpha$, то $|A_l| \equiv 0 \pmod{k}$, което е противоречие. Това показва, че не съществуват $n+1$ множества с даденото свойство, тоест $m \leq n$ за $k = p^\alpha$.

Сега ако $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ има s различни прости делителя, то можем да разбием множествата $A_1, \dots, A_m$ в s групи, така че в групата с номер t попадат всички множества A_j , за които $|A_j| \not\equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, то всяко множество ще попадне в поне една от групите. От друга страна никоя от тези групи не може да съдържа повече от n множества. Наистина да допуснем, че в групата с номер j има повече от n множества, $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ с характеристични вектори $v_1, \dots, v_{n+1}$, съответно. Тогава както и по-горе можем да намерим набор от взаимнопрости числа $a_1, \dots, a_{n+1}$ със свойството, че

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i v_{il} = 0, \text{ за всяко } l \leq n.$$

Поне едно от числата a_l тогава не се дели на p_j . Тогава както и по-горе можем да покажем, че

$$a_l |A_l| \equiv 0 \pmod{k},$$

в частност $a_l |A_l| \equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, но a_l не се дели на p_j и тогава $|A_l| \equiv 0 \pmod{p_j^{\alpha_j}}$, което е противоречие, защото A_l принадлежи на групата с номер j . С това показахме, че в никоя от тези s групи няма повече от n множества и следователно $m \leq sn$. Тъй като s е броят на простите делители на k , то s не зависи нито от n , нито от m , което решава задачата.

Задача 10. В Магиландия има N града - някои, от които са свързани с двупосочни директни пътища, а други - не. Магиландия разполага с k магически ресурса, като при това

1. всеки град разполага с точно един ресурс.
2. няма два съседни града (т.е. свързани с директен път), които да разполагат с един и същ ресурс.

Правителството на Магиландия е особено гордо с природните си богатства, защото ако имаше по-малко от k ресурса, както и да бяха разпределени

те (по един във всеки град), щяха да се намерят два съседни града, които имат еднакви ресурси.

Магьосникът от Оз е научил за Магиландия и много иска да се запознае с всички нейни богатства, но няма много време. Да се докаже, че Магьосникът от Оз може да си избере такъв маршрут от k града в Магиландия - $t_1, t_2, \dots, t_k$, че

1. t_i и t_{i+1} са свързани с директен път за всяко $i < k$ и
2. ако Магьосникът от Оз посети всички тези градове, то той ще опознае всички магически ресурси на Магиландия.

Решение. Да номерираме ресурсите $1, 2, \dots, k$ и нека V е множеството от градовете в Магиландия. Разглеждаме ориентиран граф $G = (U, E)$, където U са всички двойки от вида град и притежаван ресурс, т.е.

$$U = \{(v, i) \mid v \in V, v \text{ притежава ресурс } i\}.$$

Ребра в G ще бъдат всички двойки от вида $((v_1, i_1), (v_2, i_2))$, за които $i_1 < i_2$ и v_1 и v_2 са свързани с директен път в Магиландия. Ясно е, че задачата ще е решена, ако покажем, че в G има ориентиран път с дължина k . С L_0 означаваме множеството от всички върхове на G , в които не влиза ребро (такива има, например тези, които притежават ресурс 1). Нека L_j е множеството от всички върхове на G , за които най-дългият път в брой ребра от L_0 е точно j . Тъй като G е ацикличен, то всеки връх на G ще попадне в някое множество L_j . Това показва, че

$$U = \cup L_j.$$

Да допуснем, че L_{k-1} е празно (тогава очевидно празни ще бъдат и всички j за $j \geq k-1$) и нека $j < k-1$ и $(v_1, i_1) \in L_j$ и $(v_2, i_2) \in L_j$ са произволни като $v_1 \neq v_2$. Ако $i_1 = i_2$, то от условието на задачата между v_1 и v_2 няма директен път. Да допуснем, че $i_1 < i_2$, тогава ако до (v_1, i_1) има път с дължина j от някой връх в L_0 . Ако имаше директен път от v_1 до v_2 , то $((v_1, i_1), (v_2, i_2)) \in E$ и в G щеше да има път с дължина $j+1$ от L_0 до (v_2, i_2) . Това обаче е противоречие с факта, че $(v_2, i_2) \in L_j$. С това показахме, че за всяко $j < k-1$ никои два града от множеството $V_j = \{v \mid (v, i) \in L_j\}$ не са свързани с директен път. Тъй като $L_{k-1} = \emptyset$, то $V = \cup_{j=0}^{k-2} V_j$. Сега ако в Магиландия имаше $k-1$ ресурса и всеки ресурс j се срещаше точно в градовете V_j , то щяхме да получим противоречие с условието на задачата. Следователно не е вярно, че $L_{k-1} = \emptyset$, тоест в G има път с дължина k , който вълшебникът от Оз може да избере.

Хармонично отношение

Стоян Боев

stoyancho@gmail.com

- Тате, кога човек е истински щастлив?
- Когато е в хармония със себе си, сине!

I Въведение

Хармоничното отношение е един от брилянтните подходи в така наречената „елементарна“ геометрия. Той не е универсален, но там, където е приложим, е изключително ефективен и незаменим. Характеризира се с кратки и ясни решения на трудни геометрични проблеми. По тези си качества се нарежда на едно от челните места сред подходи като Проективни преобразувания, Равномерно движение, Лица, Радикални оси, Полус и поляра.¹

II Определение

Всички дефиниции ще въведем в разширената евклидова равнина², като разглеждаме само крайни прави³, но позволяваме точките да бъдат и безкрайни. По този начин получените резултати могат да бъдат много по-богато интерпретирани в класическата евклидова равнина, като някои от примерите в края на темата илюстрират именно това.

Определение 1. Нека A, C, B и D са четири различни точки, лежащи на права ℓ и разположени в този или обратен ред (фиг. 1). *Двойно отношение* на тези четири точки означаваме с (A, C, B, D) и дефинираме, като

$$(A, C, B, D) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

¹Виж „Олимпийски теми“ 2004, 2006 и 2008.

²Разширената евклидова равнина $\overline{\mathbb{R}}_2$ е получена от класическата евклидовата равнина, като към всяка права е добавена по една безкрайна точка ∞_i , съответстваща на направление на тази права, а множеството от всички безкрайни точки $\{\infty_1, \infty_2, \dots\}$ образуват безкрайната права ∞ . По този начин евклидовата равнина се разширява до проективна равнина, тъй като в $\overline{\mathbb{R}}_2$ всеки две прави се пресичат.

³*Крайна права* в разширената евклидова равнина е всяка права, която е различна от безкрайната. Аналогично *крайна точка* е всяка точка, която не е безкрайна.

Казваме, че точките A, C, B и D са в *хармонично отношение*, ако двойното им отношение е единица, т.е. $(A, C, B, D) = 1$ или $AC : BC = AD : BD$.

Определение 2. Нека PA, PC, PB и PD са четири различни прави, минаващи през една крайна точка P и разположени в този или обратен ред (фиг. 2). *Двойно отношение* на този сноп от четири прави означаваме с $P(A, C, B, D)$ и дефинираме, като

$$P(A, C, B, D) = \frac{\sin \sphericalangle APC}{\sin \sphericalangle BPC} : \frac{\sin \sphericalangle APD}{\sin \sphericalangle BPD}.$$

Казваме, че правите PA, PC, PB и PD са в *хармонично отношение*, ако двойното им отношение е единица, т.е. $P(A, C, B, D) = 1$ или все едно $\sin \sphericalangle APC : \sin \sphericalangle BPC = \sin \sphericalangle APD : \sin \sphericalangle BPD$.

Определение 3. Вписан в окръжност четириъгълник наричаме *хармоничен*, ако произведенията на срещуположните му страни са равни.

Забележка 1. Ако $ACBD$ е хармоничен четириъгълник (фиг. 3), то $AC : BC = AD : BD$, което може да бъде разглеждано, като дефиниция за хармонично отношение на четири точки върху окръжност.

Забележка 2. Ако P е произволна точка от описаната около $ACBD$ окръжност (фиг. 3), то правите PA, PC, PB и PD са в хармонично отношение (*Защо?*).

 Фигура 2

III Построение

Ако са дадени три различни колинеарни точки, то в общия случай нееднозначно можем да определим четвърта, която е в хармонично отношение с тях. Аналогично всеки три различни прави минаващи през една точка, нееднозначно определят четвърта, която е в хармонично отношение с тях. Ако обаче фиксираме наредбата на точките (правите), то ще съществува най-много една такава точка (права) и въпроса е как да я построим с линейка и пергел?

 Фигура 3

1. Нека точките A, C и B са разположени в този ред върху дадена права ℓ . Ще построим точка D върху правата ℓ , за която $(A, C, B, D) = 1$. Имаме няколко възможни случая (фиг. 4):



Фигура 4

Случай 1. Ако точката A е безкрайна, то B е среда на отсечката CD .

Случай 2. Ако $AC = BC$, то D е безкрайната точка от правата ℓ .

Случай 3. Ако $AC > BC$, k е окръжност с диаметър AB , а P е пресечната точка на k с перпендикуляра към AB в точката C , то D е тази точка от правата ℓ , за която DP е допирателна към k (Защо?).⁴

Случай 4. Ако $AC < BC$, то в този случай не достига до решение.

2. Нека сега правите PA , PC и PB са разположени в този ред (фиг. 5).

Без ограничение на общността нека точките A , C и B са колинеарни и лежат на права ℓ . Ще построим точка D върху правата ℓ , различна от A , C и B , за която $P(A, C, B, D) = 1$. За целта нека D е тази точка от правата ℓ , за която $(A, C, B, D) = 1$. Тогава от дуалното свойство **3** следва, че PD е в хармонично отношение с правите PA , PC и PB , т.е. D е търсената точка.

III Свойства

1 (*Характеристично свойство за хармонични точки*) Ако A , C , B и D са четири различни точки, лежащи в този ред на дадена права ℓ , а M и N са средите съответно на отсечките AB и CD , то $(A, C, B, D) = 1$ тогава и само тогава, когато е изпълнено поне едно от равенствата⁵:



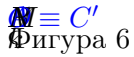
Фигура 5

⁴В случая е възможно построението да се извърши само с линейка (виж свойство **2**).

⁵Първото равенство показва, че точките C и D са *инверсно спрегнати* относно окръжност с център M и радиус MA , а петото равенство е пряко свързано с дефиницията за *средно хармонично* на две числа. Освен това, ако обърнем реда на точките, то $(D, B, C, A) = 1$ и първите пет равенства се трансформират естествено в нови пет, които тук няма да разглеждаме, но е полезно упражнение за читателя.

$$\begin{aligned}
(i) \quad MC \cdot MD &= MA^2; & (iv) \quad \frac{MC}{MD} &= \left(\frac{CA}{DA} \right)^2; \\
(ii) \quad MC \cdot CD &= CA \cdot CB; & (v) \quad \frac{2}{DC} &= \frac{1}{DA} + \frac{1}{DB}; \\
(iii) \quad MD \cdot DC &= DA \cdot DB; & (vi) \quad AB^2 + CD^2 &= 4 \cdot MN^2.
\end{aligned}$$

Доказателство. Нека k е окръжност с диаметър AB (фиг. 6). През точка D построяваме допирателната DP към k ($P \in k$), а от точка P спускаме перпендикуляр PC' към AB ($C' \in AB$).

 Фигура 6

($\rightarrow$) Нека $(A, C, B, D) = 1$. Имаме равенствата $\sphericalangle DPB = \sphericalangle BAP = \sphericalangle BPC'$, $\sphericalangle APB = 90^\circ$ и следователно PB и PA са вътрешна и външна ъглополовяща при върха P в $\triangle C'DP$. От тук $DB : C'B = DA : C'A$, т.е. $(A, C', B, D) = 1$ и от казаното в предната точка следва, че $C \equiv C'$.

От $\triangle MDP$ и $\triangle ABP$ имаме равенствата $MC \cdot MD = MP^2 = MA^2 \Rightarrow (i)$, $MC \cdot CD = CP^2 = CA \cdot CB \Rightarrow (ii)$ и $MD \cdot DC = DP^2 = DA \cdot DB \Rightarrow (iii)$.

От (ii) , (iii) следва, че $\frac{MC}{MD} = \frac{CA \cdot CB}{DA \cdot DB} = \left(\frac{CA}{DA} \right)^2 \Rightarrow (iv)$.

От (iii) следва, че $\frac{DA \cdot DB}{DC} = MD = \frac{DA + DB}{2} \Rightarrow (v)$.

Накрая от (v) и $MN = AD - \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow (vi)$.

($\leftarrow$) Нека едно от равенствата $(i)-(vi)$ е в сила за точките A, C, B и D . Тъй като $(A, C', B, D) = 1$, то същото това равенство ще е изпълнено и за точките A, C', B и D и от тук лесно се получаваме, че $C \equiv C'$.

2 (*Хармонично свойство на чевианите*) Нека A, C, B и D са четири различни точки, лежащи в този ред на дадена права ℓ , а P е точка не лежаща на ℓ . Ако права l_1 през D различна от ℓ пресича правите PA и PB съответно в точките A_1 и B_1 (фиг. 7), то точките A, C, B и D са в хармонично отношение тогава и само тогава, когато правите PC, AB_1 и BA_1 се пресичат в една точка.

Доказателство. От теоремата на Менелай приложена за $\triangle ABP$ и правата l_1 и теоремата на Чева следва, че правите PC, AB_1 и BA_1 се пресичат в една точка тогава и само тогава, когато:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AA_1}{A_1P} \cdot \frac{PB_1}{B_1B} = \frac{AD}{BD} \Leftrightarrow (A, C, B, D) = 1.$$

 Фигура 7

3 (*Дуално свойство на хармоничното отношение*) Ако A, C, B и D са четири различни точки, лежащи в този ред на дадена права ℓ , а P е точка не лежаща на ℓ , то точките A, C, B и D са в хармонично отношение тогава и само тогава, когато правите PA, PC, PB и PD са в хармонично отношение.

Доказателство. Ако $\sphericalangle APC = \alpha$, $\sphericalangle CPB = \beta$ и $\sphericalangle BPD = \gamma$ (фиг. 8), то

$$\begin{aligned} (A, C, B, D) &= \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}} \cdot \frac{S_{BDP}}{S_{ADP}} \frac{AP \cdot CP \cdot \sin \alpha}{BP \cdot CP \cdot \sin \beta} \cdot \frac{BP \cdot DP \cdot \sin \gamma}{AP \cdot DP \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)} = P(A, C, B, D). \end{aligned}$$

 Фигура 8

Следователно $(A, C, B, D) = 1 \Leftrightarrow P(A, C, B, D) = 1$.

Следствие 1. Ако точките A, C, B и D са в хармонично отношение и произволна права l_1 пресича правите PA, PC, PB и PD съответно в точките A_1, C_1, B_1 и D_1 (фиг. 9), то и точките A_1, C_1, B_1 и D_1 са в хармонично отношение.

 Фигура 9

Следствие 2. Ако точките A , C , B и D са в хармонично отношение и произволна окръжност k през точката P пресича правите PA , PC , PB и PD за втори път в точките A_1 , C_1 , B_1 и D_1 (фиг. 10), то четириъгълникът $A_1C_1B_1D_1$ е хармоничен.

Забележка: Горните следствия от дуалното свойство се наричат още *проективни свойства на хармоничното отношение*. Когато P е безкрайна точка, т.е. правите PA , PB , PC и PD са успоредни, то по дефиниция не можем да говорим за хармонично отношение на правите. Но в този случай следствие 1 и следствие 2 са свойства на така нареченото *успоредно проектиране* и лесно може да се види, че те остават в сила.



Фигура 10

4 (*Характеристично свойство за хармонични прави*) Ако PA , PC , PB и PD е сноп от четири различни прави, които са разположени в този ред, то $P(A, C, B, D) = 1$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството:

$$\cos \sphericalangle APB \cdot \cos \sphericalangle CPD = \cos(\sphericalangle APC + \sphericalangle BPD).$$

Доказателство. Нека $\sphericalangle APC = \alpha$, $\sphericalangle CPB = \beta$ и $\sphericalangle BPD = \gamma$ (фиг. 11). Тогава равенството добива вида:
 $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\beta + \gamma) = \cos(\alpha + \gamma) \Leftrightarrow$
 $\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\alpha + 2\beta + \gamma) = 2\cos(\alpha + \gamma) \Leftrightarrow$
 $\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma) = \cos(\alpha + \gamma) - \cos(\alpha + 2\beta + \gamma) \Leftrightarrow$
 $\sin \alpha \cdot \sin \gamma = \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) \Leftrightarrow$
 $\sin \sphericalangle APC \cdot \sin \sphericalangle BPD = \sin \sphericalangle BPC \cdot \sin \sphericalangle APD \Leftrightarrow$
 $P(A, C, B, D) = 1.$

5 Ако PA , PC , PB и PD е сноп от четири различни прави, които са разположени в този ред, то всеки две от условията по-долу водят до третото:

- (i) $P(A, C, B, D) = 1$;
- (ii) PC е перпендикулярна на PD ;
- (iii) PC е ъглополовяща на $\sphericalangle APB$.



Фигура 11

Доказателство. Ако (i) и (ii) са изпълнени (фиг. 12), то от **4** следва, че $\cos(\sphericalangle APC + \sphericalangle BPD) = 0$, т.е. $\sphericalangle APC = 90^\circ - \sphericalangle BPD = \sphericalangle CPB$.



Фигура 12

Ако (i) и (iii) са изпълнени, то отново от предното свойство следва, че $\cos \sphericalangle APB \cdot \cos \sphericalangle CPD = \cos \sphericalangle CPD$, т.е. $\cos \sphericalangle CPD = 0$ и $\sphericalangle CPD = 90^\circ$.

Ако (ii) и (iii) са изпълнени, то $\sphericalangle APC + \sphericalangle BPD = \sphericalangle CPD = 90^\circ$ и отново от свойство [4] следва, че $P(A, C, B, D) = 1$.

[6] (Хармонично свойство на секущата) Ако през точка P , външна за дадена окръжност k , са прекарани двете допирателни PM и PN ($M, N \in k$) и произволна секуща ℓ , която пресича k в точки X и Y , а отсечката MN в точка Z (фиг. 13), то $XNYM$ е хармоничен четириъгълник, а точките X, Z, Y и P са в хармонично отношение, т.е. $(X, Z, Y, P) = 1$.

Доказателство. От $\triangle PMX \sim \triangle PYM$ следва, че $\frac{MX}{MY} = \frac{MP}{PY} = \frac{PX}{PM}$, т.е. $\left(\frac{MX}{MY}\right)^2 = \frac{PX}{PY}$. Аналогично $\left(\frac{NX}{NY}\right)^2 = \frac{PX}{PY}$ и следователно $MX \cdot NY = MY \cdot NX$, т.е. $XNYM$ е хармоничен четириъгълник и $M(X, N, Y, P) = 1$. Накрая от свойство [3] следва, че $(X, Z, Y, P) = 1$.

 Фигура 13

IV Същност на подхода

Пример 1. В $\triangle ABC$, M е средата на страната AB , H е ортоцентъра му, а D, E и F са проекциите на ортоцентъра H съответно върху страните AB, BC и CA . Ако правата EF пресича AB в точка L , то да се докаже, че $LH \perp CM$.

Решение. Нека $P = LH \cap CM$ (фиг. 14). От свойство [2] следва, че $(L, A, D, B) = 1$ и понеже M е среда на AB , то от свойство [1] следва, че $MD \cdot DL = DA \cdot DB = DH \cdot DC$. Следователно $\frac{MD}{DC} = \frac{DH}{DL}$, но $\sphericalangle MDC = \sphericalangle HDL = 90^\circ$, т.е. $\triangle MDC \sim \triangle HDL$, $\sphericalangle LHD = \sphericalangle CMD$ и

$$\begin{aligned} \sphericalangle LPM &= 180^\circ - \sphericalangle PML - \sphericalangle MLP = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle LHD - \sphericalangle DLH = 90^\circ. \end{aligned}$$

Пример 2. Нека AD, BE и CF са чевиани в $\triangle ABC$. Да се докаже, че а) ако $CF \perp AB$, то $\sphericalangle CFE = \sphericalangle CFD$;

 Фигура 14

б) ако $DF \perp EF$, то $\sphericalangle EFA = \sphericalangle CFE$ и $\sphericalangle CFD = \sphericalangle DFB$.

Решение. Нека правите DE и AB се пресичат в точка T (T може да бъде и безкрайна точка, ако $DE \parallel AB$) и $R = CF \cap DE$.

От хармоничното свойство на чевианите [2] и свойство [3] следва, че

$$1 = (T, A, F, B) = C(T, A, F, B) = (T, F, R, D).$$

Фигура 15

Фигура

Накрая от свойство [5] следва, че

а) ако $CF \perp AB$ (фиг. 15), то $\sphericalangle CFE = \sphericalangle CFD$

б) ако $DF \perp EF$ (фиг. 16), то $\sphericalangle EFA = \sphericalangle CFE$ и $\sphericalangle CFD = \sphericalangle DFB$.

Пример 3. Дадена е полуокръжност ω с център O и диаметър AB . Върху AB е избрана точка P , различна от O , A и B . Нека X и Y са такива точки върху ω , че $\sphericalangle APX = \sphericalangle BPY = \alpha$. Да се докаже, че правата XY пресича правата AB в постоянна точка, която не зависи от големината на ъгъла α .

Решение. Нека правата XY пресича AB в точка Q , а правата през P , перпендикулярна на AB , пресича XY в точка R и окръжността ω в точка C (фиг. 17). По условие $\sphericalangle XPR = 90^\circ - \alpha = \sphericalangle YPR$ и от свойство [5] следва, че $(X, R, Y, Q) = 1$. Тогава от свойство [6] получаваме, че QC е допирателна към ω , но точка C е постоянна (т.е. не зависи от големината на ъгъла α) и следователно точка Q е постоянна.

Фигура 17

V Няколко олимпийски задачи

Задача 1. (Предложение за МОМ 2008) В остроъгълен триъгълник ABC са прекарани височините BE и CF . Две окръжности минават през точките A и F и се допират до правата BC в точки P и Q , като B е между C и Q . Да се докаже, че правите PE и QF се пресичат върху окръжността, описана около триъгълник AEF .

Решение. Нека AD ($D \in BC$) е третата височина в $\triangle ABC$ (фиг. 18). От свойството на секущите имаме $BP^2 = BF \cdot BA = BQ^2$ и следователно B е среда на PQ и $BP^2 = BD \cdot BC$. Тогава от свойство **[1]** следва, че $(C, P, D, Q) = 1$ и $CD \cdot CB = CP \cdot CQ$. Следователно

$$CE \cdot CA = CD \cdot CB = CP \cdot CQ,$$

т.е. четириъгълникът $AQPE$ е вписан в окръжност и $\sphericalangle EPC = \sphericalangle QAC$. От

друга страна $\sphericalangle BQF = \frac{\widehat{FQ}}{2} = \sphericalangle BAQ$ и получаваме

$$\sphericalangle (QF, PE) = \sphericalangle EPC - \sphericalangle BQF = \sphericalangle QAC - \sphericalangle BAQ = \sphericalangle BAC,$$

т.е. правите PE и QF се пресичат върху описаната около $\triangle AEF$ окръжност.

Задача 2. (Национална олимпиада, България 2003) Нека H е произволна точка върху височината CP ($P \in AB$) на остроъгълен $\triangle ABC$. Правите AH и BH пресичат BC и AC съответно в точки M и N , а отсечките MN и CP се пресичат в точка O . Произволна права през O пресича страните на четириъгълника $CNHM$ в точки D и E . Да се докаже, че $\sphericalangle DPC = \sphericalangle EPC$.⁶

⁶Тази задача е естествено обобщение на класическото твърдение от Пример 2. а).

Решение. Ако правата DE пресича правата AB в точка F (тази точка може да бъде и безкрайна) ще покажем, че точките D, O, E и F са в хармонично отношение, а от $\sphericalangle OPF = 90^\circ$ и свойство **[5]** ще следва, че $\sphericalangle DPC = \sphericalangle EPC$.

Нека без ограничение на общността $D \in MC, E \in NH$ (фиг. 19) и правата BO пресича AC в точка R . От свойство **[2]** приложено за $\triangle CNB$ и свойство **[3]** следва, че

$$1 = (C, R, N, A) = B(C, R, N, A) = (D, O, E, F),$$

с което задачата е решена.

Задача 3. (TST, Китай 2002) Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който правите AB и CD , правите AD и BC и диагоналите AC и BD се пресичат в точките E, F и R съответно. Ако P е петата на перпендикуляра от R към правата EF , то да се докаже, че $\sphericalangle APD = \sphericalangle BPC$.

Решение. Нека правите AC и BD пресичат правата EF в точки S и T съответно (тези точка може да бъдат и безкрайни), а правата TC пресича правата AB в точка K , като без ограничение на общността разположението на точките е както на фиг. 20.

От свойство **[2]** приложено за $\triangle AEF$ и свойство **[3]** следва, че

$$1 = (T, F, S, E) = A(T, F, S, E) = (T, D, R, B).$$

 Фигура 20

Но $\sphericalangle RPT = 90^\circ$ и от свойство **5** следва, че $\sphericalangle DPR = \sphericalangle BPR$.

Аналогично от свойство **2** приложено за $\triangle BET$ и свойство **3** следва, че

$$1 = (A, B, K, E) = T(A, B, K, E) = (A, R, C, S).$$

Но $\sphericalangle RPS = 90^\circ$ и от свойство **5** следва, че $\sphericalangle APR = \sphericalangle CPR$.

Окончателно $\sphericalangle APD = \sphericalangle DPR - \sphericalangle APR = \sphericalangle BPR - \sphericalangle CPR = \sphericalangle BPC$.

Задача 4. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който правите AB и CD и правите AD и BC се пресичат в точките E и F съответно. През пресечната точка R на диагоналите AC и BD е прекарана права ℓ успоредна на EF . Да се докаже, че частта от правата ℓ , вътрешна за четириъгълника $ABCD$, се разделя от точка R на две равни части.

Решение. Нека без ограничение на общността правата ℓ пресича страните AB и CD в точките M и N (фиг. 21), а правата ER пресича AD в точка Q . От свойство **2** приложено за $\triangle AED$ и свойство **3** следва, че

$$1 = (A, Q, D, F) = E(A, Q, D, F) = (M, R, N, \infty_\ell),$$

т.е. точките M , R , N и ∞_ℓ са в хармонично отношение. Последното означава, че

$$MR = RN$$

и с това задачата е решена.

Задача 5. В $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$) е вписана окръжност k с център I , която се допира до страната BC в точка D . Да се докаже, че AD е симедиана тогава и само тогава, когато $OI \perp AD$, където O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Решение. Нека окръжността k се допира до страните AB и AC в точките E и F съответно, а правата EF пресича правата BC в точка T и отсечката AD в точка K (фиг. 22). Първо ще докажем класическия факт, че $TI \perp AD$. От свойство [2], приложено за $\triangle ABC$, и свойство [3] следва, че

$$1 = (T, C, D, B) = A(T, C, D, B) = (T, F, K, E).$$

Така от свойство [6], приложено за окръжността k , и $(T, F, K, E) = 1$ получаваме, че $TI \perp AD$, т.е. $OI \perp AD \Leftrightarrow OT \perp AD$.

Отново от свойство [6], но този път приложено за описаната окръжност ω около $\triangle ABC$, и $(T, C, D, B) = 1$ получаваме, че

$$\begin{aligned} OT \perp AD &\Leftrightarrow TA \text{ се допира до } \omega \text{ в точката } A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{CT}{TB} = \frac{AC^2}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AC^2}{AB^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow AD \text{ е симедиана в } \triangle ABC. \end{aligned}$$

Следователно $OI \perp AD \Leftrightarrow AD$ е симедиана в $\triangle ABC$ и с това задачата е решена.

VI Допълнителни задачи

Задача 6. (Предложение за MOM 1997) Височините през върховете A , B , C на остроъгълния $\triangle ABC$ пресичат противоположните страни в точките D , E и F съответно. Правата през D успоредна на EF пресича правите AC и AB в точките Q и R съответно. Правата EF пресича BC в точката P . Докажете, че описаната около $\triangle PQR$ окръжност минава през средата на BC .

Задача 7. (TST, България 2003) Четириъгълник $ABCD$ е описан около окръжност с център O . Ако P е проекцията на O върху диагонала AC , то да се докаже, че $\sphericalangle APB = \sphericalangle APD$.

Задача 8. (Характеристични свойства на хармоничен четириъгълник) Нека $ABCD$ е вписан в окръжност k четириъгълник, диагоналите му AC и BD да се пресичат в точка E , а M и N да са средите на AC и BD съответно. Да се докаже, че $ABCD$ е хармоничен четириъгълник тогава и само тогава, когато е в сила поне едно от условията:

- (i) допирателните към k в точките A и C се пресичат върху продължението на диагонала BD ;
- (ii) допирателните към k в точките B и D се пресичат върху продължението на диагонала AC ;
- (iii) диагоналът AC разполовява $\sphericalangle BMD$;
- (iv) диагоналът BD разполовява $\sphericalangle ANC$;
- (v) AE е симедиана в $\triangle ABD$ или BE е симедиана в $\triangle BCA$, или CE е симедиана в $\triangle CDB$, или DE е симедиана в $\triangle DAC$.

Задача 9. (TST, Иран, 2006) В $\triangle ABC$ точка M е среда на страната BC . Нека AM пресича вписаната в триъгълника окръжност в точките K и L . Построени са прави през K и L успоредни на BC , които пресичат за втори път окръжността в точките X и Y съответно. Ако AX и AY пресичат BC в точките P и Q , то да се докаже, че $BP = CQ$.

Задача 10. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ ($AB \neq BC$) и нека O е пресечната точка на диагоналите му. Ако BO е симедиана за $\triangle ABC$, а DO е симедиана за $\triangle ADC$, то да се докаже, че AO е симедиана за $\triangle ABD$.

Задача 11. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните BC , CA и AB съответно в точките X , Y и Z . Нека P е петата на перпендикуляра от точка X към правата YZ . Да се докаже, че $\sphericalangle BPX = \sphericalangle CPX$.

Задача 12. В трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$), M е среда на AB , $R = AC \cap BD$, $N = DM \cap AC$, а P е проекцията на N върху бедрото BC . Да се докаже, че $\sphericalangle DPR = \sphericalangle APM$.

Задача 13. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ ($AB \neq BC$) и нека O е пресечната точка на диагоналите му. Ако BO е симедиана за $\triangle ABC$, а DO е симедиана за $\triangle ADC$, то да се докаже, че AO е симедиана за $\triangle ABD$.

Задача 14. Даден е $\triangle ABC$ и точка D върху правата BC такава, че $CD = CA$ и C е между B и D . Окръжността с диаметър BC и окръжността описана около $\triangle ACD$ се пресичат за втори път в точка P . Ако правите BP и AC се пресичат в точка E , а правите CP и AB се пресичат в точка F , то да се докаже, че точките D , E и F лежат на една права.

Задача 15. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) и окръжност ω , която се допира до бедрата AC и BC и пресича основата AB в точки K и L .

Правата CK пресича за втори път ω в точка M . Нека P и Q са симетричните точки на K относно A и B съответно. Да се докаже, че описаната около $\triangle PQM$ окръжност се допира до ω .

Задача 16. Дадена е окръжност k и точка A , външна за нея. Построени са допирателните AB и AC ($B, C \in k$) от точка A към окръжността. Средите на по-малката дъга $\widehat{BC}$ и на хордата BC са означени с точките M и N съответно. През точка M е прекарана произволна права ℓ , която пресича правите AB и AC съответно в точките P и Q , а окръжността k – в точка R . Ако правите BQ и CP се пресичат в точка S , то да се докаже, че точките R , S и N лежат на една права.