

Олимпийски теми 2012

Американска Фондация за България
Съюз на Математиците в България
Институт по Математика и Информатика на БАН
©УНИМАТ СМБ

Олимпийски теми 2012

Настоящият сборник от теми за подготовка за олимпиади се основава до голяма степен на лекции, изнесени пред разширените национални отбори при подготовката им за участие в БОМ и МОМ през 2011 и 2012 г. и ЕМОМ през 2013 г. Тези подготовки бяха осъществени с ценното съдействие на Американска Фондация за България, която от 2004 г. е основен спонсор на националните отбори по математика, и Фондация Георги Чиликов.

Авторите на темите искрено се надяват, че материалите в този сборник ще бъдат полезни за ученици (за подготовка за участие в олимпиади) и учители (за подготовка на техни лекции на олимпийски теми). Всеки от авторите е следвал своя собствен стил за представяне на материала, като намесата на редактора е минимална.

София, март 2013 г.

Редактор: Петър Бойваленов

Copyright 2013

УНИМАТ СМБ

София 1113, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8

тел. 979-28-06, e-mail: peter@math.bas.bg

София, 2013 г. ISSN 1314-0493

СЪДЪРЖАНИЕ

Александър Иванов. Делители на полиноми с цели коефициенти	3
Емил Колев. Комбинаторика	7
Николай Белухов. Няколко геометрични неравенства	13
Николай Николов. Неравенства от БОМ и МлБОМ	25
Петър Бойваленков. Задачи от Romanian Masters of Mathematics 2011-2013	33
Пламен Пенчев. Неравенство на Фишер	44
Рафаел Рафаилов. Полиноми	49
Стоян Боев. Симедиани в триъгълник	66

Делители на стойности в цели числа на полиноми с цели коефициенти

АЛЕКСАНДЪР ИВАНОВ

alexandur1964@abv.bg

Настоящата лекция е по материали от сп. "Квант" и съдържа интересни твърдения за делителите на стойности на полиноми с цели коефициенти в целочислените точки. Първо ще припомним някои известни определения и теореми.

Теорема 1. (Еквивалентна на Китайската Теорема за остатъците) Нека са дадени k безкрайни растящи (или намаляващи) аритметични прогресии от цели числа с две по две взаимно прости разлики $m_1, m_2, \dots, m_k$. Тогава тяхното сечение е безкрайна аритметична прогресия с разлика $m_1 m_2 \dots m_k$.

Следствие 1. Ако m и n са взаимнопрости естествени числа, то за всяко цяло число r съществува $x \in \mathbb{Z}$, такова че $mx \equiv r \pmod{n}$.

Както обикновено, ще бележим множеството на полиномите с рационални коефициенти с $\mathbb{Q}[x]$, а тези с цели с $\mathbb{Z}[x]$.

Неконстантен полином $f \in \mathbb{Q}[x]$ от степен d се нарича неразложим над $\mathbb{Q}$, ако не може да се представи като произведение на два полинома от степени по-малки от d с рационални коефициенти. В $\mathbb{Q}[x]$ се въвежда по стандартен начин понятието най-голям общ делител (НОД) на краен брой полиноми $f_1, f_2, \dots, f_k$. Оказва се, а и не е трудно да се докаже, че НОД е единствен с точност до умножение ненулево рационално число и може да се намира с помощта на Алгоритъма на Евклид. Полиноми, чиито НОД е равен на 1, се наричат взаимнопрости.

Както в теорията на числата, и тук от алгоритъма на Евклид лесно следва твърждение на Безу.

Теорема 2. (Теорема на Безу) За произволни полиноми $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbb{Q}[x]$ съществуват полиноми $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{Q}[x]$, такива че

$$\text{НОД}(f_1, f_2, \dots, f_k) = u_1 f_1 + u_2 f_2 + \dots + u_k f_k.$$

Теорема 3. Всеки неконстантен полином $f \in \mathbb{Q}[x]$ се представя във вида $f = h_1 h_2 \dots h_r$, където h_i са неразложими над $\mathbb{Q}$ полиноми, като при това ако $f = h'_1 h'_2 \dots h'_s$ е друго такова разлагане, то $s = r$ и за някакво преномериране ще имаме $h'_1 = u_1 h_1, \dots, h'_r = u_r h_r$, където $u_1, u_2, \dots, u_r$ са ненулеви рационални числа.

С помощта на Лемата на Гаус се получава следното твърдение.

Следствие 2. Ако $f \in \mathbb{Z}$ е неконстантен полином, то той се представя във вида $f = h_1 h_2 \dots h_r$, където $h_i \in \mathbb{Z}[x]$ са неразложими над $\mathbb{Q}$ неконстантни полиноми.

Ако в последното представяне групираме пропорционалните множители и изнесем от всеки множител НОД на коефициентите му, то получаваме "каноничното" разлагане

$$f = u g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_k^{\alpha_k},$$

където $g_i \in \mathbb{Z}[x]$ са два по два взаимнопрости неразложими над $\mathbb{Q}$ неконстантни полиноми, $u \in \mathbb{Z}$, $u \neq 0$, $k \geq 1$, $\alpha_i \geq 1$. При това за всеки g_i НОД на неговите коефициенти е равен на 1.

Ще направим някои допълнителни означения. Ако $f \in \mathbb{Z}[x]$, то с $D(f)$ ще означаваме множеството на естествените числа m , за които съществува цяло число n , за което $f(n)$ се дели на m . С други думи, имаме

$$m \in D(f) \iff \text{сравнението } f(x) \equiv 0 \pmod{m} \text{ има решение.}$$

С $D(f_1, f_2, \dots, f_k)$ ще означаваме множеството на естествените числа m , за които системата сравнения $f_i(x) \equiv 0 \pmod{m}$, $i = 1, 2, \dots, k$, има решение, а с $P(f_1, f_2, \dots, f_k)$ ще означаваме множеството на простите числа, принадлежащи на $D(f_1, f_2, \dots, f_k)$. Ясно е, че ако $m|f(n)$, то $m|f(n+mt)$ за всяко $t \in \mathbb{Z}$. Следователно множеството на целите числа, удовлетворяващи $f_i(x) \equiv 0 \pmod{m}$ или е празно, или е обединение на безкрайни в двете посоки аритметични прогресии с разлика m .

Задача 1. (Лема на Шур) Да се докаже, че ако $f \in \mathbb{Z}[x]$ е неконстантен полином, то множеството $P(f)$ е безкрайно.

Решение. Да допуснем противното и нека $P(f) = \{p_1, \dots, p_k\}$ се състои от краен брой прости числа. Нека $a \in \mathbb{Z}$ е такова, че $f(a) = b \neq 0$. Да разгледаме полинома $g(x) = \frac{f(a+bp_x)}{b}$, където $p = p_1 p_2 \dots p_k$. Лесно се вижда,

че $g(x)$ е неконстантен полином с цели коефициенти, като $P(g) \subset P(f)$. Свободният член на $g(x)$ е $g(0) = 1$, а всички останали коефициенти на g се делят на p . Следователно нито едно от числата $p_1, p_2, \dots, p_k$ не принадлежи на $P(g)$. Но тогава $P(g)$ е празно множество, което е противоречие.

Задача 2. Да се докаже, че ако полиномите $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbb{Z}[x]$, $k \geq 2$, са взаимнопрости, то множеството $D(f_1, f_2, \dots, f_k)$ е крайно.

Решение. Знаем, че съществуват полиноми $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{Q}[x]$, такива че $u_1 f_1 + u_2 f_2 + \dots + u_k f_k = 1$. Отгук получаваме равенство от вида $v_1 f_1 + v_2 f_2 + \dots + v_k f_k = m$, където $v_i \in \mathbb{Z}[x]$, $m \in \mathbb{N}$. Ясно е, че ако за някое $n \in \mathbb{Z}$ числата $f_1(n), f_2(n), \dots, f_k(n)$ се делят на s , то $s|m$. Следователно $D(f_1, f_2, \dots, f_k)$ може да съдържа само делители на m и е крайно.

Нека p е просто число. Както обикновено с $p^\alpha || n$ ще бележим максималната степен на p в n , т.е. $p^\alpha | n$, но $p^{\alpha+1}$ не дели n . За $f \in \mathbb{Z}[x]$ с $P_\alpha(f)$ ще означаваме множеството на простите числа p , за които съществува $n \in \mathbb{Z}$, такива че $p^\alpha || f(n)$. Ясно е, че ако $p^\alpha || f(n)$, то $p^\alpha || f(n + p^{\alpha+1}k)$ за всяко $k \in \mathbb{Z}$. Лесно се виждат и следните факти: (1) $P_\alpha(f) \subset P(f)$, (2) ако $f \in \mathbb{Z}[x]$ е ненулев, то $P(f) = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} P_\alpha(f)$ и (3) $P_\alpha(f) = P_{k\alpha}(f^k)$ за всяко $k \in \mathbb{N}$.

Лема 1. Ако $g \in \mathbb{Z}[x]$ е неконстантен и неразложим над $\mathbb{Q}$ полином, то за всяко $\alpha \in \mathbb{N}$ множеството $P_\alpha(g)$ е безкрайно.

Доказателство Да разгледаме представянето

$$g(x+y) = g(x) + t_1(x)y + t_2(x)y^2 + \dots + t_d(x)y^d,$$

където d е степента на g , $t_1, t_2, \dots, t_d \in \mathbb{Z}[x]$, като при това $t_1(x)$ е ненулев полином от степен $d-1$. Понеже g е неразложим, то g и t_1 са взаимнопрости. Да разгледаме произволно просто число $p \in P(g)$, което не принадлежи на $P(g, t_1)$. Ясно е, че тези числа са безбройно много съгласно задачи 1 и 2. Ще докажем, че $p \in P_\alpha(g)$.

Първо ще докажем, че за всяко $\alpha \in \mathbb{N}$ съществува $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, такова че $g(n_\alpha) \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$. Ще направим индукция по α . За $\alpha = 1$ твърдението следва от $p \in P(g)$. Нека за някое α имаме $g(n_\alpha) = p^\alpha m$, $m \in \mathbb{Z}$. Да положим $x = n_\alpha$ и $y = p^\alpha z$ – получаваме

$$g(n_\alpha + p^\alpha z) \equiv p^\alpha(m + z t_1(n_\alpha)) \pmod{p^{\alpha+1}}.$$

Тъй като $p \notin P(g, t_1)$, числото $t_1(n_\alpha)$ не се дели на p и следователно можем да изберем $z = z_0$, такова че $p | m + z_0 t_1(n_\alpha)$. Сега полагаме $n_{\alpha+1} = n_\alpha + p^\alpha z_0$.

Вече имаме $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, за което $g(n_\alpha)$ се дели на p^α . Тогава $g(n_\alpha + p^\alpha)$ се дели на p^α . Ако положим (отново) $x = n_\alpha$ и $y = p^\alpha$, получаваме $p^\alpha \mid g(n_\alpha + p^\alpha) - g(n_\alpha)$, следователно или $p^\alpha \mid g(n_\alpha)$, или $p^\alpha \mid g(n_\alpha + p^\alpha)$.

Следващата задача обобщава твърдението на Лема 1.

Задача 3. Да разгледаме "каноничното" представяне на $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f = ug_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_k^{\alpha_k}$, където $g_i \in \mathbb{Z}[x]$ са два по два взаимнопрости, неразложими над $\mathbb{Q}$ полиноми, $u \in \mathbb{Z}$, $u \neq 0$, $k \geq 1$, $\alpha_i \geq 1$. Да се докаже, че някое $\alpha \in \mathbb{N}$ множеството $P_\alpha(f)$ е безкрайно тогава и само тогава, когато α се дели на поне едно от числата α_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Решение. Да означим $\bar{g}_i = \frac{f}{g_i^{\alpha_i}}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Тъй като полиномите g_i и $\bar{g}_i$ са взаимнопрости, множеството $P(g_i, \bar{g}_i)$ е крайно.

1) Ако множеството $P_\alpha(f)$ е безкрайно, то ще съществува $p \in P_\alpha(f)$, такова че p не принадлежи на $P(u)$ и на множествата $P(g_i, \bar{g}_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Да вземем n такова, че $p^\alpha \mid f(n)$. Тогава p не дели u и p дели точно едно от числата $g_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, k$, да речем $g_t(n)$. Тогава $p^\alpha \mid g_t(n)^{\alpha_t}$. Но ако $p^\ell \mid g_t(n)$, то $p^{\ell\alpha_1} \mid g_t(n)^{\alpha_t}$. Следователно $\alpha = \ell\alpha_t$, т.е. α се дели на α_t .

2) Обратно, нека например α се дели на α_1 т.е. $\alpha = \ell\alpha_1$ за някое $\ell \in \mathbb{N}$. Да изберем просто число $p \in P_\ell(g_1)$, което не принадлежи на $P(u)$ и $P(g_i, \bar{g}_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Съгласно Лемата тези числа са безбройно много. Тогава имаме $p^{\alpha_1\ell} \mid g(n)$ и съответно $p^{\alpha_1\ell} \mid f(n)$, т.е. $p^\alpha \mid f(n)$.

Задача 4. Нека за полинома $f \in \mathbb{Z}[x]$ съществува безкрайна растяща (или намаляваща) аритметична прогресия B от цели числа, такова че за всяко $n \in B$ имаме $f(n) = m(n)^{s(n)}$, $m(n), s(n) \in \mathbb{Z}$, $s(n) \geq 2$. Да се докаже, че съществува полином $g \in \mathbb{Z}[x]$, такъв, че $f = g^s$ за някое $s \in \{s(n) \mid n \in B\}$.

Решение. Да разгледаме отново $f = ug_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_k^{\alpha_k}$. Нека d е разликата на прогресията B . Знаем, че можем да изберем две по две различни прости числа $p_1, p_2, \dots, p_k$, не лежащи в $P(u) \cup P(d)$, такива че $p_i \in P_{d_i}$. За всяко p_i да намерим $n_i \in \mathbb{Z}$, такова че $p_i^{\alpha_i} \mid f(n_i)$.

Да разгледаме безкрайните прогресии $A_i = \{n_i + xp_i^{\alpha_i+1} \mid x \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Съгласно Теорема 1 прогресиите $A_1, A_2, \dots, A_k$ и B се пресичат по безкрайна прогресия A . Да фиксираме $n \in A$. Имам $p_i^{\alpha_i} \mid f(n)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Нека $s = s(n)$. Понеже $f(n)$ е точна s -та степен, то всяко от числата α_i се дели на s . Следователно $g_1^{\alpha_1}g_2^{\alpha_2}\dots g_k^{\alpha_k}$ е точна s -та степен на полином от $\mathbb{Z}[x]$. Понеже $f(n)$ и $g_1(n)^{\alpha_1}g_2(n)^{\alpha_2}\dots g_k(n)^{\alpha_k}$ са точни s -ти степени ($f(n) \neq 0$), то и u е s -та степен на цяло число, с което твърдението е доказано.

Комбинаторика

Емил КОЛЕВ

emilkol@gmail.com

Задача 1. В група от хора измежду всеки 10 човека има трима, всеки двама от които се познават. Да се докаже, че или съществува група от 7 човека, всеки от които няма познати в цялата група, или съществува такава група от 7 човека, че всеки от останалите познава поне един от тази група.

Решение. Да означим с $\mathcal{A}$ група от хора, всеки двама от които не се познават. Без ограничение можем да приемем, че $\mathcal{A}$ е с максималния възможен брой елементи. Ако $|\mathcal{A}| \leq 7$, то всеки от хората извън $\mathcal{A}$ ще познава някой от $\mathcal{A}$ (в противен случай $|\mathcal{A}|$ не е максимално). Ако е необходимо допълваме $\mathcal{A}$ до група от 7 човека и получаваме такава група от 7 човека, че всеки от останалите познава поне един от тази група.

Ако $|\mathcal{A}| \geq 9$, то за групата от 10 човека, съставена от хората от $\mathcal{A}$ с евентуално добавяне на един човек (ако $|\mathcal{A}| = 9$) няма да има трима, всеки двама от които се познават.

Следователно $|\mathcal{A}| = 8$ и нека $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_8\}$. Да разгледаме група от 10 човека, съставена от хората от $\mathcal{A}$ и произволни двама X и Y от останалите. В тази група има трима, всеки двама от които се познават. Това е възможно само ако X и Y се познават. Получихме, че всеки двама извън $\mathcal{A}$ се познават.

Да допуснем, че съществува човек X извън $\mathcal{A}$, който познава двама човека от $\mathcal{A}$. Без ограничение нека това са A_1 и A_2 . Тогава за групата от 7 човека $X, A_3, A_4, \dots, A_8$ е вярно, че всеки извън тази група познава поне един от нея (във всички случаи такъв човек е X).

Тъй като всеки извън групата $\mathcal{A}$ познава поне един от $\mathcal{A}$, то получаваме, че всеки извън $\mathcal{A}$ познава точно един човек от $\mathcal{A}$. Тъй като в $\mathcal{A}$ има поне двама човека, които имат познати (в противен случай в $\mathcal{A}$ има група от 7 човека, всеки от които няма познати), то без ограничение нека A_1 и A_2 познават X и Y . Тъй като всеки извън $\mathcal{A}$ има точно един познат в $\mathcal{A}$, то $X \neq Y$. При това A_1 не познава Y и A_2 не познава X . Да разгледаме групата от 10 човека, съставена от $\mathcal{A}$, X и Y . В нея очевидно няма трима,

всеки двама от които се познават. Полученото противоречие доказва, че или съществува група от 7 човека, всеки от които няма познати в цялата група, или съществува такава група от 7 човека, че всеки от останалите познава поне един от тази група.

Задача 2. В група от 200 човека е изпълнено следното свойство: за всеки двама непознати, всеки от останалите или познава и двамата или не познава и двамата. Да се докаже, че или съществуват 15 човека, всеки двама от които се познават или съществуват 15 човека, всеки двама от които не се познават.

Решение. Да означим с A_1 най-голямата група от хора, всеки двама от които не се познават. От условието на задачата следва, че всеки от останалите познава всички от A_1 . Ако $|A_1| \geq 15$, то сме намерили група от 15 човека, всеки двама от които не се познават. Следователно $|A_1| \leq 14$. От останалите хора да изберем най-голямата група A_2 от хора, всеки двама от които не се познават. Както по-горе следва, че $|A_2| \leq 14$ и всеки извън A_1 и A_2 познава всеки от A_2 . Продължавайки по същия начин ще получим групи $A_1, A_2, \dots, A_{14}$ всяка с най-много 14 човека, като всеки човек извън всяка от тези групи познава всички от тях. Тъй като $14^2 < 200$, то можем да изберем група от 15 човека, съставена от по един човек от всяка от групите $A_1, A_2, \dots, A_{14}$ и произволен човек от останалите поне 4 човека. В тази група всеки познава всеки, т.е. намерихме група от 15 човека, всеки двама от които се познават.

Задача 3. Даден е свързан граф с $n \geq 3$ върха. При изтриването на ребрата от произволен цикъл графът престава да бъде свързан. Да се определи максималната възможна стойност на n .

Решение. Да припомним, че свързан граф без цикли се нарича дърво. Ако граф с n върха е дърво, то броят на ребрата му е $n - 1$. Ще използваме, че за произволен граф G с върхове $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и ребра $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ съществува дърво G_1 , което има същите върхове, а множеството от ребрата му е подмножество на E (това дърво се нарича покриващо дърво). Освен това G_1 може да се избере така, че да съдържа произволен връх V и всички ребра, излизащи от него.

След изтриване на всички ребра на дървото G_1 ще получим граф без цикли, в който връхът V е изолиран (в противен случай след изтриване на този цикъл от първоначалния граф G ще получим свързан граф). Тъй като в граф с $n - 1$ върха без цикли има най-много $n - 2$ ребра, то получаваме,

че в G има най-много $2n - 3$ ребра.

Да разгледаме граф с n върха $A_1, A_2, \dots, A_n$, за който $A_i A_j$ е ребро тогава и само тогава, когато $\{1, 2\} \cap \{i, j\} \neq \emptyset$ (това е граф съставен от $n - 2$ триъгълника с общо ребро).

Задача 4. В свързан граф със 100 върха има 199 ребра. Да се докаже, че съществува такъв цикъл, след изтриване на ребрата на който графът остава свързан.

Решение. Първо ще докажем следното свойство: Ако граф с $n \geq 3$ върха има поне n ребра, то в дадения граф има цикъл. Базата на индукцията за 3 върха и 3 ребра е очевидна.

Да допуснем, че във всеки граф с $n - 1$ върха и поне толкова ребра има цикъл. Да разгледаме произволен граф с n върха и поне n ребра. Ако има връх, от който излизат нула или едно ребро, то след премахването на този връх и излизащите от него ребра, ще получим граф с $n - 1$ върха и поне толкова ребра. Според индукционната хипотеза в този граф има цикъл. Да допуснем, че от всеки връх излизат поне две ребра. Започвайки от произволен връх се движим по ребрата на графа, като от всеки следващ връх можем да се придвижим към следващ връх по едното от двете ребра. Тъй като върховете са краен брой, то след известно време ще се озовем във връх, в който вече сме били, т.е. ще получим цикъл.

Понеже имаме 199 ребра и 100 върха, то съгласно доказаното по-горе имаме цикъл. Избираме едно от ребрата на този цикъл и го изтриваме. Ясно е, че графът остава свързан. От останалите 198 ребра отново имаме цикъл. Избираме ребро от този цикъл и го изтриваме, като графът остава свързан. Продължаваме по този начин до избиране и изтриване на 100 ребра. Получаваме свързан граф с 99 ребра и 100 върха. От избраните и изтрити 100 ребра има цикъл, след изтриването на който графът е останал свързан.

Задача 5. Да се докаже, че в произволен свързан граф с четен брой върхове могат да се изтрият няколко ребра (възможно нула) така, че в получения граф степените на всички върхове да са нечетни числа.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по n , където броят на върховете на разглеждания граф е $2n$. За свързан граф с 2 върха твърдението е очевидно (броят на изтритите ребра е 0).

Да допуснем, че твърдението е вярно за произволен свързан граф с $2n$

върха. Да разгледаме граф G с $2n + 2$ върха и нека G_1 е покриващо дърво за G . За произволен връх X нека A е най-отдалеченият от X връх. Ясно е, че степента на A е 1. Нека A е свързан с връх B .

Случай 1. Нека B е свързан с връх $C \neq A$ от степен 1. След изтриване на върховете A и C получаваме граф с $2n$ върха и според индукционното предположение можем да изтрием няколко ребра така, че всички върхове да са от нечетна степен. Като добавим върховете A и C , заедно с ребрата, свързващи ги с B , отново всички върхове ще имат нечетна степен.

Случай 2. Ако всички свързани с B върхове (освен A) са от степен поне 2. Тогава степента на B е 2, защото в противен случай ще има връх Y , който е по-отдалечен от X в сравнение с A . Изтриваме върховете A и B и ребрата, излизащи от тях. Остава свързан граф с $2n$ върха и според индукционното предположение можем да изтрием няколко ребра така, че всички върхове да са от нечетна степен.

Към така получения граф добавяме върховете A и B и реброто между тях и получаваме граф с исканото свойство.

Задача 6. На Марс има 2007 държави и повече от 2007 града. От всеки град излизат точно 2006 пътя, които го съединяват с градове от всяка от останалите държави. Известно е, че от всеки град може да се стигне до всеки друг. Да се докаже, че съществува затворен маршрут, минаващ по поне 4012 града.

Решение. Да разгледаме граф с върхове, съответстващи на градовете и ребра съответстващи на пътищата, като оцветим градовете в 2007 цвята така, че градовете от една държава да са в един цвят. Трябва да докажем, че съществува цикъл с дължина поне 4012. Да допуснем, че такъв цикъл не съществува.

Ще обхождаме върховете по следния начин: започваме от град a_1 от цвят 1 и преминаваме в единствения връх от цвят 2, от този връх преминаваме в единствения свързан с него връх с цвят 3, след това преминаваме във върхове с цветове 4, 5, ..., 2006, 1, 2 и т.н. След известно време ще получим цикъл. Да забележим, че ще получим цикъл само като се върнем във връх a_1 , защото в противен случай ще имаме връх свързан с два върха с един и същи цвят. Това означава, че всички цикли са с дължина, кратна на 2006. Ако не съществува цикъл с дължина поне 4012, то ще получим цикъл $Z = a_1, a_2, \dots, a_{2006}$ с дължина 2006.

По същия начин можем да обхождаме цветовете в последователност

$$1, 2, 3, \dots, 2006, 2007, 1, 2, \dots,$$

като започнем от връх a_1 . Както по-горе следва, че ще получим цикъл. При това към цикъла Z ще се прибави връх a_{2007} от цвят 2007 между a_{2006} и a_1 .

Започвайки от a_2 и обхождайки цветовете в последователност

$$2, 3, \dots, 2006, 1, 2007, 2, \dots$$

ще получим цикъл, който се получава от Z с добавяне на връх от цвят 2007 между a_1 и a_2 . Тъй като a_1 е свързан с единствен връх с цвят 2007 то този връх е точно вече получения в предния цикъл връх a_{2007} .

Продължавайки по този начин ще получим, че a_{2007} е свързан с всички върхове от Z . Да разгледаме цикъл Z_i , $1 \leq i \leq 2006$, получен от Z чрез замяна на a_i с a_{2007} . Както по-горе можем да докажем, че a_i е свързан с всички върхове от Z_i . Следователно всички върхове $a_1, a_2, \dots, a_{2007}$ са свързани помежду си. Тъй като по условие графът е свързан и всеки връх е от степен 2006, то в него няма други върхове. Това е противоречие с условието, че в графа има повече от 2007 върха.

Задача 7. Даден е граф с поне n върха, всеки от които е оцветен в един от n , $n \geq 2$, цвята. Всеки връх е свързан с ребро с точно $n - 1$ върха, оцветени във всички $n - 1$ цвята, различни от цвета на дадения връх. Да се намери най-малката възможна дължина на най-дългия цикъл в този граф.

Решение. От решението на предишната задача следва, че в дадения граф съществува цикъл с дължина поне $2n - 2$.

Първо ще построим граф с $2n$ върха, който удовлетворява условието на задачата. Да изберем два пълни графа G и H всеки с по n върха. Да оцветим върховете на всеки от тях с цветовете $1, 2, \dots, n$. В двата графа изтриваме реброто между върховете с цветовете 1 и 2, след което свързваме върха с цвят 1 от G с върха с цвят 2 от H и върха с цвят 1 от H с върха с цвят 2 от G . Директно се проверява, че така построенят граф изпълнява условието на задачата.

Ще докажем, че търсената най-малка стойност е $2n$. Да допуснем, че в G , удовлетворяващ условието на задачата, няма цикъл с дължина $2n$. Без ограничение можем да считаме, че в G има цикъл $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ (да означим този цикъл с Z) с дължина $2n$, като върховете a_i и b_i са оцветени в цвят i . Да поставим в нашия цикъл цвят n между цветовете $n - 1$ и

1, като след връх a_{n-1} отидем във връх x от цвят n . За да не получим цикъл с дължина $2n$ от x трябва да се върнем в a_1 . Обобщавайки това наблюдение получаваме, че всеки два върха от цикъла Z , които са на разстояние $n - 2$, са свързани с един и същи връх с цвят n . При нечетно n ще получим, че всички върхове на цикъла Z са свързани с един и същи връх с цвят n , което е невъзможно.

Когато n е четно, ще имаме два върха x и y от цвят n , всеки от които е свързан с $n - 1$ върха от цикъла Z . В този случай лесно се намира цикъл, съдържащ всички върхове на Z и върховете x и y .

Няколко геометрични неравенства

НИКОЛАЙ БЕЛУХОВ

nbeluhov@abv.bg

В тази статия ще представим елементарни доказателства на различни геометрични неравенства. Ще разгледаме както по-общи методи, така и специфични за съответната задача “трикове”. Повечето от решенията са намерени от автора. За останалите, където е било възможно, са посочени източници.

Задача (Зимни състезания, 2007, П. Пеев). Ескимос трябва да достигне от точка A до точка B , пресичайки по пътя си праволинейна река. Известно е, че реката разполовява разстоянието от точка A до точка B (тоест, че реката минава през средата на отсечката AB), че през снега ескимосът се движи със скорост v_1 (малка, тъй като трябва да влачи кануто), и по реката плава със скорост $v_2 > v_1$. Да се построи най-бързият възможен път на ескимоса.

Любопитно, но тази задача всъщност беше предложена на състезанието по информатика! От учениците се очакваше да намерят само приближено решение, използвайки информатичния метод на “шаването”. Авторът на задачата Павлин Пеев я предложи след това на автора на настоящата статия с надежда да се намери и геометрично решение. Това решение представяме тук.

Решение. Преди всичко, ясно е, че пътят на ескимоса трябва да има следния вид: той тръгва от точка A , движи се по права линия до точка C от реката, плува по реката до точка D , и оттам се движи по права линия до точка B . Остава да определим положенията на точките C и D .

Нека M бъде средата на отсечката AB . Ще покажем, че тя трябва да бъде среда и на отсечката CD . Наистина, да допуснем обратното и да построим точките C' и D' върху реката такива, че $\vec{C'D'} = \vec{CD}$ и M е среда на $C'D'$. Очевидно при това отсечките AC' и $D'B$ са равни и успоредни. Накрая, да построим още и точката N така, че $\vec{NB} = \vec{CD}$.

Водните участъци в пътищата $ACDB$ и $AC'D'B$ са равни. Сухоzemният участък в първия път е $AC + DB = AC + CN$, а във втория – $AC' + D'B =$

$AC' + C'N = AN$. Но тогава втория път е по-къс по неравенството на триъгълника!

И така, пътят се разпада на два еднакви участъка $AC'M$ и $MD'B$, и остава да оптимизираме единия от тях.

Да построим през точката M права l със наклон, избран по следния начин: Ако S е произволна точка от реката и T е нейната проекция върху l , то $SM : ST = v_2 : v_1$ (това е възможно, понеже $v_2 > v_1$).

Нека K бъде проекцията на A върху l , и нека отсечката AK пресича реката в точка C'' . Ще покажем, че за всяка друга точка C' от тази половина на реката, пътят $AC'M$ отнема повече време от пътя $AC''M$.

Нека L бъде проекцията на C' върху l . Времето за първия път е $\frac{1}{v_1}AC' + \frac{1}{v_2}C'M = \frac{1}{v_1}AC' + \frac{1}{v_1}C'L = \frac{1}{v_1}(AC' + C'L)$, а за втория – $\frac{1}{v_1}AC'' + \frac{1}{v_2}C''M = \frac{1}{v_1}AC'' + \frac{1}{v_1}C''K = \frac{1}{v_1}AK$. Но най-късото разстояние от точка до права е перпендикулярът, откъдето $AC' + C'L \geq AK$ и първият път наистина е по-бавен.

По този начин, ако точката D'' е симетрична на C'' относно M , ние сме доказали, че пътят $AC''D''B$ е по-бърз от всеки друг път – с което задачата е решена.

Упражнение 1. Ескимос трябва да достигне от точка A до точка B , пресичайки по пътя си n на брой дадени успоредни праволинейни реки. Известно е, че през снега ескимосът се движи със скорост v_0 , и че по n -тата река плава със скорост v_n . Да се построи най-бързият възможен път на ескимоса.

Задача¹. Изпъкналият четириъгълник $ABCD$ е описан около окръжност с радиус 1. Да се докаже, че $AB \cdot CD \geq 4$.

Решение. Нека I бъде центърът на вписаната окръжност, точките M и N бъдат средите на AB и CD , и точките P и Q бъдат среди на дъгите $\widehat{AIB}$ и $\widehat{CID}$ от описаните окръжности на $\triangle AIB$ и $\triangle CID$.

Понеже I принадлежи на дъгата $\widehat{AIB}$, разстоянието от I до AB не надвишава разстоянието от P до AB , т.е. $PM \geq 1$. Аналогично, $QN \geq 1$. Но директно пресмятане на ъгли показва, че $\triangle AMP \sim \triangle QNC$, откъдето $AB \cdot CD = 4AM \cdot CN = 4PM \cdot QN \geq 4$, както се искаше.

Равенство се достига точно когато $ABCD$ е равнобедрен трапец с основи

¹Обобщение на задача от Петербургска олимпиада, 1985г.

AB и CD .

Задача (сп. Квант, М951, Е. Хорват). Нека $ABCDEF$ бъде изпъкнал шестоъгълник, всички страни на който имат дължина единица. Да се докаже, че радиусът на описаната окръжност на поне един от триъгълниците $\triangle ACE$ и $\triangle BDF$ е не по-малък от единица.

Решение. Тъй като сумата от ъглите на шестоъгълника е равна на 720° , поне една от двете суми $\angle A + \angle C + \angle E$ и $\angle B + \angle D + \angle F$ трябва да бъде не по-малка от 360° . Нека това бъде сумата $\angle A + \angle C + \angle E$.

Нека O бъде центърът на описаната окръжност на $\triangle BDF$. Да предположим, че $OB < 1$. Тогава можем да построим в пространството точката S така, че отсечката SO да е перпендикулярна на равнината (BDF) и да имаме $SB = SD = SF = 1$.

Но в такъв случай нашият шестоъгълник се оказва разгъвка на тази пирамида (понеже нейните ребра са равни на съответните му страни) и $\angle A + \angle C + \angle E = \angle FSB + \angle BSD + \angle DSF < 360^\circ$ – противоречие. Следователно, $R_{BDF} \geq 1$.

Упражнение 2. Докажете, че радиусът на описаната окръжност на поне един от триъгълниците $\triangle ACE$ и $\triangle BDF$ е не по-голям от единица.

Задача (Предложение за МОМ, 1990, Франция). Нека в разностранния триъгълник $\triangle ABC$ точките M , I и H да бъдат съответно медицентър, център на вписаната окръжност и ортоцентър. Докажете, че $\angle M IH$ е тъп.

Решение. Да забележим първо, че ако в $\triangle ABC$ имаме $AB > AC$, то височината $h_a \equiv AH_a$, ъглополовящата $l_a \equiv AL_a$ и медианата $m_a \equiv AM_a$ са подредени точно в този ред, когато описваме $\angle CAB$ в посока от лъча $AC \rightarrow$ към лъча $AB \rightarrow$ (при това височината може и да лежи извън ъгъла, но все пак от страната на рамото AC). Действително, $\angle CAL_a = \frac{1}{2} \angle CAB = \frac{1}{2}(180 - \angle ABC - \angle BCA) > \frac{1}{2}(180 - \angle BCA - \angle BCA) = 90 - \angle BCA = \angle CAH_a$ (понеже $AB > AC$ имаме $\angle BCA > \angle ABC$) и освен това $BL_a : L_aC = c : b > 1 : 1 = BM_a : M_aC \Rightarrow M_a \in BL_a \Rightarrow m_a \in \angle (l_a, AB)$.

Да предположим, че $\triangle ABC$ е остроъгълен. От горните бележки следва, че точката I лежи във вътрешността на четириъгълника, заграден от правите m_a, h_a, m_b и h_b . Нека $S = h_a \cap m_b$ и $T = m_a \cap h_b$. Ъглите $\angle MSH$ и $\angle MTH$ са тъпи като външни ъгли в правоъгълните триъгълници $\triangle ASM_b$

и $\triangle ATH_b$. Следователно, целият четириъгълник – а значи и точката I – се съдържат в окръжността с диаметър MH .

Да предположим след това, че $\triangle ABC$ е тъпоъгълен или правоъгълен и $\nless A \geq 90^\circ$. Предишното разсъждение се запазва почти изцяло и тук, с тази разлика, че четириъгълникът $MSHT$ се изражда в $\triangle AMS$.

Упражнение 3. Съществува ли такова число $\lambda > 90^\circ$, че за всеки неравностраниен триъгълник да е вярно неравенството $\nless MIN \geq \lambda$? А за всеки остроъгълен или всеки тъпоъгълен? Какви са съответните най-добри оценки за $\nless OIH$, където O е центърът на описаната окръжност? В последния случай, на автора е известна само оценката 120° за остроъгълен триъгълник.

Задача (Туймаада, 2005). Нека A_1 , B_1 и C_1 бъдат точките, в които съответните външновписани за $\triangle ABC$ окръжности допират отсечките BC , CA и AB . Докажете, че от отсечките AA_1 , BB_1 и CC_1 може да се построи триъгълник.

Тази задача е значително по-трудна, отколкото изглежда.

Решение. Ще покажем, че трите неравенства на триъгълника се изпълняват за тези три отсечки, откъдето исканото ще следва. Нека $a \leq b \leq c$.

Имаме $AC_1 + C_1C \geq AC = AB_1 + B_1C$ и $AC_1 = \frac{1}{2}(a - b + c) \leq \frac{1}{2}(b + c - a) = B_1C$. От тези две неравенства получаваме $CC_1 \geq AB_1$. Но тогава $BB_1 + CC_1 \geq BB_1 + B_1A \geq AB \geq AA_1$ (понеже най-дългата страна в триъгълника е по-дълга от всяка отсечка, съдържаща се в него).

Може да се покаже, че освен това $AA_1 \geq BB_1 \geq CC_1$, тоест, че от това неравенство следват и другите две. Вместо това, обаче, ние ще ги докажем директно. Имаме $AA_1 + CC_1 \geq AA_1 + AB_1 = AA_1 + A_1B \geq AB \geq BB_1$ и (като сме построили $P = AA_1 \cap BB_1$) $AA_1 + BB_1 \geq AP + PB \geq AB \geq CC_1$.

С помощта на теоремата на Стюарт и други алгебрични инструменти може да се покаже дори и че така построенят триъгълник е остроъгълен. Необходимото и достатъчно условие за това е неравенствата на триъгълника да се изпълняват и за квадратите на страните.

Едно от най-известните неравенства от по-новата история на елементарната геометрия (открито в 1935 г.) е следното:

Теорема (Ердьош, Мордел). Нека $\triangle ABC$ е произволен и P е вътрешна за него точка. Нека още d_a, d_b и d_c са разстоянията от P съответно

до страните BC, CA и AB . Тогава

$$PA + PB + PC \geq 2(d_a + d_b + d_c).$$

Впоследствие са намерени много вариации на същата тема. Една от тях беше предложена на българските контролни за МОМ в 2008г. Тук привеждаме решението, намерено от автора по време на състезанието.

Задача. Нека $\triangle ABC$ е произволен и P е вътрешна за него точка. Да се докаже, че

$$\max\{PA, PB, PC\} \geq \sqrt{d_a^2 + d_b^2 + d_c^2}.$$

Кога се достига равенство?

Решение. Нека първо $\triangle ABC$ бъде остроъгълен.

Да разделим $\triangle ABC$ на три изпъкнали четириъгълника – OM_aCM_b , OM_bAM_c и OM_cBM_a . Точката P трябва да лежи в един от тях – да речем, в OM_aCM_b .

Нека P_a, P_b и P_c бъдат проекциите на P върху правите BC, CA и AB , съответно. Понеже $\angle P_aPP_b = 180^\circ - \angle C$ е тъп, имаме $d_a^2 + d_b^2 < P_aP_b^2$.

Нека точката P_a е по-близка до правата M_aM_b от P_b . Да построим $K \in M_bC$ като $KP_a \parallel AB$. Понеже $\triangle CP_aP_b$ е остроъгълен, имаме $P_aP_b \leq P_aK \leq M_aM_b = AM_c$.

Накрая, нека без загуба на общност точката P_c лежи в отсечката M_cB . Тогава, $PA^2 = d_c^2 + P_cA^2 \geq d_c^2 + AM_c^2 > d_c^2 + d_b^2 + d_a^2$ и исканото следва.

Нека след това $\triangle ABC$ бъде неостроъгълен, като $\angle C > 90^\circ$. Нека X и Y бъдат проекциите на P_c върху CA и CB , съответно. Без загуба на общност, можем да приемем, че P_c лежи в отсечката AM_c . Тогава Y ще лежи в лъча $M_aC^{\rightarrow}$. Последователно получаваме $d_b \leq P_cX \leq (\text{разстоянието от } M_c \text{ до } AC) \leq M_cM_b = BM_a \leq BY$. И тогава $PB^2 = d_c^2 + P_cB^2 = d_c^2 + P_cY^2 + YB^2 \geq d_c^2 + d_a^2 + d_b^2$. Исканото следва.

От горните разсъждения се вижда, че равенство се достига точно когато $\triangle ABC$ е правоъгълен и точка P е средата на хипотенузата.

Този подход – да се ограничи положението на точката в една от няколко области, покриващи даденото геометрично място – е особено полезен в много задачи. Ще посочим още един пример: през 1875 г. А. Брокар привлича вниманието на математиците към така наречените точки на Брокар. За даден $\triangle ABC$, първата точка на Брокар S_1 се дефинира чрез свойството

$\sphericalangle S_1AB = \sphericalangle S_1BC = \sphericalangle S_1CA = \omega$, а втората – чрез свойството $\sphericalangle S_2BA = \sphericalangle S_2CB = \sphericalangle S_2AC = \omega'$. В елементарната геометрия се доказва, че $\omega = \omega'$, $\cot \omega = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma$ и, като следствие, $\omega \leq 30^\circ$.

Тази теория представлява сърцето на следната задача:

Упражнение 4 (МОМ, 1991, Франция). Нека точката P лежи във вътрешността на $\triangle ABC$. Да се докаже, че поне един от ъглите $\sphericalangle PAB$, $\sphericalangle PBC$ и $\sphericalangle PCA$ не надвишава 30° .

Следващата теорема е едно от най-полезните в олимпиадни задачи геометрични неравенства.

Теорема (Птолемей). Нека A, B, C и D са четири точки в равнината. Тогава

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$$

Равенство се достига точно когато точките A, B, C и D лежат на една окръжност в този ред.

Следващото красиво приложение на неравенството на Птолемей в една трудна задача принадлежи на Александър Иванов.

Задача (Български контролни за МОМ, 2008, Н. Николов). Дадени са ромбът $ABCD$ със страна единица и точките X и Y . Да се докаже, че

$$AX \cdot AY + BX \cdot BY + CX \cdot CY + DX \cdot DY \geq 2$$

Кога се достига равенство?

Решение. Нека точките E и F са такива, че $\vec{AD} = \vec{XE} = \vec{FX}$. Нека освен това точката Y' е симетрична на Y относно центъра на $ABCD$.

По неравенството на Птолемей за $DY'CE$ получаваме $AX \cdot AY + BX \cdot BY = DE \cdot CY' + CE \cdot DY' \geq CD \cdot EY'$.

По неравенството на Птолемей за $AY'BF$ получаваме $CX \cdot CY + DX \cdot DY = BF \cdot AY' + AF \cdot BY' \geq AB \cdot Y'F$.

Следователно, по неравенството на триъгълника $AX \cdot AY + BX \cdot BY + CX \cdot CY + DX \cdot DY \geq EY' + Y'F \geq EF = 2AD = 2$.

От тези разсъждения се вижда, че равенство се достига точно когато точките X и Y са симетрични относно центъра на $ABCD$ и лежат в някой от неговите диагонали.

Задача². Да се докаже, че във всеки триъгълник $\triangle ABC$ е изпълнено неравенството

$$16S^2 \geq \frac{9(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Решение. Ако $\triangle ABC$ е неостроъгълен, дясната страна на неравенството е произведение от две положителни и едно неположително число, и исканото става очевидно.

Нека $\triangle ABC$ бъде остроъгълен. Тогава можем да построим равнобедрен тетраедър $ABCD$, в който $AB = CD = c$, $BC = AD = a$, и $CA = BD = b$ (между другото, като разгъвка на този тетраедър може да се разглежда триъгълникът със страни $2a$, $2b$ и $2c$, в който са прекарани средните линии). Този тетраедър може освен това да се допълни до правоъгълен паралелепипед $P \equiv AB_1CD_1C_1DA_1B$. Действително, точките A_1, B_1, C_1 и D_1 тук са просто диаметрално противоположните на A, B, C и D в описаната сфера на тетраедъра.

Да означим дължините на ребрата DA_1, DB_1 и DC_1 на паралелепипеда съответно с x, y и z . Имаме

$$| x^2 + y^2 = c^2y^2 + z^2 = a^2z^2 + x^2 = b^2 \quad ,$$

откъдето

$$| x^2 = \frac{1}{2}(-a^2 + b^2 + c^2)y^2 = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + c^2)z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \quad .$$

Нека правата DD_1 пресича равнината (ABC) в M . Лесно се вижда, че равнините (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ разделят отсечката DD_1 на три равни части, откъдето $DM = \frac{2}{3}DD_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (всъщност точката M е медицентър на триъгълника $\triangle ABC$).

От друга страна, нека отсечката DH бъде височина в тетраедъра $ABCD$. Имаме $DH \cdot S_{ABC} = 3V_{ABCD} = V_P = xyz$. Като използваме сега и факта, че $DM \geq DH$ (понеже перпендикулярът е най-късото разстояние от дадена точка до дадена равнина) и повдигнем на квадрат, исканото неравенство следва.

²Идеята на следващото решение принадлежи на Александър Иванов. Оригиналното условие на задачата е изгубено в неговите архиви; на автора е известно само, че тя води началото си от страниците на сп. Математика. Тук привеждаме реставрацията на условието и решението, извършена по описанията на А. Иванов и С. Дойчев.

Упражнение 5. Докажете, че във всеки остроъгълен $\triangle ABC$ е изпълнено неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$$

където R е радиусът на описаната окръжност. Може ли числото 8 да се замени с по-голямо?

Упражнение 6 (И. Шаригин). В пирамидата $PABC$ е изпълнено $\sphericalangle APB + \sphericalangle BPC + \sphericalangle CPA > 180^\circ$. Докажете, че околното ребро PA не надвишава полупериметъра на основата $\triangle ABC$.

Видяхме, че излизането в пространството често може да бъде от полза при решаването на задачи в равнината. По същия начин, преминаването към неравенства често може да помогне в различни задачи за доказателство на равенства. Това се случва особено често в задачи от типа “Ако A е вярно, то очевидно и B е вярно. Докажете, че ако B е вярно, то и A е вярно!”. Разбира се, в условието на задачата първата част обикновено се пропуска.

Задача (окръжност на Аполоний). Нека в $\triangle ABC$ отсечките AL_a и AL'_a бъдат вътрешна и външна ъглополовяща. Нека точка X принадлежи на описаната окръжност на $\triangle L_aAL'_a$. Докажете, че $BX : XC = BA : AC$.

Решение. Да предположим например, че $BX : XC > c : b > 1$. Нека XX_1 и XX_2 бъдат съответно вътрешна и външна ъглополовяща в $\triangle XBC$. По теоремата за ъглополовящата и по направеното допускане, $BX'_1 : X'_1C > BL_a : L_aC \Rightarrow X_1$ лежи в отсечката L_aB . Аналогично, X_2 лежи в отсечката BL'_a . Следователно, правият ъгъл $\sphericalangle X_1XX_2$ се съдържа във вътрешността на правия ъгъл $\sphericalangle BXC$, което е противоречие.

Останалите случаи се разглеждат аналогично, като всяка възможност освен $BX : XC = c : b$ води до противоречие.

Следващото упражнение също е по-трудно, отколкото изглежда – неговото първо доказателство е получено в 1840г.

Упражнение 7 (Щайнер, Лемус). Докажете, че ако в $\triangle ABC$ е изпълнено $l_a = l_b$, то $CA = CB$.

Задача³. Нека ω бъде вписаната окръжност на $\triangle ABC$. Нека M и N бъдат две точки от отсечката AB , такива, че $AM = BN$. Нека правата

³Тази задача е обобщение на една от задачите, предложени от Иран за МОМ 2005г.

CM пресича ω в точката M' , по-близка до AB , и правата CN пресича ω в точката N' , по-близка до C . Нека точките P' и Q' бъдат симетрични на M' и N' относно диаметъра на ω , перпендикулярен на AB . Накрая, нека правите CP' и CQ' пресичат AB съответно в P и Q . Докажете, че $AP = BQ$.

Решение. Нека хомотетията с център C , изобразяваща отсечката $M'P'$ в MP (очевидно тези две отсечки са успоредни) изобразява и ω в ω_1 . Нека, аналогично, хомотетията с център C , изобразяваща отсечката $N'Q'$ в NQ (очевидно тези две отсечки са успоредни) изобразява и ω в ω_2 . Нека ω_1 допира CA и CB в точките U_1 и V_1 (лежащи в отсечките CA и CB), и също така ω_2 допира CA и CB в точките U_2 и V_2 (лежащи в продълженията на страните).

Да предположим, че $AP > BQ$. Тогава също така и $AQ > BP$.

От степени на точки относно окръжности получаваме $AU_1^2 = AM \cdot AP > BN \cdot BQ = BV_2^2$ и $AU_2^2 = AQ \cdot AN > BP \cdot BM = BV_1^2$. Но тогава $U_1U_2 = U_1A + AU_2 > V_2B + BV_1 = V_2V_1$. А това е противоречие, защото отсечките U_1U_2 и V_1V_2 очевидно са симетрични една на друга и равни.

По същия начин се отхвърля и възможността $AP < BQ$.

Упражнение 8 (Всесъюзна олимпиада, 1963). Всеки от диагоналите AD , BE и CF на изпъкналия шестоъгълник $ABCDEF$ разполовява лицето му. Докажете, че тези диагонали се пресичат в една точка.

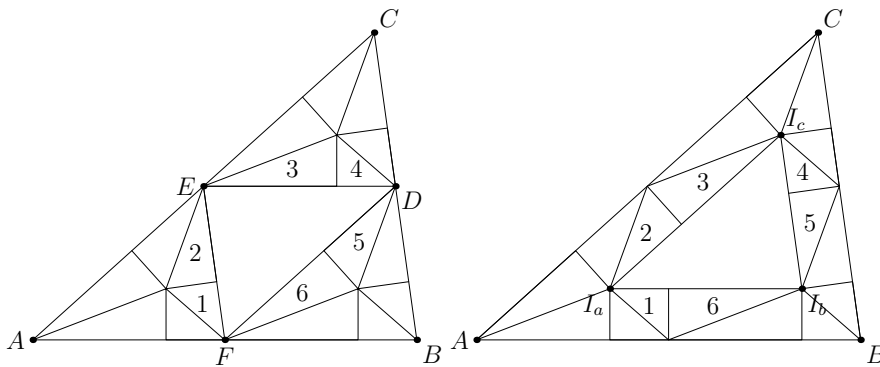
Упражнение 9 (МОМ, 2003, Полша). Във един изпъкнал шестоъгълник всяка двойка срещулежащи страни притежава следното свойство: разстоянието между средите им е равно на $\frac{\sqrt{3}}{2}$ пъти сумата от дължините им. Да се докаже, че всички ъгли на шестоъгълника са равни.

Задача (фолклор; Румънски контролни за МОМ, 2005). Точките D , E и F лежат съответно в страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$. Известно е, че радиусите на вписаните окръжности на $\triangle AEF$, $\triangle BFD$ и $\triangle CDE$ са всичките равни на половината от радиуса на вписаната окръжност на $\triangle ABC$. Да се докаже, че точките D , E и F са средите на страните на $\triangle ABC$.

Решение. Да допуснем обратното и нека за определеност точката D лежи в отсечката BM_a . Понеже отсечката DE допира вписаната окръжност на $\triangle CM_aM_b$, точката E ще лежи в отсечката CM_b . Аналогично, точката F ще лежи в отсечката AM_c .

Тогава, правата EF ще пресича лъча $BC^{\rightarrow}$ в точка след C . Следователно, разстоянието от D до EF ще бъде по-голямо от разстоянието от M_a до EF . По този начин получаваме последователно $S_{DEF} > S_{M_aEF} > S_{M_aM_bF} = S_{M_aM_bM_c}$.

Нека I_a, I_b и I_c бъдат центровете на вписаните окръжности на $\triangle AEF$, $\triangle BFD$ и $\triangle CDE$. На рисунката се вижда, че можем да разрежем $\triangle ABC$ по два различни начина: на $\triangle DEF$ и още 18 по-малки триъгълника, или на $\triangle I_aI_bI_c$ и същите 18 по-малки триъгълника (лесно се вижда, че малките триъгълници са едни и същи в двата случая).



Оттук следва, че лицата на $\triangle DEF$ и $\triangle I_aI_bI_c$ са равни. Но $\triangle I_aI_bI_c \simeq \triangle M_aM_bM_c$ – а това е противоречие с полученото по-горе неравенство $S_{DEF} > S_{M_aM_bM_c}$. С това задачата е решена.

Следващите две задачи бяха съобщени на автора от Светлозар Дойчев. Елементарни решения за тях не са известни, въпреки привидно невинните им формулировки. Намирането на подобни решения предлагаме на читателите!

Упражнение 10. Точките A_1, B_1 и C_1 лежат съответно в отсечките AB, BC и CA по такъв начин, че $AA_1 = BB_1 = CC_1$ и $\triangle A_1B_1C_1$ е равноностранен. Да се докаже, че и $\triangle ABC$ е равноностранен⁴.

Упражнение 11. От всеки връх на триъгълника $\triangle ABC$ е спусната чевиана, равна на средното геометрично на страните, излизащи от този

⁴В книгата “Математически конкурси” на Л. Давидов и др. е представено едно геометрично решение на аналогичната задача за четириъгълник.

върх. Да се докаже, че така получените три чевиани *не се* пресичат в една точка.

Завършваме статията с три красиви и трудни геометрични неравенства. Всички те могат да бъдат решени с елементарни средства.

Упражнение 12 (Предложение за MOM, 2001, България). Точката O е вътрешна за остроъгълния $\triangle ABC$, а точките A_1, B_1 и C_1 са нейните проекции върху страните му BC, CA и AB . Да се докаже, че периметърът на $\triangle A_1B_1C_1$ е не по-малък от периметъра на всеки от триъгълниците $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1BC_1$ и $\triangle A_1B_1C$ тогава и само тогава, когато O е център на описаната окръжност на $\triangle ABC$.

Упражнение 13 (сп. Квант, 1973). Даден изпъкнал многоъгълник е вписан в окръжност с диаметър d . Многоъгълникът е разрязан на триъгълници чрез няколко от своите диагонали. Да се докаже, че сумата от радиусите на вписаните окръжности на тези триъгълници е по-малка от d .

Упражнение 14 (Предложение за MOM, 2006, Русия). Точка P лежи във вътрешността на изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Известно е, че описаните окръжности на $\triangle APD$ и $\triangle BPC$ се допират, че $\sphericalangle PAB + \sphericalangle PDC \leq 90^\circ$ и че $\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCD \leq 90^\circ$. Да се докаже, че

$$AB + CD \geq BC + DA.$$

Указания към упражненията:

1. Ескимосът просто ще пресече всички реки, освен най-бързата. При движението си по нея, той ще премине през пресечната ѝ точка с AB . Участъците от пътя му преди и след тази точка се строят така, както и в задачата.

4. Точката P трябва да лежи в един от триъгълниците $\triangle SAB$, $\triangle SBC$ и $\triangle SCA$.

5. Нека O бъде центърът на описаната сфера на тетраедъра $ABCD$. Това неравенство се получава, като сравним отсечката OA с нейната проекция в равнината (ABC) .

6. Разгледайте разгъвката на пирамидата. Използвайте факта, че ако изпъкналият многоъгълник F съдържа изпъкналия многоъгълник G , то $P_F \geq P_G$.

7. Допуснете, че $\sphericalangle A > \sphericalangle B$ и получите, че $l_a < l_b$.

8. Допуснете противното и използвайте многократно формулата $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

13. Нека в $\triangle ABC$ ориентираните разстояния от центъра на описаната окръжност O до страните бъдат d_a , d_b и d_c (тоест, ако ъгъл $\sphericalangle A$ е туп, разстоянието d_a се взема със знак минус). Докажете, че $d_a + d_b + d_c = R + r$ и използвайте тази лема многократно.

Неравенства от БОМ и МлБОМ

НИКОЛАЙ НИКОЛОВ

nik@math.bas.bg

Настоящата статия се основава на лекции за подготовка на ученици за Младежката балканска олимпиада по математика. Включени са основно задачи, които са предлагани на това състезание, както и на Балканската олимпиада по математика, след 2000 г.

За решаването на тези задачи са нужни само неравенството на Коши-Буняковски-Шварц (НКБШ), както и неравенствата между основните средни (аритметично, геометрично и хармонично) за две или три числа.

Да припомним тези неравенства за три числа $a, b, c > 0$:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}},$$

(накратко, $CA \geq CG \geq CH$), като равенства се достигат само при $a = b = c$.

НКБШ: ако a_1, b_1, c_1 и a_2, b_2, c_2 са реални числа,

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) \geq (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2,$$

като равенство се достига само $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$ и $c_1 = \lambda c_2$ за някое λ .

Често се използва и следната форма на НКБШ при $a_2, b_2, c_2 > 0$:

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{b_1^2}{b_2} + \frac{c_1^2}{c_2} \geq \frac{(a_1 + b_1 + c_1)^2}{a_2 + b_2 + c_2},$$

като равенство се достига само както по-горе.

Задача 1. (МлБОМ 2002) Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$, то

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Решение. Следва след трикратно прилагане на НСАСТ:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc} \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$\geq 3 \cdot \frac{3}{a+b+c} \cdot \frac{3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Задача 2. (МлБОМ 2003) Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$, то

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} + \frac{1+b^2}{1+c+a^2} + \frac{1+c^2}{1+a+b^2} \geq 2.$$

Решение. Понеже $b \leq \frac{1+b^2}{2}$ и $1+b+c^2 > 0$, то

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2} \geq \frac{1+a^2}{1+\frac{1+b^2}{2}+c^2}.$$

Като използваме другите две подобни неравенства и положим $x = 1+a^2$, $y = 1+b^2$, $z = 1+c^2$, достатъчно е докажем, че

$$A = \frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1, \quad x, y, z > 0.$$

От НКБШ следва, че

$$A = \frac{x^2}{x(y+2z)} + \frac{y^2}{y(z+2x)} + \frac{z}{z(x+2y)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)}.$$

Остава да съобразим, че

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \iff (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

Забележка. Друго решение може да се получи, като положим $X = y+2z$, $Y = z+2x$, $Z = x+2y$. Тогава

$$x = \frac{4Y+Z-2X}{9}, \quad y = \frac{4Z+X-2Y}{9}, \quad z = \frac{4X+Y-2Z}{9}$$

и следователно

$$A \geq 1 \iff \frac{X}{Y} + \frac{Y}{Z} + \frac{Z}{X} + 4 \left(\frac{Y}{X} + \frac{Z}{Y} + \frac{X}{Z} \right) \geq 15,$$

а това следва от НСАСТ.

Задача 3. (Контролно за МлБОМ 2005) Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$, то

$$\frac{a - bc}{a + bc} + \frac{b - ca}{b + ca} + \frac{c - ab}{c + ab} \leq \frac{3}{2}.$$

Решение. Като използваме, че

$$1 - \frac{a - bc}{a + bc} = \frac{2bc}{a + bc} = \frac{2bc}{1 - b - c + bc} = \frac{2bc}{(1 - b)(1 - c)},$$

записваме неравенството във вида

$$4(bc(1 - a) + ca(1 - b) + ab(1 - c)) \geq (1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

Разкривайки скобите, получаваме еквивалентното неравенство

$$ab + bc + ca \geq 9abc, \text{ т.е. } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9.$$

Последното следва от НСАСХ.

Задача 4. (МлБОМ 2009) Да се докаже, че ако $a, b, c \in (0, 1)$ и $abc = (1 - a)(1 - b)(1 - c)$, то поне едно от числата $(1 - a)b$, $(1 - b)c$ и $(1 - c)a$ е не по-малко от $\frac{1}{4}$.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно на

$$2abc = 1 - (1 - a)b - (1 - b)c - (1 - c)a.$$

От друга страна, $a^2b^2c^2 = a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c) \leq \frac{1}{4^3}$. Значи

$$(1 - a)b - (1 - b)c - (1 - c)a \geq \frac{3}{4},$$

откъдето следва исканото.

Задача 5. (МлБОМ 2011) Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$ и $abc = 1$, то

$$\prod (a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \geq 8 \prod (a^2 + a + 1).$$

Решение. Неравенството следва от $x^3 + 1 \geq 2\sqrt{x^3}$ и

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + 1)(x^2 + x + 1).$$

Задача 6. (МлБОМ 2012) Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$, то

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + 6 \geq 2\sqrt{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}} \right).$$

Кога се достига равенство?

Решение. Имаме, че

$$\sum \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \sum \frac{b+c}{a} = \sum \frac{1-a}{a}$$

и значи

$$\sum \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 6 - 2\sqrt{2} \sum \sqrt{\frac{1-a}{a}} = \sum \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{2} \right)^2 \geq 0.$$

Равенство се достига при $\sqrt{\frac{1-a}{a}} = \sqrt{\frac{1-b}{b}} = \sqrt{\frac{1-c}{c}}$, т.е. $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Задача 6. (Контролно за БОМ 2003; СМС) Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 3$, то

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

Решение. Имаме, че

$$\begin{aligned} a + b + c - \frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{c^2+1} - \frac{c}{a^2+1} &= ab \frac{b}{b^2+1} + bc \frac{c}{c^2+1} + ca \frac{a}{a^2+1} \\ &\leq \frac{ab + bc + ca}{2} \leq \frac{(a+b+c)^2}{6} \end{aligned}$$

и остава да използваме, че $a + b + c = 3$.

Задача 7. Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$, то

а) $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a};$

б) (БОМ 2005) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$. Кога се достига равенство?

Решение. а) От НКБШ следва, че

$$A := \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} = \frac{\left(\frac{a^2}{b}\right)^2}{a} + \frac{\left(\frac{b^2}{c}\right)^2}{b} + \frac{\left(\frac{c^2}{a}\right)^2}{c} \geq \frac{B^2}{C},$$

където $B = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$ и $C = a + b + c$. По подобен начин получаваме, че $B \geq C$ и значи $A \geq \frac{B^2}{C} \geq B$.

б) Записваме неравенството във вида

$$\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Последното следва от НКБШ и неравенството на триъгълника:

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} \\ & \geq \frac{(|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2}{b+c+a} \geq \frac{(2|a-b|)^2}{a+b+c}. \end{aligned}$$

Равенство в първото неравенство се достига, когато

$$\frac{(a-b)^2}{b^2} = \frac{(b-c)^2}{c^2} = \frac{(c-a)^2}{a^2},$$

т.е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\frac{a}{b} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 - 2\frac{b}{c} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}.$$

Следователно за всеки две от числата $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ и $\frac{c}{a}$ имаме следните две възможности: или те са равни, или тяхната сума е 2. Значи или всички те са равни, т.е. $a = b = c$, или две от тях са равни, а третото ги допълва до 2. В първия случай очевидно неравенството от условието се превръща в равенство и остава да разгледаме втория случай. Понеже равенство в приложеното неравенство на триъгълника се достига, когато $a \leq c \leq b$ или $b \leq c \leq a$, следва, че $\frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ и $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = 2$. Оттук $c = \sqrt{ab}$ и $x_0 = \sqrt{\frac{a}{b}} > 0$ е корен на уравнението $x^2 + \frac{1}{x} = 2$, т.е. $(x-1)(x^2+x-1) = 0$. Ако $x_0 = 1$, то $a = b = c$. Ако $x_0 \neq 1$, то $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $a = x_0^2 b$, $c = x_0 b$.

Задача 8. (БОМ 2006) Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$, то

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

Решение. Трябва да докажем, че

$$A = (1+abc) \left(\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \right) + 3 \geq 6.$$

Понеже

$$\begin{aligned} A &= \frac{1+abc+a+ab}{a(1+b)} + \frac{1+abc+b+bc}{b(1+c)} + \frac{1+abc+c+ca}{c(1+a)} \\ &= \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{1+c} + \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a}, \end{aligned}$$

остава да приложим НСАСТГ (или да забележим, че последният израз е сума на три събираеми от вида $x + \frac{1}{x} \geq 2$).

Задача 9. (БОМ 2010) Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$, то

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0.$$

Решение. Неравенството е еквивалентно на

$$abc + \frac{a^2b(b-c)}{a+b} + abc + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + abc + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 3abc,$$

$$\text{т.е. } ab^2 \cdot \frac{a+c}{a+b} + bc^2 \cdot \frac{b+a}{b+c} + ca^2 \cdot \frac{c+b}{c+a} \geq 3abc,$$

а последното следва от НСАСТГ.

Задача 10. (БОМ 2011) Да се докаже, че ако $a+b+c=0$, то

$$\frac{a(a+2)}{2a^2+1} + \frac{b(b+2)}{2b^2+1} + \frac{c(c+2)}{2c^2+1} \geq 0.$$

Кога се достига равенство?

Решение. Можем да считаме, че $a^2 \leq b^2 \leq c^2$. Тогава

$$\begin{aligned} \left(\frac{a(a+2)}{2a^2+1} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{b(b+2)}{2b^2+1} + \frac{1}{2} \right) &= \frac{(2a+1)^2}{2(2a^2+1)} + \frac{(2b+1)^2}{2(2b^2+1)} \\ &\geq \frac{((2a+1) + (2b+1))^2}{2(2a^2+1) + 2(2b^2+1)} \quad (\text{съгласно НКБШ}) \\ &= \frac{(1-c)^2}{a^2+b^2+1} \geq \frac{(1-c)^2}{2c^2+1} = 1 - \frac{c(c+2)}{2c^2+1}, \end{aligned}$$

което доказва даденото неравенство.

Не е трудно да се съобрази, че равенство се достига при $a = b = c = 0$ и пермутациите на $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

Задача 11. (БОМ 2012) Да се докаже, че ако $a, b, c > 0$, то

$$\sum (a+b)\sqrt{(c+a)(c+b)} \geq 4 \sum ab.$$

Решение. От НКБШ следва, че

$$\begin{aligned} \sum (a+b)\sqrt{(c+a)(c+b)} &\geq \sum (a+b)(c+\sqrt{ab}) \\ &= 2 \sum ab + \sum (a+b)\sqrt{ab} \geq 2 \sum ab + 2 \sum \sqrt{ab}\sqrt{ab} = 4 \sum ab. \end{aligned}$$

Задача 12. (МОМ 2008) а) Да се докаже, че ако $a, b, c \neq 1$ и $abc = 1$, то

$$\frac{a^2}{(a-1)^2} + \frac{b^2}{(b-1)^2} + \frac{c^2}{(c-1)^2} \geq 1.$$

б) Да се докаже, че за безбройно много рационални числа се достига равенство в а).

Решение. а) Като положим $x = \frac{a}{a-1}, y = \frac{b}{b-1}, z = \frac{c}{c-1}$, условието добива вида $xy + yz + zx = x + y + z - 1$. Тогава

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) \geq 1 \Leftrightarrow (x+y+z-1)^2 \geq 0.$$

б) Равенство по-горе се достига при $x + y + z = 1$ и $xy + yx + zx = 0$. Оттук $xy + (x+y)(1-x-y) = 0$. Ако $x = x_1/n$ и $y = y_1/n$, където

$x_1, y_1, n \in \mathbb{Z}$, получаваме, че $n = x_1 + y_1 - \frac{x_1 y_1}{x_1 + y_1}$. Сега е достатъчно да изберем $y_1 = 1 - x_1$.

Задача 13. (вариация на задача 12) Нека $a, b, c, d > 0$. Да се докаже, че:

а) $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$;

б) ако $abc = 1$, то $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{3}{4}$;

в) ако $abcd = 1$, то $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$.

Решение. а) След привеждане под общ знаменател и разкриване на скобите получаваме очевидното неравенство $(ab-1)^2 + ab(a-b)^2 \geq 0$.

б) Като използваме а), достатъчно е да докажем, че

$$\frac{1}{1+\frac{1}{c}} + \frac{1}{(1+c)^2} \geq \frac{3}{4},$$

което лесно се свежда до $(c-1)^2 \geq 0$.

Да отбележим, че даденото неравенство следва от в) при $d = 1$.

в) Следва от а), приложено за две двойки събираеми.

Забележка. От тази задача и неравенството $(1-x)^2 \geq (1-|x|)^2$ следва, че твърдението на Задача 13 остава за две и за четири числа (като равенство се достига, когато те са равни на -1).

Задача 14. Нека $n \geq 3$ е цяло число, а $a_2, a_3, \dots, a_n$ са такива положителни реални числа, че $a_2 a_3 \dots a_n = 1$. Да се докаже, че

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \dots (1+a_n)^n > n^n.$$

Решение. От НСАСТГ следва, че

$$(1+a_k)^k = \left((k-1) \frac{1}{k-1} + a_k \right)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k$$

Като умножим тези равенства при $k = 2, 3, \dots, n$, получаваме, че

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \dots (1+a_n)^n \geq n^n a_2 a_3 \dots a_n = n^n.$$

За да имаме равенство, трябва $1 = a_2 = 2a_3 = \dots = (n-1)a_n$. Тогава $1 = (n-1)! a_2 a_3 \dots a_n = (n-1)!$, което е невъзможно при $n \geq 3$.

Задачи от Romanian Masters of Mathematics 2011-2013

ПЕТЪР БОЙВАЛЕНКОВ

peter@math.bas.bg

Задачите по-долу са предлагани или обсъждани за предлагане (т.е. включени в т.нар. extra list) на състезанието Romanian Master of Mathematics, което се провежда от 2008 г. и вече се утвърди като едно от най-трудните за ученици. В това състезание се участва само по покана. Нашият отбор е канен за всичките досегашни 6 издания, като пишещият тези редове беше ръководител на отбора през последните три години със заместници Пламен Пенчев и Динко Раднев съответно през 2012 и 2013 г.

Задача 1. (EL RMM2012, предложена от Украйна) Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ са естествени числа и $a > 1$ е естествено число, което се дели на $a_1 a_2 \dots a_n$. Да се докаже, че $a^{n+1} + a - 1$ не се дели на $(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \dots (a + a_n - 1)$.

Решение. Да допуснем противното. Ако $a_i = 1$ за някое i , получаваме $a | (a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \dots (a + a_n - 1) | a^{n+1} + a - 1$, което очевидно е невъзможно. Оттук нататък ще считаме, че $a_i \geq 2$.

Нека $a = ba_1 a_2 \dots a_n$ и $a^{n+1} + a - 1 = c(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \dots (a + a_n - 1)$. Очевидно $(b, c) = 1$, $1 \leq b \leq a - 1$, а лесно се вижда, че

$$c \leq \frac{a^{n+1} + a - 1}{(a + 1)^n} < a.$$

Освен това $ba_1 a_2 \dots a_n \equiv ca_1 a_2 \dots a_n \pmod{a - 1}$, което, заедно с горните и $(b, c) = 1$, дава $b = c = 1$.

Сега имаме последователно

$$\begin{aligned} a^{n+1} + a - 1 &= (a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1) \dots (a + a_n - 1) \\ &< (a + a_1)(a + a_2) \dots (a + a_n) \\ &= a \left(\frac{a}{a_1} + 1 \right) \dots \left(\frac{a}{a_n} + 1 \right) \\ &\leq a \left(\frac{a}{2} + 1 \right)^n \leq a^{n+1}, \end{aligned}$$

противоречие.

Задача 2. (RMM2012, Задача 4) Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n , за които $2^{2^n+1} + 1$ се дели, но $2^n + 1$ не се дели на n .

Решение. Ще докажем, че всички числа $a_n = 3^n p_n$, където p_n са различни прости числа, които ще бъдат въведени в следващия абзац, имат исканите свойства.

Тъй като $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$ (lifting the exponent lemma), числото

$$\frac{2^{3^{n+1}} + 1}{2^{3^n} + 1} = 2^{2 \cdot 3^n} - 2^{3^n} + 1$$

е по-голямо от 3 и е сравнимо с 3 по модул 9. Следователно това число има прост делител $p_n > 3$, който не дели $2^{3^n} + 1$ (в противен случай от $2^{3^n} + 1 \equiv 0 \equiv 2^{2 \cdot 3^n} - 2^{3^n} + 1 \pmod{p_n}$ лесно следва $p_n = 3$).

Нека сега $a_n = 3^n p_n$. Очевидно числата a_n са различни и са безбройно много. Имаме $2^{a_n} + 1 = 2^{3^n p_n} + 1 \equiv 2^{3^n} + 1 \not\equiv 0 \pmod{p_n}$ от теоремата на Ферма, което означава, че a_n не дели $2^{a_n} + 1$. Освен това

$$3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1 \mid 2^{3^n p_n} + 1 = 2^{a_n} + 1,$$

откъдето $2^{3^{n+1}} + 1 \mid 2^{2^{a_n}+1} + 1$. Последното означава, че $p_n \mid 2^{2^{a_n}+1} + 1$, което, заедно с $3^n \mid 2^{2^{a_n}+1} + 1$ дава $a_n \mid 2^{2^{a_n}+1} + 1$.

Забележка. Задачата може да се реши и по още няколко начина. Например числата $a_n = \frac{2^{3^n}+1}{9}$ и $a_n = 571 \cdot 3^n$ вършат работа. Има и решение по индукция, като базата се получава при $n = 57$. С последната идея работи нашият участник Богдан Станков, но той не успя да достигне в пресмятанията си до базата (куриозно, но е достигнал до 53 и е знаел, че кратните на 5 не стават, т.е. със следващата сметка е щял да получи необходимия му резултат) и работата му беше оценена с 5 от възможните 7 точки.

Задача 3. (RMM2013, Задача 1, предложена от Русия) За фиксирано естествено число a дефинираме редицата $x_1, x_2, \dots$ с равенствата $x_1 = a$ и $x_{n+1} = 2x_n + 1$. Нека $y_n = 2^{x_n} - 1$. Да се намери максималното възможно k , за което съществува такова a , че всички числа $y_1, \dots, y_k$ са прости.

Решение. Отговор: 2. Лесно се вижда, че ако y_i е просто, то и x_i е просто. В частност, $a = x_1$ също е просто. При $a = 2$ числата $y_1 = 3$ и $y_2 = 31$ са прости (но $y_3 = 2047$ не е просто) и това е пример за $k = 2$.

Да допуснем, че за някое нечетно просто a числата y_1, y_2 и y_3 са прости. Тогава x_1, x_2 и x_3 също са прости, $x_1 \geq 3$ е нечетно, $x_2 > 3$ и $x_2 \equiv 3 \pmod{4}$ и $x_3 \equiv 7 \pmod{8}$. Последното означава, че 2 е квадратичен остатък по модул x_3 и критерият на Ойлер дава $2^{\frac{x_3-1}{2}} \equiv 1 \pmod{x_3}$. От друга страна, $2^{\frac{x_3-1}{2}} - 1 = 2^{x_2} - 1 = y_2$ е просто. Следователно $x_3 = y_2$, т.е. $2x_2 - 1 = 2^{x_2} + 1$. Лесно се вижда, че последното е невъзможно.

Забележка. Съществената част на тази задача представлява теорема, формулирана от Ойлер през 1750 г. (като критерий за проверка за простота на числата от вида $2^p - 1$) и доказана от Лагранж през 1775 г. Този факт беше известен на журито, на то все пак реши да предложи задачата на учениците.

Задача 4. (RMM 2011, Задача 4, предложена от Румъния) За естествено число n означаваме с $\Omega(n)$ броят на простите делители на n , считани с кратностите им. Нека $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ (например $\lambda(12) = \lambda(2^2 \cdot 3^1) = (-1)^{2+1} = -1$). Да се докажат следните две твърдения:

- i) Съществуват безбройно много естествени числа n , за които $\lambda(n) = \lambda(n+1) = 1$;
- ii) Съществуват безбройно много естествени числа n , за които $\lambda(n) = \lambda(n+1) = -1$;

Решение. Нека $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Очевидно съществуват безбройно много естествени числа n , за които $\lambda(2n+1) = \varepsilon$ (просто да вземем $2n+1$ като произведение на подходящ брой нечетни прости числа). Ако $\lambda(2n) = \varepsilon$ или $\lambda(2n+2) = \varepsilon$, съответната двойка измежду $(2n, 2n+1)$ и $(2n+1, 2n+2)$ върши работа. Ако пък $\lambda(2n) = \lambda(2n+2) = -\varepsilon$, то $\lambda(n) = \lambda(n+1) = \varepsilon$. Всъщност доказахме, че за всяко такова n , поне една от двойките $(n, n+1)$, $(2n, 2n+1)$ и $(2n+1, 2n+2)$ върши работа.

Забележка. Тази лесна задача има още много решения и повечето от българските участници бяха намерили правилен подход. Освен горното, журито предложи и официално решение с използване на свойствата на уравнение на Пел.

Задача 5. (RMM2013, Задача 5, предложена от България, автор Алек-

сандър Иванов) За фиксирано естествено число $k \geq 2$ дефинираме редицата $a_1, a_2, \dots$ чрез $a_1 = 1$ и, за $n \geq 2$, a_n е най-малкото решение на уравнението

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sqrt[k]{\frac{x}{a_i}} \right].$$

Да се докаже, че всички прости числа са членове на тази редица.

Решение. Твърдението очевидно следва от факта (който ще докажем), че числата a_n , $n = 1, 2, \dots$, са точно тези естествени числа, в чието канонично разлагане няма степенни показатели, по-големи или равни на k . Нека B е множеството от тези числа.

Първо ще докажем, че за всяко естествено число c е в сила твърдението

$$c = \sum_{b \in B, b \leq c} \left[\sqrt[k]{\frac{c}{b}} \right]$$

Действително, тъй като всяко естествено число има единствено представяне като произведение на k -та степен и елемент на B , множеството $\{1, 2, \dots, c\}$ се разбива на класове

$$C_b = \{x : x \in \mathbb{N}, x \leq c, \frac{x}{b} \text{ е } k\text{-та степен}\}, \quad b \in B, b \leq c$$

Тъй като очевидно $|C_b| = \left[\sqrt[k]{\frac{c}{b}} \right]$, исканото твърдение следва.

Да подредим елементите на B по големина, т.е. $1 = b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots$. Ще докажем с индукция по n , че $a_n = b_n$. Имаме $a_1 = b_1 = 1$ и нека $n \geq 2$, $a_m = b_m$ за всички индекси $m < n$. Тъй като $b_n > b_{n-1} = a_{n-1}$ и, според доказаното по-горе,

$$b_n = \sum_{i=1}^n \left[\sqrt[k]{\frac{b_n}{b_i}} \right] = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sqrt[k]{\frac{b_n}{b_i}} \right] = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sqrt[k]{\frac{b_n}{a_i}} \right],$$

от дефиницията на a_n следва, че $a_n \leq b_n$. Ако неравенството е строго, т.е. $a_n < b_n$, получаваме

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sqrt[k]{\frac{a_n}{b_i}} \right] = \sum_{i=1}^{n-1} \left[\sqrt[k]{\frac{a_n}{a_i}} \right] = a_n - 1,$$

противоречие. Следователно $a_n = b_n$ и индукционният преход е завършен.

Задача 6. (EL RMM2012) Да се намери максималният брой шахматни царе, които могат да се разположат върху шахматна дъска 12×12 така, че всеки цар да атакува точно един друг цар.

Решение. (Богдан Станков, контролно за БОМ2012) Отговор: 56. Да допълним нашата дъска до дъска с размери 13×13 , добавяйки нулеви ред и стълб, и в новата дъска да асоциираме царя на поле (i, j) , $i, j \in \{1, \dots, 12\}$, с четворката полета $(i, j)(i-1, j), (i, j-1), (i-1, j-1)$.

Лесно се вижда, че с една двойка царе, които се атакуват, са асоциирани най-много 6 полета (поне две от осемте са общи). Нещо повече, по този начин никое поле не е асоциирано едновременно към две такива двойки. Следователно търсеният максимален възможен брой царе не надминава $2 \left\lfloor \frac{13^2}{6} \right\rfloor = 56$. Оставяме на читателя да посочи пример с 56 царя, изпълняващ условието.

Забележка. Аналогично доказателство показва, че отговорът за общата задача за дъска $n \times n$ е $2 \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{6} \right\rfloor$.

Задача 7. (EL RMM2012) Нека S е множество от естествени числа с по 100 цифри. Едно число от S се нарича *лошо*, ако не се дели на сумата на някои две (не непременно различни) числа от S . Да се намери максималният възможен брой елементи на S , ако е известно, че S съдържа не повече от 10 лоши числа.

Решение. (Оценка) Да наречем добри числата от S , които не са лоши. Да отбележим, че всяко добро число може да бъде записано като сума на не повече от 9 и поне 2 (не непременно различни) лоши числа. Имаме $\binom{10+j}{9}$, $2 \leq j \leq 9$, суми с по j . Следователно мощността на S (с преброени и лошите числа) не надминава $\sum_{j=1}^9 \binom{10+j}{9} = \binom{19}{10}$.

(Конструкция) Нека сме избрали 10 числа от интервала $[10^{100}, \frac{10^{101}-1}{9}]$ – те са нашите лоши числа. Да отбележим, че този интервал има $\frac{10^{100}-1}{9}$ числа, от които можем да избираме. Освен това, от избора на интервала следва, че всяка сума на поне 2 и не повече от 9 лоши числа е 100-цифрено число и можем да я разгледаме за включване в S . Остава да прецизираме избора така, че да не получаваме еднакви суми.

Да предположим, че вече сме избрали j лоши числа и всички суми на не повече от 9 (не непременно различни) от тях са различни. Следващото лошо число не трябва да дели никое от вече избраните числа и трябва да бъде не

трябва да бъде равно на разлика на вече избрани числа. Това забранява по-малко от $\frac{10^{10} \cdot (10^{10} - 1)}{2} + 10^{10} \cdot 9 < 10^{21}$ (използвахме $\binom{19}{10} < 10^{10}$) възможности и вече е очевидно, че можем да направим избора на следващото $j + 1$ -во лошо число, $j + 1 \leq 10$.

Задача 8. (RMM2012, Задача 3, предложена от Великобритания) Всяко естествено число е оцветено в синьо или червено. Функцията $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ има следните две свойства:

а) ако $x \leq y$, то $f(x) \leq f(y)$;

б) ако x , y и z са (не непременно различни) естествени числа с един и същи цвят и $x + y = z$, то $f(x) + f(y) = f(z)$.

Да се докаже, че съществува положително число a , такова, че $f(x) \leq ax$ за всяко естествено число x .

Решение. За естествени числа x и y ще означаваме с $[x, y]$ множеството от естествените числа t , за които $x \leq t \leq y$, като ще наричаме това множество интервал и ще казваме, че този интервал има дължина $y - x$.

Ако функцията $f(x)/x$ е постоянна (поотделно) и върху двата цвята, твърдението е очевидно. Следователно можем да считаме, че съществуват две червени числа x и y , за които $f(x)/x \neq f(y)/y$.

Да положим $m = xy$. Тогава всеки интервал с дължина m съдържа синьо число. Действително, ако допуснем противното, т.е. всички числа в някакъв интервал $[k, k + m]$, са червени, то

$$f(k + m) = f(k + xy) = f(k + x(y - 1)) + f(x) = \dots = f(k) + yf(x),$$

$$f(k + m) = f(k + xy) = f(k + (x - 1)y) + f(y) = \dots = f(k) + xf(y),$$

откъдето $yf(x) = xf(y)$, противоречие.

Да отбележим, че ако докажем, че съществуват константи d and D , такива, че $f(z) - f(z - 1) \leq D$ за всяко $z \geq d$, твърдението на задачата следва.

Ще разгледаме два случая.

Случай 1. Съществува интервал $[k, k + m]$, състоящ се от сини числа. Да дефинираме $D = \max\{f(k), \dots, f(k + m)\}$. Ще докажем, че $d = k$ и D вършат работа. Нека $z > d$ и b_1 да е най-голямото синьо число, ненадминаващо z (това означава, че $z - b_1 \leq m$), и някое синьо число b_2 от интервала $[b_1 + k, b_1 + k + m]$ (последното, заедно с избора на b_1 , дава

$b_2 > z$). Тъй като $b_2 - b_1$ е синьо число от интервала $[k, k+m]$, имаме $f(b_2) = f(b_1) + f(b_2 - b_1) \leq f(b_1) + D$. Следователно $f(z+1) - f(z) \leq f(b_2) - f(b_1) \leq D$.

Случай 2. Всеки интервал с дължина m съдържа числа от двата цвята. Да фиксираме червено число $R \geq 2m$, за което $R+1$ е синьо, и да положим $D = \max\{f(R), f(R+1)\}$, $d = 2m$. Нека $z > d$ и да разгледаме най-голямото червено число r , ненадминаващо z и най-голямото синьо число b , по-малко от r . Тогава $0 < z - b = (z - r) + (r - b) \leq m + m = 2m$ и числото $b+1$ е червено. Да положим $t = b + R + 1$. Тогава $t > b + 2m > z$ и ще разгледаме поотделно двете възможности за цвета на t . Ако t е синьо, то $f(t) = f(b) + f(R+1) \leq f(b) + D$ откъдето $f(z+1) - f(z) \leq f(t) - f(b) \leq D$. Ако пък t е червено, имаме $f(t) = f(b+1) + f(R) \leq f(b+1) + D$, откъдето $f(z+1) - f(z) \leq f(t) + f(b+1) \leq D$.

Задача 9. (RMM2011, Задача 2, предложена от Унгария) Да се намерят всички естествени числа n , за които съществува полином $f(x)$ с реални коефициенти със следните свойства:

- (1) за всяко цяло число k числото $f(k)$ е цяло тогава и само тогава, когато k не се дели на n ;
- (2) степента на $f(x)$ е по-малка от n .

Решение. Отговор: $n = p^\alpha$, където p е просто число, а α е цяло неотрицателно число.

Лема. За всеки набор от цели числа $a_1, \dots, a_n$ съществува полином $P(x)$ от степен, по-малка от n , който приема само цели стойности и за който $P(k) = a_k$ за всяко $k = 1, \dots, n$.

Доказателство. При $n = 1$ полиномът $P(x) = a_1$ има исканите свойства. За индукционния преход да забележим, че ако $P_1(x)$ има исканите свойства за $a_1, \dots, a_{n-1}$, то полиномът $P(x) = P_1(x) + (a_n - P_1(n))\binom{x-1}{n-1}$ е от степен $n-1$ и лесно се вижда, че $P(k) = a_k$ за всяко $k = 1, \dots, n$. С това лемата е доказана.

Нека n е такова, че да съществува полином $f(x)$ със свойствата (1) и (2). Тъй като числата $1, 2, \dots, n-1$ не се делят на n , числата $f(i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ са цели. Съгласно лемата съществува полином $P(x)$ от степен най-много $n-2$, за който $P(i) = f(i)$ за $i = 1, \dots, n-1$.

Лесно се вижда, че полиномът $f_1(x) = f(x) - P(x)$ също има свойствата (1) и (2). Следователно без ограничение на общността можем да се ограничим с разглеждането на полиноми, които се анулират в точките $1, \dots, n-1$,

т.е. полиномите от вида

$$f(x) = c(x-1) \cdots (x-n+1),$$

където c е рационална константа.

Нека $c = \frac{p}{q}$ е несъкратима дроб и $q = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ е каноничното разлагане на знаменателя на c . Тъй като $f(0) = \frac{(-1)^{n-1}p(n-1)!}{q}$ не е цяло число, q не дели $(n-1)!$, т.е. $p_j^{\alpha_j}$ не дели $(n-1)!$ за някое j . Тогава

$$(p_j^{\alpha_j} - 1) \cdots (p_j^{\alpha_j} - n + 1) \equiv (-1)^{n-1}(n-1)! \pmod{p_j^{\alpha_j}}$$

също не се дели на $p_j^{\alpha_j}$, което означава, че числото $f(p_j^{\alpha_j})$ не е цяло. От последното заключаваме, че $n | p_j^{\alpha_j}$, т.е. n е степен на p_j .

Нека сега $n = p^\alpha$ е степен на просто число. Ще докажем, че полиномът

$$f(x) = \frac{1}{p} \binom{x-1}{n-1} = \frac{n}{px} \binom{x}{n}$$

има исканите свойства. Очевидно $f(x)$ е от степен $n-1$. Ако x е цяло число, от първото представяне на $f(x)$ се вижда, че знаменателят на неразложимия вид на $f(x)$ може да бъде само 1 или p .

Ако $n = p^\alpha$ не дели x , то от второто представяне на $f(x)$ се вижда, че p се съкращава, т.е. $f(x)$ е цяло число. Ако пък $n = p^\alpha | x$, то числото $\binom{x-1}{n-1}$ от първото представяне на $f(x)$ не се дели на p , защото числата $x-1, x-2, \dots, x-(n-1)$ (от числителя) се делят точно на същите степени на p , както съответно числата $n-1, n-2, \dots, 1$ (от знаменателя). Следователно в този случай $f(x)$ не е цяло число.

Задача 10. (RMM2011, Задача 5, предложена от Великобритания) Дадено е естествено число $n \geq 3$. Да се намерят всички конфигурации от n различни точки в равнината $X_1, X_2, \dots, X_n$ със следното свойство: за всяка двойка различни точки X_i, X_j съществува пермутация σ на числата $(1, 2, \dots, n)$, такава, че $d(X_i, X_k) = d(X_j, X_{\sigma(k)})$ за всички $k = 1, 2, \dots, n$. (С $d(X, Y)$ е означено разстоянието между точките X и Y .)

Решение. Първо ще докажем, че точките $X_1, X_2, \dots, X_n$ лежат на една окръжност. Да разгледаме декартова координатна система с център центъра на тежестта на системата точки $X_1, X_2, \dots, X_n$ и да асоциираме към

всяка точка X_k нейния радиус-вектор x_k . Да отбележим, че този избор дава $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$.

Имаме

$$d^2(X_i, X_k) = \|x_i - x_k\|^2 = \langle x_i - x_k, x_i - x_k \rangle = \|x_i\|^2 - 2\langle x_i, x_k \rangle + \|x_k\|^2,$$

откъдето

$$\sum_{k=1}^n d^2(X_i, X_k) = n\|x_i\|^2 - 2\langle x_i, \sum_{k=1}^n x_k \rangle + \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 = n\|x_i\|^2 + \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

и аналогично $\sum_{k=1}^n d^2(X_j, X_{\sigma(k)}) = n\|x_j\|^2 + \sum_{k=1}^n \|x_{\sigma(k)}\|^2$. От тези равенства веднага следва, че $\|x_i\| = \|x_j\|$, т.е. точките $X_1, X_2, \dots, X_n$ лежат на една окръжност с център точката $(0, 0)$.

Нека m е най-малкото възможно разстояние между две от дадените точки по дъга от окръжността. Всеки две точки на разстояние са съседни по окръжността, като всички точки имат един и същи брой съседи – един или два. Ако n е нечетно, първата възможност отпада и точките са върхове на правилен n -ъгълник. Ако n е четно, правилният n -ъгълник отново е решение, но можем да имаме и ситуацията, при която всяка точка има точно по един съсед на разстояние m . Тогава разглеждаме аналогично второто по големина разстояние между две от дадените точки по дъга от окръжността, за да заключим, че тази конфигурация е обединение на два правилни $\frac{n}{2}$ -ъгълника.

Забележка. Българският участник Рафаел Рафаилов успя да намери на самото състезание оригинално решение, което можете да прочетете в неговата работа в тази книга.

Задача 11. (EL RMM2012, предложена от Русия) Нека n е естествено число. Да се докаже, че съществуват n реални числа $a_1, \dots, a_n$ в интервала $(0, 1)$, такива, че условието: Ако полиномът $P_i(x)$ от степен $n+1$ се анулира в $0, 1, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$, то

$$\max_{x \in [0,1]} |P_i(x)| = |P_i(a_i)|$$

за всяко $i = 1, 2, \dots, n$.

Решение. Да положим $x_0 = 0$ и $x_{n+1} = 1$. Да разгледаме функцията на n променливи $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$, дефинирана с равенството

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

Тази функция е непрекъсната и е дефинирана върху компактно множество. Следователно тя достига своя максимум за някоя точка $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in [0, 1]^n$. Очевидно този максимум е положително число и значи числата $a_1, a_2, \dots, a_n$ са две по две различни.

Остава да отбележим, че за всяко фиксирано i и за всяко $x \in [0, 1]$ имаме

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \geq f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

откъдето, след съответните съкращения, получаваме исканото.

Забележка. Първоначално тази задача беше включена в темата, но след проведените в журито дискусии и по предложение на ръководителите на американския и българския отбори беше заменена. Всъщност задачата е в тясна връзка с подробно изучавания въпрос за екстремумите на детерминантата на Вандермонд и журито прецени, че това прави задачата недостатъчно оригинална.

Задача 12. (RMM2013, Задача 2, предложена от Великобритания) Съществуват ли функции $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, за които единствената функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такава, че $f(g(x)) = g(f(x))$ и $f(h(x)) = h(f(x))$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, е идентитетът $f(x) \equiv x$?

Решение. (Николай Николов) Отговорът на въпроса е положителен. Трите решения на сайта на RMM изглеждат сложни за ученици, като съответните функции никак не са елементарни. Тук ще докажем лесно, че можем да изберем $g(x) = x + 1$ и $h(x) = x^2$. Оттук нататък решението се съдържа в следващата лема.

Лема. Ако $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е такава функция, че $f(x + 1) = f(x) + 1$ и $f(x^2) = f^2(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, то $f(x) \equiv x$.

Доказателство. Имаме, че

$$(f(x) - 1)^2 = f^2(x - 1) = f((x - 1)^2) = f^2(1 - x) = (1 + f(-x))^2.$$

и понеже $f^2(x) = f(x^2) = f^2(-x)$, то $f(-x) = -f(x)$.

От $f(x^2) = f^2(x)$ още имаме, че $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$. От друга страна, от $f(x+1) = f(x) + 1$ индукция следва, че $f(x+n) = f(x) + n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Тогава

$$f(x) - [x] = f(x - [x]) \geq 0, \quad f(x) - [x] = -f([x] - x) \leq 0,$$

откъдето $x - 1 < f(x) < x + 1$.

По-нататък, по индукция имаме, че $f^{2^n}(x) = f(x^{2^n})$. Оттук

$$\sqrt[2^n]{x^{2^n} - 1} < f(x) < \sqrt[2^n]{x^{2^n} + 1}, \quad x \geq 1.$$

При $n \rightarrow \infty$ получаваме, че ако $x > 1$, то $f(x) = x$. Накрая от $f(x+1) = f(x) + 1$ следва, че $f(x) \equiv x$.

Забележка. Лемата всъщност е Задача 18.43 от книгата *Topics in functional equations* (Т. Andreescu, И. Boreiko, О. Mushkarov, Н. Nikolov), Plano, TX, USA, 2012. По същество горното решение е първото от двете в книгата. По време на дискусиите в журито беше направено (но отхвърлено след гласуване) предложение в условието да се добави изискването двете функции да са биекции, където отговорът отново е положителен.

Неравенство на Фишер

ПЛАМЕН ПЕНЧЕВ

antonov@pmg.dobrich.net

Нека $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $L = \{l_1, l_2, \dots, l_k | l_i \in \mathbb{N}\}$. Семейството от подмножества на X

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_m | A_i \in X\}$$

се нарича L -интересна, ако мощностите на всички сечения на две различни множества от A принадлежат на L , т.е. $|A_i \cap A_j| \in L$ за всички $i, j, i \neq j$. Ще докажем, че тогава е в сила неравенството

$$|A| \leq \sum_{i=1}^k \binom{n}{l_i}, \quad (1)$$

известно като неравенство на Фишер.

Най-напред ще разгледаме случая $L = \{1\}$. В този случай (1) се записва във вида $m \leq n$, което ще докажем.

На всяко множество $A_i, i = 1, 2, \dots, m$, съпоставяме неговия характеристичен вектор $a_i = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, като $c_j = 0$ ако $x_j \notin A_i$, или $c_j = 1$, ако $x_j \in A_i$. Тогава условието $|A_i \cap A_j| = 1$ е еквивалентно на равенството $\langle a_i, a_j \rangle = 1$ при $i \neq j$. Тук и по-нататък $\langle \cdot, \cdot \rangle$ е обичайното скалярно произведение.

Да допуснем, че е изпълнено обратното неравенство $m > n$. Тогава векторите $a_1, a_2, \dots, a_m$ са повече от n (колкото е дължината им) и следователно са линейно зависими¹, т.е. съществуват реални числа $k_1, k_2, \dots, k_m$, не всички равни на 0, за които $\sum_{i=1}^m k_i a_i = 0$. Повдигаме това равенство на квадрат (като скалярно произведение) и получаваме последователно равен-

¹Това е добре известно твърдение, което присъства във всички курсове по линейната алгебра и следва лесно от т.нар. основна лема (Бел. ред.).

ствата

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^m k_i a_i\right)^2 = 0 &\iff \sum_{i=1}^m k_i^2 a_i^2 + \sum_{i \neq j} k_i k_j \langle a_i, a_j \rangle = 0 \\
 &\iff \sum_{i=1}^m k_i^2 a_i^2 + \sum_{i \neq j} k_i k_j = 0 \\
 &\iff \sum_{i=1}^m k_i^2 a_i^2 + \left(\sum_{i=1}^m k_i\right)^2 - \sum_{i=1}^m k_i^2 = 0 \\
 &\iff \sum_{i=1}^m k_i^2 (a_i^2 - 1) + \left(\sum_{i=1}^m k_i\right)^2 = 0,
 \end{aligned}$$

като последното очевидно е невъзможно. Полученото противоречие означава, че $m \leq n$.

Да разгледаме сега общия случай. Нека A е L -интересна фамилия, като $l_1 < l_2 < \dots < l_k$ и $g(x) = (x-l_1)(x-l_2)\dots(x-l_k)$. Лесно може да се докаже по индукция, че полиномът $g(x)$ може да се представи във вида

$$g(x) = \sum_{i=0}^k c_i \binom{x}{i}.$$

В това представяне очевидно имаме $c_k = k!$. Удобно е да наричаме числата $c_1, c_2, \dots, c_k$ коефициенти на L и да ги разделим на неотрицателни и отрицателни, т.е. означаваме $C^+ = \{i | c_i \geq 0\}$ и $C^- = \{i | c_i < 0\}$.

На всяко от множествата A_i съпоставяме реални променливи по следния начин. Ако $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$, въвеждаме полинома

$$L_Y(z) = \sum_{Y|Y \subset A_j} z_j.$$

С $\left\{ \binom{X}{i} \right\}$ означаваме множеството от подмножествата на X с точно i елемента. Ще използваме и променливите $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$,

Лема. При горните означения е в сила тъждеството

$$\sum_{i=0}^k c_i \sum_{y \in \binom{x}{i}} L_Y(z) L_Y(t) = \sum_{j=1}^m g(|A_j|) z_j t_j. \quad (2)$$

Доказателство. Имаме последователно

$$\begin{aligned}
 L_Y(z)L_Y(t) &= \sum_{Y \subset A_j} z_j t_j + \sum_{i \neq j, Y \subset A_i \cap A_j} z_i t_j, \\
 \sum_{i=0}^k c_i \sum_{Y \in \binom{X}{i}} L_Y(z)L_Y(t) &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=0}^k c_i \binom{|A_j|}{i} z_j t_j + \sum_{j=1}^m \sum_{r=0}^k c_r \binom{|A_i \cap A_j|}{r} z_i t_j = \\
 &= \sum_{i=1}^m g(|A_j|) z_j t_j + \sum_{i,j=1, i \neq j}^m g(|A_i \cap A_j|) z_j t_j = \\
 &= \sum_{i=1}^m g(|A_j|) z_j t_j,
 \end{aligned}$$

тъй като $g(|A_i \cap A_j|) = 0$ за $i \neq j$. С това лемата е доказана.

Ще разгледаме следните две хомогенни системи линейни уравнения:

$$S_1 : L_y(z) = 0; \forall Y \subset X, |Y| \leq k;$$

$$S_2 : L_y(t) = 0; \forall Y \subset X, |Y| \in C^+.$$

Теорема 1. Ако A е L -интересна фамилия от подмножества на X , то:

- а) Системата S_1 има само тривиално решение.
- б) Ако $g(|A_j|) \geq 0$ за всяко j , то $|A| \leq \sum_{i \in C^+} \binom{n}{i}$.

Доказателство. а) Нека $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ е решение на системата S_1 и да разгледаме векторите z и $t = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ както в Лема 1, като $t_i = \pm z_i$, в зависимост от знака на $g(|A_i|)$. Тогава равенството (2) от Лема 1 придобива вида

$$\sum_{i=0}^k c_i \sum_{Y \in \binom{X}{i}} L_Y(z)L_Y(t) = \sum_{j=1}^m |g(|A_j|)| z_j^2.$$

Тъй като $L_Y(z) = 0$, то ясно е, че $z_j = 0$ винаги когато $g(|A_j|) \neq 0$. В частност, заключаваме, че $z_j = 0$ за всички j , за които $|A_j| > l_k$.

Нека $L_i = \{l_1, l_2, \dots, l_i\}$. От $z_j = 0$ при $|A_i| > l_k$ следва, че стойността на $L_Y(z)$ не се променя ако острием от дефиниращото равенство всички

такива A_j . При това получаваме L_{k-1} -интересна фамилия. Повтаряме същата процедура с тази фамилия, като разглеждаме аналога на системата S_1 за всички $|Y|$ с $|Y| \leq k-1$ и аналогично намираме, че $z_j = 0$ за всички j , за които $|A_j| > l_{k-1}$ и т.н., като в крайна сметка получаваме, че $z_j = 0$ за всички j .

Да отбележим, че тъй като системата S_1 има $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$ уравнения и $|A|$ променливи, то е в сила неравенството $|A| \leq \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}$.

б) Нека $z = (z_1, z_2, \dots, z_m)$ е решение на системата S_2 . Полагаме $t_j = z_i$ в Лема 1 и получаваме

$$\sum_{k \in C^-} c_i \sum_{Y \in \{ \frac{X}{i} \}} [L_Y(z)]^2 = \sum_{j=1}^m g(|A_j|) z_j^2,$$

защото $L_Y(z) = 0$ при $y \in C^+$, което е възможно само при

$$\sum_{k \in C^-} c_i \sum_{Y \in \{ \frac{X}{i} \}} [L_Y(z)]^2 = \sum_{j=1}^m g(|A_j|) z_j^2 = 0.$$

Следователно $z_j = 0$ винаги когато $g(|A_j|) > 0$. Освен това, тъй като $c_i < 0$, то $L_Y(z) = 0$, за $|Y| \in C^-$. Но $L_Y(z) = 0$ и за $|Y| \in C^+$. Следователно z е решение и на системата S_1 , т.е. z е тривиалното решение. Но сега броят на уравненията в системата S_2 е $\sum_{i \in C^+} \binom{n}{i}$ и следователно е в сила неравенството $|A| \leq \sum_{i \in C^+} \binom{n}{i}$.

Теорема 2. Нека $g(|A_j|) \geq 0$ за всяко j и $g(x)$ има коефициенти с алтернативно сменящи се знаци. Тогава

$$|A| \leq \sum_{i=0}^k \binom{n-1}{i}.$$

Доказателство. Тъй като $c_k = k!$, то $c_{k-1} < 0$ и т.н. От Теорема 1б) следва, че

$$|A| \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{n}{k-2i} = \sum_{i=0}^k \binom{n-1}{i}.$$

Последното равенство се доказва лесно с помощта на тъждеството $\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$.

Теорема 3. Нека L е множество от k последователни естествени числа и A е L -интересна фамилия. Тогава е в сила неравенството

$$|A| \leq \sum_{i=0}^k \binom{n-1}{i}.$$

Доказателство. Нека $L = \{m, m+1, \dots, m+k-1\}$, $m \geq 1$. Тогава $g(x) = k! \binom{x-m}{k}$.

Да разгледаме тъждеството $(1+y)^{x-m} = (1+y)^{-m}(1+y)^x$ и да сравним коефициентите пред y^k . Получаваме тъждеството

$$\binom{x-m}{k} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{m}{k-i} \binom{x}{i},$$

което означава, че $g(x)$ е с коефициенти с алтернативно сменящи се знаци и можем да приложим Теорема 2 (очевидно имаме $g(|A_j|) \geq 0$ за всяко j). Следователно е в сила неравенството

$$|A| \leq \sum_{i=0}^k \binom{n-1}{i}.$$

Задачи за полиноми

РАФАЕЛ РАФАИЛОВ

rafael.rafailov@yahoo.com

Задача 1. Да се намерят всички полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ с реални коефициенти, такива че

$$P(Q(x)) = P^r(x).$$

Решение. Понеже трябва да имаме равни степени от двете страни, то следва, че $Q(x)$ е от степен r . Сега ще сравним корените на полиномите от ляво и от дясно. Нека корените на $P(x)$ са $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ с кратности $l_1, \dots, l_k$. Тогава имаме, че корените на полинома от дясно са $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ с кратности $rl_1, \dots, rl_k$. Корените на полинома от ляво са решенията на

$$Q(x) = \alpha_i$$

$i = 1, \dots, k$, като всяко уравнение се повтаря l_i пъти.

Очевидно полиномите $Q(x) - \alpha_i$ и $Q(x) - \alpha_j$ са взаимнопрости за $i \neq j$. Понеже всяко от уравненията $Q(x) = \alpha_i$ има решение, то $P(Q(x)) = 0$ има поне k на брой различни решения, докато $P(x)^r$ има точно k такива. Тогава получаваме че всяко уравнение $Q(x) = \alpha_i$ има точно едно решение и тези решения са точно α_i . Първо да разгледаме $r = 1$. Тогава ако $Q(x) = ax + b$, то $-b/a + \alpha_i$, $i = 1, \dots, k$, са всички корени на $P(Q(x))$, и те са равни на α_j , $j = 1, \dots, k$ откъдето лесно виждаме, че $b = 0$. Сравнявайки първите коефициенти на полиномите получаваме, че $a = \pm 1$. Тогава $Q(x) = x$, или $Q(x) = -x$ и $P(x)$ е четна функция. Сега можем да считаме, че $r > 1$.

Тогава

$$Q(x) = a(x - \alpha_{\pi(i)})^r + \alpha_i, \forall i = 1, \dots, k,$$

където π е пермутация на числата $\{1, \dots, n\}$. Понеже $r > 1$, приравнявайки коефициентите пред x^{r-1} получаваме, че $ar\alpha_1 = \dots = ar\alpha_k$, откъдето получаваме, че P само един корен.

Тогава имаме $Q(x) = a(x-z)^r + z$ и $P = b(x-z)^t$. Приравнявайки отново коефициентите получаваме, че $b^r = ba^t$. Лесно се проверява, че всички такива полиноми удовлетворяват исканото.

Забележка. Задачата е обобщен случай на задача 6 от областния кръг на националната олимпиада 2012 г.: Да се докаже, че ако $P(x)$ е полином с реални коефициенти и

$$P(x^2 + a) = P(x)^2,$$

то $a = 0$. От предната задача знаем че $Q(x)$ има вида $a(x - z)^2 + z$. Понеже коефициентът пред x е 0, получаваме, че $z = 0$, откъдето исканото следва лесно.

Задача 2. (Жаутиковска олимпиада 2012) Дадени са полиномите $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с реални коефициенти, такива че:

$$P(Q(x)) + P(R(x))$$

е константа. Да се докаже, че $P(x)$ е константен полином или $Q(x) + R(x)$ е константа.

Решение. Първи начин. Сравняването на коефициенти е стандартен подход при уравнения със полиноми и именно него ще използваме тук. Ако $P(x)$ е константа, то очевидно условието е изпълнено.

Нега приемем, че $P(x)$ не е константа. Сега развивайки $P(Q(x)) + P(R(x))$ получаваме, че коефициентите пред всяка ненулева степен на този полином трябва да са 0. Оттук лесно следва, че $Q(x)$ и $R(x)$ са с равни степени. Нека сега

$$R(x) = a_t x^t + a_{t-1} x^{t-1} + \dots + a_0,$$

$$Q(x) = b_t x^t + b_{t-1} x^{t-1} + \dots + b_0,$$

$$P(x) = h_r x^r + h_{r-1} x^{r-1} + \dots + h_0.$$

Очевидно r е нечетно, защото в противен случай имаме

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |R(x)|, |Q(x)| = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} |P(Q(x)) + P(R(x))| = \infty.$$

Сега нека

$$P(Q(x)) + P(R(x)) = c_{rt} x^{rt} + c_{rt-1} x^{rt-1} + \dots + c_0.$$

Имаме $0 = c_{rt} = h_r(a_t^r + b_t^r)$, откъдето $a_t = -b_t$. Сега ще процедираме по индукция. Да допуснем, че $a_i = -b_i$, $i = t, \dots, j+1$, $j > 0$. Ще докажем, че $a_j = -b_j$.

Да разгледаме c_{rt-r+j} – лесно се вижда, че имаме

$$\begin{aligned} c_{rt-r+j} &= \sum_{\sum_{k=1}^r i_k = rt-r+j} h_r \prod_{k=1}^r a_{i_k} + \sum_{\sum_{k=1}^r i_k = rt-r+j} h_r \prod_{k=1}^r b_{i_k} = \\ &= h_r r (a_t^{r-1} a_j + b_t^{r-1} b_j) = 0. \end{aligned}$$

Това следва, от

$$\prod_{k=1}^r a_{i_k} + \prod_{k=1}^r b_{i_k} = 0$$

когато всички индекси са по-големи от j от индукционното предположение и факта, че r е нечетно. Тогава имаме, че $r-1$ е четно и $a_t^{r-1} = b_t^{r-1}$, откъдето $a_j = -b_j$. Така получаваме $Q(x) + R(x) = a_0 + b_0$, което е константа.

Втори начин. Това решение представлява и полезен факт само по себе си. Отново да допуснем, че $P(x)$ и $Q(x) + R(x)$ не са константи. Тогава $Q(x) + R(x)$ е неконстантен полином и имаме

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |Q(x) + R(x)| = \infty.$$

Ще докажем следната лема:

Лема 1. Нека $Q(x)$ е полином с реални коефициенти. Тогава, ако

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n + b_n| = \infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P(a_n) + P(b_n)| = \infty$$

Доказателство. Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$ (другият случай се разглежда аналогично). Освен това нека

$$Q(x) = c_t x^t + c_{t-1} x^{t-1} + \dots + c_0.$$

Нека n е достатъчно голямо, така че $|a_n| > |b_n| > 1$.

Сега

$$|P(a_n) + P(b_n)| = \left| \sum_{i=1}^t c_i (a_n^i + b_n^i) \right| >$$

$$a_n^{-t+1} \left| \sum_{i=1}^t c_i (a_n^i + b_n^i) \right| > |c_t (a_n + b_n (b_n/a_n)^{t-1})| - \left| \sum_{i=1}^{t-1} c_i (a_n^{i-t} + b_n^i a_n^{-t}) \right| >$$

$$|c_t (a_n + b_n)| - \sum_{i=1}^{t-1} |c_i (a_n^{i-t} + b_n^i a_n^{-t})|,$$

където използвахме, че $b_n/a_n < 1$ и неравенството на триъгълника. Правейки граничен преход забелязваме, че първият модул клони към безкрайност, докато всеки от останалите е ограничен, което завършва доказателството.

Оттук доказателството на задачата следва лесно, понеже ако $Q(x) + R(x)$ не е константа, то $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) + R(x) = \pm\infty$, след което можем да приложим доказаната лема.

Забележка. Да отбележим, че ако $Q(x) + R(x) = A$ е константа, то съществува полином $P(x)$ от произволна нечетна степен, такъв че $P(Q(x)) + P(R(x)) = C$ за всяка константа C . Следният полином е такъв:

$$P(x) = (x - A/2)^p + C/2.$$

Същият подход за сравняване на коефициенти може да се приложи аналогично и в следната задача:

Задача 3. Дадени са полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ с реални коефициенти, такива че

$$P(P(x)) = Q(Q(x)).$$

Да се докаже, че $P(x) = \pm Q(x)$.

Задача 4. Да се докаже, че ако $Q(x)$ е полином, такъв че $Q(Q(x))$ е четна или нечетна функция, то $Q(x)$ е четна или нечетна функция.

Решение. Първо да допуснем, че $Q(Q(x))$ е нечетна. Тогава

$$Q(Q(x)) + Q(Q(-x)) = 0.$$

Тогава от предишната задача следва, че $Q(x) + Q(-x) = \text{const}$. Оттук лесно следва, че единствената четна степен на $Q(x)$ е нулевата. Тогава ако $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, то разглеждайки степента пред x^{n^2-n} в развитието на $Q(Q(x))$ лесно стигаме до извода, че $a_0 = 0$. За краткост казваме, че един полином е четен/нечетен, ако всички коефициенти пред нечетните/четните му степени са нули.

Сега да разгледаме случая, когато $Q(Q(x))$ е четен полином. Тогава старшата степен на $Q(Q(x))$ е четна, откъдето получаваме, че старшата степен на $Q(x)$ е четна.

Сега ще използваме следната лема:

Лема 1. За всеки полином с реални коефициенти $Q(x)$, съществува константа C , такава че за $|x| > C$ полинома е строго монотонна функция.

Доказателство: Имаме че производната на полинома $Q(x)$ също е полином, чиито корени лежат в някакъв краен интервал Δ . Тогава извън този интервал производната на $Q(x)$ не мени знака си, следователно $Q(x)$ е монотонна функция извън Δ .

Сега имаме, че

$$Q(Q(x)) = Q(Q(-x)).$$

Да допуснем, че $Q(x) - Q(-x)$ е неконстантен полином. Тогава имаме

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) - Q(-x) = \pm\infty.$$

Нека Δ_1 да е краен интервал, извън който $Q(x)$ е монотонна функция. Такъв съществува съгласно доказаната лема. Нека сега Δ_2 да е интервал, който съдържа всички нули на $Q(x) - Q(-x)$, а Δ_3 е интервал, който съдържа всички точки в които $Q(x)$ си мени знака. Нека

$$y_0 = \max\{|y| : y \in \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3\}.$$

Сега понеже $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} Q(x) = \pm\infty$, можем да изберем достатъчно голямо x , такава че $x > y_0$ и $|Q(x)| > y_0$. Тогава имаме, че или $Q(x) > Q(-x) > 0$ или $0 < Q(x) < Q(-x)$. Освен това за тези стойности на x имаме, че полиномът е строго монотонна функция. Тогава лесно се вижда, че равенството

$$Q(Q(x)) = Q(Q(-x))$$

е невъзможно, тъй като $Q(x)$ и $Q(-x)$ имат еднакви знаци (полиномът е от четна степен) и единият полином е строго по-голям от другия.

Забележка. Задачата е предлагана на тренировъчно контролно на подготовката на националния отбор по математика за МОМ 2010.

Ако $P(x)$ е полином с комплексни коефициенти и $P(x) = \prod_{i=1}^k (x - z_i)^{\alpha_i}$, то с $radP(x)$ означаваме полинома $\prod_{i=1}^k (x - z_i)$.

Задача 5. (Теорема на Мейсън-Скотер) Ако са дадени взаимнопростите полиноми P , Q и R с комплексни коефициенти, такива че

$$P + Q + R = 0$$

то

$$\max\{\deg P, \deg Q, \deg R\} \leq \deg(\text{rad}PQR) - 1.$$

Доказателство: Без ограничение на общността можем да считаме, че R е с максимална степен измежду трите полинома. Имаме следното твърждение:

$$R'Q - Q'R = PQ' - QP'.$$

(Доказателството е следва директно от $R = -Q - P$.) Освен това имаме, че $\frac{P}{\text{rad}P} | P, P'$. Тогава имаме:

$$\begin{aligned} \frac{R}{\text{rad}R} | R'Q - Q'R, \\ \frac{Q}{\text{rad}Q} | R'Q - Q'R, \\ \frac{P}{\text{rad}P} | PQ' - QP' \Rightarrow \frac{P}{\text{rad}P} | R'Q - Q'R. \end{aligned}$$

Сега понеже P, Q и R са взаимно-прости, то

$$\begin{aligned} \frac{PQR}{\text{rad}PQR} | PQ' - QP' \Rightarrow \\ \deg \frac{PQR}{\text{rad}PQR} \leq \deg(PQ' - QP') \Rightarrow \\ \deg P + \deg Q + \deg R - \deg \text{rad}(PQR) \leq \deg P + \deg Q - 1 \Rightarrow \\ \deg R \leq \deg \text{rad}(PQR) - 1. \end{aligned}$$

Това завършва доказателството.

Тази теорема има широко приложение в задачите със полиномиални уравнения.

Задача 6. Да се докаже, че ако P , Q и R са взаимнопрости полиноми с комплексни коефициенти и

$$P^a + Q^b + R^c = 0,$$

то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1.$$

Решение. Използвайки предходната теорема имаме:

$$a \deg P \leq \deg \operatorname{rad}(PQR) - 1 < \deg P + \deg Q + \deg R \Rightarrow$$

$$\frac{\deg P}{\deg P + \deg Q + \deg R} < \frac{1}{a}.$$

Събирайки и другите аналогични неравенства получаваме исканото.

Забележка. Може да се даде пълна характеристика на полиномите, удовлетворяващи равенство от този тип.

Следващата задача е известна като Теорема на Ферма за полиноми и е естествено следствие от предишната.

Задача 7. Да се докаже, че ако P , Q и R са взаимнопрости полиноми с комплексни коефициенти и

$$P^n + Q^n + R^n = 0,$$

то $n < 3$.

В следващите няколко задачи ще разгледаме свойствата на полиномите на Чебишев от първи вид. Полином на Чебишев е единственият полином T_n от n -та степен, такъв че:

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta.$$

Можем да се убедим, че $\cos n\theta$ е полином на $\cos \theta$ от следното равенство:

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta - \cos(n-1)\theta,$$

откъдето индуктивно получаваме исканото. Освен това от тук получаваме рекурентната връзка:

$$T_{n+1} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Сега ще разгледаме едно екстремално свойство на тези полиноми.

Задача 8. За всеки нормализиран полином $P(x)$ със реални коефициенти имаме:

$$\max_{x \in [-1; 1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}},$$

където n е степента на полинома.

Решение. Първо да забележим, че старшият коефициент на T_n е 2^{n-1} , тогава $2^{1-n}T_n(x)$ изпълняват исканото, защото ако положим $x = \cos \theta$, то $2^{1-n}T_n(x) = 2^{1-n}T_n(\cos \theta) = 2^{1-n} \cos n\theta$.

Сега да допуснем, че съществува нормиран полином $P(x)$ от n -та степен, такъв че $|P(x)| < 2^{1-n}$ за $x \in [-1; 1]$. Да разгледаме полинома $Q(x) = 2^{1-n}T_n(x) - P(x)$. Понеже имаме, че $|P(x)| < 2^{1-n}$, то $Q(x) > 0$ за $x = \cos(k2\pi/n)$, $k = 0, \dots, n-1$, а $Q(x) < 0$ за $x = \cos((2k+1)\pi/n)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Използвайки теоремата на Рол получаваме, че $Q(\cos \theta)$ е полином от $n-1$ степен на $\cos \theta$ и има поне по една нула във всеки от интервалите $[k\pi/2n, (k+1)\pi/2n]$ (за θ), откъдето следва лесно, че $Q(x) = 0$ или $P(x) = 2^{1-n}T_n(x)$. Но ние вече установихме, че твърдението на задачата за тези полиноми е вярно. С това решението е завършено.

Забележка. От доказателството установихме също, че границата е точна.

За упражнение ще поставим следната задача.

Задача 9. Нека $P(x)$ е нормиран полином с реални коефициенти и нека $P(x) \leq 2$ за $x \in [a, b]$. Да се докаже, че $b - a \leq 4$.

Упътване. Разгледайте полинома $Q(x) = P(\frac{b-a}{2}(x+1) + a)$.

Забележка. Използвайки тези факти може да се докаже сравнително лесно теоремата на Пойя.

Теорема. Ако $P(x)$ е нормиран полином с комплексни коефициенти, то проекцията на множеството $C = \{z : |P(z)| \leq 2\}$ върху произволна права в $\mathbb{C}$ е краен брой интервали с обща дължина не-повече от 4.

Сега ще представим интерполационната формула на Лагранж и ще решим някои задачи, чието решение следва лесно чрез този подход. Да допуснем, че е дадено множество от точки $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, такива че $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$. Интересуваме се от полинома от минимална степен, който минава през тези точки. Този полином е известен като интерполационен полином на Лагранж и се задава чрез

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{1 \leq j \neq i \leq n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Очевидно този полином е от степен по-малка от n . Ще оставим на читателя да докаже, че това е полиномът от минимална степен, удовлетворяващ исканото.

Задача 10. (Американска олимпиада 1975) Даден е полином от n -та степен $P(x)$ с реални коефициенти, такива че:

$$P(i) = \frac{i}{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Да се намери $P(n+1)$.

Решение. От интерполационната формула директно получаваме

$$P(n+1) = \sum_{i=0}^n \frac{i}{i+1} \prod_{i \neq j} \frac{n+1-i}{j-i}.$$

По индукция лесно може да се докаже, че горният израз е равен на 1 за нечетни n и $n/(n+2)$ за четни.

Забележка. За алтернативно решение може да се разгледа полинома $(x+1)P(x) - x$.

Същата идея може да се приложи и в следващата задача.

Задача 11. (Шортлист на MOM 1983) Даден е полином $P(x)$ от степен 990, такъв че $P(k) = F_k$ за $k \in \{992, \dots, 1982\}$. Да се докаже, че $P(1983) = F_{1983} - 1$, където F_i , $i = 1, \dots$, е редицата на Фибоначи.

Тук директно прилагаме интерполационната формула и задачата се свежда до доказателството на тъждество за редицата на Фибоначи. Налага се използването на формулата за общия член на редицата:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}^n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}^n \right).$$

Задача 12. (Иранска олимпиада) Да се докаже, че за всеки набор от реални числа $x_1, \dots, x_n \in [-1; 1]$ е изпълнено:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{j \neq i} |x_j - x_i|} \geq 2^{n-2}.$$

Решение. Нека $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$. Тогава имаме

$$P(x) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}.$$

След като вземем абсолютни стойности, използваме неравенството на триъгълника и разделяйки на x^{n-1} , получаваме:

$$\frac{|P(x)|}{|x^{n-1}|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|P(x_i)|}{|\prod_{j \neq i} x_j - x_i|} \prod_{j \neq i} \left|1 - \frac{x_i}{x}\right|.$$

Правейки граничен преход $x \rightarrow \infty$ получаваме:

$$|a_{n-1}| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|P(x_i)|}{|\prod_{j \neq i} x_j - x_i|}.$$

Вземайки $P(x) = T_{n-1}(x)$ получаваме:

$$2^{n-2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{|T_{n-1}(x_i)|}{|\prod_{j \neq i} x_j - x_i|} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\prod_{j \neq i} |x_j - x_i|}.$$

Това завършва доказателството.

Забележка. Интересен е и въпросът кога се достига равенство.

Следващата задача използва същата идея и затова ще я оставим за упражнение.

Задача 12. Дадени са полином $P(x)$ с реални коефициенти и цели числа $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Да се докаже, че

$$P(x_k) \geq \frac{n!}{2^n}$$

за някое $k \in \{1, \dots, n\}$.

Упътване. Докажете и използвайте неравенството $|\prod_{i \neq j} (x_j - x_i)| \geq j!(n-j)!$.

За заинтересования от тази тематика читател е и следната по-теоретична задача.

Задача 13. Да се докаже, че ако $P(x)$ е нормиран полином с комплексни коефициенти, то съществува $z \in \mathbb{C}$, такова че $|z| = 1$ и $|P(z)| \geq 1$.

Задача 14. Нека $P(x)$ е полином с реални коефициенти от n -та степен. Да се докаже следното неравенство

$$|P(x)| \leq |T_n(x)| \max_{x \in [-1; 1]} |P(x)|$$

за $x \notin [-1; 1]$.

Решение: Да положим $t_i = \cos \frac{k\pi}{n}$ и да използваме интерполационната формула в интервала $x \in [-1; 1]$. Имаме

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n} \sum_{i=0}^n P(t_i) \prod_{j \neq i} \frac{1 - xt_i}{t_j - t_i}.$$

След като вземем абсолютни стойности и използваме неравенството на триъгълника, получаваме

$$\left|P\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \max_{x \in [-1; 1]} |P(x)| \frac{1}{|x|^n} \sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} \frac{1 - xt_j}{|t_i - t_j|},$$

защото $|xt_i| \leq 1$. От друга страна имаме

$$\begin{aligned} \left|T_n\left(\frac{1}{x}\right)\right| &= \frac{1}{|x|^n} \left| \sum_{i=0}^n (-1)^i \prod_{j \neq i} \frac{1 - xt_j}{t_i - t_j} \right| = \\ &= \frac{1}{|x|^n} \left| \sum_{i=0}^n \prod_{j \neq i} \frac{1 + xt_j}{|t_i - t_j|} \right|, \end{aligned}$$

защото произведението $\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-1}$ мени знака си за четни и нечетни i . Оттук директно получаваме

$$\left|P\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \max_{x \in [-1; 1]} |P(x)| \left|T_n\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

за всички $x \in [-1; 1]$. Полагайки $y = x^{-1}$ получаваме исканото.

С това ще завършим темата за интерполационния полином на Лагранж.

Задача 15. (Romanian Master in Mathematics 2011, Задача 5) Множеството от точки в равнината $X_1, \dots, X_n$ има следното свойство: За всеки две различни точки X_i и X_j съществува пермутация π на числата $\{1, \dots, n\}$, такава че

$$|X_i X_k| = |X_j X_{\pi(k)}|.$$

Да се намерят всички множества с такова свойство.

Решение. Основната идея на решението, което ще разгледаме, е да анализираме геометричните места от точки, за които суми от вида

$$\sum_{i=1}^n |X X_i|^{2t}, \quad t \geq 1$$

са независими от точката X и да забележим, че точките X_i принадлежат на тези ГМТ.

Лема. Нека е даден набор от точки в равнината $A_1, \dots, A_n$. Тогава геометричното място от точки X , за които сумата

$$\sum_{i=1}^n |X A_i|^2$$

е константа, е окръжност с център центъра на тежестта на системата от точки.

Доказателство. Да асоциираме точките A_i със комплексните числа a_i и освен това нека $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

Тогава имаме последователно

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |X A_i|^2 &= \sum_{i=1}^n (z - a_i)(\bar{z} - \bar{a}_i) = \sum_{i=1}^n |z|^2 - \bar{z} a_i - z \bar{a}_i + |a_i|^2 \\ &= n|z|^2 - \bar{z} \sum_{i=1}^n a_i - z \sum_{i=1}^n \bar{a}_i + \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = n|z|^2 + \sum_{i=1}^n |a_i|^2. \end{aligned}$$

Оттук лесно получаваме, че исканото геометрично място е $|z| = \text{const}$, с което доказателството на лемата е завършено.

Тогава, ако в нашата задача разгледаме геометричното място от точки X , за които

$$\sum_{i=1}^n |X X_i|^2 = \sum_{i=1}^n |X_1 X_i|^2,$$

от лемата следва, че това ще бъде окръжност и всички точки X_i лежат на тази окръжност.

Да съпоставим на точките X_i комплексните числа a_i , като без ограничение на общността можем да приемем, че $|a_i| = |a_j|$ за всички i, j и освен това можем да считаме, че $\prod_{i=1}^n a_i = 1$, тъй като можем да направим ротация и хомотетия.

Сега да разгледаме уравненията

$$\sum_{i=1}^n |XX_i|^{2t} = \sum_{i=1}^n (z - a_i)^t (\bar{z} - \bar{a}_i)^t = \sum_{i=1}^n |X_1 X_i|^{2t} = c_t,$$

където t е естествено число.

Върху единичната окръжност имаме $\bar{z} = \frac{1}{z}$ и следователно

$$P_t(z) = z^t \sum_{i=1}^n (z - a_i)^t (\bar{z} - \bar{a}_i)^t - c_t z^t = \sum_{i=1}^n (z - a_i)^t (1 - z\bar{a}_i)^t - c_t z^t$$

е полином на z . Тъй като a_i са корени на този полином, при $2t < n$ трябва да имаме $P_t(z) \equiv 0$. Тогава коефициентите на $P_t(z) \equiv 0$ са тъждествено равни на 0 за $2t < n$. В частност, от старшите коефициенти получаваме, че са в сила равенствата

$$\sum_{i=1}^n a_i^t = 0$$

за $2t < n$.

Сега ще използваме следната теорема, известна като формули на Нютон.

Теорема. (Формули на Нютон) Нека

$$p_t(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i^t, \quad s_t(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_t} \prod_{j=1}^t a_{i_j},$$

с уговорката $s_0(a_1, \dots, a_n) = 1$. Тогава

$$ts_t(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^t (-1)^{i-1} s_{t-i}(a_1, \dots, a_n) p_i(a_1, \dots, a_n).$$

Тези равенства са добре известни и затова няма да представяме доказателство тук (стандартното е по индукция).

От теоремата на Нютон и полученото по-горе заключаваме, че $s_t(a_1, \dots, a_n) = 0$ за $2t < n$. Сега поради $\prod_{i=1}^n a_i = 1$ имаме

$$s_t(a_1, \dots, a_n) = \overline{s_{n-t}(a_1, \dots, a_n)},$$

защото за $I \subset \{1, \dots, n\}$ имаме

$$\prod_{i \in I} a_i = \prod_{i \notin I} a_i^{-1} = \prod_{i \notin I} \overline{a_i}.$$

Това ни води до два случая.

При нечетно $n = 2k + 1$ имаме, че

$$s_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = s_k(a_1, \dots, a_n) = 0,$$

откъдето получаваме и

$$\overline{s_{k+1}(a_1, \dots, a_n)} = \dots = \overline{s_{n-1}(a_1, \dots, a_n)} = 0.$$

Сега да разгледаме полинома

$$Q(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} \dots + c_0.$$

Като използваме формулите на Виет $c_i = s_{n-i}$ получаваме, че a_i са корени на $Q(x) = x^n - 1$, който са точно n -тите корени на единицата (точките X_i по условие са различни) и така получаваме че $X_1, x_2, \dots, X_n$ са точно върховете на правилен n -ъгълник.

Ако $n = 2k$ е четно, имаме $s_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = s_{k-1}(a_1, \dots, a_n) = 0$, откъдето и $\overline{s_{k+1}(a_1, \dots, a_n)} = \dots = \overline{s_{n-1}(a_1, \dots, a_n)} = 0$. Отново с помощта на полинома $Q(x)$ получаваме, че a_i са различните корени на уравнението

$$Q(x) = x^{2k} + bx^k + 1 = 0.$$

Последният полином се разлага във вида

$$Q(x) = (x^k - z_1)(x^k - z_2) = 0,$$

и тогава получаваме, че корените му са върхове на два правилни k -ъгълника. Понеже знаем, че всички корени имат модул 1, то получаваме, че X_i са върховете на два правилни k -ъгълника, вписани в една и съща окръжност

(разбира се, това не изключва възможността всичките $n = 2k$ точки да са върхове на правилен n -ъгълник).

Лесно се проверява че така намерените множества изпълняват условието.

Предлагаме и още няколко задачи, които да използват тази техника.

Задача 16. В равнината са дадени n различни точки $X_1, \dots, X_n$ и $2n+1$ точки $T_1, \dots, T_{2n+1}$ върху окръжност. Равенствата

$$\sum_{i=1}^n |T_j X_i|^{2t} = \sum_{i=1}^n |T_k X_i|^{2t}$$

за всеки два индекса k и j и за $t = 1, \dots, n-1$ са едновременно в сила тогава и само тогава когато точките $X_1, \dots, X_n$ са върхове на правилен n -ъгълник.

Забележка. Лесно може да се докаже, че равенството е изпълнено за всички точки върху окръжността ω на $T_1, \dots, T_{2n+1}$. Може да се докаже и че $t = 1, \dots, n-1$ са единствените реални степени за които дадените суми са независими от движението на променливата точка върху ω .

Може да се зададе и въпросът дали е нужно горното равенство да е изпълнено за всички степени $t = 1, \dots, n-1$ за да можем да заключим, че точките $X_1, \dots, X_n$ са върхове на правилен n -ъгълник.

Задача 15. Дадени са три точки A , B и C и правилен петоъгълник $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$. Да се докаже, че ако:

$$|P_i A|^4 + |P_i B|^4 + |P_i C|^4 = |P_j A|^4 + |P_j B|^4 + |P_j C|^4$$

за всеки два индекса i и j , то ABC е равнобедрен триъгълник.

Ще завършим с една трудна задача.

Задача 17. (Romanian master of Mathematics 2010, Задача 6). Нека $Q(x)$ е полином с рационални коефициенти от поне втора степен. Означаваме $Q^0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, $Q^{n+1}(\mathbb{Q}) = Q(Q^n(\mathbb{Q}))$ (с $Q(S)$ означаваме множеството $\{Q(x) : x \in S\}$). Да се докаже, че множеството

$$\bigcap_{i=0}^{\infty} Q^i(\mathbb{Q})$$

е крайно.

Решение. Решението се базира на две лема.

Лема 1. За всеки полином $P(z)$ с комплексни коефициенти от поне втора степен, съществува константа c_a , такава че $|P(z)| > |az|$ за $|z| > c_a$, където също е константа.

Доказателство. Нека $P(z) = z_n z^n + \dots + z_0$. Имаме $|P(z)/z| > |z_n z^{n-1} + \dots + |z_1| - |z_0/z|$. Лесно се вижда, че когато вземем $|z| \rightarrow \infty$, първият модул клони към безкрайност, докато вторият клони към 0 ($n > 1$). Оттук лесно заключаваме, че за всеки полином с комплексни коефициенти $P(z)$ съществува константа c , такава че $a_n = |P^n(z)|$ е растяща редица ($P^n(z)$ е n -тата итерация на полинома) за $|z| > c$, която клони към безкрайност – просто избираме c така, че при $|z| > c$ имаме $|P(z)| > 2|z|$.

Нека сега да имаме полином с рационални коефициенти

$$Q(x) = \frac{1}{s}(p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0),$$

където s и p_i са цели числа – привели сме коефициентите под общ знаменател. С $v(p/q)$ означаваме най-голямата степен на просто число, която дели знаменателя на рационалното число p/q . Тогава имаме следното:

Лема 2. За рационалното число p/q , за което q не дели p_n и $(p, q) = 1$ е изпълнено:

$$v(Q^n(p/q)) \geq n,$$

където $Q(x)$ е от поне втора степен.

Доказателство. Нека r^α е степен на просто число, която дели q , но не и p_n . Тогава имаме

$$\begin{aligned} Q(p/q) &= \frac{1}{s}(p_n \frac{p^n}{q^n} + p_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + p_0) = \\ &= \frac{1}{s}(p_n \frac{p^n}{q^n} + p_{n-1} \frac{qp^{n-1}}{q^n} + \dots + \frac{p_0 q^n}{q^n}). \end{aligned}$$

Тогава знаменателят на тази дроб се дели на $r^{\alpha n}$, докато най-голямата степен на r , която дели числителя, е $v_r(p_n) < \alpha$. Тогава след съкращаване имаме, че знаменателят на тази дроб се дели на степента $\alpha n - v_p(p_n) > \alpha n - \alpha \geq \alpha$. С това доказателството е завършено.

Сега да разгледаме интервала Δ , извън който $|Q^n(x)|$ клони към безкрайност, когато n клони към безкрайност. В този интервал има краен брой рационални числа, чиито знаменатели делят старшия коефициент на

полинома след като приведем коефициентите под общ знаменател – нека този брой е t . Да допуснем, че

$$|\bigcap_{i=0}^{\infty} Q^i(\mathbb{Q})| > s$$

и нека $t_1, \dots, t_{s+1}$ са различни елементи на това множество. С $Q^{-n}(t_i)$ означаваме произволно решение на $Q^n(x) = t_i$. Сега нека разгледаме някое конкретно t_i . Тогва за $x \notin \Delta$ съществува n_i , такова че $Q^n(x) > t_i$ за $n > n_i$. От друга страна съществува n'_i , такова че $v(P^n(a/b)) > v(t_i)$ за $n > n'_i$ за всяко x чийто знаменател не дели p_n . Тогава за $n > \max\{n_i, n'_i\}$ получаваме че $P^{-n}(t_i) = a_i/b_i \in \Delta$ и b_i/p_n . Тогава избирайки

$$n_0 = \max\{n_1, n'_1, \dots, n_{s+1}, n'_{s+1}\}$$

получаваме, че $P^{-n_0-1}(t_i) = a_i/b_i \in \Delta$ и b_i/p_n за $i = 1, \dots, s+1$. Понеже очевидно $P^{-k}(x) \neq P^{-k}(y)$ за $x \neq y$ получаваме противоречие, откъдето

$$|\bigcap_{i=0}^{\infty} Q^i(\mathbb{Q})| \leq s.$$

Симедиани в триъгълник

Стоян Боев

stoyan@nbu.bg

- Тате, колко е нужно да знае човек?
- Малко е нужно, сине.
- А колко е достатъчно, тате?
- Това никой не знае, сине!

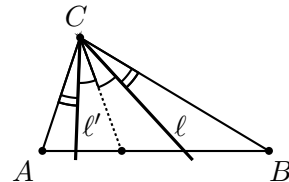
I Въведение

Познаването на основните елементи в триъгълника – височини, медиани, симетрали, вътрешни и външни ъглополовящи и съответните им забележителни точки – ортоцентър, медицентър, център на описаната, на вписаната и въшновписаните окръжности далеч не изчерпва богатството на геометричните конфигурации, които един триъгълник може да породява. *Симедианите* и пресечната им точка (*точката на Лемоан*) са един от брилянтните примери за това. Неслучайно Рос Хонсбергер в неговата емблематична книга „Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry“ нарича точката на Лемоан „перлата в короната на съвременната геометрия“.

II Определения

Да обърнем внимание, че основните елементи в триъгълник като височини, медиани и вътрешни ъглополовящи са чевиани¹. Симедианите също са такива и в този смисъл ще ги дефинираме в един по-широк контекст.

Определение 1. Две прави, минаващи през един връх на даден триъгълник наричаме *изогонално спрегнати*, ако те са симетрични относно вътрешната ъглополовяща, минаваща през този връх (фиг. 1).



Фигура 1

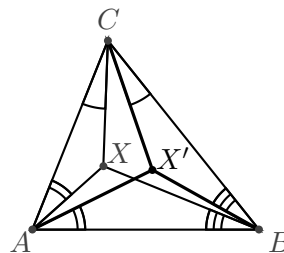
Оказва се, че ако три чевиани се пресичат в една точка, то съответните

¹ *Чевiana* наричаме отсечка, свързваща връх на триъгълник с точка от правата, определена от другите му два върха. Името идва от известната теорема на Чева, даваща необходимо и достатъчно условие три чевиани в триъгълник, съответни на трите му върха, да се пресичат в една точка.

им изогонално спрегнати прави също се пресичат в една точка². Това ни дава основание за следното определение:

Определение 2. Нека X е произволна точка в равнината на $\triangle ABC$ и да разгледаме правите AX , BX и CX . Пресечната точка X' на техните изогонално спрегнати прави наричаме *изогонално спрегната точка* на X (фиг. 2).

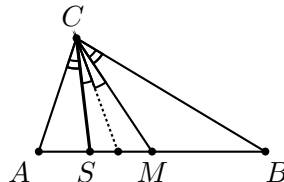
☞ Ако X' е изогонално спрегната на X , то X е изогонално спрегната на X' и в този смисъл, точките X и X' наричаме *изогонално спрегнати*.



Фигура 2

Пример. Ако в даден $\triangle ABC$ използваме стандартните означения, то H и O са изогонално спрегнати, а I е изогонално спрегната със себе си.

Определение 3. Нека CM е медиана в $\triangle ABC$ и изогонално спрегнатата права на CM пресича правата AB в точка S (фиг. 3). Тогава отсечката CS , а понякога и самата права CS , наричаме *симедиана* в $\triangle ABC$.



Фигура 3

☞ Тъй като медианите в триъгълник се пресичат в една точка, то симедианите му също се пресичат в една точка. Това е изогонално спрегнатата точка на медицентъра G , която наричаме *точка на Лемоан*³.

III Характеристични свойства на симедианата

1 Права ℓ през върха C на $\triangle ABC$, пресичаща описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка D , е симедиана в $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато

$$AD : BD = AC : BC,$$

т.е. $ADBC$ е хармоничен четириъгълник⁴.

² Това най-лесно се доказва със синусовия вариант на теоремата на Чева.

³ Emile Lemoine (1840-1912) е френски математик, известен с откриването и изследване свойствата на пресечната точка на симедианите в триъгълник (1873 г.)

⁴ Вписан в окръжност четириъгълник наричаме *хармоничен*, ако произведенията на срещуположните му страни са равни (Виж Олимпийски теми 2010).

Доказателство. Нека M е средата на AB (фиг. 4).

($\rightarrow$) Ако ℓ е симедиана в $\triangle ABC$, то $\triangle ADC \sim \triangle MBC$ ($\angle ACD = \angle MCB$ и $\angle ADC = \angle MBC$).

Така получаваме

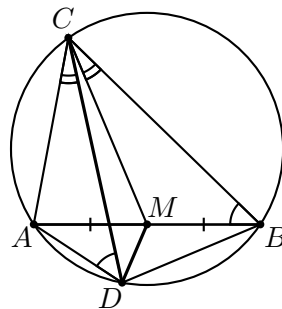
$$\frac{AD}{CD} = \frac{MB}{CB} \Rightarrow AB \cdot CD = 2AD \cdot BC.$$

От друга страна, от теоремата на Птолемей

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC + AC \cdot BD$$

и следователно $AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

($\leftarrow$) Обратно, ако $AD \cdot BC = AC \cdot BD$ от теоремата на Птолемей следва, че $AB \cdot CD = 2AD \cdot BC$, т.е. $\frac{AD}{CD} = \frac{MB}{CB}$. Но $\angle ADC = \angle MBC$ и следователно $\triangle ADC \sim \triangle MBC$, т.е. $\angle ACD = \angle MCB$ и ℓ е симедиана в $\triangle ABC$.



Фигура 4

2 Права ℓ през върха C на $\triangle ABC$, пресичаща страната AB в точка S , е симедиана в $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато

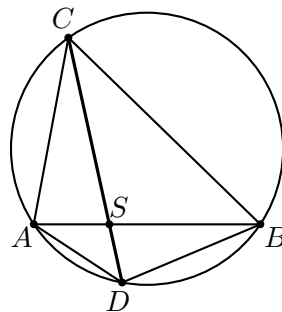
$$AS : BS = AC^2 : BC^2.$$

Доказателство. Нека ℓ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка D (фиг. 5). От **1** следва, че s е симедиана в $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато $AD : BD = AC : BC$. От друга страна,

$$\frac{AS}{BS} = \frac{S_{DAC}}{S_{DBC}} = \frac{AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAC}{BD \cdot BC \cdot \sin \angle DBC} = \frac{AD \cdot AC}{BD \cdot BC}$$

и следователно

$$AD : BD = AC : BC \Leftrightarrow AS : BS = AC^2 : BC^2.$$



Фигура 5

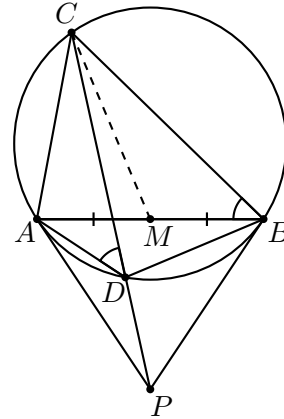
3 Права ℓ през върха C на $\triangle ABC$ е симедиана в $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато ℓ минава през пресечната точка на допирателните в точките A и B към описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Доказателство. Нека P е пресечната точка на допирателните в точките A и B към описаната около $\triangle ABC$ окръжност k и $D = CP \cap k$ (фиг. 6). От $\triangle ADP \sim \triangle CAP$ и $\triangle BDP \sim \triangle CBP$ следва, че

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AP}{CP} = \frac{BP}{CP} = \frac{BD}{BC},$$

т.е. $AD : BD = AC : BC$ и от **1** следва, че CP е симедиана в $\triangle ABC$. Така получаваме, че

$$\ell \text{ е симедиана в } \triangle ABC \Leftrightarrow P \in \ell.$$



Фигура 6

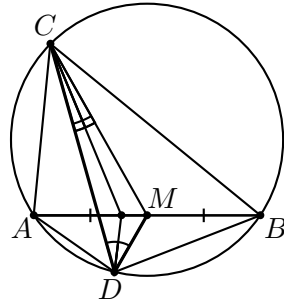
4 Права ℓ през върха C на $\triangle ABC$, пресичаща описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка D , е симедиана в $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато вътрешните ъглополовящи на $\angle ACB$ и $\angle ADB$ се пресичат върху AB .

Доказателство. От **1** следва, че ℓ е симедиана в $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато

$$AC : BC = AD : BD,$$

което е еквивалентно именно с това, ъглополовящите на $\angle ACB$ и $\angle ADB$ да се пресичат върху AB .

Нещо повече, ако ℓ е симедиана в $\triangle ABC$, то от **1** следва, че ℓ е симедиана и в $\triangle ABD$ и тогава ъглополовящите на $\angle ACB$, $\angle ADB$ и правата AB се явяват вътрешни ъглополовящи за $\triangle CDM$, където M е средата на AB (фиг. 7).



Фигура 7

5 Права ℓ през върха C на $\triangle ABC$, пресичаща описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка D , е симедиана в $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато AB разполовява $\angle CMD$, където M е среда на AB .

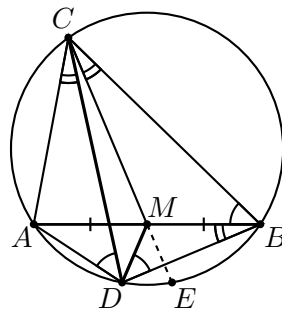
Доказателство. Нека $CM^\rightarrow$ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точка E (фиг. 8).

($\rightarrow$) Ако ℓ е симедиана в $\triangle ABC$, то от **1** следва, че ℓ е симедиана и в $\triangle ABD$. Тогава $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD$, $\sphericalangle BDM = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$ и от свойството на външните ъгли получаваме, че $\sphericalangle AMC = \sphericalangle AMD$.

($\leftarrow$) Обратно, ако $\sphericalangle AMC = \sphericalangle AMD$, то D и E са симетрични относно симетралата на AB . В същото време, тъй като M е среда на AB , то

$$S_{AEC} = S_{BEC} \Rightarrow AC \cdot AE = BC \cdot BE.$$

Но $AE = BD$, $BE = AD$ и следователно $AC \cdot BD = BC \cdot AD$. Тогава от **1** следва, че ℓ е симедиана в $\triangle ABC$.



Фигура 8

IV Характеристични свойства на хармоничния четириъгълник

Както вече споменахме, един вписан в окръжност четириъгълник наричаме *хармоничен*, ако произведенията на срещуположните му страни са равни. Оказва се, че основните свойства на симедианата в триъгълник са пряко свързани именно със свойствата на хармоничния четириъгълник.

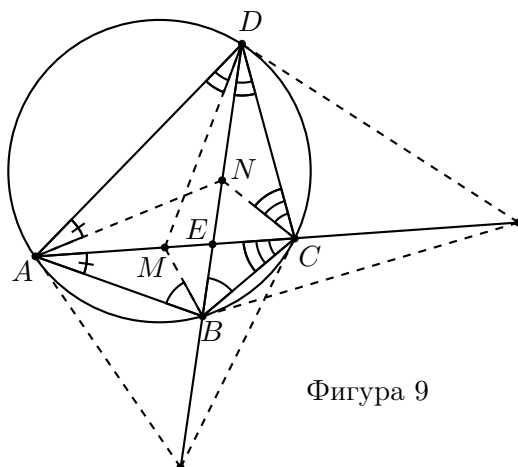
Теорема. Ако четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k , диагоналите му AC и BD се пресичат в точка E , а M и N са средите на AC и BD съответно, то $ABCD$ е хармоничен тогава и само тогава, когато е в сила поне едно от условията:

- ① AE е симедиана в $\triangle ABD$ или BE е симедиана в $\triangle BCA$, или CE е симедиана в $\triangle CDB$, или DE е симедиана в $\triangle DAC$.
- ② допирателните към k в точките A и C се пресичат върху правата BD ;
- ③ допирателните към k в точките B и D се пресичат върху правата AC ;
- ④ ъглополовящите на $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ се пресичат върху AC ;
- ⑤ ъглополовящите на $\sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle BCD$ се пресичат върху BD ;
- ⑥ диагоналът AC разполовява $\sphericalangle BMD$;
- ⑦ диагоналът BD разполовява $\sphericalangle ANC$.

Доказателство. Имаме

- от **1** следва ①;
- от **3** следва ② и ③;
- от **4** следва ④ и ⑤;
- от **5** следва ⑥ и ⑦.

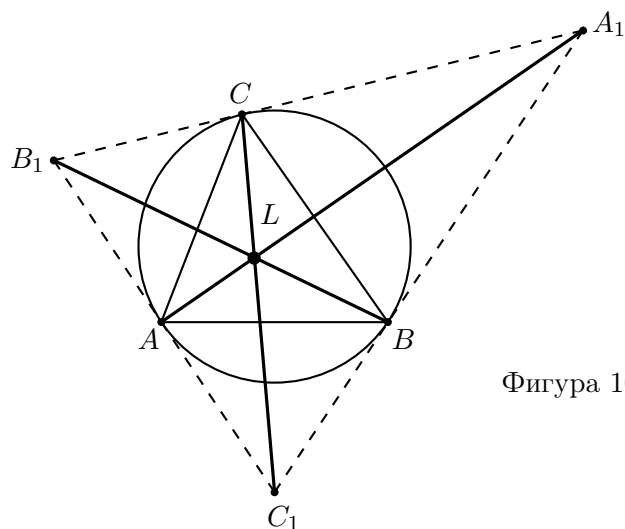
Получената конфигурация е изобразена на фиг. 9.



Фигура 9

V Характеристични свойства на точката на Лемоан

Както вече споменахме, трите симедиани в един триъгълник се пресичат в една точка, която наричаме *точка на Лемоан*. Съществуването на тази точка най-лесно се доказва с помощта на теоремата на Чева и свойство **2**. Нещо повече, оказва се, че точката на Лемоан за $\triangle ABC$ съвпада с точката на Жергон за триъгълника, получен от допирателните в точките A , B и C към описаната около $\triangle ABC$ окръжност (фиг. 10).



Фигура 10

6 Ако L е точката на Лемоан за $\triangle ABC$, то разстоянията ѝ до страните на триъгълника са пропорционални на съответните страни. Нещо повече, L е единствената вътрешна точка за $\triangle ABC$ с това свойство.

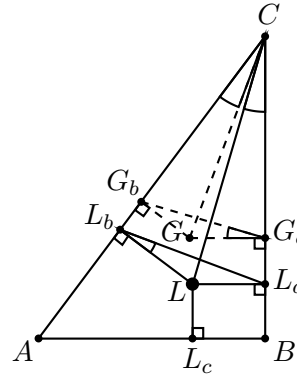
Доказателство. Нека L_a , L_b и L_c са проекциите на L върху страните на BC , CA и AB съответно. Необходимо е да докажем, че

$$LL_a : LL_b : LL_c = a : b : c.$$

Нека G е медицентър на $\triangle ABC$, а G_a и G_b са проекциите на G върху BC и CA съответно (фиг. 11). От факта, че $\angle LCB = \angle GCA$ лесно следва, че $\triangle LL_aL_b \sim \triangle GG_bG_a$. Тогава

$$LL_a : LL_b = GG_b : GG_a = \frac{2S_{AGC}}{AC} : \frac{2S_{BGC}}{BC} = a : b$$

и аналогично $LL_b : LL_c = b : c$. Относно факта, че L е единствената точка от вътрешността на $\triangle ABC$ с посоченото свойство е достатъчно да допуснем противното и проследявайки горното решение да достигнем до противоречие.



Фигура 11

7 Ако L е точката на Лемоан за $\triangle ABC$, то L е медицентър на триъгълника, образуван от проекциите на L върху страните на $\triangle ABC$. Нещо повече, L е единствената вътрешна точка за $\triangle ABC$ с това свойство.

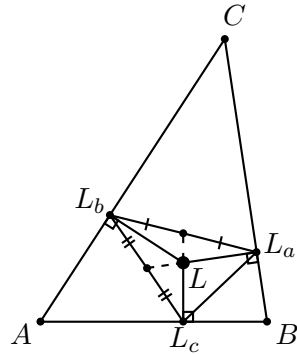
Доказателство. Нека L_a , L_b и L_c са проекциите на L върху страните на BC , CA и AB съответно (фиг. 12). Необходимо е да докажем, че

$$S_{LL_aL_b} = S_{LL_bL_c} = S_{LL_cL_a}.$$

От **6** следва, че $LL_a : LL_b : LL_c = a : b : c$. Тогава

$$\frac{S_{LL_aL_b}}{S_{LL_bL_c}} = \frac{LL_a \cdot LL_b \cdot \sin(180^\circ - \gamma)}{LL_b \cdot LL_c \cdot \sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{LL_a \cdot c}{LL_c \cdot a} = 1,$$

т.е. $S_{LL_aL_b} = S_{LL_bL_c}$ и аналогично $S_{LL_bL_c} = S_{LL_cL_a}$.



Фигура 12

8 Сумата от квадратите на разстоянията от произволна точка P от вътрешността на $\triangle ABC$ до страните му е минимална точно тогава, когато P съвпада с точката на Лемоан за $\triangle ABC$.

Доказателство. Нека P е произволна точка от вътрешността на $\triangle ABC$ и x , y и z са разстоянията и до страните BC , CA и AB съответно. Ако използваме стандартните означения за $\triangle ABC$, то

$$ax + by + cz = 2S.$$

От друга страна, имаме така нареченото *твърждество на Лагранж*

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

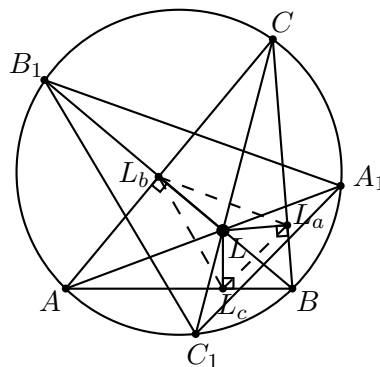
Следователно $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ като равенство се достига точно тогава, когато $x : y : z = a : b : c$ и от [6] следва, че P съвпада с точката на Лемоан за $\triangle ABC$.

[9] Ако L е точката на Лемоан за $\triangle ABC$ и правите LA , LB и LC пресичат за втори път описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точките A_1 , B_1 и C_1 съответно, то L е точка на Лемоан и за $\triangle A_1B_1C_1$.

Доказателство. Нека L_a , L_b и L_c са проекциите на L върху страните BC , CA и AB съответно (фиг. 13). Лесно се проверява, че

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle L_aL_bL_c.$$

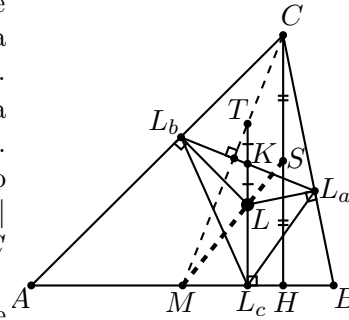
Нещо повече, правите AA_1 , BB_1 и CC_1 в $\triangle A_1B_1C_1$ са съответни на изогонално спрегнатите прави на LL_a , LL_b и LL_c в $\triangle L_aL_bL_c$. И тъй като от [7] следва, че LL_a , LL_b и LL_c се пресичат в медицентъра на $\triangle L_aL_bL_c$, то техните изогонално спрегнати прави се пресичат в точката на Лемоан за $\triangle L_aL_bL_c$, т.е. L е точката на Лемоан и за $A_1B_1C_1$.



Фигура 13

[10] Ако L е точката на Лемоан за $\triangle ABC$, то L лежи на правите, съединяващи средите на страните със средите на съответните височини.

Доказателство. Нека L_a, L_b и L_c са проекциите на L върху страните BC, CA и AB съответно, а правата LL_c пресича L_aL_b в точка K (фиг. 14). От свойство [7] следва, че L е медицентър на $\triangle L_aL_bL_c$ и следователно K е среда на L_aL_b . Ако T е симетричната точка на L относно K , то четириъгълникът LL_aTL_b е успоредник, $LL_a \parallel L_bT$, $LL_b \parallel L_aT$ и от $LL_a \perp BC$, $LL_b \perp AC$ следва, че T е ортоцентър на $\triangle L_aL_bC$. От друга страна, четириъгълникът LL_aCL_b е



Фигура 14

$$\sphericalangle LCL_a = \sphericalangle LL_bL_a = 90^\circ - \sphericalangle L_aL_bC = \sphericalangle L_bCT,$$

т.е. правите CT и CL са изогонално спрегнати и следователно $CT^{\rightarrow}$ минава през средата M на страната AB . Остава да съобразим, че $LT = 2LK = LL_c$, $TL_c \perp AB$ и от теоремата на Щайнер следва, че $ML^{\rightarrow}$ минава през средата S на височината CH в $\triangle ABC$.

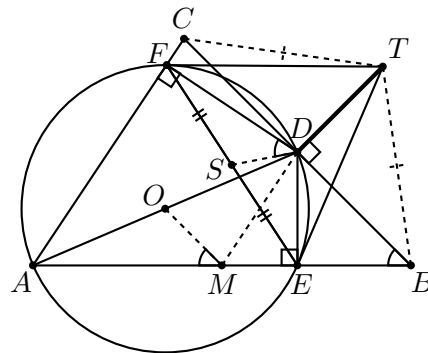
VI Няколко олимпийски задачи

Задача 1. Нека D е средата на страната BC на $\triangle ABC$. Означаваме с E и F проекциите на D върху страните AB и AC съответно. Ако допирателните в точките E и F към окръжността с диаметър AD се пресичат в точка T , то да се докаже, че $TB = TC$.

Купата на Колмогоров

Решение. Достатъчно е да докажем, че T лежи на симетралата на BC , т.е. $\sphericalangle TDB = 90^\circ$. Нека S е средата на EF . От свойство [3] следва, че TD е симедиана в $\triangle EDF$, т.е. $\sphericalangle TDE = 180^\circ - \sphericalangle FDS$ и следователно

$$\begin{aligned} \sphericalangle TDB &= \sphericalangle TDE - \sphericalangle EDB = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle FDS - \sphericalangle EDB = \\ &= 90^\circ + \sphericalangle ABC - \sphericalangle FDS. \end{aligned}$$



Фигура 15

От друга страна, ако O е среда на AD , а M е среда на AB , то $\angle DFE = \angle DAM$, $\angle DEF = \angle DAF = \angle ADM$, т.е. $\triangle DFA \sim \triangle MAD$ и

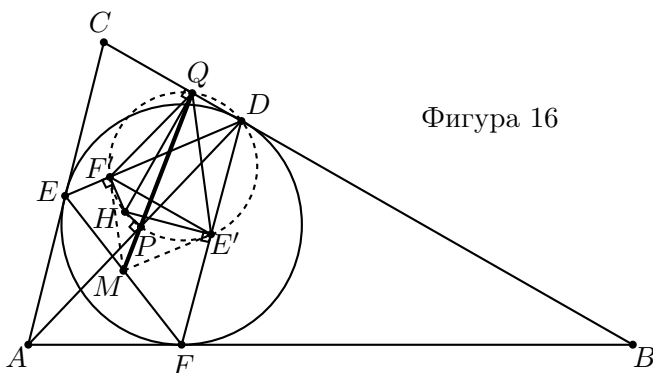
$$\angle FDS = \angle AMO = \angle ABC.$$

Следователно, $\angle TDB = 90^\circ$, т.е. $TB = TC$.

Задача 2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните BC , CA и AB в точките D , E и F съответно. Нека M е средата на EF , а P и Q са проекциите на ортоцентъра на $\triangle DEF$ върху правите AD и BC . Да се докаже, че точките P , Q и M лежат на една права.

Контролно за МОМ'2012, Н.Белухов

Решение. Нека E' и F' са проекциите на ортоцентъра H на $\triangle DEF$ върху страните DF и DE съответно (фиг. 16).



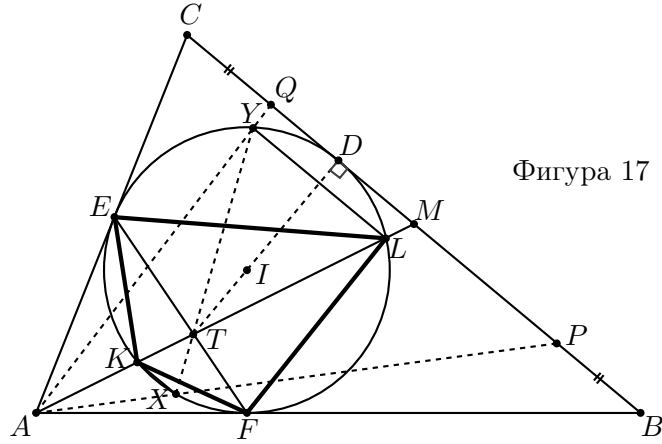
Фигура 16

Точките P , Q , E' , F' , H и D лежат на окръжност k с диаметър HD . Следователно, $\angle E'F'Q = \angle E'DB = \angle FED$, $\angle E'QF' = \angle E'DF'$, т.е. $\triangle E'F'Q \sim \triangle FED$. От друга страна, от свойство [3] следва, че DA е симедиана в $\triangle FED$ и понеже $\angle ADE = \angle PQF'$, то QP е симедиана в $\triangle E'F'Q$. Остава да съобразим, че ME' и MF' се допират до k и отново от свойство [3] следва, че точките P , Q и M лежат на една права.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$ в който медианата AM пресича вписаната окръжност k в точките K и L . Построени са прави през K и L , успоредни на BC , които пресичат за втори път k в точките X и Y съответно. Ако AX и AY пресичат BC в точките P и Q , то докажете, че $BP = CQ$.

TST, Иран, 2006

Решение. Нека вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k е с център I и се допира до страните BC , CA и AB в точките D , E и F съответно, а $T = AM \cap EF$ (фиг. 17).



Фигура 17

Известен факт е, че точките T , I и D лежат на една права (за доказателството му е нужно да се построи права през точка T , успоредна на BC) и от съображение за симетрия точките X , Y и T също лежат на една права. От $KX \parallel LY \parallel BC$ следва, че

$$\frac{AM}{MP} = \frac{AK}{KX}, \quad \frac{AM}{MQ} = \frac{AL}{LY}, \quad \frac{KX}{LY} = \frac{KT}{LT}$$

и следователно $BP = CQ \Leftrightarrow MP = MQ \Leftrightarrow \frac{AK}{AL} = \frac{KT}{LT} \Leftrightarrow (A, K, T, L) = 1$.

Остава да съобразим, че $KFLE$ е хармоничен четириъгълник и EF е симедиана в $\triangle KEL$. Тогава от свойство **2** и $\triangle AKE \sim \triangle AEL$ получаваме

$$\frac{KT}{LT} = \frac{KE^2}{LE^2} = \frac{AK}{AE} \cdot \frac{AE}{AL} = \frac{AK}{AL}.$$

VII Допълнителни задачи

Задача 4. Даден е $\triangle ABC$. Произволна окръжност през върховете A и B пресича страните CA и CB в точките E и F съответно. Допирателните към описаната около $\triangle CEF$ окръжност се пресичат в точка P . Да се докаже, че $CP \rightarrow$ разполовява AB .

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$, вписан в окръжност k . Нека допирателните към k в точките A и B се пресичат в точка P и правата CP пресичат k за втори път в точка D . Ако X , Y и Z са проекциите на D върху правите AB , BC и CA съответно, то да се докаже, че $XY = XZ$.

Задача 6. Даден е $\triangle ABC$. Окръжността през върховете B и C , допираща се до AC в точка S и окръжността през върховете A и C , допираща се до BC в точка T се пресичат за втори път в точка N . Да се докаже, че

- а) CN е симедиана в $\triangle ABC$;
- б) $CN \leq R$, където R е радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 7. Даден е $\triangle ABC$, вписан в окръжност k . Вътрешната и външната ъглополовяща при върха C пресича правата AB в точките D и E . Описаната около $\triangle DEC$ окръжност пресича k за втори път в точката F . Да се докаже, че CF е симедиана в $\triangle ABC$.

Задача 8. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност k с център I , която се допира до страните му AB , BC и CA съответно в точките M , N и P . Ако правите PN и AB се пресичат в точка K , то да се докаже, че $CM \perp IK$.

Задача 9. Дадена е полуокръжност ω с център O . Върху диаметъра AB на ω е избрана точка P , различна от O , A и B . Нека X и Y са такива точки върху ω , че $\angle APX = \angle BPY = \alpha$. Да се докаже, че правата XY пресича правата AB в постоянна точка, която не зависи от големината на ъгъла α .

Задача 10. В триъгълник ABC точките M и N лежат съответно на страните AB и AC и са такива, че $MN \parallel BC$. Правите BN и CM се пресичат в точка P . Описаните около триъгълниците BMP и CNP окръжности се пресичат в две различни точки R и Q . Да се докаже, че $\angle BAQ = \angle CAP$.

БОМ'2009, Предложение от Молдова

Задача 11. В $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$) е вписана окръжност k с център I , която се допира до страната BC в точка D . Да се докаже, че AD е симедиана тогава и само тогава, когато $OI \perp AD$, където O е центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 12. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ ($AB \neq BC$) и нека O е пресечната точка на диагоналите му. Ако BO е симедиана за $\triangle ABC$, а DO е симедиана за $\triangle ADC$, то да се докаже, че AO е симедиана за $\triangle ABD$.

Задача 13. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) и окръжност ω , която се допира до бедрата AC и BC и пресича основата AB в точки K и L . Правата CK пресича за втори път ω в точка M . Нека P и Q са симетричните точки на K относно A и B съответно. Да се докаже, че описаната около $\triangle PQM$ окръжност се допира до ω .

Литература

- [1] А. Акопян. *Геометрия в картинки*. СМБ, София, 2011.
- [2] В. Прасолов. *Задачи по планиметрии*. МЦНМО, Москва, 2003.
- [3] С. Боев. *Олимпийски теми 2008: Хармонично отношение*. УНИМАТ СМБ, 2010.
- [4] D. Grinberg. *Isogonal conjugation with respect to a triangle*. Ver. 3, 2006.
- [5] R. Honsberger. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. USA 1995.