

Април 2020

Задача 1. Естествените числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ са такива, че

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \text{ за } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Да се докаже, че поне едно от числата $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ се дели на 2^{2020} .

Задача 2. Да се намерят всички 2020-орки $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ от неотрицателни реални числа, които изпълняват всяко от следните три условия:

(1) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;

(2) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(3) съществува пермутация $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ на $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$, такава, че

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Ако n е естествено число, пермутация на дадена n -орка е n -орка, съдържаща същите елементи в някакъв ред. Например $(2, 1, 2)$ е пермутация на $(1, 2, 2)$. И двете от тях са пермутации на $(2, 2, 1)$. Всяка n -орка е пермутация на самата себе си.

Задача 3. Даден е изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$, за който $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle E$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle D = \sphericalangle F$ и вътрешните ъглополовящи на $\sphericalangle A, \sphericalangle C$ и $\sphericalangle E$ се пресичат в една точка.

Да се докаже, че вътрешните ъглополовящи на $\sphericalangle B, \sphericalangle D$ и $\sphericalangle F$ също се пресичат в една точка.

Забележка: $\sphericalangle A = \sphericalangle FAB$. Останалите ъгли на шестоъгълника могат да бъдат записани по подобен начин.

Април 2020

Задача 4. Една пермутация на числата $1, 2, \dots, m$ се нарича *свежа*, ако не съществува естествено число $k < m$, за което първите k числа в пермутацията са $1, 2, \dots, k$ в някакъв ред. С f_m означаваме броя на свежите пермутации на числата $1, 2, \dots, m$.

Да се докаже, че $f_n \geq n f_{n-1}$ за всяко $n \geq 3$.

Например, когато $m = 4$, пермутацията $(3, 1, 4, 2)$ е свежа, за разлика от пермутацията $(2, 3, 1, 4)$.

Задача 5. Даден е триъгълник ABC , за който $\angle BCA > 90^\circ$. Нека R бъде радиусът на описаната около ABC окръжност Γ . Точката P лежи във вътрешността на отсечката AB и е такава, че $PB = PC$ и $PA = R$. Симетралата на PB пресича Γ в точките D и E .

Да се докаже, че P е центърът на вписаната в триъгълник CDE окръжност.

Задача 6. Нека $m > 1$ е естествено число. Редицата $a_1, a_2, a_3, \dots$ е такава, че $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, и за всяко $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Да се намерят всички естествени числа m , за които всеки член на редицата е точен квадрат на цяло число.