Матбой МБОМ: 04.06.2018

A1. Нека $x>y>z>0$ и $x+y+z=x^3+y^3+z^3$. Сравнете по големина числата $x^6+y^6+z^6$ и $x^4+y^4+z^4$.

A1. Имаме $x^6-x^4-x^3+x=x\left(x^2-1\right)\left(x^3-1\right)\geq 0$, като равенство се достига само при $x=1$. Аналогично $y^6-y^4-y^3+y\geq 0$ и $z^6-z^4-z^3+z\geq 0$. Но тогава

$$x^6+y^6+z^6-\left(x^4+y^4+z^4\right)=x^6+y^6+z^6-\left(x^4+y^4+z^4\right)-\left(x^3+y^3+z^3\right)+\left(x+y+z\right)\geq 0$$

съгласно отбелязаното по-горе. Равенство може да се получи само ако $x=y=z=1$, но по условие числата са различни, откъдето $x^6+y^6+z^6>x^4+y^4+z^4$.

A2. Ако a, b, c са положителни числа със сбор 1, докажете $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ac}{b+ac}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}$.

A2. Имаме $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ac}{b+ac}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2a}{a+bc}+\frac{2b}{b+ac}+\frac{2c}{c+ab}\leq\frac{3}{2}+3\Leftrightarrow$
$\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ac}+\frac{c}{c+ab}\leq\frac{9}{4}$. По-нататък,

$$\frac{a}{a+bc}=\frac{a}{a\left(a+b+c\right)+bc}=\frac{a}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)}=\frac{a\left(b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}$$

и аналогично за другите две дроби. Неравенството придобива вида

$$\frac{2\left(ab+bc+ac\right)}{\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}\leq\frac{9}{4}\Leftrightarrow 8\left(ab+bc+ac\right)\leq 9\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right).$$

Тук отново използваме, че $a+b+c=1$ и записваме неравенството във вида $8\left(a+b+c\right)\left(ab+bc+ac\right)\leq 9\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)$. След разкриване на скобите и приведение получаваме неравенството $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc\geq 0$, което е еквивалентно с $a\left(b-c\right)^2+b\left(c-a\right)^2+c\left(b-a\right)^2\geq 0$.

A3. В триъгълник ABC ъглите при B и C са по 40° и BD е ъглополовяща. Докажете, че $BD+DA=BC$.
A3. От BDC 120 следва $BD<BC$. Нека точка E от страната BC е такава, че $BD=BE$. Сега с ъгли доказваме, че $BD=BE$ и че $ABED$ е вписан. От равни дъги $AD=DE$. Резултатът следва.

A4. Даден е триъгълник ABC, в който $AB>AC$. Ъглополовящата на външния ъгъл при върха A пресича описаната около ΔABC окръжност в точка E. Нека $EF\perp AB, F\in AB$. Да се докаже, че $AF=\frac{1}{2}\left(AB-AC\right)$.

A4. Нека $D\in BF$ е такава точка, че $AD=2DF$. Тогава $AE=ED$. Нека правата DE пресича за втори път окръжността в точка G, а върху правата CA да изберем точка P така, че A е между C и P. Имаме $\angle BGE=\angle BAE=\angle ADE=\angle BDG$. Оттук $BG=BD$. Освен това, $\angle GEA=180^{\circ}-2\angle EAD=180^{\circ}-\angle PAD=\angle BAC$. Това ни дава равенството на дъгите BC и GA, а значи и на BG и на CA. Оттук следва

$$AB-AC=AB-BG=AB-BD=AD=2AF.$$

A5. Да се намерят всички прости числа p, q, r, такива че $\frac{p}{q}-\frac{4}{r+1}=1$.

A5. Уравнението е равносилно с $(p-q)(r+1)=4q$. Оттук следва, че простите числа p и q са различни и ако d е общ делител на $p-q$ и q, той е делител и на p, следователно $d=1$. Така $p-q$ е равно на някое от числата 1, 2 или 4. От тези три случая получаваме за $(p;q;r)$ тройките $(3;2;7)$, $(5;3;5)$ и $(7;3;2)$.

A6. Намерете всички двойки цели числа x, y, за които $x^2\left(y+1\right)+y^2\left(x+1\right)=11$.

A6. Записваме даденото уравнение във вида $x^2\left(y+1\right)+y^2\left(x+1\right)-4=7\Leftrightarrow xy\left(x+y\right)+\left(x+y\right)^2-2xy-4=7\Leftrightarrow$ $xy\left(x+y-2\right)+\left(x+y\right)^2-4=7\Leftrightarrow\left(x+y-2\right)\left(xy+x+y+2\right)=7$. Следователно и двата множителя вляво са делители на 7, откъдето са налице следните четири възможности:

1) $\left|\begin{array}{l} x+y-2=-7 \\ xy+x+y+2=-1 \end{array}\right.$. Оттук получаваме $\left|\begin{array}{l} x+y=-5 \\ xy=2 \end{array}\right.$, което е невъзможно за цели x, y.

2) $\left|\begin{array}{l} x+y-2=-1 \\ xy+x+y+2=-7 \end{array}\right.$. Оттук $\left|\begin{array}{l} x+y=1 \\ xy=-10 \end{array}\right.$, което също е невъзможно.

3) $\left|\begin{array}{l} x+y-2=1 \\ xy+x+y+2=7 \end{array}\right.$. Оттук $\left|\begin{array}{l} x+y=3 \\ xy=2 \end{array}\right.$, откъдето получаваме решенията $(1;2)$ и $(2;1)$.

4) $\left|\begin{array}{l} x+y-2=7 \\ xy+x+y+2=1 \end{array}\right.$. Оттук $\left|\begin{array}{l} x+y=9 \\ xy=-10 \end{array}\right.$, откъдето получаваме решенията $(10;-1)$ и $(-1;10)$.

Втори начин: Да означим $x+y=p$, $xy=q$, където p и q са цели числа. Можем да запишем даденото уравнение във вида $pq+p^2-2q=11$, откъдето $q(2-p)=p^2-11$. Следователно $p\neq 2$ е такова, че p^2-11 се дели на $p-2$ и понеже p^2-4 също се дели на $p-2$, то и разликата $(p^2-4)-(p^2-11)=7$ трябва да се дели на $p-2$. Ето защо числото $p-2$ е някой от делителите на числото 7, тоест $p-2=\pm 1;\pm 7$. Оттук за $(p;q)$ получаваме двойките $(-5;2)$, $(1;-10)$, $(3;2)$ и $(9;-10)$ и после продължаваме като по първия начин.

Трета идея, която работи, но технически по-тромаво, е да разгледаме даденото уравнение като квадратно относно една от променливите и да изследваме дискриминантата на това квадратно уравнение.

А7. Дадени са 2018 точки на една права и една точка извън правата. Колко най-много могат да са равнобедрените триъгълници с върхове в тези точки?

А7. Нека O е точката извън правата g и H е петата на перпендикуляра от O към g. Равнобедрените триъгълници с основа върху g трябва да са симетрични относно OH, така че броят им е не повече от 1009. Равнобедрените триъгълници с основа OA извън g са с връх при сечението на OA с g, така че броят им е не повече от 2018. Така търсеният брой е не повече от 3027. За да го постигнем, по g подреждаме в този ред точки $L_{2018}, L_{2017}, \ldots, L_2, L_1, R_1, R_2, \ldots, R_{2017}, R_{2018}$, като триъгълник OL_1R_1 има ъгли $36°$, $72°$, $72°$, $OL_2=L_2R_1$, $OR_2=R_2L_1$, $OL_i=L_iL_{i+1}$, $OR_i=R_iR_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots, 2017$, така че всички OL_i, OR_i и L_iR_i са основи на равнобедрени триъгълници.

А8. Квадрат е разделен на 49 квадратчета и на всяко е поставен черен или бял шоколадов бонбон. Всяка сутрин Ники изяжда два еднакви бонбона от квадратчета, имащи обща страна или връх, ако това е възможно. Колко бонбона най-много може да си гарантира Ники, каквото и да е разположението им?

А8. **Отг. 32** Ако бонбоните са като на чертежа вляво, нито един черен бонбон не може да бъде изяден. От останалите 33 бонбона не можем да изядем повече от 32 заради четността. От квадрата можем да изрежем 8 правоъгълника 3×2, от всеки от тях по две г-тримина, а във всяко от тях винаги може да се изядат два едноцветни бонбона.