Матбой МБОМ: 05.06.2018

В1. За положителните числа a, b и c е известно, че $ab^2+c^3<bc^2+a^3<ca^2+b^3$.

а) Кои две от числата могат да бъдат равни?

б) Ако дадените числа са различни, то кое от тях не може да е най-малкото?

В1. а) Да проверим възможно ли е $a=c$. Тогава, след като вместо c в дадените неравенства запишем a, получаваме $ab^2+a^3<a^2b+a^3<a^3+b^3$, откъдето $ab^2<a^2b<b^3 \Rightarrow ab<a^2<b^2$, а това е невъзможно.

Сега да проверим дали е възможно $b=c$. След като заместим c с b в дадените неравенства, получаваме $ab^2+b^3<b^3+a^3<a^2b+b^3 \Rightarrow ab^2<a^3<a^2b \Rightarrow b^2<a^2<ab$, което отново е невъзможно.

Остана да проверим дали е възможно $a=b$. След замяната на b с a в дадените неравенства достигаме до $a^3+c^3<ac^2+a^3<a^2c+a^3 \Leftrightarrow c^3<ac^2<a^2c \Leftrightarrow c^2<ac<a^2$, което е вярно при $a>c$. Следователно единствената възможност някои от числата да са равни е $a=b$.

б) Ще покажем, че не може най-малкото число да е b. Да предположим, че $b<a$ и $b<c$. Щом $bc^2+a^3<ca^2+b^3$, то $a^3-ca^2<b^3-bc^2=b\left(b^2-c^2\right)<0 \Rightarrow a^2\left(a-c\right)<0 \Rightarrow a<c$. Но тогава от $ab^2+c^3<ca^2+b^3$ получаваме, че $ab^2-b^3<a^2c-c^3$. Това неравенство обаче е невярно, понеже в лявата му страна числото е положително, а в дясната – отрицателно. Остава да се убедим, че всяко от числата a и c може да е най-малкото: това става например при $a=1$, $b=5$, $c=7$ и при $a=10$, $b=9$, $c=5$.

В2. Ако a, b, c са страни на триъгълник, докажете, че

$$\frac{a}{(b+c)(b+c-a)}+\frac{b}{(a+c)(a+c-b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b-c)} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Кога се достига равенство?

В2. След каноничното полагане $a=x+y$, $b=x+z$, $c=y+z$ за положителни x, y, z и фиксиране $x+y+z=3$ (умножавайки всяка променлива по дадено положително число) неравенството добива вида $\sum\frac{3-x}{(3+x)x} \geq \frac{3}{2}$.

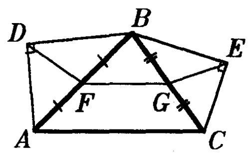
При $x=y=z=1$ се достига равенство. Търсим неравенство от вида $\frac{3-x}{(3+x)x} \geq px+q$, което да е в сила за всяко $0<x<3$. То е еквивалентно на $3-x \geq (px+q)(3x+x^2)$ и оттам на $px^3+(3p+q)x^2+(3q+1)x-3 \leq 0$. При $x=1$ има равенство, така че там уравнението трябва да има корен от четна кратност. Прилагаме Хорнер:

	p	$3p+q$	$3q+1$	-3
1	p	$4p+q$	$4q+4p+1$	$4q+4p-2=0$
1	p	$5p+q$	$5q+9p+1=0$	

и откриваме $p=-7/8$, $q=11/8$. Неравенството е сведено до $(x-1)^2(-7x-24) \leq 0$, което се изпълнява винаги щом $0<x<3$. Сумирайки за x, y, z, получаваме желаното.

В3. Върху страните AB и BC на триъгълника ABC, външно за триъгълника, са построени правоъгълните триъгълници $ABD\left(\angle ADB=90^\circ\right)$ и $BCE\left(\angle BEC=90^\circ\right)$. Да се докаже, че $AB+BC+CA \geq 2DE$.

В3. Да построим медианите DF и EG на двата правоъгълни триъгълника. Тогава FG е средна отсечка в ΔABC. Неравенството $DF+FG+GE \geq DE$ можем тогава да запишем във вида $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC \geq DE$, откъдето следва исканото в задачата.



В4. Даден е изпъкналият четириъгълник $ABCD$, в който $\angle ABC=90^\circ$ и $\angle BAD=\angle ADC=80^\circ$. Върху страните BC и AD на четириъгълника са взети съответно точките N и M така, че $\angle CDN=\angle ABM=20^\circ$. Намерете $\angle MNB$, ако е известно, че $MD=AB$.

В4. Понеже ΔAMB е равнобедрен, то $AB=MB$. Но $AB=MD$, следователно $MB=MD$, което означава, че $\angle MBD=\angle MDB=40^\circ$. Тогава $\angle BDN=20^\circ$. Да построим равностранния ΔBDP така, че A и P да са в различни полуравнини относно правата BD. Понеже $\angle DBC=30^\circ$, то правата BC е симетралата на отсечката DP, което означава, че $DN=PN$. От $\angle NDP=\angle BDP-\angle BDN=40^\circ$ следва $\Delta BDM \cong \Delta PDN$ по втори признак. От еднаквостта имаме $ND=MD$, тоест ΔMND е равностранен. Ето защо $MN=MD=AB=MB$, а това показва, че ΔBNM е равнобедрен. Оттук $\angle MNB=70^\circ$.

В5. Даден е ΔADC със страна AC 1 и окръжности k_1 A и k_2 C, които се пресичат в точка D. Произволна права през D пресича за втори път окръжностите съответно в точките M и N.

а) Докажете, че симетралите на отсечките MN имат обща точка.

б) Определете най-голямата възможна дължина на отсечката MN.

В5. Имаме . а) Ако DA_1 и DC_1 са диаметри съответно на k_1 и k_2, то точките M, N, A_1 и C_1 са върхове на трапец (евентуално изроден) с основи MA_1 и NC_1, перпендикулярни на MN (а тя е бедро или диагонал на трапеца). Тогава симетралата MN съдържа средната основа на трапеца, така че минава през постоянната среда на A_1C_1.

б) Ако изберем правата $MN \quad AC$, то полученият трапец е правоъгълник (евентуално изроден) и $MN \quad A_1C_1 \quad 2AC \quad 2$ (AC е средна отсечка). Във всички останали случаи дължината на MN е по-малка, понеже е перпендикуляр, а $A_1C_1=2$ е наклонена.

Забележка. Търсената в а) постоянна точка е като четвъртият връх на успоредник $ABCD$ с диагонал AC. Това е така, понеже $ABM \quad CNB$ по първи признак ($AB \quad CD \quad CN$; $AM \quad AD \quad CB$; $BAM \quad NCB$ поради $CMD \quad CDM$, $CND \quad CDN$ и съответните ъгли при правите на успоредника; има няколко случая.

В6. Естествените числа x, y и k са такива, че $x(x+1)(x+2)=y^k$. Да се докаже, че $k=1$.

В6. От равенството $(x+1)^2-x(x+2)=1$ следва, че числата $x+1$ и $x(x+2)$ са взаимно прости и тогава $x+1=u^k$ и $x(x+2)=z^k$ за подходящи естествени u, z. Но тогава $u^{2k}-z^k=1$, което е невъзможно при $k>1$, защото

$$u^2 \geq z+1 \Rightarrow u^{2k} > (z+1)z^{k-1} = z^k + z^{k-1} \geq z^k + 1.$$

В7 Да се намерят всички тройки цели числа x, y, z, за които $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=2$.

В7. Уравнението е равносилно на $(y-z)(x-z)(x-y)=2$. Сборът на първия и третия множител е равен на втория, така че са възможни само три разлагания: $2=1.2.1=(-2).(-1).1=1.(-1).(-2)$. Съответно получаваме отговорите $(k+1;k;k-1)$, $(k-1;k+1;k)$ и $(k;k-1;k+1)$ за всяко цяло k.

В8. На състезание по математика с 4 задачи се явили 7 деца. За всяка двойка задачи има дете, решило само тях. По колко различни начина може да се случи това?

В8. Двойките задачи са $4.3:2=6$, а децата са 7. Има два случая:

- Ако някое дете е решило 0, 1, 3 или 4 задачи, то има 7 варианта кое да е това дете и $1+4+4+1=10$ варианта какво да е решило. За останалите 6 деца има 6! начина за разпределяне кой коя двойка задачи да реши.
- Ако всяко дете е решило по 2 задачи, то има 6 варианта коя двойка задачи да е решена от две деца и $7.6:2=21$ начина кои две деца да са я решили. За останалите 5 деца има 5! начина за разпределяне кой коя друга двойка задачи да реши.

Общо начините са $70.6! + 21.6! = 91.720 = 65520$.

В9. В квадратна таблица 5×5 отначало всички полета са празни, като едно от тях е оцветено. Двама играчи, X и O, правят ходове, редувайки се. Който е на ход, поставя името си в незаето поле на таблицата, съседно (по страна или връх) на последното заето поле. Пръв е X, като при първия си ход може да играе в произволно неоцветено поле. Ако някой не може да играе, играта приключва с победа на другия. Ако някой постави знака си в оцветеното поле, той печели и играта приключва. Кой ще спечели при правилна игра? (Отговорът може да зависи от позицията на оцветеното поле.)

В9. Полетата, съседни на оцветеното, както и самото него, ще наричаме опасни. Ако някой играе в опасно неоцветено поле, той ще загуби играта при следващия си ход.

Ако оцветеното поле има обща точка с контура на таблицата, то опасните полета са 4 или 6. Останалите полета могат да се разбият на двойки съседни полета и едно отделно поле (покажете как!). Тогава X ще победи, ако с първия си ход играе в отделното поле, и после следва тактиката: ако O играе в неопасно поле, то X играе в другото поле от двойката му (така X винаги има възможен ход); ако O играе в опасно поле (то задължително е неоцветено), то X играе в оцветеното поле и побеждава.

Ако оцветеното поле няма обща точка с контура на таблицата, то опасните полета са 9. Останалите 16 полета могат да се разбият на двойки съседни (евентуално по диагонал – покажете как!). Тогава O ще победи, ако следва тактиката: ако X играе в неопасно поле, то O играе в другото поле от двойката му (така O винаги има възможен ход); ако X играе в опасно поле (то задължително е неоцветено), то O играе в оцветеното поле и побеждава.

В0. Какъв е най-големият възможен брой остри ъгли в n-ъгълник (не непременно изпъкнал)?

В0. Нека k е броят на острите ъгли. Тогава сборът от ъглите на многоъгълника е $(n-2)180^\circ > k.90^\circ + (n-k)360^\circ$, откъдето $2n-4<k+4n-4k$ и $3k\leq 2n+3$. Окончателно $k \leq \left[\frac{2n}{3}\right]+1$. Остава да се построят примери, показващи, че дадената оценка е точна. Направете това самостоятелно: може да разгледате три вида конструкции в зависимост от остатъка на n при деление с 3.