C1. Да се докаже, че ако a, b, $c>0$, то $(a^2+b^2+c^2)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc(ab+bc+ca)$.

C1. Умножавайки двете страни по $a+b+c>0$ и разкривайки скобите вляво, получаваме еквивалентното

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\right)\le abc\left(ab+bc+ca\right)\left(a+b+c\right).$$

Понеже според САСГ имаме $9abc\le(ab+bc+ca)(a+b+c)$, достатъчно е да докажем

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\right)\le 9a^2b^2c^2.$$

Ако $a^2=x$, $b^2=y$, $c^2=z$, то трябва да докажем $\left(x+y+z\right)\left(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2\right)\le 9xyz$. След разкриване на скобите това е равносилно с $x^3+y^3+z^3+3xyz-x^2y-x^2z-y^2z-y^2x-z^2x-z^2y\ge 0$, което се разлага до $x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-y)(z-x)\ge 0$, а това е частен случай на неравенството на Шур (самото му доказателство е елементарно: понеже неравенството е симетрично, можем да приемем, че $x\ge y\ge z$ и то е равносилно с $(x-y)\left(x(x-z)-y(y-z)\right)+z(y-z)(x-z)\ge 0$, което следва от наредбата на числата). Понеже числата са положителни, равенство навсякъде се достига само ако са равни помежду си.

C2. Даден е остроъгълен разностранен триъгълник ABC с ортоцентър H. Симетралите на AC и BC пресичат медианата CM съответно в точки N и P, а $K\in AN\cap BP$.

а) Докажете, че $AKB=2\ \ ACB$.

б) Ако $AKB=\ \ AHB$, докажете, че $ACK=\ \ BCM$.

C2. а) Нека $ACN=\ \ CAN=x$, $BCP=\ \ CBP=y$. Тогава при стандартните означения за ъглите имаме $AKB=180°-\ \ BAK-\ \ ABK=180°-\alpha+x-\beta+y=2\gamma$.

б) Понеже $AHB=180°-\gamma$, то от $AKB=\ \ AHB$ следва $\gamma=60°$. Нека AD, BE са перпендикулярите съответно от A, B към правата на медианата CM; тогава $AD=BE$. Нека CF, CG са перпендикулярите от C съответно към правите AK, BK. Понеже N лежи на симетралата на AC, то $AD=CF$. Понеже P лежи на симетралата на BC, то $BE=CG$. Тогава $CF=CG$, така че $AKC=\ \ BKC=120°$. Тогава $ACK=60°-\ \ KAC=60°-\ \ ACN=\ \ BCP$.

C3. Намерете всички прости p, за които $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}=x^n$ за някои естествени числа $n>1$ и x.

C3. $\boxed{\textbf{Отг. 3 и 7}}$ Явно $p>2$, при което МТФ гарантира, че числото е цяло. Щом $p=2k+1$, то $(2^k-1)(2^k+1)=px^n$. Множителите вляво са нечетни взаимно прости, така че имаме два случая:

Случай А. $2^k-1=py^n$, $2^k+1=z^n$, $yz=x$. Ако n е нечетно, то $2^k=\left(z-1\right)\left(z^{n-1}+z^{n-2}+\quad+z+1\right)$; където вторият множител е нечетен, по-голям от 1 и степен на двойката, което е абсурд. Така $n=2t$ е четно, то $2^k=\left(z^t-1\right)\left(z^t+1\right)$, така че множителите вдясно са степени на двойката с разлика 2, т.е. 2 и 4. Оттук $k=3$, $p=7$.

Случай Б. $2^k-1=y^n$, $2^k+1=pz^n$, $yz=x$. Ако $k=1$, получаваме решението $p=3$. Ако $k\ge 2$, то $y>1$ и $y^n\equiv 3 \pmod 4$, така че n е нечетно. Тогава $2^k=\left(y+1\right)\left(y^{n-1}-y^{n-2}+\quad-y+1\right)$; където вторият множител е нечетен, по-голям от 1 и степен на двойката, което е абсурд.

C4. Докажете, че има поне 671 съставни числа, чийто десетичен запис се състои от 2011 единици и 1 седмѝца.

C4. Нека $a_n=111...11+6.10^n$ е числото, при което след цифрата 7 има точно n единици. Явно число от този вид не може да се дели на 2, 3 и 5. По отношение делимостта на 7 имаме:

$n \bmod 6$	0	1	2	3	4	5
$10^n \bmod 7$	1	3	2	–1	–3	–2

Оттук следва, че числото 111111 се дели на 7 и че числото, записано с 2012 единици, дава остатък $1+3=4$ при деление на 7 (понеже $2012\equiv 2 \pmod 6$). Тогава a_n се дели на 7 при $6.10^n\equiv 3\equiv -18 \pmod 7$, т.е. $10^n\equiv -3 \pmod 7$, съответно $n\equiv 4 \pmod 6$. Числата от този вид са на брой $2010:6=335$. По отношение делимостта на 13 имаме:

$n \bmod 6$	0	1	2	3	4	5
$10^n \bmod 13$	1	–3	–4	–1	3	4

Оттук следва, че числото 111111 се дели на 13 и че числото, записано с 2012 единици е сравнимо с $1-3=-2$ при деление на 13. Тогава a_n се дели на 13 при $6.10^n\equiv 2\equiv -24 \pmod{13}$, т.е. $10^n\equiv -4 \pmod{13}$, съответно $n\equiv 2 \pmod 6$. Числата от този вид са пак 335 и са различни от горните. По отношение делимостта на 17 имаме:

$n \bmod 16$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$10^n \bmod 17$	1	–7	–2	–3	4	6	–8	5	–1

Последната колона сочи, че следващите остатъци (в колонки 9, 10, ...) са противоположни на написаните (в колонки 1, 2,...). Тогава числото, записано с 16 единици, се дели на 17, а числото, записано с $2012=125.16+12$ единици е сравнимо с $(1-1)+(7-7)+(2-2)+(3-3)+4+6-8+5=7$ по модул 17. Тогава a_n се дели на 17 при

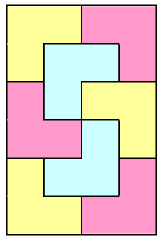
$6.10^n \equiv 10 \equiv -24 \pmod{17}$, т.е. $10^n \equiv -4 \pmod{17}$, съответно $n \equiv 12 \pmod{16}$. Достатъчно е да изберем число от този вид, различно от горните; за целта е подходящо например a_{12}. Така имаме поне $2.335+1=671$ съставни a_n.

C5. Съществуват ли безбройно много $(x;y;z;t)$ от естествени числа, за които $x^2+y^2=(x+1)^2+z^2=(x+2)^2+t^2$?

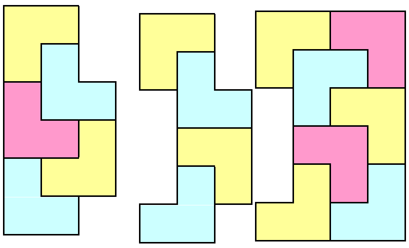
C5. Явно y, t са с еднаква четност; нека $y-t=2r$, $y+t=2s$, $y=s+r$, $t=s-r$ и от условието получаваме $4x+4=2r.2s$, т.е. $x=rs-1$. Остава да се погрижим за $z^2=x^2+y^2-(x+1)^2=(s+r)^2-2sr+2-1=s^2+r^2+1$, което ще е точен квадрат например при $r^2=2s$, като за целта можем да изберем $r=2n$, $s=2n^2$ за всяко естествено n. Получаваме безбройно много четворки: $x=4n^3-1$, $y=2n^2+2n$, $z=2n^2+1$, $t=2n^2-2n$.

C6. Ще наричаме „ъгълче” квадрат 2×2 без едното му единично квадратче. Правоъгълна таблица $m\times n$ е разчертана на ъгълчета, така че никой по-малък правоъгълник, съдържащ се в таблицата, не е точно запълнен с ъгълчета. Определете всички възможни стойности на $(m;n)$.

C6. Понеже лицето на ъгълчето е 3, единият от размерите се дели на 3. Ако той е 3, другият е задължително 2, и обратно. Сега да считаме, че и двата размера са по-големи от 3.



Ако някой от размерите е нечетен, то някъде ъгълче опира на крайна линия с едното си квадратче. Това налага поставянето на второ ъгълче така, че да запълнят правоъгълник 2×3: противоречие. Така и двата размера са четни, като единият от тях се дели на 6. Ако единият от размерите е 4, то директно проверяваме, че единствената възможност (с точност до еднаквост) за другия е 6, като таблицата е показана горе вдясно. Останалите случаи $6\times n$ за четно n се получават от сглобяването на една лява, 0 или повече средни и една дясна част от следните:



Случаите $6k\times n$ при $k\geq2$ и четно $n\geq8$ се получават от подходящ брой части 6×4 и/или 6×6, споени чрез обръщане на ъгълчетата при снадките посредством централна симетрия относно средата на отсечката, свързваща центровете на две от единичните квадратчета на всяко ъгълче. Като вземем предвид и ротациите на получените таблици, заключаваме, че $(m;n)$ може да само (2;3), (3;2), (4;6), (6;4) или произволна двойка четни числа, по-големи от 5, от които поне едното се дели на 6.

C7. В клетките на таблица 8×8 са записани числата 1, 2, ..., 64, но не се знае кое къде е. Може да се пита за сбора на числата в произволни две съседни (по страна) клетки. Винаги ли може ли да се определи кое число е записано във всяка клетка, ако се знае, че 1 и 64 са на главния диагонал? А ако не са там?

C7. Като се сложат две перпендикулярни домина с обща клетка, може да се разбере разликата на две числа, които са съседни и са по диагонал. Продължавайки по този начин може да се разбере разликата на всеки две числа в един диагонал. Тъй като 63 може да се получи само като $64-1$, то ще знаем къде са 1 и 64. Тогава лесно се намират и останалите числа. Ако не се знае и оцветим шахматно, като всички четни числа са на черно, а всички нечетни на бяло, ще получаваме същите отговори като при разположението $n \rightarrow n-1$ за n четно и $n \rightarrow n+1$ за n нечетно, така че не е сигурно, че можем да ги определим.

C8. Да се намерят всички n, за които таблица с размери $2011\times n$ може да се разреже на правоъгълници, едното измерение на всеки от които е 1, а другите измерения са различни естествени числа.

C8. $\boxed{\textbf{Отг. } n=1, 2, ..., 1006 \textbf{ и } n\geq4021}$ За първият интервал става с директно нарязване на стълбове и след това първият стълб се оставя цял, вторият се дели на 1 и $n-1$, третият на 2 и $n-2$ и т.н. За втория интервал става като първия, само че обръщаме местата на n и 2011. За средните стойности не става (всички лица от 1 до по-голямото от двете измерения не са достатъчни за покриване на целия правоъгълник).

C9. CM и BP са височини в остроъгълен триъгълник ABC. Права минаваща през центровете на вписаните в CBM и CBP окръжности пресича страните AC и AB съответно в точки X и Y. Докажете, че $AX=AY$.

C9. всичко се получава от ъгли: B, C и двата центъра лежат на една окръжност и като изразим ъглите от ъглополовящите се получава равнобедрен триъгълник.

C0. Нека $a<b\leq c<d$ са естествени числа, за които $ad=bc$ и $\sqrt{d}-\sqrt{a}\leq1$. Да се докаже, че a е точен квадрат.

C0. Всички букви в решението представят естествени числа. Нека $e=(a;b)$, $a=eu$, $b=ev$, $u<v$, $(u;v)=1$. Тогава от $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ следва, че $c=fu$, $d=fv$, $(c;d)=f$. От $a<c$ следва $e<f$, така че $1\geq\sqrt{fv}-\sqrt{eu}\geq\sqrt{(e+1)(u+1)}-\sqrt{eu}$. Оттук $\sqrt{(e+1)(u+1)}\leq1+\sqrt{eu}$ и след вдигане на квадрат $eu+e+u+1\leq1+2\sqrt{eu}+eu$, т.е. $e+u\leq2\sqrt{eu}$. Според САСГ в последното имаме равенство и $e=u$. Резултатът следва.