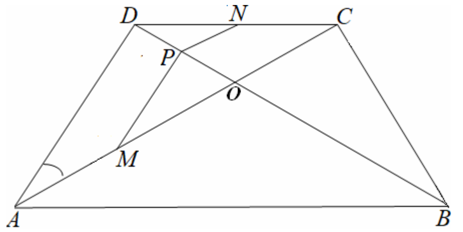
D1. Реалните $0<x,y,z<1$ изпълняват $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Докажете, че $\frac{1}{4} \le \max\{(1-x)y,(1-y)z,(1-z)x\}$.

D1. Да допуснем, че числата $(1-x)y$, $(1-y)z$ и $(1-z)x$ са по-малки от $\frac{1}{4}$. Тогава $xyz(1-x)(1-y)(1-z)<\frac{1}{64}$, откъдето $xyz<{}^1/_8$. Без ограничение $x<{}^1/_2$, значи $1-x>{}^1/_2$; сега от допускането следва $y<{}^1/_2$, значи $1-y>{}^1/_2$, значи и пак от допускането имаме $z<{}^1/_2$, значи $1-z>{}^1/_2$. Следователно $xyz<(1-x)(1-y)(1-z)$: противоречие.

D2. $ABCD$ е трапец, $AB\|CD$, $AD=BC=CD<AB$, $O\in AC\cap BD$, M и N са средите съответно на AO и CD. Докажете, че B, C, M и N лежат на една окръжност.



D2. Нека $\angle DAC=\alpha \Rightarrow \angle DCA=\angle CBD=\angle BDC=\alpha$. Нека P е среда на OD. Следователно $MCNP$ е равнобедрен трапец, около който може да се опише окръжност $\Rightarrow \angle CNP+\angle CBP=(180^0-\alpha)+\alpha=180^0$, така че и $BCMP$ е вписан (в същата окръжност – описаната за $\triangle CNP$).

D3. Да се реши в цели числа уравнението $(m-n)^2(m+n-1)=4mn$.

D3. След разлагане, уравнението се свежда до $(m+n)(m-n)^2-(m+n))=0$. Ако $m+n=0$, то $(m;n)=(k;-k)$, където k е цяло. Ако $(m-n)^2=m+n$, то полагаме $m-n=k$ – цяло и тогава $m+n=k^2$. След почленно събиране се получава $(m;n)=((k^2+k)/2;(k^2-k)/2)$, където k е цяло.

D4. В държава има n града, някои от които са свързани с двупосочни авиолинии. Има $r>2014$ маршрута с не повече от едно прекачване между двойки различни градове (посоката на движение е важна). Намерете най-малкото възможно n и най-малката стойност на r за това n.

D4. Нека градовете са X_1 X_2, ..., X_n и нека m_i е броят на авиолиниите от град X_i ($i=1$, …, n). Тогава X_i е начален пункт на m_i маршрута без прекачване и междинна спирка на $m_i(m_i-1)$ маршрута с прекачване, така че $r=m_1^2+m_2^2+...+m_n^2$. Тъй като $m_i\le n-1$ и $13.12^2<2014$, имаме $n\ge 14$. Нека сега $n=14$. Всеки маршрут се среща в две противоположни посоки, така че r е четно, т.е. $r\ge 2016$. Можем да постигнем $r=2016$, ако разположим 14 града по окръжност и свържем всеки два, освен диаметрално противоположните; така маршрутите ще са точно $14.12^2=2016$.

D5. Нека a, b, c са положителни реални числа, за които $abc=1$. Да се докаже, че

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\ge 3(a+b+c+1).$$

Кога се достига равенство?

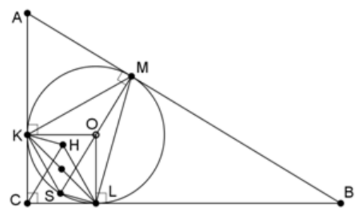
D5. От САСГ $a+b+c\ge 3\sqrt{abc}=3$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt{\frac{1}{abc}}=3$, така че от СКСА

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\ge\frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}\right)^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c+3)^2$$

$$=\frac{1}{3}\big((a+b+c)(a+b+c)+6(a+b+c)+9\big)\ge\frac{1}{3}\big(3(a+b+c)+6(a+b+c)+9\big),$$

което решава задачата. Равенство в САСГ се достига при равни числа, откъдето лесно следва, че равенство в търсеното неравенство се достига точно когато $a=b=c=1$.

D6. В триъгълник ABC ъгъл C е прав и вписаната окръжност допира AC, BC, AB съответно в K, L, M. Докажете, че ортоцентърът на KLM лежи на височината през C.



D6. Ако (вж. чертежа) SM е диаметър, то $SK\|LH$ (понеже са перпендикулярни на KM) и $SL\|KH$ (понеже са перпендикулярни на LM), така че $HKSL$ е успоредник. Понеже $OKCL$ е квадрат, CH и OS са симетрични относно средата на KL, така че $CH\|OS$. Резултатът следва.

D7. Редицата t_1, t_2, … е дефинирана с $t_1=2$ и $t_{n+1}=t_n^2-t_n+1$. Докажете, че ако $m\ne n$, то t_m и t_n са взаимно прости.

D7. Нека $m<n$ и p е прост делител на t_m. Тогава t_{m+1} дава остатък 1 при деление на p, следователно и t_{m+2} дава остатък 1 при деление на p, и т.н., така че в крайна сметка и t_n дава остатък 1 при деление на p. Резултатът следва.

D8. В квадратна мрежа е оцветена фигура от 100 полéта. Тя може да се раздели по линиите на мрежата на две еднакви фигури, а също и на 25 еднакви фигури (фигурата е множество от квадратчета, долепени по страни). Винаги ли можем да я разделим по линиите на мрежата и на 50 еднакви фигури?

D8. Всяка от 25-те фигури трябва да има по 4 поле́та, така че е тетрамино. Тетрамино от вид L, I, Z, O може да се разреже на две домино, така че в този случай целта е постигната. Да допуснем, че е T-тетрамино и да оцветим мрежата шахматно. Нека в едната фигура от 50 поле́та разликата между белите и черните поле́та е $2n$ (тя е четна, понеже сборът им е четен). Тогава разликата в другата е $\pm 2n$, така че общата разлика се дели на 4. Но във всяко T-тетрамино разликата е ± 2, а сборът на 25 такива числа не се дели на 4: противоречие.

D9. Полиномът $P(x)$ с цели коефициенти има поне 3 различни цели корена. Докажете, че $P(x) \pm 1$ няма цели корени.
D9. Ако $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)Q(x)$ стане равно на ± 1, то и трите скобки трябва да са равни на ± 1, така че две от тях трябва да са равни: противоречие.

D0. Изпъкнал n-ъгълник е разделен на триъгълници непресичащи се диагонали, като във всеки негов връх се събират нечетен брой триъгълници. Да се намерят всички възможни стойности на n.
D0. При $n = 3$ твърдението е тривиално изпълнено, а при $n = 4$ и $n = 5$ такова разделяне е невъзможно. Нека $n > 5$. Всеки диагонал разделя многоъгълника на два многоъгълника. Сред тези многоъгълници задължително имаме триъгълници (защо?), но не можем да имаме четириъгълници (когато ги разделим на триъгълници, получаваме връх, в който се събират четен брой триъгълници). Нека k е най-малкият брой страни на някой от тези многоъгълници, които не са триъгълници; тогава $k \geq 5$. Можем да считаме, че един от тези многоъгълници е $A_1 A_2 \ldots A_k$. Самият той също е разделен на триъгълници. Този от тях, който има за страна $A_1 A_k$, не може с другите си страни да отсича многоъгълници с брой на страните, по-голям от 3, така че задължително $k = 5$, а въпросният триъгълник може да е само $A_1 A_3 A_5$. Да отстраним триъгълниците $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_3 A_5$ и $A_3 A_4 A_5$. С това n намалява с 3 и условието на задачата се запазва. Повтаряйки многократно тази процедура, трябва да попаднем на случая $n = 3$ (защо?). Следователно n е кратно на 3. Това условие е и достатъчно (защо?).