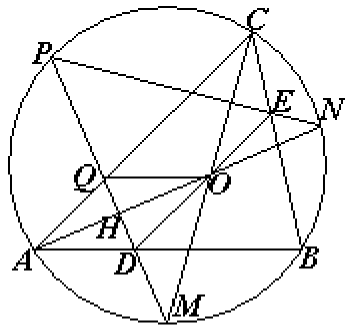
E1. Намерете най-голямата стойност на $x+z$, ако $x^2+y^2=4$, $z^2+t^2=9$ и $xt+yz\geq 6$.

E1. Имаме $(x^2+y^2)(z^2+t^2)=36=(xt+yz)^2+(xz-yt)^2$, така че $xz-yt=0$. Сега $13=x^2+z^2+y^2+t^2=(x+z)^2+(y-t)^2$, следователно най-голямата стойност на $x+z$ е $\sqrt{13}$ и се достига за $x \;\; \frac{4}{\sqrt{13}}, y \;\; t \;\; \frac{6}{\sqrt{13}}, z \;\; \frac{9}{\sqrt{13}}$.

E2. Около ABC е описана окръжност. Хордите, съединяващи средата на дъгата AC със средите на дъгите AB и BC, пресичат страните AB, BC съответно в точки D, E. Докажете, че а) $DE \parallel AC$; б) центърът на вписаната окръжност в ABC лежи на отсечката DE.



E2. Нека $AN \cap CM = O$ (O център на вписаната окръжност в ABC). Нека $Q \in PM \cap AC$, $H \in PM \cap AN$, $AB=2\gamma, BC=2\beta$, $AC=2\beta$, $\alpha+\beta+\gamma=180^0$. Имаме
$$AHM=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=90^\circ \Rightarrow AN \equiv S_{DQ}$$ (AH е височина и ъглополовяща в ADQ). Сега MH е височина и ъглополовяща в AMO, така че $AH=OH$, $AMOQ$ е ромб и $DO \parallel AC$ Аналогично $EO \parallel AC$. Резултатът следва.

E3. Да се намерят всички естествени n, за които $2^n+3^n+5^n+6^n$ е точен куб.

E3. Ако $n=1$ не става. Ако $n\geq 2$, то 2^n+5^n трябва да дава остатък 0, 1, 8 при деление на 9, което след проверки е невъзможно. Няма такива числа.

E4. За цяло положително число n двама играчи A и B играят следната игра: Дадена е купчина с s камъчета и играчите се редуват, като A играе пръв. На всеки ход съответният играч взима едно камъче, просто число камъчета или кратен на n брой камъчета. Победител е този, който вземе последното камъче. Ако двамата играчи играят по най-добрия начин, за колко стойности на s не е възможно A да е победител?

E4. Ако A печели при s камъчета, наричаме s „печеливша позиция", а иначе „губеща позиция". Позиция, от която можем да се стигне с един ход до губеща позиция, е печеливша. Кратните на n, по-големи от 0, са печеливши позиции. Ако сред числата с даден остатък по модул n има губеща позиция, то останалите са печеливши, понеже разликите между тях се делят на n. Ще покажем, че за всеки остатък 1, 2, ..., $n-1$ има губеща позиция, поради което отговорът ще бъде $n-1$. Да допуснем, че всички позиции с остатък r са печеливши. Като цяло губещите позиции са краен брой; нека последната от тях е u (ако такава няма, то $u=0$). Ако $s=$НОК$(2, 3,...,u+n+1)$, то числата $s+2$, $s+3$, …, $s+u+n+1$ са съставни. Нека m' е такова, че $s+u+2\leq m'n+r \leq s+u+n+1$. Позицията $m'n+r$ е печеливша, така че с един ход от нея стигаме до губеща позиция. Този ход не може да бъде с кратно на n, така че трябва да е с число p, което е просто или 1. Щом $m'n+r-p$ е губеща позиция, то $m'n+r-p\leq u$, така че $s+2\leq m'n+r-u\leq p\leq s+u+n+1$, така че p е съставно: противоречие.

E5. Нека a, b, c са положителни реални числа, за които $a+b+c=1$. Да се докаже, че
$$\frac{7+2b}{1+a}+\frac{7+2c}{1+b}+\frac{7+2a}{1+c}\geq\frac{69}{4}.$$
Кога се достига равенство?

E5. Ако положим $x=1+a$, $y=1+b$, $z=1+c$, то $x+y+z=4$ и искаме $5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\geq\frac{69}{4}$. От САСХ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{4}$ и от САСГ $\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\geq 3$. Резултатът следва. Равенството е при $a=b=c=\frac{1}{3}$.

E6. На чертежа триъгълник е разделен на 36 триъгълничета с прави, успоредни на страните му. Докажете, че ортоцентровете на шестте оцветени триъгълничета лежат на една окръжност.

E6. Ортоцентърът на всяко триъгълниче е център на описаната окръжност на „триъгълник-майка", съставен от триъгълничето и съседните му по страна. Шестте майки са еднакви и имат общ връх O, така че центровете на описаните им окръжности са на равни разстояния от O.

E7. За простите числа $p<q<r$ е в сила $r=2q+p$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{623}{pqr}$. Намерете pqr.

E7. **Отг. 2015** Условието е равносилно на $qr+pr+pq=623$ и (поради $r=2q+p$) и на $p^2+4pq+2q^2=623$. От $p<q$ следва $7p^2<623$, откъдето $p=3, 5, 7$ (случаят $p=2$ дава съставно r). От получаващите се квадратни уравнения в тези три случая цяло решение има само това при $p=5$ и то е $q=13$. Съответно $r=31$ и $pqr=2015$.

E8. В математически турнир били дадени 6 задачи. Всяка задача била решена от точно 2018 участници. Никои двама не успели да решат заедно всички задачи. Колко най-малко са били участниците в турнира?

E8. $\boxed{\textbf{Отг. 4036}}$ Никой не може да е решил пет задачи, понеже нерешената от него няма да може да е решена от никого. Ако някой е всички задачи без X и Y, то всяка от тях е решена от 2018 души, сред които няма повтарящи се, така че участниците са поне 4037. В противен случай всеки е решил не повече от 3 задачи, така че участниците са поне $2018.6:3=4036$. Това може да стане, ако всяка задача съответства на ръб на тетраедър и разделим участниците в 4 групи по 1009, които да решат задачите, ограждащи всяка стена.

E9. Намерете всички естествени n, за които съществуват различни естествени a, b, c, d, за които измежду числата $\frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)}, \frac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}, \frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)}, \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$ има две равни на n.

E9. Ако означим изразите съответно с $A, B, C, D,$ то $A=k, B=\frac{1}{k}, C=1-k, D=\frac{k}{k-1}$. Възможни равенства са само $A=B$ или $A=D$. В първия случай $n=1$, но числата са равни и не е възможно, във втория случай $n=2$ и пример $a=1$, $b=3$, $c=4$, $d=7$.

E0. В равнината са дадени 50 точки, никои три от които не лежат на една права. Всяка от тези точки е оцветена в един от дадени четири цвята. Докажете, че за някой от тези цветове съществуват поне 130 разнострани триъгълника с върхове, оцветени само в този цвят.

E0. От Дирихле поне 13 от дадените точки са оцветени в един цвят. Да вземем 13 от тези точки и да забравим за всички останали. Понеже никои три от точките не лежат на една права, съществуват $13.12.11:6=286$ триъгълника с върхове в тези точки. Всяка двойка точки е основа на най-много два равнобедрени триъгълника (на симетралата на отсечката, която ги свързва, има най-много две точки). Така сред триъгълниците има не повече от $13.12.2:2=156$ равнобедрени, т.е. поне $286-156=130$ разнострани триъгълника.