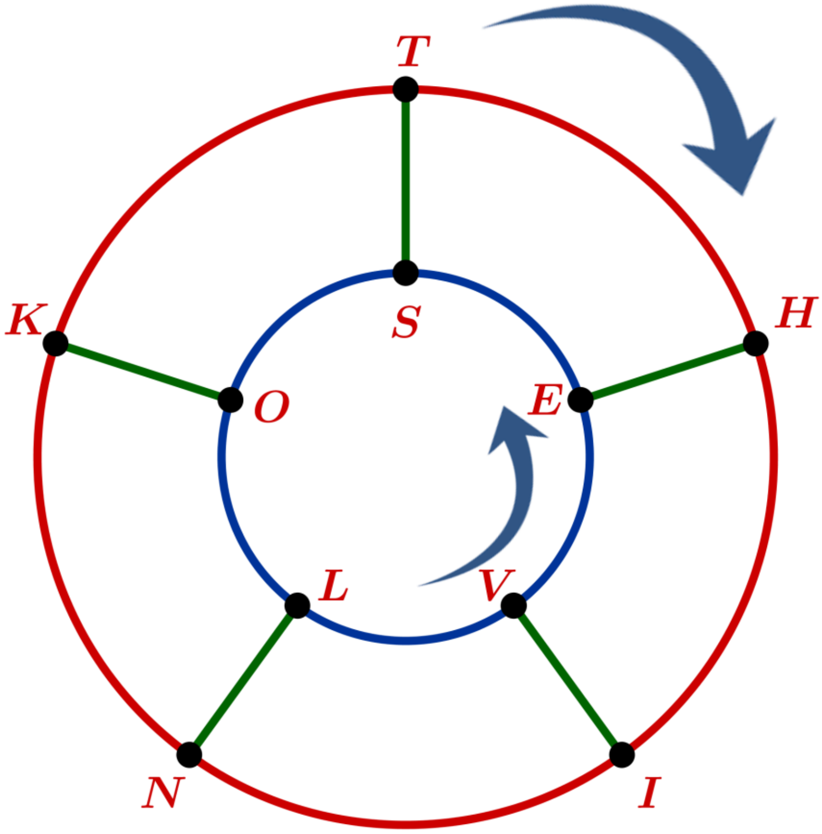
Емил Колев, Невена Събева

МАТЕМАТИКА
ЗА НАПРЕДНАЛИ



КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА

ЗА 5. - 8. КЛАС

София, 2019

Емил Колев, Невена Събева

МАТЕМАТИКА ЗА НАПРЕДНАЛИ

КОМБИНАТОРИКА

И ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА

ЗА 5.– 8. КЛАС

УНИМАТ СМБ
2018 г.

Настоящият сборник включва материали по комбинаторика и теория на числата от курса *Математика за напреднали* за ученици от 5. до 8. клас, проведен през 2017 и 2018 г.

В сборника се представят някои класически методи и идеи за решаване на състезателни задачи по комбинаторика – инварианти, полуинварианти, краен елемент, рекурсия, принцип на Дирихле. Те са илюстрирани със задачи от математически състезания от последните години.

Сборникът е предназначен за ученици (при подготовката им за участие в математически състезания), за учители (в работата им с изявени ученици), както и за всички любители на математиката.

София, 2018 г.

Съдържание

Предговор

В този сборник са илюстрирани основните методи за решаване на задачи от състезания и олимпиади за ученици от 5. - 8. клас. Включените задачи са с различна трудност. За решаването на по-лесните от тях са достатъчни стандартните училищни знания, елементарна логика и аритметични пресмятания.

За решаване на трудните задачи, където основните идеи не са на "повърхността„, трябва различен подход. На първо място е необходимо търпение при натрупване на факти и откриване на свойства, които могат да доведат до решение. *Преломният момент* е намирането на основната идея. За нейното успешно прилагане е необходимо въвеждането на подходящи означения и правилна последователност на работа.

На пръв поглед разнообразието от задачи е огромно. На практика част от задачите могат бързо да бъдат класифицирани към определена област, например принцип на Дирихле, инварианти, принцип на крайния елемент и т.н. Доброто познаване на основните подходи гарантира на *опитните състезатели* бързо откриване на основната идея.

Някои от задачите имат изследователски характер. При тях ориентирането в условието и откриването на важните свойства отнема повече време. Това изисква търпение и упоритост.

Включени са задачи от състезания и олимпиади на различни страни – България, Русия, Италия, Дания, САЩ, Унгария, Хърватия.

ПРИНЦИПИ ЗА БРОЕНЕ

Декартово произведение

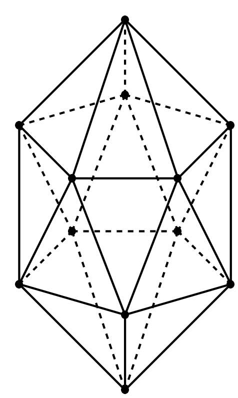
Нека множеството A има n елемента, а множеството B има m елемента. Тогава броят на двойките (a, b), където a е елемент на A, а b е елемент на B, е равен на $n.m$.

Задача 1. По колко различни начина може да се прочете СМЯХ на фигурата? (Започваме със С и се движим от една буква към съседна на нея във верикална или хоризонтална посока.)

	Х	Я	Х	
Х	Я	М	Я	Х
Я	М	С	М	Я
Х	Я	М	Я	Х
	Х	Я	Х	

Решение. Пътят от С до М може да се избере по 4 начина. От всяка буква М има 3 начина да се стигне до Я, а от всяко Я – 2 начина да се стигне до Х. Отговорът е $4.3.2 = 24$.

Задача 2. Правилният икосаедър е тяло с 20 стени, всяка от които е равностранен триъгълник и във всеки връх се събират по 5 равностранни триъгълника. Икосаедърът на чертежа има връх най-отгоре, връх най-отдолу, както и по 5 върха в равнината на горния и долния правилен петоъгълник. По колко различни маршрута може да стигнем от най-горния до най-долния връх, като се движим хоризонтално или надолу по ребрата на икосаедъра, ако през всеки връх може да минем не повече от веднъж?



Решение. От най-горния връх може да се *спуснем* в равнината на горния петоъгълник по 5 начина. Може веднага да се спуснем надолу, а може и да направим $1, 2, 3$ или 4 хода наляво или надясно; това са $1 + 4.2 = 9$ възможности. От всеки връх има по две ребра надолу, а в равнината на долния петоъгълник отново има 9 възможности за хоризонтално движение, преди да се спуснем до най-долния връх. Така получаваме

$$5.9.2.9 = 810 \text{ маршрута.}$$

Задача 3. Емил иска да оцвети в червено три от квадратчетата в таблица 3×3 така, че в таблицата да има две неоцветени квадратчета със свойството: което и от тях да оцветим в червено, ще се образува вертикална или хоризонтална червена линия (от 3 квадратчета). По колко различни начина Емил може да избере трите червени квадратчета?

Решение. Ясно е, че от трите червени квадратчета трябва две да са в един ред и две да са в един стълб, като пресечното квадратче на тези ред и стълб да е червено. Емил може да избере пресечното квадратче по 9 начина (всяко може да е такова). Второто червено в неговия ред може да избере по 2 начина, както и второто червено в неговия стълб. Получаваме $2.2.9 = 36$ начина.

Брой на подмножествата на дадено множество

Броят на непразните подмножества на множество A с n елемента е $2^n - 1$.

Задача 4. Естествено число се нарича *монотонно*, ако е едноцифрено или ако цифрите в записа му са подредени или в строго нарастващ ред, или в строго намаляващ ред. Например, 3, 23578 и 987620 са монотонни, а 88, 7434 и 23557 не са. Колко са монотонните числа?

Решение. Всяко непразно подмножество на множеството от цифрите $\{0, 1, 2, \dots 9\}$ без подмножеството $\{0\}$ определя едно монотонно намаляващо число (като подредим цифрите от това подмножество в намаляващ ред). Следователно броят на монотонно намаляващите числа е $2^{10} - 2 = 1022$.

В монотонно нарастващите числа не участва 0. Всяко подмножество на цифрите $\{1, 2, \dots 9\}$ определя едно монотонно нарастващо число като подредим цифрите от това подмножество в нарастващ ред. Следователно броят на монотонно нарастващите числа е $2^9 - 1 = 511$.

Едноцифрените числа са броени и като монотонно намаляващи, и като монотонно нарастващи; затова броят на монотонните числа е

$$1022 + 511 - 9 = 1524.$$

Принцип на включване и изключване

Задача 5. В извънкласни занимания (спорт, хор, рисуване) участват 20 ученици: 10 спортуват, 13 пеят в хор и 9 рисуват. Девет ученици участват в повече от едно занимание. Колко участват и в трите?

Решение. Ако x ученици участват и в трите занимания, имаме $20 = (10 + 13 + 9) - 9 + x$, откъдето $x = 3$.

Задача 6. Намерете броят правилни несъкратими дроби, сборът на числителя и знаменателя на които е 1000.

Решение. Търсените дроби са от вида

$$\frac{a}{1000 - a},$$

където a е по-малко от 500 естествено число, което не се дели нито на 2, нито на 5.

Числата a с това свойство са $500 - (250 + 100) + 50 = 200$; толкова са и търсените дроби.

В следващата задача ще използваме, че **броят на делителите** на n, което се разлага на прости множители във вида $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}\dots p_r^{k_r}$, е $(k_1 + 1)(k_2 + 1)\dots(k_r + 1)$.

Задача 7. Колко от делителите на 18^{81} са нито точни квадрати, нито точни кубове?

Решение. Числото $N = 18^{81} = 2^{81}.3^{162}$ има 82.163 делители.

Делителите на N, които са точни квадрати, са от вида $2^{2k}.3^{2p}$, където k е от 0 до 40 и p е от 0 до 81; те са 41.82 на брой.

Делителите на N, които са точни кубове, са от вида $2^{3k}.3^{3p}$, където k е от 0 до 27 и p е от 0 до 54; те са 28.55 на брой.

Делителите на N, които са точни квадрати и точни кубове, са от вида $2^{6n}.3^{6m}$, където n е от 0 до 13 и p е от 0 до 27; те са 14.28 на брой.

Делителите на N, които са точни квадрати или точни кубове, са

$$41.82 + 28.55 - 14.28 = 41.110.$$

Делителите на N, които не са нито точни квадрати, нито точни кубове, са

$$82.163 - 41.110 = 8856.$$

С наредба или без наредба?

Задача 8. В компания от 30 души има 20, всеки двама от които се познават, и 10, които не познават никого. Всеки двама в компанията се поздравили: прегърнали се, ако се познават, а ако не се познават, си стиснали ръцете. Колко са били ръкостисканията?

Решение. Ръкостисканията са $\dfrac{10.9}{2} + 20.10 = 245$.

В следващата задача се търси *вероятност*, което изисква да се намери броят на всички възможни избори и на благоприятните измежду тях. Така че отново *броим*.

Задача 2. Две квадратчета от таблица 100×100 са избрани по случаен начин. Намерете вероятността двете квадратчета да са съседни (хоризонтално или вертикално).

Решение. Две от общо 100^2 квадратчета могат да се изберат по

$$\frac{100^2(100^2-1)}{2} \text{ начина.}$$

Сега да преброим по колко начина могат да се изберат две съседни квадратчета. Двойките съседни квадратчета в един ред са 99, което прави 100.99 двойки *хоризонтално съседни* квадратчета. Толкова са и двойките *вертикално съседни* квадратчета. Следователно двойките съседни квадратчета са 2.100.99.

Вероятността при избор на две квадратчета те да са съседни, е

$$\frac{2.100.99}{\frac{100^2(100^2-1)}{2}} = \frac{1}{2525}.$$

Задача 10. Нека $p = (a_1, a_2, \dots, a_9)$ е нареждане (*пермутация*) на цифрите $1, 2, \dots, 9$. Означаваме

$$s(p) = \overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_4a_5a_6} + \overline{a_7a_8a_9}.$$

Нека m е минималната стойност на $s(p)$, за която цифрата на единиците на $s(p)$ е 0. Да се намери броят на нарежданията p, за които $s(p) = m$.

Решение. С $s(p)$ е означен сборът на три трицифрени числа, в записа на които участват цифрите от 1 до 9. Ясно е, че за да намерим минималния сбор m, ще *изберем* $(1, 2, 3)$ за цифри на стотиците.

Цифрите на единиците са измежду $(4, 5, 6, 7, 8, 9)$ и сборът им завършва на 0. С тези цифри не може да се получи сбор 10 (проверете), затова сборът на цифрите на единиците е 20. Трите числа със сбор 20 от множеството $(4, 5, 6, 7, 8, 9)$ са $(4, 7, 9)$, $(5, 7, 8)$ или $(5, 6, 9)$. Като *изберем* една от тези тройки за цифри на единиците, цифрите на десетиците ще са еднозначно определени – те са останалите три цифри.

Може да пресметнем m. Сборът на цифрите на десетиците е равен на $45 - (1 + 2 + 3 + 20) = 19$ и

$$m = (1 + 2 + 3).100 + 19.10 + 20 = 810.$$

Остава да *подредим* избраните цифри. За всяка от трите възможности за избор на цифри на единиците, цифрите на стотиците могат да се подредят по 6 начина, след което цифрите на десетиците могат да се подредят по 6 начина и накрая цифрите на единиците могат да се подредят по 6 начина. Оттук търсеният брой на подрежданията е

$$3.6.6.6 = 648.$$

Задача 11. Намерете броя на множествата $\{a, b, c\}$ от три различни естествени числа, за които произведението на a, b и c е равно на произведението на $11, 21, 31, 41, 51$ и 61.

Решение. Първо ще преброим наредените тройки различни числа (a, b, c) с произведение

$$11.21.31.41.51.61 = 3^2.7.11.17.31.41.61.$$

За всеки от шестте прости множители $7, 11, 17, 31, 41$ и 61 има по 3 начина да се разпредели в едно от трите числа a, b и c. За разпределянето на тройките от 3^2 има 6 начина (три, когато двете тройки са заедно, и три, когато има две числа с по една тройка). Така получаваме $3^6.6$ начина за разпределяне на простите множители в числата a, b и c. Тук са броени и някои неподходящи тройки, в които има равни числа:

$$(1, 1, 3^2.7.11.17.31.41.61) \ \text{ и } \ (3, 3, 7.11.17.31.41.61),$$

както и техните пермутации. Неподходящите тройки са $2.3 = 6$. Остават $3^6.6-6$ наредени тройки от различни числа с желаното произведение.

Тъй като търсим броя на множествата $\{a, b, c\}$, то редът на числата в тройките не е от значение. Всяка тройка е броена по 6 пъти (по толкова начини могат да се разместят 3 различни числа), следователно броят на множествата е

$$\frac{3^6.6-6}{6} = 3^6 - 1 = 728.$$

Броене „на части“, с разглеждане на случаи

Човек и добре да брои, понякога му се налага *да разглежда случаи.* Решения от вида *разделяй и владей* са по-дълги, но се налага да прибегнем към тях, ако не се сещаме за друг вариант.

Задача 12. Трицифрено число наричаме *добро*, ако се дели на 11 или след разместване на цифрите му се получава кратно на 11. Например 121 и 211 са добри числа. Колко са добрите числа?

Решение. Броят на разместванията на цифрите на едно число зависи от това, дали в числото има 0 и дали има еднакви цифри. Затова ще разгледаме следните случаи.

Случай 1. Добрите числа, в записа на които участва 0, се получават от кратни на 11 числа, в чийто запис участва 0. Те са 110, 220, 330, 440, 550, 660, 770, 880 и 990, както и 209, 308, 407, 506. От всяко число от вида $aa0$ се получават две добри числа ($aa0$ и $a0a$). От всяко число от вида $a0b$ се получават 4 добри числа ($ab0$, $ba0$, $a0b$ и $b0a$). Следователно в този случай добрите числа са $9.2 + 4.4 = 34$ на брой.

Случай 2. Добрите числа, в чийто запис няма 0, но има еднакви цифри, се получават от кратни на 11 числа, в чийто запис има еднакви цифри. Те са 121, 242, 363, 484, 616, 737, 858, 979. От всяко такова число aba се получават по 3 добри числа (aab, aba и baa). Следователно в този случай добрите числа са $8.3 = 24$ на брой.

Случай 3. Добрите числа с различни ненулеви цифри се получават от кратни на 11 трицифрени числа $\overline{abc}$, записани с различни ненулеви цифри. От признака за 11 знаем, че $11/a-b+c$, следователно $a-b+c=0$ или 11 (защо?).

Ако $a - b + c = 0$, имаме следните възможности:

b	3	4	5	6
(a, c)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4); (2, 3)	(1, 5); (2, 4)

7	8	9
(1, 6); (2, 5); (3, 4)	(1, 7); (2, 6); (3, 5)	(1, 8); (2, 7); (3, 6); (4, 5)

Числата са 16 и от всяко с разместване на цифрите се получават по 6 добри числа; общо 96 добри числа.

Ако $a + c = b + 11$, имаме

b	6	5	4	3
(a, c)	(8, 9)	(7, 9)	(7, 8); (6, 9)	(9, 5); (8, 6)

b	2	1
(a, c)	(9, 4); (8, 5); (7, 6)	(9, 3); (8, 4); (7, 5)

Числата са 12 и като се разместят цифрите им, се получават $12.6 = 72$ добри числа.

Така общо имаме $34 + 24 + 96 + 72 = 226$ добри числа.

Съответствие

Казваме, че между множествата A и B има *взаимно-еднозначно съответствие*, ако на всеки елемент на множество A може да се съпостави елемент на множеството B, като всеки елемент от B е съпоставен на точно един елемент от A. Иначе казано, елементите на двете множества могат да се разпределят по двойки така, че във всяка двойка да влиза елемент от A и B. Ако множествата са крайни и между тях има взаимно-еднозначно съответствие, те имат един и същ брой елементи.

Задача 13. В изпъкнал 12-ъгълник са построени всички диагонали. Колко са пресечните им точки (без да броим върховете на 12-ъгълника), ако никои три диагонали нямат обща вътрешна точка?

Решение. На всяка пресечна точка на два диагонала съответстват четири върха – краищата на диагоналите. Броят на пресечните точки е равен на броят четворки измежду 12-те върха, които са

$$\frac{12.11.10.9}{4.3.2.1} = 495.$$

Индуктивно броене

Задача 14. Най-много на колко части може да се разреже кръг с помощта на 100 прави?

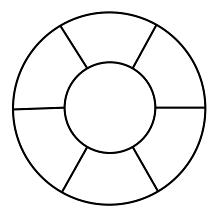
Решение. Забелязваме, че една права разделя кръга най-много на 2 части, две прави – най-много на 4 части, три прави – най-много на 7 части. При построяване на n-тата права броят на частите се увеличава най-много с n. Това е така, защото n-тата права пресича най-много $n-1$ прави и окръжността (в две точки), т.е. на нея има най-много $n+1$ пресечни точки. Те я разделят на два лъча и n отсечки, а всяка отсечка разделя някоя от частите в кръга на две части. Така броят на частите се увеличава с n.

Сто прави разделят кръга най-много на

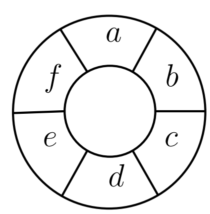
$$1 + 1 + 2 + 3 + .s + 100 = 5051 \text{ части.}$$

Рекурсивно броене

Задача 15. Пръстенът на чертежа е направен от 6 сектора. Всеки сектор трябва да се оцвети в един от 4 цвята така, че да няма съседни едноцветни сектори. По колко начина може да стане това?



Решение. Първо ще решим задачата с *разглеждане на случаи.* Нека секторите са a, b, c, d, e, f в този ред. Ще разгледаме три случая в зависимост от оцветяването на a, c, e.



Случай 1. Секторите a, c, e са едноцветни. Техният цвят може да се избере по 4 начина, а цветът на всеки от секторите b, d, f може да се избере по 3 начина; общо са възможни $4.3^3 = 108$ оцветявания.

Случай 2. Два от секторите a, c, e са в един цвят, третият е в друг. По 3 начина избираме кой от a, c, e да е различен (нека е a) и по 4 начина определяме цвета му; по 3 начина – цвета на другите два сектора (c и e). За цвета на b и за цвета на f има по две възможности, а за цвета на d има три възможности. Получаваме $3.4.3.2^2.3 = 432$ оцветявания.

Случай 3. Секторите a, c, e са оцветени в три различни цвята. Тогава има 4.3.2 начина да изберем цветовете на a, c, e и след това има по 2 възможни оцветявания за всеки от секторите b, d, f; общо $4.3.2.2^3 = 192$ оцветявания.

Отговорът е $108 + 432 + 192 = 732$.

Тази задача може да се реши и с **рекурсия.** Това означава да я решим за пръстен с малък брой сектори и да открием как броят на оцветяванията на пръстен с n сектора зависи от броя на оцветяванията на пръстен с по-малък брой сектори.

Нека $C(n)$ е броят на оцветяванията на пръстен с n сектора с 4 цвята. Пръстен с един сектор може да се оцвети по 4 начина, т.е. $C(1) = 4$; пръстен с два сектора може да се оцвети по $4.3 = 12$ начина, т.е. $C(2) = 12$; а пръстен с три сектора може да се оцвети по $C(3) = 4.3.2 = 24$ начина.

Да разгледаме всички оцветени пръстени с n сектора.

Да отделим измежду тях тези, в които първият и $(n-1)$-ият сектор са разноцветни. Като махнем n-тия сектор и слепим краищата, ще получим оцветен пръстен с $(n-1)$ сектора. При това всеки оцветен пръстен с $(n-1)$ сектора ще се получи по 2 пъти (тъй като има две възможности за цвета на n-тия сектор, като фиксираме останалите).

Да разгледаме останалите пръстени. В тях първият и $(n-1)$-ият сектор са едноцветни. Тогава $(n-2)$-ият сектор е в различен от техния цвят и като махнем n-тия и $(n-1)$-ия сектор и слепим краищата, ще получим оцветен пръстен с $(n-2)$ сектора. При това всеки оцветен пръстен с $(n-2)$ сектора ще се получи по 3 пъти (тъй като има три възможности за цвета на n-тия сектор, като фиксираме останалите).

Така откриваме следната зависимост

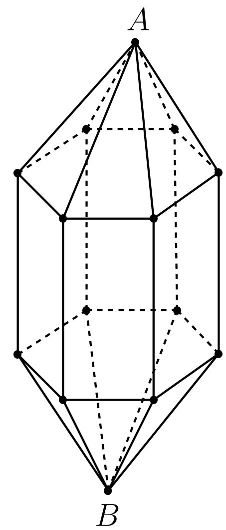
$$C(n) = 2.C(n-1) + 3.C(n-2).$$

Оттук последователно получаваме $C(4) = 2.24 + 3.12 = 84$,

$$C(5) = 2.84 + 3.24 = 240, \quad C(6) = 2.240 + 3.84 = 732.$$

Пет задачи за десерт

Задача 16. Тялото на чертежа е сглобено от две шестоъгълни пирамиди и призма. Муха тръгва от най-горния връх A и се движи хоризонтално или надолу по ребрата на тялото, като през всеки връх минава не повече от веднъж, докато стигне най-долния връх B.



а) По колко различни маршрута мухата може да стигне от A до B?

б) В два върха (различни от A и B) мога да поставя лепило и да хвана мухата. Как трябва да избера тези два върха така, че вероятността да хвана мухата да е най-голяма?

Решение. а) От A мухата може да се спусне в равнината на горния шестоъгълник по 6 начина. Може веднага да се спусне надолу, а може и да направим $1, 2, 3, 4$ или 5 хода наляво или надясно; това са $1 + 5.2 = 11$ възможности.

След като слезе в равнината на долния шестоъгълник, отново има 11 възможности за хоризонтално движение, преди да се спусне до B. Получихме $6.11.11 = 726$ маршрута.

б) Ще разгледаме пет случаи. Ако двата върха с лепило са:

– от различни шестоъгълници, но не са съседни, маршрутите, които не минават през тях, са $5.4.5 = 100$;

– от различни шестоъгълници и са съседни, маршрутите, които не минават през тях, са $5.5.5 = 125$;

– от един шестоъгълник и са съседни, маршрутите, които не минават през тях, са $4.4.11 = 176$;

– от един шестоъгълник и са през един, маршрутите, които не минават през тях, са $(1 + 3.3).11 = 110$;

– от един шестоъгълник и са диаметрално противоположни, маршрутите, които не минават през тях, са $4.2.11 = 88$.

В последния случай мухата има най-малко спасителни маршрути. Следователно трябва да сложим лепило в два диаметрално противоположни върха на един шестоъгълник.

Задача 17. Множеството S ще наричаме *свободно от произведения*, ако няма елементи a, b, c на S (които не са непременно различни), за които $a.b = c$. Например, празното множество и множеството $\{16, 20\}$ са свободни от произведения, докато $\{4, 16\}$ и $\{2, 8, 16\}$ не са. Намерете броя на свободните от произведения подмножества на $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Решение. Ясно е, че 1 не е елемент на свободно от произведения множество. Ще разгледаме случаи в зависимост от това дали 2 или 3 са в множеството.

Случай 1. Ако и 2, и 3 не са в множеството. Тогава всяко подмножество на $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ е свободно от произведения; получаваме 2^7 подмножества (включително празното).

Случай 2. Ако 2 е в множеството, а 3 не е. Тогава 4 не е в множеството. От двойката (5, 10) може да участва най-много едно от числата – това са 3 възможности (само 5, само 10 и нито едно от двете). Всяко от числата 6, 7, 8 и 9 може да участва (това са по 2 възможности за всяко от тях). Получаваме $3.2^4 = 48$ множества.

Случай 3. Ако 3 е в множеството, а 2 не е. Тогава 9 не е в множеството, а всяко от числата 4, 5, 6, 7, 8 и 10 може да участва. Получаваме $2^6 = 64$ множества.

Случай 4. Ако и 2, и 3 са в множеството. Тогава 4, 6 и 9 не са в множеството. Всяко от числата 7, 8 и 9 може да участва, както и най-много едно от числата 5 и 10. Получаваме $2^2.3 = 12$ множества.

Броят на свободните от произведения множества е

$$128 + 48 + 64 + 12 = 252.$$

Задача 18. Нека N и k са естествени числа. Числото N наричаме *k-хубаво*, ако за някое естествено число a числото a^k има точно N делители.

а) Посочете три 2-хубави числа. Вярно ли е, че всяко 2-хубаво число е нечетно? Всяко нечетно число ли е 2-хубаво?

б) Колко естествени числа, по-малки от 1000, не са нито 7-хубави, нито 8-хубави?

Решение. а) Например, 3, 5 и 7 са 2-хубави числа, защото 2^2 има точно 3 делители, 4^2 има 5 делители и 8^2 има 7 делители. Всяко 2-хубаво число е нечетно, тъй като числата от вида a^2 (точните квадрати) имат нечетен брой делители.

Също е вярно, че всяко нечетно число $2s+1$ е 2-хубаво, защото ако изберем $a = 2^s$, то a^2 има $2s+1$ делители.

б) Ако a^7 има точно N делители, то $N = (7e_1+1)\dots(7e_m+1)$, където e_i са степените на простите множители числа в разлагането на a. Следователно N дава остатък 1 при деление на 7.

Обратно, ако N дава остатък 1 при деление на 7, то N е 7-хубаво число (защо?). Следователно 7-хубавите числа са даващите остатък 1 при деление на 7. По-малките от 1000 такива числа са 143 (проверете!).

Аналогично, 8-хубавите са тези, които дават остатък 1 при деление на 8 и по-малките от 1000 такива числа са 125 (проверете!).

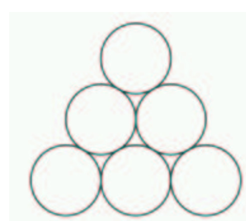
Накрая, числата, които са и 7-хубави, и 8-хубави, дават остатък 1 при деление на 56 и по-малките от 1000 такива числа са 18.

Общо $143 + 125 - 18 = 250$ от първите 999 числа са 7-хубави или 8-хубави, значи търсеният брой е $999 - 250 = 749$.

Задача 19. Дадена е квадратна мрежа с 10×10 единични квадратчета. Каква част от правоъгълниците със страни по линиите на мрежата са квадрати (с всевъзможен размер)?

Отговор. $\dfrac{7}{55}$. (Квадратите са $10^2 + 9^2 + \dots + 1 = 385$. Правоъгълниците са $\left(\dfrac{11.10}{2}\right)^2 = 3025$.)

Задача 20. На чертежа три от шесте кръга трябва да се оцветят в червено, два в синьо и един в зелено. Оцветявания, които съвпадат при завъртане или симетрия, смятаме за еднакви. По колко различни начина може да се оцвети фигурата?



Отговор. 12.

ИНВАРИАНТИ И ПОЛУИНВАРИАНТИ

Инварианти

Задача 1. На дъска са записани числата от 1 до 2017. Избираме две от тях, изтриваме ги и вместо тях записваме сбора или разликата им. Четно или нечетно ще е последното число на дъската?

Решение. При тази операция броят на нечетните числа на дъската не се променя или се намалява с 2, т.е. *запазва четността си.* Те в началото са 1009, значи последното число ще е нечетно.

Забележка. При тази операция се запазва и четността на сбора на числата. В началото сборът е нечетен, значи и в края.

Задача 2. На хокейно поле има три шайби: червена, зелена и синя. Хокеист удря една от тях така, че тя да мине между другите две и да спре в някоя точка. Може ли шайбите да се върнат в първоначалните си позициии след 25 удара?

Решение. Не, защото след всеки удар се сменя ориентацията на триъгълника с върхове в червената, зелената и синята шайби (обходени в този ред), значи след нечетен брой удари тя ще е различна от началната.

Задача 3. Може ли в квадратна мрежа да се оцветят 25 единични квадратчета така, че всяко от оцветените квадратчета да има нечетен брой оцветени съседи? (Съсени са квадратчетата с обща страна.)

Решение. Да допуснем, че такова оцветяване е възможно. Нека във всяко оцветено квадратче запишем броя на оцветените му съседи. Ако съберем записаните 25 числа, в сбора всяко съседство на оцветени квадратчета ще е броено по два пъти. Следователно този сбор е четен. От друга страна, сборът на 25 нечетни числа е нечетен. Получихме противоречие; т.е. допускането е грешно. Оцветяването е невъзможно.

Забележка. По-запознатите с темата ще отбележат, че по същите причини във всяка компания броят на хората, които имат нечетен брой познати, е четен. Иначе казано, във всеки граф броят на върховете с нечетна степен е четен. Това е запазващо се, т.е. *инвариантно* свойство.

Задача 4. На права има две фигури – отляво черна и отдясно бяла. Разрешени са следните операции: да се сложат една до друга две едноцветни фигури (между другите фигури или в края) и да се махнат две съседни едноцветни фигури. Например, първата операция може да е

$$\blacktriangle\ \triangle \longrightarrow \begin{cases} \blacktriangle\ \triangle\triangle\triangle \\ \triangle\triangle\ \blacktriangle\ \triangle \\ \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\ \triangle \\ \blacktriangle\ \triangle\ \blacktriangle\blacktriangle \end{cases}$$

Може ли с тези операции да се стигне до момент, в който на правата има две фигури – отляво бяла, отдясно черна?

Решение. Да разгледаме броя N на двойките разноцветни фигури на правата (не само съседни), в които черната е отляво, а бялата е отдясно. В началото този брой е 1, а при желаната ситуация (две фигури – отляво бяла, отдясно черна), е 0.

Да разгледаме колко е този брой след първия ход.

$$\begin{array}{ll} \blacktriangle\ \triangle\triangle\triangle & \longrightarrow N = 3 \\ \triangle\triangle\ \blacktriangle\ \triangle & \longrightarrow N = 1 \\ \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle\ \triangle & \longrightarrow N = 3 \\ \blacktriangle\ \triangle\ \blacktriangle\blacktriangle & \longrightarrow N = 1 \end{array}$$

Забелязваме, че първата операция променя този брой с 2 или не го променя. Може да предположим, че N запазва четността си след всяка операция. Дали това е вярно?

Ако вмъкнем две бели фигури, отляво на които има x черни, то N ще се увеличи с $2x$ (тъй като всяка от новите бели фигури ще образува черно-бяла двойка с всяко от тези x черни). Ако махнем две бели, отляво на които има x черни, то N ще се намали с $2x$.

По същия начин, ако вмъкнем две черни фигури, отдясно на които има y бели, то N ще се увеличи с $2y$; а ако ги махнем, ще се намали с $2y$.

Следователно при всяка операция броят N на черно-белите двойки се променя с четно число и не си променя четността. Това запазващо се свойство – *инвариант*, ни позволява да твърдим, че желаната ситуация $\triangle\ \blacktriangle$ е невъзможна.

Задача 5. На всяко от 44 дървета, разположени в кръг, е кацнал по един кос. От време на време някои два коса прелитат – единият на съседното дърво в посока по часовниковата стрелка, другият – на съседното дърво в посока обратно на часовниковата стрелка. Може ли след определено време да се окаже, че всички косове са кацнали на едно дърво?

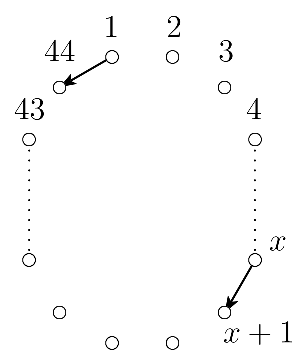
Решение. Да номерираме дърветата от 1 до 44. Във всеки момент номерът на всеки кос ще е номерът на дървото, на което е кацнал. В началото сборът на номерата на косовете е $1 + 2 + \cdots + 44 = 990$.

Да разгледаме как се променя сборът N на номерата на косовете при едно прелитане.

Ако номерата на двата коса са различни от 1 и 44, единият увеличава номера си с 1, а другият намалява номера си с 1, т.е. N не се променя

$$\boxed{y-1} \longleftarrow \boxed{y} \ldots\ldots \boxed{x} \longrightarrow \boxed{x+1}$$

Сега да разгледаме какво се случва, когато някой от прелитащите косове има номер 1 или 44.
Ясно е, че ако косовете с номера 1 и 44 си разменят местата, N не се променя.



Ако кос с номер 1 прелети на дърво 44, а кос с номер x – на дърво $x + 1$ (където x не е 44), сборът N ще се увеличи с 44.
В обратния случай (от 44 на 1 и от $x + 1$ на x), сборът ще се намли с 44.

Получихме, че при всеки ход сборът N от номерата на косовете или не се променя, или се променя с 44. Това означава, че остатъкът на N при деление на 4 не се променя. (Иначе казано, инвариант е остатъкът при деление на 4 на сбора от номерата на косовете.)

Сега да допуснем, че всички косове кацнат на дърво номер k. Тогава сборът на номерата им ще е $N = 44k$ и ще се дели на 4. Но в началото $N = 990$ дава остатък 2 при деление на 4. Получихме противоречие; следователно не е възможно косовете да кацнат на едно дърво.

Задача 6. Азбуката на езика БАУ съдържа само буквите Б, А и У. Всички буми на този език с дължина n се конструират, като се започне от някоя дума на езика с дължина n, и се прилагат правилата:

– буквите в думата могат да се разместват;

– две поредни букви могат да се променят по правилата

$$\text{БА} \longleftrightarrow \text{УУ}, \ \text{АУ} \longleftrightarrow \text{ББ}, \ \text{УБ} \longleftrightarrow \text{АА}$$

Ако ББАУАБАУУАБАУУУАБАУУУУАББ е дума на този език, определете дали е дума:

а) БУАБУАБУАБУАБАУБАУБАУБАУБ;

б) АБУАБУАБУАБУАБАУБАУБАУБАУ.

Решение. Да разгледаме как се променя разликата между броя на буквите А и на буквите Б при една операция. Разместването на буквите не е от значение, а само следните операции:

Операция	Разликата между броя А и Б:
БА$\longleftrightarrow$УУ	не се променя
АУ$\longrightarrow$ББ	намалява се с 3
ББ$\longrightarrow$АУ	увеличава се с 3
УБ$\longrightarrow$АА	увеличава се с 3
АА$\longrightarrow$УБ	намалява се с 3

Получихме, че разликата между броя А и Б не се променя или се променя с 3, т.е. запазва остатъка си при деление на 3.

В дадената дума има 7 Б и 8 А, т.е. разликата между броя А и Б е 1. В думата от а) има 9 Б и 8 А, следователно тя не е от езика БАУ (разликата между броя А и Б е -1).

Думата от б) има 8 У, 8 Б и 9 А и тя лесно може да се получи от дадената дума, като се разместят буквите и УУ се замени с БА.

Забележка. Любознателният читател навярно е забелязал, че горната задача много прилича на известния пример с хамелеоните от три цвята. При среща на два разноцветни хамелеона, те се преоцветяват в третия цвят – а това е същото, като операциите БА$\longrightarrow$УУ и т.н. И в двете задачи инвариант е остатъкът при деление на 3 на разликата между броя обекти от два вида.

Задача 7. Може ли с правилата:

EAT $\longleftrightarrow$ AT	PAN $\longleftrightarrow$ PILLOW
ATE $\longleftrightarrow$ A	CARP $\longleftrightarrow$ ME
LATER $\longleftrightarrow$ LOW	

а) думата CATERPILLAR да се превърне в MAN;

б) думата MEAT да се превърне в CARPET?

Решение. а) Може!

C(ATE)RPILLAR$\longrightarrow$CARPILL(A)R$\longrightarrow$CARPIL(LATER)$\longrightarrow$
CAR(PILLOW)$\longrightarrow$ (CARP)AN$\longrightarrow$ ME(A)N$\longrightarrow$
M(EAT)EN $\longrightarrow$ M(ATE)N $\longrightarrow$MAN

б) Да оцветм в червено буквите M, A и W. Забелязваме, че при всяко правило дума с една червена буква се заменя с дума също с една червена буква. Това означава, че общият брой на буквите M, A и W се запазва. Следователно MEAT (с общо 2 такива букви) не може да се превърне в CARPET (с една такава буква).

Задача 8. В една държава някои градове са свързани с директни автобусни маршрути. Известно е, че от всеки град може да се стигне до всеки друг (с евентуални прехвърляния). Иван си купил по един билет за всеки директен маршрут (т.е. може да пътува по всеки маршрут веднъж, независимо в коя посока). Петър купил по n билета за всеки маршрут. Иван и Петър отпътували от град A. Иван използвал всичките си билети, не купувал нови и накрая стигнал в град B. Петър известно време пътувал с купените от него билети и стигнал в град X, от който не може да продължи без да си купи нов билет. Докажете, че X е или A, или B.

Решение. Съпоставяме на всеки град точка, а на всеки директен маршрут – отсечка, свързваща съответните точки. Получаваме граф, който Иван е обходил, тръгвайки от A и спирайки в B, като е минал по всяко ребро по веднъж. Тогава за всеки връх C, различен от A и B, е вярно, че:

◦ ребрата, по които Иван е влизал в C, са толкова на брой, колкото са ребрата, по които е излизал от C;

◦ по всяко ребро с край C Иван е минал точно един път.

Това означава, че от C излизат четен брой ребра. Като разсъждаваме по същия начин за краищата на маршрута, получаваме, че от A и B излизат по нечетен брой ребра.

Нека Петър се е оказал в град X, от който не може да продължи. Това означава, че е изпозвал всички билети за всички директни маршрути от X. Ако град X не е A или B, то от него излизат четен брой, например $2k$, ребра. Но тогава Петър е влизал и излизал от C точно $2kn$ пъти, т.е. четен брой пъти, редувайки влизане и излизане. Тъй като отначало Петър е влязъл в C, то последния път е излязъл от C. Получихме противоречие. Следователно Петър е спрял или в A, или в B, което трябваше да докажем.

Оцветявания

Задача 9. Дъска 6×6 е покрита с домино. Докажете, че тя може да се разреже по някоя вертикална или хоризонтална линия така, че всички домина да останат цели.

Решение. Забележете, че всяка от 10-те вътрешни линиии на мрежата (5 вертикални и 5 хоризонтални) пресича четен брой домина. Ако всяка такава линия пресича ненулев брой домина, то пресечените домина са поне $10.2 = 20$. Но на дъската има 18 домина, противоречие.

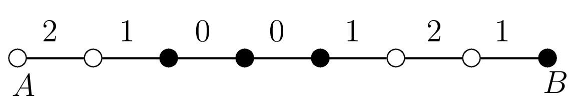
Задача 10. Дъска 5×5 е покрита с правоъгълници от 3 квадратчета и едно квадратче е останало непокрито. Кое може да е то?

Упътване. Оцветете по два начина дъската в три цвята по диагонал.

Задача 11. Краищата на отсечка са бяла точка A и черна точка B. По отсечката са отбелязани в някакъв ред бели и черни точки, които я разделят на отсечки. Може ли сред тях да има точно 100 отсечки с разноцветни краища?

Решение. Първо да отбележим, че ако точките са n (с краищата A и B включително), имаме $n - 1$ отсечки.

Нека отсечките с два бели края (от вида ББ) са x на брой, а тези с бял и черен край (от вида БЧ) са y. Над всяка отсечка да запишем броя на белите ѝ краища (както е показано в примера).



Сборът на записаните числа е $2x + y$. В този сбор бялата точка A е броена веднъж, а всяка от останалите бели точки – по 2 пъти, тъй като участва в две отсечки. Следователно $2x + y$ е нечетно число, а това означава, че y е нечетно число.

Получихме, че *броят на отсечките с разноцветни краища е нечетен* – колкото и точки да отбележим и както и да ги оцветим в бяло и черно. Оттук веднага следва отговорът на задачата.

Забележка. Може да разсъждаваме и по друг начин. Тръгваме от бялата точка A към черната точка B и броим колко пъти се променя цветът на точките (т.е. колко пъти от бяла точка минаваме в черна или от черна в бяла). Броят на тези промени е точно броят на отсечките с разноцветни краища. От друга страна, за да стигнем от бяла в черна точка, са нужни нечетен брой промени. Отново стигаме до извода, че има нечетен брой отсечки с разноцветни краища.

Последната задача ни подготви за доказателството на следващото класическо твърдение, известно като *Лема на Шпернер*. Германският математик Emanuel Sperner (1905 – 1980) доказал тази лема, когато на 23 години. Всъщност Шпернер доказал доста по-общо твърдение, което има много и разнообразни приложения в други области на математиката.

Задача 12. Върховете на триъгълник са бяла точка A, черна точка B и синя точка C. По страните и вътре в триъгълника са отбелязани бели, черни и сини точки, като точките на всяка страна на триъгълника ABC са оцветени в един от двата цвята на нейните краища.

Някои от отбелязаните точки са свързани така, че триъгълникът ABC е разделен на триъгълници, всеки два от които или имат цяла обща страна, или имат общ връх, или не се пресичат.

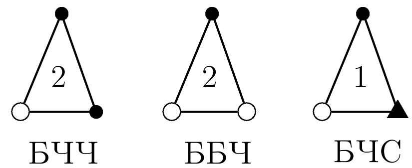
Да се докаже, че сред тях има триъгълник с три разноцветни върха.

Решение. Ще разгледаме триъгълниците, които имат бял и черен връх. В зависимост от цвета на третия си връх, че се разделят на три вида: ББЧ, БЧЧ и БЧС.

Нека триъгълниците с един бял и два черни върха (от вида БЧЧ) са x, триъгълниците с два бели и един черен връх (от вида БЧЧ) са y, а тези с три разноцветни върха (от вида БЧС) са z.

Както в задача 5, ще докажем, че z е нечетно число.

Във всеки триъгълник да запишем броя на неговите страни, които са от вида БЧ.



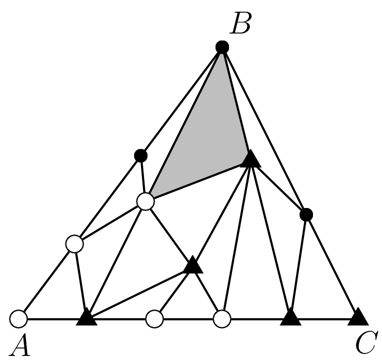
Сборът на всички записани числа е $2x + 2y + z$.

От друга страна, в сбора на записаните числа *граничните* отсечки са броени по веднъж (това са отсечките, които лежат на страната AB на големия триъгълник), а всяка от останалите *вътрешни* черно-бели отсечки е броена по два пъти (тъй като е страна на два триъгълника). Но от задача 5 знаем, че отсечките от вида ЧБ върху страната AB са нечетен брой. Следователно сборът на записаните числа е нечетен.

Получихме, че сборът $2x+2y+z$ е нечетен, т.е. z е нечетно число.

Това означава, че триъгълниците от вида БЧС не може да са 0, т.е. има поне един триъгълник с три разноцветни върха.

Например, на чертежа има точно един такъв триъгълник.



Забележка. Този удивителен факт може да се докаже и по друг начин. Нека всички триъгълници, на които сме разрязали ABC, както и областта извън триъгълника (ще я наричаме *екс-триъгълник*), са одушевени. Ще казваме, че два триъгълника *се познават*, ако имат обща страна с черен и бял край.

От задача 12 следва, че екс-триъгълникът има нечетен брой познати. Всеки от останалите триъгълници има 0, 1 или 2 познати. А както отбелязахме след задача 1, във всяка компания има четен брой персони (в случая – триъгълници) с нечетен брой познати.

Следователно съществува поне още един триъгълник X с нечетен брой познати, т.е. с точно един познат. Точно една страна на X е с черен и бял край, значи върховете на X са оцветени в три различни цвята.

Полуинварианти

Обект на интереса ни ще са обществата, в които съществуват два типа взаимоотношения – приятелство и вражда, а цел на заниманието – да докажем, че в известен смисъл е възможно мирно съвместно съществуване.

Задача 13. Под хълма живеят 25 хобити, които обработват еднакви квадратни градинки с размер 1×1, разположени в квадрат 5×5. Всеки хобит е в конфликт с не повече от три други. Докажете, че има начин да се разпределят градинките така, че никои двама враждуващи хобити да не са съседи (т.е. градинките им да нямат обща страна).

Решение. Да разпределим по произволен начин хобитите в градинките. Тъй като е трудно да се справим с всички конфликти наведнъж, ще ги елиминираме един по един.

Ако при това произволно разпределяне хобитът X е във вражда със съседа си У, ще потърсим хобит Z от приятелите на У, който би могъл да размени градинката си с X, без да създаде нов конфликт.

Да забележим, че X има най-много 4 съседи, всеки от които има най-много по 3 врагове. За да не създадем конфликт, Z не трябва да е измежду тези най-много 12 врагове на съседите на X (които включват и X).

Също така, ако Z е съсед на враг на X и го разменим с X, ще се създаде нов конфликт между X и врага му и няма да се промени броят на конфликтите. Затова Z не трябва да е измежду най-много 12-те съседа на враговете на X (които включват и X). Така Z не може да е измежду $2.12 - 1 = 23$ хобити (изваждаме 1, защото X е броен два пъти) и като добавим към тях хобита У, все пак остава поне един хобит Z, с който X може да направи замяна.

Един конфликт по-малко; с помощта на най-много 12 замени, взривоопасните съседства ще изчезнат и всеки хобит ще се огради само с приятели. Това ще бъде търсеното разпределение.

По-нататък ще се постараем да сведем конфликтите до минимум чрез подходящо отделяне в компании. Ако враговете са разделени, ще считаме, че враждата изчезва.

Задача 14. Докажете, че отбор от 50 юнаци, всеки от които е във вражда с най-много трима, може да се раздели на две дружини така, че по време на похода никой да не пътува с повече от един свой неприятел.

Решение. Нека по произволен начин сформираме две дружини. Общият брой на враждите е най-много $(50.3) : 2 = 75$.

Ще покажем начин за преразпределяне на дружините, при който *броят на враждите намалява.*

Ако юнакът X има повече от един неприятел в своята дружина, ще го преместим в другата – там се намира най-много един негов враг. С тази операция броят на враждите ще се намали поне с 1. Тъй като този брой приема краен брой стойности (целите числа от 0 до 75), невъзможно е безкрайното му намаляване, т.е. може да приложим тази операция краен брой пъти. Очевидно след последното преместване няма да има юнак с повече от един враг в дружината си, с което задачата е решена.

Друг начин за премахване на конфликти е подходящата промяна на позицията.

Задача 15. Градовете в страната A са разделени на два враждуващи лагера. Някои от градовете са свързани с пътища, като от всеки град излизат нечетен брой пътища. Един град се смята за застрашен, ако е свързан с повече противници, отколкото съюзници. Да се докаже, че съществува прегрупиране, след което няма да остане нито един застрашен град.

Решение. Естествено е да се мине на страната на по-силния. Ако един град е застрашен и премине в противниковия лагер, няма да е застрашен. Това обаче може за састраши някой от предишните му съюзници. Какво гарантира, че процесът няма да е безкраен?

Да разгледаме броя на пътищата, които свързват два враждуващи града. След горната операция този брой намалява и е ясно, че са възможни краен брой операции. След последната няма да има застрашени градове.

Знаем, че ако се увеличават противоречията в дадено общество, то се разделя в повече компании.

Задача 16. Могат ли N жители на страната А, всеки от които има не повече от 11 врагове, да се заселят в четири недостъпни една за друга крепости така, че общият брой враждебни взаимоотношения да не надхвърля N?

Решение. Да заселим по произволен начин жителите на страната А в четири крепости. Нека X е произволен жител. Той има не повече от 11 врагове, значи има крепост, в която са не повече от двама от враговете му. Ако преселим X в крепостта с най-малко негови врагове (той може да е вече в нея), общият брой на враждите ще се намали. Тази операция може да се приложи краен брой пъти и като спре, всеки ще има най-много по двама врагове в своята крепост, което прави най-много $(N.2) : 2 = N$ вражди.

Известно е, че в общество, наситено с крамоли, трябват почти магически способности, за да се избегне конфликтът. Това е задача, достойна за вълшебник от рода на Мерлин.

Задача 17. В двора на крал Артур са събрани $2N$ рицари, всеки от които има не повече от $N-1$ врагове. Докажете, че Мерлин може да разположи рицарите около Кръглата маса така, че никои двама врагове да не са един до друг.

Решение. Както при предишните задачи, ще потърсим операция, намаляваща броя на враждите в произволна ситуация.

Нека рицарят X е седнал отляво на врага си У. Щом X има не повече от $N-1$ врагове, той има поне N приятели. Отдясно на поне един от тези приятели на X седи приятел на У, когото ще наречем Z. Да разменим местата на X и Z, след това на левия съсед на X и десния съсед на Z и т.н. При тази операция броят на враждебните съседства се намалява. Така след краен брой такива операции Мерлин може да постигне желаното решение на проблема.

И така, в разгледаните задачи доказахме съществуването на определена ситуация чрез посочване на краен алгоритъм за достигане. Съществено е, че всяка стъпка на алгорутъма монотонно променя величина с крайна област от значения (броят вражди). Това гарантира крайността на процеса.

Задача 18. Правилен $(2n+1)$-ъгълник е разрязан с помощта на непресичащи се във вътрешни точки диагонали на $2n-1$ триъгълника. Докажете, че поне три от тях са равнобедрени.

Решение. Страните на триъгълниците са страни или диагонали на многоъгълника. Триъгълници, образувани от две страни на многоъгълника и диагонал, ще наричаме *малки*. Ясно е, че има поне два малки триъгълника. (Триъгълниците са $2n-1$, а страните на многоъгълника са $2n+1$.)

Малките триъгълници са равнобедрени и ако има три такива, твърдението е доказано.

Да допуснем, че малките триъгълници са точно два. Ясно е, че всеки от останалите $2n-3$ триъгълници има за страна точно една страна на многоъгълника. Ако *изрежем* такъв триъгълник, многоъгълникът ще се разпадне на две части. Нека се движим от единия малък триъгълник към другия, преминавайки от триъгълник в триъгълник през тяхна обща страна. При всеки преход ще отбелязваме колко страни на многоъгълника има във всяка от двете части, на които триъгълника, в който сме стигнали, разделя многоъгълника. В началото тези числа са 2 и $2n-2$. При всеки преход първият брой се увеличава с 1, а вторият намалява с 1. В момента, когато се изравнят (и станат равни на n), ще се намираме в търсения трети равнобедрен триъгълник.

Задачи за самостоятелна работа

Задача 19. На едно заседание всеки член на парламента ударил плесница на точно един от колегите си. Да се докаже, че членовете на парламента могат да се разделят в три партии така, че във всяка партия да няма двама, единият от които е ударил другия.

Задача 20. Може ли n-ъгълник да се разбие на черни и бели триъгълници така, че всеки два триъгълника да имат или общ връх, или обща страна, или нямат общи точки; страните на шестоъгълника да са в черни триъгълници и триъгълниците с обща страна са разноцветни, ако при $n=6$? А ако $n=10$?

ПРИНЦИП НА КРАЙНИЯ ЕЛЕМЕНТ

Две задачи вместо увод

Задача 1. Майка Зайка купила за седемте си зайчета седем барабана с различни размери и седем палки с различни размери. Всяко зайче си взело барабан и палка. Ако едно зайче види, че и барабанът, и палката му са по-големи, отколкото на някое от другите зайчета, то започва да барабани. Най-много колко зайчета са започнали да барабанят? (*Математически празник*, 2008)

Решение. Зайчето, което е взело *най-малкия* барабан, няма да барабани, следователно барабанят най-много 6 зайчета. Ако зайчето с най-малък барабан е взело и най-малките палки, всичките 6 останали ще барабанят.

Забележка. Интересно, може ли майка Зайка да раздаде барабаните и палките така, че никой да не барабани? Колко зайчета може да барабанят едновременно?

Задача 2. В 10 кутии има моливи (поне един). В различните кутии има различен брой моливи и във всяка кутия моливите са разноцветни (няма едноцветни моливи в една кутия). Докажете, че от всяка кутия може да се избере по един молив така, че всички избрани моливи да са разноцветни.

Решение. Да подредим кутиите според броя на моливите в тях (в нарастващ ред). Ясно е, че в n-тата кутия има поне n моливи, т.е. поне n цвята. От първата вземаме един молив, от втората – молив от друг цвят, от третата – молив с цвят, различен от двата вече избрани и т.н.

Въвеждане на наредба

Задача 3. Войници са подредени в две редици по n така, че всеки войник от първата редица е не по-висок от стоящия зад него войник от втората редица. След това във всяка редица подредили войниците по ръст. Докажете, че след това отново всеки войник от първата редица е не по-висок от стоящия зад него войник от втората редица.

Решение. Да означим с $a_1, a_2, \dots, a_n$ ръста на войниците от първия ред *в намаляващ ред* и с $b_1, b_2, \dots, b_n$ ръста на войниците от втория ред *в намаляващ ред.*

Ако твърдението на задачата не е изпълнено, то за някое k имаме $a_k > b_k$. Това означава, че преди пренареждането войникът с ръст a_k е стоял пред някой от $(k-1)$-те войници $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$. Пред тях са стояли и войниците с ръст $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, които са не по-ниски от a_k. Получихме, че k войници от първия ред са стояли пред $k-1$ войници от втория, противоречие.

Задача 4. Да се намерят естествените числа a, b и c, за които

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

Решение. Нека $1 < a \leqq b \leqq c$. Ако $a > 3$, то $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

Следователно $a = 3$ (и тогава $b = c = 3$) или $a = 2$. Във втория случай

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}.$$

Очевидно $b \neq 2$. При $b > 4$ имаме $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Следователно $b = 4$ (и тогава $c = 4$) или $b = 3$ (и тогава $c = 6$).

Отговорът е $(3,3,3)$, $(2,3,6)$, $(2,4,4)$.

Задача 5. Девет числа са такива, че сборът на всеки четири от тях е не по-малък от сбора на петте останали. Докажете, че числата са положителни.

Решение. Нека $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_9$. По условие

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geqq a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Следователно $a_1 > 0$.

Задача 6. На всяка от четири карти е написано естествено число. Избираме две карти и събираме числата на тях. Оказва се, че с една и съща вероятност може да получим сбор, по-малък от 9; сбор 9; сбор, по-голям от 9. Кои може да са записаните числа?

Решение. Нека $a \leqq b \leqq c \leqq d$. Сборовете по двойки са 6 и два от тях са по-малки от 9; два са 9; два са по-големи от 9.

Тъй като

$$a + b \leqq a + c \leqq a + d \leqq b + d \leqq c + d \text{ и } a + c \leqq b + c \leqq b + d,$$

то

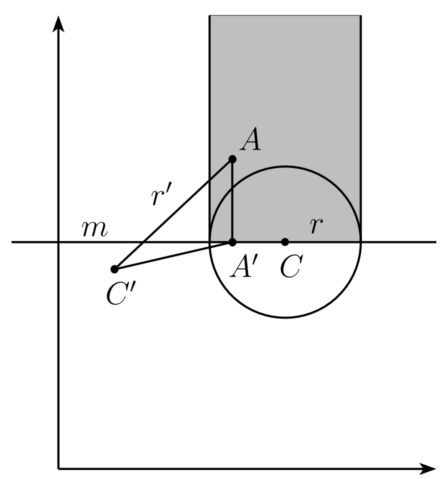
$$a + d = b + c = 9.$$

По-малките от 9 сборове са $a + b$ и $a + c$, по-големите от 9 са $b + d$ и $c + d$. Тогава $a + c < a + d$, значи $c < d$; аналогично $a < b$. Двойките (a, d) и (b, c) са измежду 1, 8, 2, 7, 3, 6, 4, 5. Оттук лесно намираме възможностите

$$(1, 2, 7, 8), (1, 3, 6, 8), (1, 4, 5, 8), (2, 3, 6, 7), (2, 4, 5, 7), (3, 4, 5, 6).$$

Задача 7. На масата са разположени монети, които не се докосват. Докажете, че една от тях може да се изтегли, без да се докосват останалите.

Решение. Да въведем правоъгълна координатна система. Разглеждаме монетата, чийто център има най-голяма ордината; нека центърът е C, а радиусът е r. Ще докажем, че тя може да се изтегли безпроблемно. Да допуснем противното – във вертикалната ивица с широчина $2r$ над монетата (виж чертежа) има точка A от друга монета с център C' и радиус r'.



През C построяваме хоризонтална права m; от избора на C следва, че C' е в долната полуравнина, определена от m. Ако проекцията на A върху m е A', то $C'A' < C'A$ (тъй като $\sphericalangle C'A'A \geqq 90°$), следователно $C'A' < r'$. Това означава, че A' е обща за двете монети, противоречие.

Най-малък или най-голям ъгъл

Задача 8. Докажете, че за всеки четири точки A, B, C и D в равнината поне един от триъгълниците ABC, BCD, CDA, DAB не е остроъгълен.

Решение. Ако дадените точки са върхове на изпъкнал четириъгълник, сборът от ъглите му е 360°, следователно най-големият му ъгъл е прав или тъп. Той определя неостроъгълен триъгълник.

Ако една от дадените точки (например D) е вътрешна за триъгълника, образуван от останалите три, то сборът на ъглите с връх D е 360° и най-големият от тях е поне 120°. Следователно поне един от триъгълниците BCD, CDA, DAB е тъпоъгълен.

Задача 9. В една страна има 100 летища, като всички разстояния между две от тях са различни. От всяко летище излита самолет към най-близкото летище. Докажете, че в нито едно летище не може да кацнат повече от 5 самолета.

Решение. Ако самолетите от A и B са кацнали в точка O, то AB е най-голямата страна в триъгълника AOB, т.е.

$$\measuredangle AOB > 60^\circ.$$

Да допуснем, че в точка O са кацнали самолети от $A_1, ..., A_n$. Тогава най-малкият от ъглите A_iOA_j е не повече от $\frac{1}{n}360^\circ$. Следователно

$$\frac{1}{n}360^\circ > 60^\circ, \text{ т.е. } n < 6.$$

Задача 10. В кръг с радиус 1 лежат 8 точки. Докажете, че разстоянието между някои две от тях е по-малко от 1.

Решение. Поне 7 от точките не съвпадат с центъра на кръга O. Най-малкият от ъглите A_iOA_j, където A_i и A_j са дадените точки, не надвишава $\frac{1}{7}.360^\circ < 60^\circ$.

Нека A и B са точките, съответстващи на най-малкия ъгъл. Тогава $AB < 1$, тъй като $AO < 1$, $BO < 1$ и $\measuredangle AOB$ не е най-големият ъгъл в триъгълника AOB.

Най-малко или най-голямо разстояние

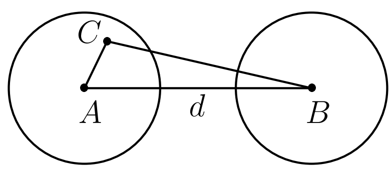
Задача 11. В равнината са дадени $n > 3$ точки, не всички от които лежат на една права. Да се докаже, че съществува окръжност през три от тях, вътре в която няма друга от дадените точки.

Решение. Нека A и B са точките, разстоянието между които е минимално. В окръжността с диаметър AB не лежат точки от дадените. Разглеждаме най-малката от окръжностите през A, B и точка C от дадените. Тя е търсената.

Задача 12. В равнината са дадени n точки. От всеки три от тях има две, разстоянието между които не надвишава 1. Да се докаже, че всички дадени точки могат да се покрият с два кръга с радиус 1.

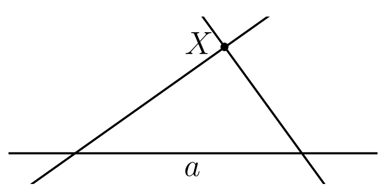
Решение. Избираме най-голямото разстояние d между две от дадените точки. Нека точките A и B са на разстояние d.

Нека C е произволна друга от дадените точки. От трите точки A, B и C има две на разстояние по-малко от 1, т.е. AC или BC е по-малко от 1. Това означава, че C се намира в кръг с радиус 1 с център A или B. Следователно кръгове с радиус 1 и центрове A и B покриват всички точки.



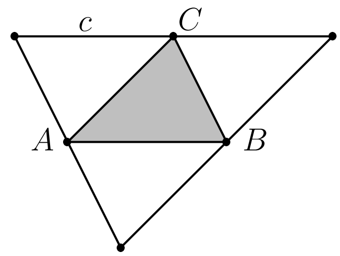
Задача 13. В равнината са дадени n прави, никои три от които не минават през една точка. Те разделят равнината на области. Докажете, че всяка права е граница на поне една триъгълна област.

Решение. За дадена права a избираме тази пресечна точка X на останалите прави, която е най-близо до a. Правите през X и a определят търсения триъгълник.



Най-малко или най-голямо лице

Задача 14. В равнината са дадени n точки, като лицето на всеки триъгълник с върхове в тези точки не надвишава 1. Докажете, че всички точки могат да се покрият с триъгълник с лице 4.



Решение. Избираме триъгълника с най-голямо лице; нека е ABC. През C построяваме права c, успоредна на AB. Ясно е, че всяка друга точка X от дадените лежи в една и съща полуравнина с AB спрямо c – иначе лицето на $\triangle ABX$ ще е по-голямо от лицето на $\triangle ABC$.

Аналогично, през B и A построяваме прави b (успоредна на AC) и a (успоредна на BC. Трите прави образзуват триъгълник с лице, по-малко от 4, който покрива всички точки.

За самостоятелна работа

Задача 1. Много отдавна в страната Тарния вледеел цар Ятианр. За да не разсъждават много-много неговите поданици, той измислил за тях прост език с азбука от 6 букви: А, И, Н, Р, Т, Я. Редът на буквите в азбуката е различен от реда им в нашия език. Думите в езика са всички 6-буквени думи с различни цифри. Първата дума в пълния речник на езика е *Тарния*. Коя дума следва след *Ятианр* в речника?

Отговор. Ятиран.

Задача 2. Числата 1, 2, 3, ..., 25 са записани в таблица 5x5 така, че във всеки ред числата са в нарастващ ред. На колко най-много и колко най-малко е равен сборът на числата в третия стълб?

Отговор. 45 и 85. Сборът на числата в първите три стълба е най-малко $1 + 2 + \cdots + 15 = 120$. Числата в третия стълб са поне с 2 по-големи от съответните числа в първия стълб и поне с 1 по-големи от съответните числа във втория стълб. Затова сборът на числата в третия стълб е най-малко $(120 + 5.1 + 10.1) : 3 = 45$.

Аналогично като разгледаме максималния сбор на числата в последните три стълба, получаваме, че сборът на числата в третия стълб е най-малко 85.

ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Принцип на Дирихле: най-лесен вариант. Ако $n+1$ обекта се разпределят в n групи, ще има поне два обекта в една група.

В разговорен вариант принципът на Дирихле звучи така: ако поставя 10 предмета в 9 чекмеджета, то поне два предмета ще са в едно и също чекмедже. Това очевидно твърдение се използва в задачи от най-различни области на математиката, като предизвикателството е да определим подходящи чекмеджета и да преброим предметите, които ще поставяме в тях.

Задача 1. Дадени са 27 различни нечетни естествени числа, по-малки от 100. Да се покаже, че винаги може да се намерят две от тях, чийто сбор е 102.

Решение. Числата могат да се поставят в 26 *чекмеджета*:

$$\{1\}, \{51\}, \{3, 99\}, \{4, 98\}, \ldots, \{49, 53\}.$$

Тъй като числата са 27, има поне две числа, които са поставени в едно и също чекмедже. Тъй като числата са различни, двете числа в едно и също чекмедже имат сбор 102.

Задача 2. Измежду естествените числа от 1 до 36 са избрали 13 различни числа. Да се докаже, че измежду избраните винаги има две с разлика 3, 4 или 7.

Решение. Числата могат да се поставят в 12 *чекмеджета*:

$$\{1, 4, 8\}, \{2, 5, 9\}, \{3, 6, 10\}, \{7, 11, 14\}, \{12, 15, 19\}, \{13, 16, 20\},$$

$$\{17, 21, 24\}, \{18, 22, 25\}, \{23, 26, 30\}, \{27, 31, 34\}, \{28, 32, 35\}, \{29, 32, 36\}.$$

Тъй като числата са 13, има поне две числа, които са поставени в едно и също чекмедже, което означава, че разликата им е 3, 4 или 7.

Принцип на Дирихле: по-силен вариант. Ако n обекта се разпределят в k групи, ще има поне $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ обекта в една група.
($\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ е най-малкото естествено число, по-голямо или равно на $\frac{n}{k}$.)

Задача 3. Естествени числа са записани в полетата на дъска 101×101 така, че числата във всеки две съседни по страна полета се различават с не повече от 1. Да се докаже, че в таблицата има поне 51 равни числа.

Решение. Ще разгледаме най-голямата възможна разлика между две числа. Тя зависи от дължината на маршрута между двете полета и е най-голяма, когато полетата са в срещуположни ъгли. Най-голямата разлика е $2.100 = 200$. Следователно в таблицата има най-много 201 различни естествени числа. Тъй като $\left\lceil \frac{101.101}{201} \right\rceil = 51$, то има поне 51 равни числа.

Задача 4. Единичните квадратчета на дъска 100×100 са оцветени в 4 цвята така, че във всеки ред и всеки стълб има по 25 квадратчета от всеки цвят. Докажете, че може да изберем два реда и два стълба така, че четирите им пресечни квадратчета да са оцветени в 4 различни цвята. (Русия, 2000)

Решение. Броят на двойките квадратчета в един и същ ред, които са оцветени в различен цвят, е $100.6.25.25 = 375000$ (във всеки от стоте реда по 6 начина може да изберем два от 4 различни цвята, след което по 25 начина да изберем квадратчето от единия цвят и по 25 начина – квадратчето от другия.) Броят на двойките стълбове е $(100.99) : 2 = 4950$.

Следователно има два стълба с поне $\left\lceil \frac{375000}{4950} \right\rceil = 76$ двойки разноцветни квадратчета в тях. Разглеждаме само тези два стълба и тези 76 двойки разноцветни квадратчета.

Да допуснем, че всеки две от 76-те двойки имат по едно квадратче с еднакъв цвят. Нека една от двойките е в цвят 1 и 2. Двойките с цвят 1 са не повече от $2.25 = 50$ (толкова са всички квадратчета с цвят 1 в двата избрани стълба), значи има двойка без цвят 1, но с цвят 2. Нека тя е в цвят 2 и 3. По същия начин, има двойка без цвят 2 и с цвят 1. Тя е с цвят 1 и 3 (за да има едноцветно квадратче с двойката 2 и 3). Друг вид двойки няма сред тези 76.

От друга страна, всеки от трите цвята се среща в двата стълба 50 пъти, т.е. в трите цвята могат да се оцветят най-много $3.50 = 150$ квадратчета. Но в 76-те двойки има 152 квадратчета, противоречие.

Принцип на Дирихле: безкраен вариант. Ако безкрайно множество от обекти се разпределят в краенн брой групи, то поне в една група ще има безкраен брой обекти.

Задача 5. Дъска 100×100 е разделена на единични квадратчета. Във всяко квадратче има стрелка: $\leftarrow$, $\rightarrow$, $\downarrow$ или $\uparrow$. Дъската е оградена със стена и само отдясно на квадратчето най-горе вдясно има врата. Паяк се намира в едно квадратче. Всяка секунда паякът се мести по посока на стрелката в своето квадратче и преминава в съседно на него. Когато се премести, стрелката в предишното му квадратче се завърта на 90° по часовниковата стрелка. Ако движението по стрелката е невъзможно, паякът остава на място, но стрелката в квадратчето му се завърта. Възможно ли стрелките да се поставят така, че паякът никога да не напусне дъската?

Решение. Ще докажем, че независимо как са поставени стрелките, паякът ще напусне дъската.

Да допуснем, че паякът е ванат в капан и се движи безкрайно по дъската. Квадратчетата са краен брой, значи в някое от тях паякът попада безкраен брой пъти. Всеки път, щом мине оттам, стрелката се завърта. Следователно паякът минава безкраен брой пъти и през съседните на това квадратче. По същия начин ще получим, че паякът минава безкраен брой пъти през всяко квадратче на дъската. В частност, той минава безкраен брой пъти в горното дясно квадратче. Това обаче е невъзможно, защото най-късно при четвъртото му минаване оттам стрелката ще сочи надясно и той ще излезе през вратата.

Принцип на Дирихле в теорията на числата. Често се използва твърдението: *Измежду $n+1$ естествени числа има две, чиято разлика се дели на n.*

Пример. Измежду 100 естествени числа могат да се изберат 15 така, че разликата на всеки две от тях да се дели на 7.

Това е така, защото остатъците при деление на 7 са 7 и те определят чекмеджетата. Тъй като $\left\lceil \dfrac{100}{7} \right\rceil = 15$, има чекмедже, в което попадат поне 15 числа, даващи един и същ остатък при деление на 7. Това означава, че разликата на всеки две от тях се дели на 7.

Задача 6. Да се докаже, че сред 5 естествени числа винаги има три, чийто сбор се дели на 3.

Решение. Разпределяме числата в чекмеджета според остатъка им при деление на 3.

Ако във всяко чекмедже има число, вземаме по едно число от всяко чекмедже и сборът се дели на 3 (тъй като сборът на остатъците $0+1+2=3$ се дели на 3).

Ако едно чекмедже е празно, то 5 числа са разпределени в 2 чекмеджета. Следователно в някое чекмедже има поне 3 числа; техният сбор се дели на 3.

Задача 7. Да се докаже, че сред 52 естествени числа винаги има две, чиято разлика или сбор се дели на 100.

Решение. Разпределяме числата в 51 чекмеджета според остатъците им при деление на 100:

$$(0), (1;99), (2;98), \dots, (49,51), (50).$$

Тъй като числата са 52, има поне две числа, които са поставени в едно и също чекмедже. Ако тези две числа дават един и същ остатък при деление на 100, то разликата им се дели на 10. Ако двете числа в едно и също чекмедже дават различни остатъци при деление на 100, то сборът им се дели на 100 – така сме конструирали чекмеджетата!

Задача 8. Да се докаже, че в множество от 100 естествени числа може да се намери едно или няколко със сбор, който се дели на 100.

Решение. Ако числата са $x_1, \dots, x_{100}$, разглеждаме числата

$$x_1, \quad x_1+x_2, \quad x_1+x_2+x_3, \quad \dots, x_1+\dots+x_{100}.$$

Ако някое от тях се дели на 100, задачата е решена.

В обратен случай остатъците на тези 100 числа при деление на 100 са измежду $1, 2, \dots 99$. Следователно има две числа, които дават един и същ остатък при деление на 100. Нека те са $x_1+\dots+x_i$ и $x_1+\dots+x_j$ и $i<j$. Тогава тяхната разлика

$$(x_1+\dots+x_j)-(x_1+\dots+x_i) = x_{i+1}+\dots+x_j$$

се дели на 100 и това е търсеният сбор.

Задача 9. В продължение на 50 дни реших общо 79 задачи, като всеки ден решавах поне по една задача. Да се докаже, че има няколко последователни дни, за които съм решил точно 20 задачи.

Решение. Нека първия ден са решени a_1 задачи, до втория са решени a_2 задачи и т.н., $a_{50} = 79$. Разглеждаме 100-те числа

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_{50},\ a_1 + 20,\ a_2 + 20,\ a_3 + 20, \ldots, a_{50} + 20,$$

които са по-малки или равни на 99. Сред тях има две равни и те са от вида $a_i = a_k + 20$. Следователно от $k+1$-ия до i-тия ден са решени точно 20 задачи.

Задача 10. а) Докажете, че в множество от 51 числа измежду $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ винаги има две взаимнопрости.

б) Докажете, че в множество от 51 числа измежду $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ винаги има две, едното от които дели другото.

Решение. а) Разделяме числата на 50 двойки последователни числа. Две от дадените 51 числа са от една двойка, т.е. са последователни и взаимнопрости.

б) Разделяме числата в 50 чекмеджета според най-големия им нечетен делител: $1, 3, \ldots, 99$. Във всяко чекмедже има числа от вида $p, 2p, 4p, 8p, \ldots$. Две от дадените 51 числа са от едно чекмедже и по-малкото от тях дели по-голямото.

Бележка. По същия начин се доказва, че измежду $n + 1$ числа от множеството $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ винаги има две, едното от които дели другото.

Задача 11. Нека A е подмножество на $\{1, 2, \ldots, 2015\}$ със 675 елемента. Да се докаже, че съществуват две различни числа от A, чийто сбор се дели на 6.

Решение. Да допуснем, че в A няма две числа, чийто сбор се дели на 6. Тогава в A има не повече от едно кратно на 6 число, и не повече от едно число, което дава остатък 3 при деление на 6.

В множеството $\{1, 2, \ldots, 2015\}$ има по 336 числа, които дават остатък съответно 1; 2; 4; 5 при деление на 6. Измежду тях може да изберем 336 числа, които дават остатък 1 и 336 числа, които дават остатък 2. Тогава в A има не повече от $2 + 2.336 = 674$ числа, противоречие.

Принцип на Дирихле в геометрията

Задача 12. Да се докаже, че никоя права не пресича и трите страни на триъгълник във вътрешни точки.

Решение. Всяка права l разделя равнината на две полуравнини. По принципа на Дирихле, два върха на триъгълника попадат в една и съща полуравнина. Страната, която свързва тези два върха, не пресича правата l.

Задача 13. Дъска 6×6 е покрита с домина. Да се докаже, че дъската може да се разреже праволинейно, без да се разреже нито едно домино.

Решение. Ясно е, че ще режем по линиите на квадратната мрежа – има 5 вертикални и 5 хоризонтални, общо 10 линии на мрежата, по които може да се реже.

Всяка линия на мрежата разделя дъската на дъски $6 \times x$. Ако линията пресича y домина, то останалите $6x - y$ полета на дъската $6 \times x$ са покрити с домина, т.е. $6x - y$ се дели на 2. Това означава, че y е четно число, т.е. всяка линия на мрежата пресича четен брой домина: 0, 2, 4 или 6.

Ако всяка линия на мрежата пресича някое домино, то 10-те линии на мрежата пресичат най-малко $10.2 = 20$ домина (едно домино се пресича от точно една линия на мрежата). Но домината са общо $36 : 2 = 18$, противоречие. Следователно има линия на мрежата, която не пресича домино и по нея може да се разреже дъската.

Задача 14. В равнината са дадени 13 точки с цели координати. Докажете, че могат да се изберат 4 от тях така, че техният център на тежестта да има цели координати.

Решение. Има 4 вида точки според четността на координатите им:

(ч, ч); (ч, н), (н, ч) и (н, н).

От принципа на Дирихле от всеки 5 точки има поне две от един и същ вид. Нека вземем някои 5 от дадените точки и да отделим от тях две точки от един и същ вид.

Сред останалите 11 точки избираме някои 5 точки и сред тях отново има две от един вид.

Продължаваме по същия начин, докато получим 5 двойки точки от един и същ вид и 3 останали точки.

Сега да забележим, че във всяка двойка сборът на първите координати е четен и сборът на вторите координати е четен.

Четните числа дават остатък 0 или 2 при деление на 4, следователно може да разделим петте двойки на четири вида според остатъка, който дават сборовете от координатите им при деление на 4:

$$(0,\,0);\ (0,\,2),\ (2,\,0) \text{ и } (2,\,2).$$

По принципа на Дирихле, сред петте двойки има две от един и същ вид. Четирите точки от тези две двойки имат желаното свойство.

Забележка. Могат да се намерят 12 точки с цели координати, сред които няма 4 точки, чийто център на тежестта да е с цели координати. Опитайте!

Принцип на Дирихле и графи. Добре известно е, че:

(1) Във всяка компания има двама с един и същ брой приятели в групата.

(2) Ако ребрата на пълен граф с 6 върха се оцветят в два цвята, винаги може да се намерят два едноцветни триъгълника.

Доказателствата на тези твърдения може да намерите в първата част на сборника *Математика за напреднали.*

Задача 15. Седемнадесет учени водят кореспонденция всеки с всеки по една от три възможни теми. Да се докаже, че има трима, които обсъждат една и съща тема помежду си. (МОМ, 1964)

Решение. Да разгледане учен X, който комуникира с останалите 16 по 3 възможни теми. Тъй като $\left\lceil \dfrac{16}{3} \right\rceil = 6$, има поне 6 учени, с които X комуникира по една и съща тема.

Ако някои двама от тези 6 учени кореспондират помежду си по същата тема, те заедно с X са търсената тройка.

Ако всеки двама от тези 6 учени кореспондират помежду си по някоя от останалите две теми, то от (2) следва, че някои трима измежду тях комуникират по една и съща тема.

Забележка. Задачата може да се формулира така: *Ако ребрата на пълен граф със 17 върха се оцветят в три цвята, винаги може да се намери едноцветен триъгълник.*

Задача 16. На парти присъстват n момчета и n момичета. Всяко момче харесва a момичета и всяко момиче харесва b момчета. Да се докаже, че ако $a+b>n$, то винаги ще се намерят момче и момиче, всеки от които харесва другия. (Мексико 2003)

Решение. Да разгледаме с n сини върха (момчета) и n червени върха (момичета) и да свържем всяко момиче с всяко момче. Ще получим $n.n=n^2$ ребра.

Ако едно момиче харесва дадено момче, ще насочим реброто, което ги свързва, към момчето (слагаме стрелка). Ако едно момче харесва дадено момиче, насочваме реброто, което ги свързва, към момичето.

От сините върхове излизат $n.a$ стрелки, а от червените върхове излизат $n.b$ стрелки. Общо стрелките са

$$n.a+n.b=n(a+b)>n.n.$$

Следователно има поне едно ребро с две стрелки, т.е. поне една двойка, която се харесва.

Задача 17. Ердьош – Секереш, 1935. Дадена е редица от $ab+1$ различни числа. Да се докаже, че в нея има или растяща подредица с поне $a+1$ числа, или намаляваща подредица с поне $b+1$ числа.

Решение. Да допуснем, най-дългата растяща подредица има не повече от a числа и най-дългата намаляваща подредица има не повече от b числа.

За всяко число x в редицата да отбележим с x_1 броя на числата в най-дългата растяща подредица с край x, а с x_2 броя на числата в най-дългата намаляваща подредица с край x.

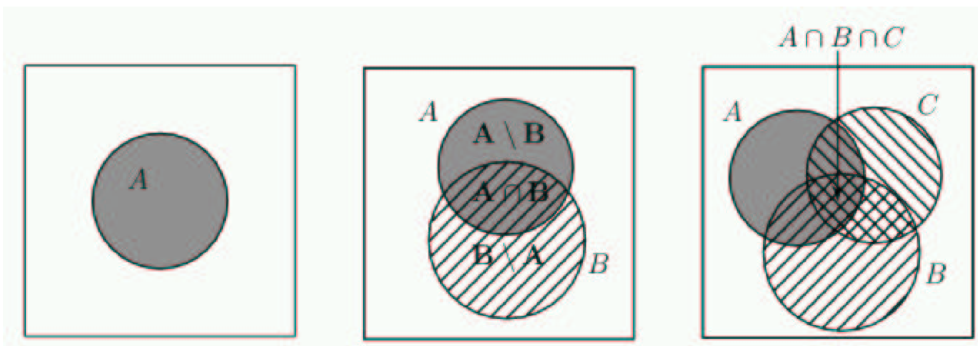
От допускането следва, че $1 \leqq x_1 \leqq a$ и $1 \leqq x_2 \leqq b$, т.е. броят на различните двойки $(x_1;x_2)$ е ab. Тъй като числата са $ab+1$, то има две числа в редицата (нека са x и y, като x е записано преди y в редицата), за които $x_1=y_1$ и $x_2=y_2$.

Ако $x<y$, растящата подредица с край x може да се продължи до y, т.е. растящата подредица с край y има поне x_1+1 числа. Получихме, че $y_1>x_1$.

Ако $x>y$, намаляващата подредица с край x може да се продължи до y, т.е. намаляващата подредица с край y има поне x_2+1 числа. Получихме, че $y_2>x_2$. Противоречие.

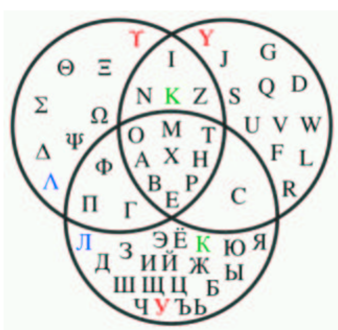
ПРИНЦИП НА ВКЛЮЧВАНЕ / ИЗКЛЮЧВАНЕ

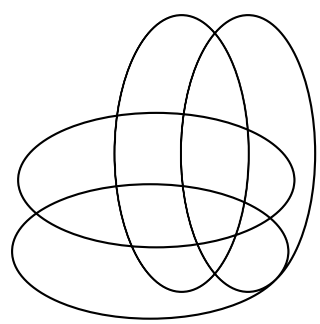
Принципът на включване-изключване (ПВИ) е метод (формула) за намиране на броя на елементите на обединение на няколко множества, ако се знае броят на елементите на всяко от тях, както и на всички възможни техни сечения. В основата на този принцип е простата идея, че **всеки елемент от множеството трябва да се преброи точно веднъж**.



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$





Пример на диаграма на Вен, която показва всички сечения на гръцката, руската и латинската азбука (главните букви от тези азбуки).

Диаграма на Вен за четири множества може да се построи с четири елипси. На колко части разделят равнината елипсите на чертежа? Защо?

За решаването на интересни задачи с ПВИ обикновено не е достатъчно да се знае и директно да се приложи формулата. Нужно е да се изберат подходящи множества и да се преброят елементите им.

Задача 1. а) Десет човека си поръчали вечеря, като 7 поръчали скара, 5 поръчали супа, 4 поръчали салата. Всеки поръчал нещо и никой не е поръчал точно две неща. Колко човека са поръчали и скара, и супа, и салата?

б) Тридесет ученици решавали три задачи. Всеки решил поне една задача, като десет ученици решили само по една една задача. Първа и втора задача решили 8 ученици, първа и трета задача решили 9 ученици, а втора и трета задача решили 11 ученици. Колко ученици са решили и трите задачи?

в) Двадесет ученици участват в извънкласни занимания по пиано, шах или рисуване. Ако 10 ученици ходят на пиано, 13 на шах и 9 на рисуване и 9 ученици са ходят на поне две занимания, колко ученици посещават и трите?

г) Сто ученици участвали в математическа олимпиада. Първа задача решили 90 участници, втора задача решили 80 участници и трета задача – 75 участници. Най-малко колко участници са решили и трите задачи?

Решение. а) Ако x човека са поръчали и трите ястия, то $7+5+4-2x = 10$, т.е. $x = 3$.

б) Ако x ученици са решили и трите задачи, то $10+8+9+11-2x = 30$, т.е. $x = 4$.

в) Ако x ученици участват и в трите занимания, $10+13+9-9-x = 20$, т.е. $x = 3$.

г) Отговор 45.

Задача 2. а) Колко естествени числа, по-малки или равни на 100, се делят на 2 или на 3, но не се делят на 4?

б) Колко естествени числа, по-малки от 2005, се делят на 3 или на 4, но не на 12?

в) Колко естествени числа, ненадхвърлящи 150, са взаимнопрости със 70?

г) Колко естествени числа, по-малки от 5000, се делят на 3, 5 или 7, но не се делят на 35?

Решение. а) До 100 има 50 числа, кратни на 2; 33 числа, кратни на 3 и 16 числа, кратни на 6. Числата, които се делят на 2 или на 3, са $50 + 33 - 16 = 67$. Измежду тях са броени всички кратни на 4, които са 25 на брой. Търсеният брой е $67 - 25 = 42$.

б) Отговор 835.

в) Първо да отбележим, че $70 = 2.5.7$. С A, B и C ще означим множествата на ненадхвърлящите 150 числа, които се делят съответно на 2, 5 и 7.

Множество	Описание	Брой елементи
A	кратни на 2	75
B	кратни на 5	30
C	кратни на 7	21
$A \cap B$	кратни на 10	15
$A \cap C$	кратни на 14	10
$B \cap C$	кратни на 35	4
$A \cap B \cap C$	кратни на 70	2

Числата, ненадхвърлящи 150, които се делят на 2, 5 или 7, са

$$|A \cup B \cup C| = (75 + 30 + 21) - (15 + 10 + 4) + 2 = 99,$$

а взаимнопростите със 70 са $150 - 99 = 51$.

г) Кратните на 3, 5 или 7, по-малки от 5000, са

$$1666 + 999 + 714 - 333 - 238 - 142 + 47 = 2713.$$

Измежду тях има 142 числа, кратни на 35. Броят на числата, по-малки от 5000, които се делят на 3, 5 или 7, но не се делят на 35, е $2713 - 142 = 2571$.

Задача 3. Колко са естествените числа, които делят 100, 150 или 180? Колко естествени числа делят точно едно от числата 100, 150 и 180?

Решение. С A, B и C ще означим множествата на делителите съответно на 100, 150 и 180.

Множество	Описание	Брой елементи
A	делители на 100	9
B	делители на 150	12
C	делители на 180	18
$A \cap B$	делители на 50	6
$A \cap C$	делители на 20	6
$B \cap C$	делители на 30	8
$A \cap B \cap C$	делители на 10	4

Числата, които делят 100, 150 или 180, са

$$9 + 12 + 18 - 6 - 8 - 6 + 4 = 23.$$

Числата, които делят поне две от числата 100, 150 и 180, са

$$6 + 8 + 6 - 2.4 = 12.$$

Останалите $23 - 12 = 11$ делят точно едно от числата 100, 150 и 180.

Задача 4. Някои държави използват регистрационни номера, които се състоят от редица от три букви, последвана от редица от три цифри. (Редицата от цифри може да започва с 0, а буквите в латинската азбука са 26.)

Щастливите регистрационни номера съдържат поне един палиндром (от букви или цифри). Каква е вероятността да се получи щастлив регистрационен номер?

Решение. Броят на щастливите номера, които съдържат буквен палиндром aba, е $26^2.10^3$; номерата с цифрен палиндром са $26^3.10^2$.

Номерата, които съдържат и цифрен, и буквен палиндром, са $26^2.10^2$ на брой. Щастливите регистрационни номера са

$$26^2.10^3 + 26^3.10^2 - 26^2.10^2 = 35.26^2.10^2.$$

Тъй като всички номера са $26^3.10^3$, вероятността да се получи щастлива регистрация, е

$$\frac{35.26^2.10^2}{26^3.10^3} = \frac{7}{52}.$$

Задача 5. Колко 6-цифрени числа имат в записа си поне една цифра 1, поне една цифра 2 и поне една цифра 3?

Решение. От 900000, общия брой 6-цифрени числа, ще извадим броя на тези числа, в чийто запис няма 1, 2 или 3.

Шестцифрените числа без цифра 1 са $8.9^5 = 472392$. Толкова са 6-цифрените числа без 2, както и тези без 3.

Шестцифрените числа без цифри 1 и 2 са $7.8^5 = 229376$. Толкова са 6-цифрените числа без 2 и 3, както и тези без 1 и 3.

Шестцифрените числа без цифри 1, 2 и 3 са $6.7^5 = 100842$.

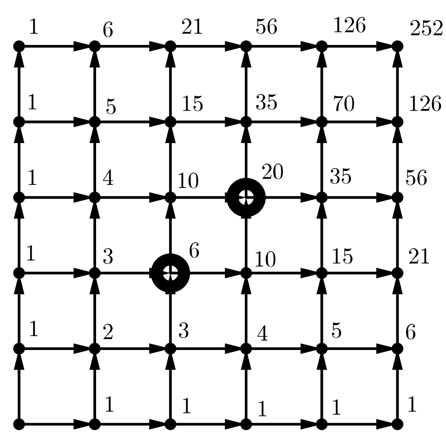
Шестцифрените числа, в чийто запис няма 1, 2 или 3, са

$$3.472392 - 3.229376 + 100842 = 829890$$

и търсеният брой е $900000 - 829890 = 70110$.

Задача 6. Мишо е в долния ляв ъгъл на мрежа 6×6; в точката $(0, 0)$. В мрежата има две устройста за еднократно телепортиране, разположени в $(2, 2)$ и $(3, 3)$: първия път, когато Мишо попадне в една от тези точки, той незабавно се телепортира до другата точка и устройствата изчезват. Ако Мишо може да се движи само нагоре или надясно, да се намери по колко различни начина той може да стигне до точката $(5, 5)$.

Решение. Без условието за телепортиране задачата е позната. Тогава Мишо може да стигне по 252 начина от $(0, 0)$ до $(5, 5)$, както е показано на чертежа.



В дадената задача има три вида маршрути.

Първи вид маршрути, при при които Мишо се телепортира в $(2,2)$. Тъй като от $(0,0)$ до $(2,2)$ той може да стигне по 6 начина, а след като се телепортира в $(3,3)$, до $(5,5)$ също може да стигне по 6 начина, тези маршрути са $6.6 = 36$.

Втори вид маршрути, при при които Мишо се телепортира в в $(3,3)$. От $(0,0)$ до $(3,3)$, без да мине през $(2,2)$, той може да стигне по 8 начина (проверете!), а след като се телепортира в $(2,2)$, до $(5,5)$ да продължи по 20 начина. Има $8.20 = 160$ маршрути от този вид.

Трети вид маршрути, при при които Мишо не се телепортира. Ще ги преброим с ПВИ. Всички маршрути от $(0,0)$ до $(5,5)$ са 252. От тях:

през $(2,2)$ минават $6.20 = 120$ маршрута;

през $(3,3)$ минават $20.6 = 120$ маршрута;

през $(2,2)$ и $(3,3)$ минават $6.2.6 = 72$ маршрута;

през $(2,2)$ или $(3,3)$ минават $2.120 - 72 = 168$ маршрута.

Следователно $252 - 168 = 84$ маршрута НЕ минават $(2,2)$ и $(3,3)$.

Общо пътищата са $36 + 160 + 84 = 280$.

Задача 7. В квадратна мрежа (със страна на квадратчето 1 см) е нарисуван правоъгълник със страни 150 см и 160 см, като страните на правоъгълника са по линиите на мрежата. На колко части се разделя диагоналът на правоъгълника от пресечните си точки с линиите на мрежата?

Решение. Диагоналът пресича $150 - 1 = 149$ вертикални и $160 - 1 = 159$ хоризонтални линии. Пресечна точка на диагонала с вертикална линия съвпада с негова пресечна точка с хоризонтална, когато тази точка е възел на мрежата.

Нека всички възли на мрежата, лежащи на диагонала, са n на брой. Да оцветим верикалните и хоризонтални линии през тях. Оцветените линии разделят страните на $n+1$ равни части, следователно $n + 1$ е делител на 150 и на 160. Тогава $n + 1 = 10$, т.е. $n = 9$. На диагонала лежат 9 възли на мрежата.

Така пресечните точки на диагонала с линиите на мрежата са $149 + 159 - 9 = 299$.

Задача 8. По колко различни начина могат да се наредят буквите в думата ПЕПЕРУДА така, че да няма две еднакви букви една до друга?

Решение. Има $\dfrac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2.2} = 2.7!$ начина да се подредят буквите в ПЕПЕРУДА.

Ако две букви П са една до друга, може да ги броим като една. Буквите в думата ЕПЕРУДА могат да се подредят по $\dfrac{7!}{2}$ начина.

По същия начин, ако две букви Е са една до друга, имаме $\dfrac{7!}{2}$ подреждания.

Ако две букви П са една до друга и двете букви Е са една до друга, трябва да преброим подредбите на буквите в думата ПЕРУДА, които са 6!.

Начините, по които може да се наредят буквите в думата ПЕПЕРУДА така, че да няма две еднакви букви една до друга, са

$$2.7! - \frac{7!}{2} - \frac{7!}{2} + 6! = 7! + 6! = 8.6! = 5760.$$

Задача 9. По колко различни начина могат да се наредят буквите А, В, К, Л, М, Н, О, У, Х така, че в редицата да не се среща подредица КОН, МУХА, ВОЛ?

Решение. Буквите могат да се подредят по 9! начина.

Множество	Описание	Брой елементи
A	редици, които съдържат МУХА	6!
B	редици, които съдържат ВОЛ	7!
C	редици, които съдържат КОН	7!
$A \cap B$		4!
$A \cap C$		4!
$B \cap C$		0

Редиците, които НЕ съдържат КОН, МУХА, ВОЛ, са

$$9! - |A \cup B \cup C| = 9! - (7! + 6! + 6! - 4! - 4!) = 356448.$$

Задача 10. Шест момчета с различен ръст се наредили на опашка за сок. По колко начина те могат да се подредят така, че никои трима поредни на опашката да не са с нарастващ ръст (*като аптекарски шишета*) отпред назад.

Решение. Всички подредби на 6 човека в редица с $6! = 720$.

Ще преброим подредбите X, при които има трима поредни на опашката, наредени като аптекарски шишета.

Нека A са подредбите, при които първият, вторият и третият на опашката са като аптекарски шишета; B са подредбите, при които вторият, третият и четвъртият са като аптекарски шишета; C са подредбите, при които третият, четвъртият и петият са като аптекарски шишета; D са подредбите, при които четвъртият, петият и шестият са като аптекарски шишета.

Отговорът на задачата е $720 - |X|$, а

$$|X| = |A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|$$

$$+|A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| - |A\cap B\cap C\cap D|.$$

Да намерим $|A|$. Първо избираме 3 от 6 момчета и ги нареждаме като аптекарски шишета на първо, второ и трето място в опашката. Може да изберем 3 от 6 по $\dfrac{6.5.4}{3.2.1} = 20$ начина. След това подреждаме останалите три момчета на опашката по $3! = 6$ начина. Оттук $|A| = 20.6 = 120$.

По същия начин $|B| = |C| = |D| = 120$.

За да намерим $|A\cap B|$, трябва да преброим начините първите четирима да са като аптекарски шишета. Както в предния случай, намираме

$$|A\cap B| = \frac{6.5.4.3}{4.3.2.1}\cdot 2! = 30.$$

По същия начин $|B\cap C| = |C\cap D| = 30$.

За да намерим $|A\cap C|$, трябва да преброим начините първите петима да са като аптекарски шишета. За тази подредба е достатъчно да изберем кой от шестимата да е последен на опашката; т.е. $|A\cap C| = 6$.

По същия начин $|A\cap B\cap C| = |B\cap D| = |B\cap C\cap D| = 6$.

За да намерим $|A \cap D|$, трябва да преброим начините първите трима и последните трима да са като аптекарски шишета. За тази подредба е достатъчно да изберем кои да са първите трима, т.е. $|A \cap D| = \dfrac{6.5.4}{3.2.1} = 20$.

Накрая има една наредба, когато всички са като аптекарски шишета, т.е. $|A \cap B \cap D| = |A \cap C \cap D| = |A \cap B \cap C \cap D| = 1$.

Получаваме

$$|X| = 4.120 - 30 - 6 - 20 - 30 - 6 - 30 + 6 + 1 + 1 + 6 - 1 = 371.$$

Отговорът е $720 - 371 = 349$.

Задача 11. Колко са четирицифрените числа, в чийто запис няма две съседни цифри, които да са кратни на 3?

Решение. Ще преброим четирицифрените числа с поне две съседни кратни на 3 цифри.

Нека разгледаме следните подмножества на множеството на четирицифрените числа $\overline{abcd}$.

Множество	Описание	Брой елементи
A	a и b са кратни на 3	$3.4.10^2$
B	b и c са кратни на 3	$9.4^2.10$
C	c и d са кратни на 3	$9.4^2.10$
$A \cap B$		$3.4^2.10$
$A \cap C$		3.4^3
$B \cap C$		9.4^3
$A \cap B \cap C$		3.4^3

Намираме

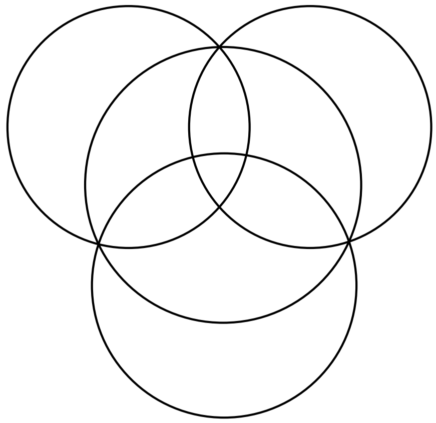
$$|A \cup B \cup C| = 3.4.10^2 + 2.9.4^2.10 - (3.4^2.10 + 9.4^3 + 3.4^3) + 3.4^3 = 3014.$$

Числата без съседни кратни на 3 цифри са $9000 - 3014 = 5976$.

Забележка. Ако търсим пет или повече цифрени числа без съседни кратни на 3 цифри, за предпочитане е решението с рекурсия.

И накрая една задача, която неявно използва принципа на включване/изключване.

Задача 12. Запишете числата от 1 до 10 в десетте части, определени от четирите кръга така, че сборът от числата във всеки кръг да е един и същ. Кое число записахте в общата част на четирите кръга?



Решение. Нека числото в четирите кръга е x; сборът на трите числа, които са записани в три кръга, е y; сборът на трите числа, които са записани в два кръга, е z; сборът на трите числа, които са записани само в един кръг, е t. Ако сборът на числата във всеки кръг е S, имаме

$$4S = 4x + 3y + 2z + t, \quad x + y + z = S.$$

Оттук получаваме $4x + 3y + 2z + t = 4x + 4y + 4z \iff t = 2z + y$ и може да оценим t. Имаме

$$t = 2z + y \geqq 2(1 + 2 + 3) + 4 + 5 + 6 = 27.$$

От друга страна, t е сбор на три от числата от 1 до 10, следователно $t \leqq 10 + 9 + 8 = 27$. Получихме, че $t = 27$, което означава, че трите числа, записани само в един кръг, са $10, 9, 8$. Освен това $z = 1 + 2 + 3$ и $y = 4 + 5 + 6$. Остава $x = 7$.

РЕКУРСИВНО БРОЕНЕ. РЕКУРЕНТНИ УРАВНЕНИЯ

Една редица от числа може да се дефинира, като се дадат начални стойности и правило, по което от тях се получават следващите стойности. Например редицата $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ може да се определи като редица с първи член 1, в която всеки следващ член е 2 пъти по-голям от предишния:

$$a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} \text{ при } n \geqq 2.$$

Такава дефиниция се нарича *рекурсивна* (на латински *recurrere* е повторение).

Редицата от примера лесно се дефинира *в явен вид*: $a_n = 2^{n-1}$ при $n \geqq 1$.

В комбинаториката се използва *рекурсивно броене* в случаите, когато не е лесно да се определи в явен вид броят на дадени обекти. Тогава се търси зависимост на техния брой от броя на подобни *по-малки* обекти.

Най-известният пример за рекурентна редица е редицата на Фибоначи (известен като Леонардо от Пиза, 1170 - 1250).

Задача 1. Зайците и числата на Фибоначи. На остров заселили двойка новородени зайци. Ако приемем, че всяка двойка зайци започва да се размножава, като достигне възраст 2 месеца и всеки месец ражда нова двойка зайци, както и че зайците са безсмъртни, колко двоки зайци ще има на острова след 10 месеца?

Решение. Нека f_n е броят на двойките зайци след n месеца. Имаме $f_1 = 1$ и $f_2 = 1$.

След n месеца на острова са всички двойки, които са били предишния месец (те са f_{n-1}) и новородените двойки. Новите двойки се получават от двойките, които са били на острова преди 2 месеца, а те са f_{n-2}. Следователно

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

и получаваме забележителната редица на Фибоначи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

След 10 месеца двойките на острова са $f_{10} = 55$.

Задача 2. Двоични редици без две поредни 0. Колко са редиците с дължина 10 от нули и единици, в които няма две поредни нули?

Решение. Нека a_n е броят на редиците с дължина n без поредни 0. Те са от два вида – завършващи на 1 (вид 1) и завършващи на 0 (вид 2).

Да разгледаме редиците от вид 1. Първите им $n-1$ цифри образуват редица с дължина $n-1$ без поредни 0. И обратно, към всяка редица с дължина $n-1$ без поредни 0 може да се допише 1 и да се получи редица от вид 1. Следователно редиците от вид 1 са толкова, колкото са редиците с дължина $n-1$ без поредни 0, т.е. a_{n-1}.

Да разгледаме редиците от вид 2. Последната им цифра е 0, предпоследната е 1. Първите им $n-2$ цифри образуват редица с дължина $n-2$ без поредни 0. И обратно, към всяка редица с дължина $n-2$ без поредни 0 може да се допише 10 и да се получи редица от вид 2 с дължина n. Следователно редиците от вид 2 са a_{n-2}. Имаме

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Очевидно $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ и редицата е $2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$, т.е. редицата на Фибоначи от третия член нататък; $a_{10} = f_{12} = 144$.

Редицата на Фибоначи се среща в различни формулировки. Например:

- *По колко различни начина може да се оцвети редица от* 12 *квадратчета така, че всяко квадратче да е червено или зелено и да няма съседни червени квадратчета?*

- *По колко различни начина може да се покрие с домино ивица* 2×13*?*

- *Десет деца са седнали на* 10 *стола на един ред. След това те станали и учителката им казала да седнат така, че всеки да е на предишното си място или на съседно на него. По колко различни начина може да седнат децата?*

- *По колко различни начина мога да се изкача по стълба с* 14 *стъпала, ако на всяка стъпка изкачвам едно или две стъпала?*

Задача 3. Четно-нечетни редици от нули и единици. Една редица от нули и единици ще наричаме *четно-нечетна*, ако *блокчетата* от нули в редицата са с четна дължина, а блокчетата от единици са с нечетна дължина. Колко са четно-нечетните редици с дължина 10? (Блокче от нули е подредица от поредни нули, оградена от единици.)

Решение. Нека a_n и b_n е броят на четно-нечетните редици с дължина n, които завършват съответно на 0 и на 1.

Ако четно-нечетна редица завършва на 0, то тя завършва на 00, т.е. се получава като се допише 00 към четно-нечетна редица с дължина $n-2$. Имаме

$$a_n = a_{n-2} + b_{n-2}.$$

Ако четно-нечетна редица завършва на 1, то тя завършва на 01 или 111, т.е. се получава или като се допише 1 към завършваща на 0 четно-нечетна редица с дължина $n-1$, или като се допише 11 към завършваща на 1 четно-нечетна редица с дължина $n-2$. Имаме

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-2}.$$

Оттук, тъй като $a_1 = 0, b_1 = 1, a_2 = 1, b_2 = 0$, намираме

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
1	0	1	6	2	4
2	1	0	7	6	5
3	1	2	8	6	10
4	1	1	9	11	11
5	3	3	10	16	21

Търсеният брой е $a_{10} + b_{10} = 37$.

Задача 4. Задачата на куриера. Куриер доставя пощата на 19 къщи на източната страна на една улица. Куриерът забелязал, че две съседни къщи не получават поща в един и същ ден и че няма ден, в който повече от две поредни къщи да не получават поща. Колко различни схеми за доставка са възможни?

Решение. Нека с 0 отбелязваме къща без поща, а с 1 – къща с поща. Търсим броя на редиците от 0 и 1 без две последователни 1 и без 3 последователни 0.

Последните две цифри на n-цифрена редица с това свойство може да са 00, 01 или 10.

Нека a_n е броят на n-цифрените редици с горното свойство, които завършавт на 00, а b_n и c_n – съответно на 01 и 10.

Ако n-цифрена редица завършва на 00, предишната цифра е 1, т.е. $n-1$-цифрената редица завършва на 10; т.е.

$$a_n = c_{n-1}.$$

Ако n-цифрена редица завършва на 01, предишната цифра е 0 или 1, т.е. $n-1$-цифрената редица завършва на 00 или 10; т.е.

$$b_n = a_{n-1} + c_{n-1}.$$

Ако n-цифрена редица завършва на 10, предишната цифра е 0, т.е. $n-1$-цифрената редица завършва на 01; т.е.

$$c_n = b_{n-1}.$$

Освен това, $a_2 = b_2 = c_2 = 1$. От рекурсивните равенства получаваме

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86
b_n	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114	151
c_n	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114

Накрая $a_{19} + b_{19} + c_{19} = 351$.

Задача 5. Числа без съседни кратни на 3 цифри. Колко са четирицифрените числа, в чийто запис няма две съседни цифри, които да са кратни на 3?

Решение. Нека сред n-цифрените числа, в чийто запис няма две съседни кратни на 3, с A_n означим броя на тези, които завършват на кратно на 3, а с B_n – броя на останалите.

Цифрата на единиците на n-цифрените числа, които завършват на кратно на 3, е 0, 3, 6 или 9; а цифрата на десетиците им не е кратна на 3. Затова

$$A_n = 4B_{n-1}.$$

Цифрата на единиците на n-цифрените числа, които не завършват на кратно на 3, е 1, 2, 4, 5, 7 или 8; имаме

$$B_n = 6(A_{n-1} + B_{n-1}).$$

Последователно пресмятаме първите няколко стойности на A_n и B_n:

n	1	2	3	4
A_n	3	24	216	1872
B_n	6	54	468	4104

Броят на четирицифрените числа, в чийто запис няма две съседни цифри, които да са кратни на 3, е $A_4 + B_4 = 1842 + 4104 = 5976$.

Забележка. Сравнете с решението на задача 11 в темата *Принцип на включване и изключване.*

Задача 6. Разредени множества. Едно множество наричаме *разредено*, ако включва не повече от едно от три последователни естествени числа. Колко са разредените непразни подмножества на множеството $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$?

Решение. Нека S_n е броят на разредените подмножества на $\{1, 2, ...n\}$. Имаме $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3$.

Разредените подмножества на $\{1, 2, ...n, n+1\}$ са от два вида: които включват числото $n+1$ и които не го включват.

Разредените подмножества на $\{1, 2, ...n, n+1\}$, които не включват числото $n+1$, са точно разредените подмножества на $\{1, 2, ...n\}$; те са S_n на брой.

Разредените подмножества на $\{1, 2, ...n, n+1\}$, които включват числото $n+1$, не включват n и $n-1$. Те са множеството $\{n+1\}$ и разредените подмножества на $\{1, 2, ...n-2\}$, обединени с $\{n+1\}$ и са $S_{n-2} + 1$ на брой.

Следователно

$$S_{n+1} = S_n + S_{n-2} + 1.$$

Получаваме редицата $1, 2, 3, 5, 8, 12, 18, 27, 40, 59, 87, 128$. Броят на търсените множества е $S_{12} = 128$.

Задача 7. Добри думи. *Добра дума* ще наричаме редица от A, B и C, в която след A никога не следва B, след B никога не следва C и след C никога не следва A. Колко са добрите думи с дължина 7 букви?

Упътване. Ако броят на добрите думи с дължина n е a_n, имаме $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1}$. Оттук $a_n = 3.2^{n-1}$.

Задача 8. Кула от кубчета. Дадени са 8 куба с ръбове $1, 2, \ldots 8$. Една *кула* включва всички кубчета, като най-отдолу може да е всяко кубче, а кубът непосредствено над куб с ръб k има ръб най-много $k + 2$. Колко различни кули може да се построят?

Решение. Нека с кубчета с ръбове $1, 2, \ldots, m$ може да построим T_m кули и да разгледаме кубчета с ръбове $1, 2, \ldots, m, m+1$. Ако премахнем куба с ръб $m + 1$ от такава кула (запазвайки всички останали кубчета), получаваме валидна кула с кубове $1, 2, \ldots, m$. При дадена кула с кубове $1, 2, \ldots, m$ (с $m \geq 2$), можем да вмъкнем куб с ръб $m + 1$ на точно 3 места: най-отдолу, непосредствено след куб с ръб $m - 1$ или m. Следователно

$$T_{m+1} = 3T_m.$$

Има 2 кули с кубове $1, 2$, така че $T_2 = 2$. Получаваме $T_{m+1} = 2.3^{m-1}$ при $m \geqq 2$. Има $T_8 = 2.3^6 = 1458$ кули с кубове $1, 2, \ldots, 8$.

Задача 9. Нечетен брой нули. Колко е броят на всички редици с дължина n, образувани от цифрите 0, 1 и 2, които съдържат нечетен брой нули?

Решение. Да означим с a_n броя на търсените редици. Имаме $a_1 = 2$.

Редиците с дължина n, които съдържат нечетен брой нули и не завършват на 0, се получават като към редиците с дължина $n - 1$, които съдържат нечетен брой нули, се допише 1 или 2. Техният брой е $2a_{n-1}$.

Редиците с дължина n, които съдържат нечетен брой нули и завършват на 0, се получават от редиците с дължина $n - 1$, които съдържат четен брой нули. Техния брой получаваме, като от 3^{n-1}, колкото са всички редици от 0, 1 и 2 с дължина $n - 1$, извадим тези, които съдржат нечетен брой нули, т.е. a_{n-1}.

Следователно $a_n = 3^{n-1} - a_{n-1} + 2a_{n-1} = 3^{n-1} + a_{n-1}$.

Може да запишем

$$a_n = 3^{n-1} + a_{n-1} = 3^{n-1} + 3^{n-2} + a_{n-2} = \cdots = 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^1 + a_1$$

Оттук, като използваме, че $3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^1 + 1 = \dfrac{3^n - 1}{2}$, получаваме

$$a_n = \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Рекурентни уравнения

В последната задача *затворихме* рекурентната формула, т.е. записахме в явен вид как a_n зависи от n. В таблицата са показани някои рекурентни редици, които е лесно да се запишат в явен вид.

	Рекурентна формула	Начало	Формула в явен вид
1.	$a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 1$	$1, 2, 3, \ldots$	$a_n = n$
2.	$a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$	$1, 3, 5, \ldots$	$a_n = 2n - 1$
3.	$a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$	$1, 4, 9, 16, \ldots$	$a_n = n^2$
4.	$a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1}$	$1, 2, 6, 24, \ldots$	$a_n = n!$
5.	$a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 2$	$1, 5, 17, \ldots$	$a_n = 2.3^{n-1} - 1$

На втория ред в таблицата за редицата $a_n = a_{n-1} + 2$ имаме

$$+\left.\begin{array}{ll} a_n - a_{n-1} & = 2 \\ a_{n-1} - a_{n-2} & = 2 \\ & \ldots \\ a_2 - a_1 & = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_n - a_1 = 2(n-1) \\ a_n = a_1 + 2n - 2 = 2n - 1 \end{array}$$

На третия ред в таблицата за редицата $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ имаме

$$+\left.\begin{array}{ll} a_n - a_{n-1} & = 2n - 1 \\ a_{n-1} - a_{n-2} & = 2(n-1) - 1 \\ & \ldots \\ a_2 - a_1 & = 2.2 - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + 2[n + (n-1) + \cdots + 2] - (n-1) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{(n+2)(n-1)}{2} - (n-1) = n^2 \end{aligned}$$

На петия ред в таблицата за редицата $a_n = 3a_{n-1} + 2$ имаме

$$+\quad \left.\begin{array}{ll} a_n - 3a_{n-1} & = 2 \\ 3a_{n-1} - 3^2 a_{n-2} & = 2.3 \\ 3a_{n-2} - 3^3 a_{n-3} & = 2.3^2 \\ & \dots \\ 3^{n-2}a_2 - 3^{n-1}a_1 & = 2.3^{n-2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-1}a_1 + 2[1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-2}] \\ &= 3^{n-1} + 2 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{2} = 2.3^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

Ако $a_n = a_{n-1} + f(n)$, по горния метод получаваме $a_n = a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} f(k)$ и остава да *затворим* последната сума. Подобни *итеративи методи* позволяват да се намерят явни формули при някои рекурсии, които се обръщат само към предишния член на редицата (рекурсия с дълбочина 1).

По подобен начин може да се намери явен вид и за следната рекурентна формула с дълбочина 2:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad a_1 = 2,\ a_2 = 5.$$

Записваме формулата във вида $a_n - 3a_{n-1} = 2(a_{n-1} - 3a_{n-2})$ и получаваме

$$+\quad \left.\begin{array}{ll} a_n - 3a_{n-1} & = 2(a_{n-1} - 3a_{n-2}) \\ 2(a_{n-1} - 3a_{n-2}) & = 2^2(a_{n-2} - 3a_{n-3}) \\ & \dots \\ 2^{n-3}(a_3 - a_2) & = 2^{n-2}(a_2 - 3a_1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a_n - 3a_{n-1} = 2^{n-2}(a_2 - 3a_1) = -2^{n-2}.$$

Получихме рекурентна формула $a_n = 3a_{n-1} - 2^{n-2}$ с дълбочина 1 и както в предишния пример (на ред 5 от таблицата) намираме

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-1}a_1 - (2^{n-2} + 3.2^{n-3} + 3^2.2^{n-4} + \cdots + 3^{n-2}.2^0) \\ &= 2.3^{n-1} - (3^{n-1} - 2^{n-1}) = 3^{n-1} + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Използвахме формулата

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

Забележете, че основите на степените в получената формула $a_n = 3^{n-1} + 2^{n-1}$ са корените 2 и 3 на уравнението $x^2 = 5x - 6$. Това уравнение се нарича *характеристично* на даденото рекурентно уравнение $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$.

По подобен начин, на рекурентното уравнение $a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2}$ съответства характеристичното $x^2 - ax - b = 0$ и ако то има различни корени α и β, то

$$a_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n,$$

където C_1 и C_2 са константи, които се определят от дадените стойности на a_1 и a_2.

Ако характеристичното уравнение има двоен корен α, то $a_n = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n$.

Задача 10. Да оцветим ивицата. Нека a_n е броят на начините, по които ивица $n \times 1$ може да се покрие с единични квадратчета от 4 различни цвята и домина от 5 различни цвята. (Цветовете на домината и на единичните квадратчета са различни.)

а) Намерете рекурсивна формула за a_n.

б) Намерете a_n в явен вид.

Решение. а) Очевидно $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$ при $n \geqq 3$. Освен това $a_1 = 4$, $a_2 = 5 + 4.4 = 21$.

б) Характеристичното уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$ има корени 5 и -1, следователно $a_n = a5^n + b(-1)^n$. При $n = 1$ и $n = 2$ получаваме

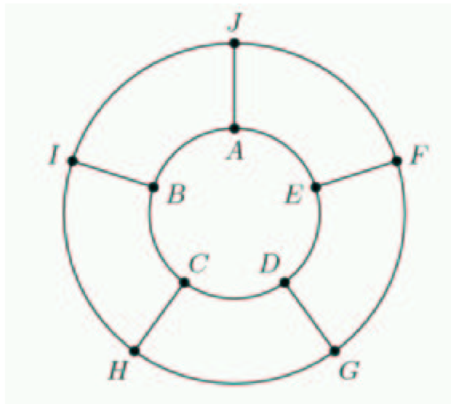
$$\left|\begin{array}{l} 5a - b = 4 \\ 25a + b = 21 \end{array}\right. \Longrightarrow a = \frac{5}{6},\ b = \frac{1}{6}.$$

Следователно $a_n = \dfrac{5^{n+1} + (-1)^n}{6}$.

Задача 11. Отново числата на Фибоначи. Намерете формула в явен вид за числата на Фибоначи.

Отговор. $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Задача 12. Пътищата на бръмбара. В точка A на схемата се намира бръмбар. За една стъпка той се придвижва от една отбелязана точка до съседна на нея по линиите на схемата. По вътрешната окръжност бръмбарът се движи обратно на часовниковата стрелка, а по външната – по часовниковата стрелка.



Да се намери броят на пътищата с 15 стъпки, които започват и завършват в A.

Решение. Нека X_n е броят на пътищата с n стъпки от A до X за всяко $X \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$. Имаме $A_0 = 1$ и $X_0 = 0$ за всяка друга точка $X \neq A$. Освен това за $n > 0$ от правилата за придвижване следва, че

$$A_n = B_{n-1} + J_{n-1} = I_n \qquad B_n = C_{n-1} + I_{n-1} = H_n$$
$$C_n = D_{n-1} + H_{n-1} = G_n \qquad D_n = E_{n-1} + G_{n-1} = F_n$$
$$E_n = A_{n-1} + F_{n-1} = J_n$$

Като използваме, че $A_n = I_n$, $B_n = H_n$, $C_n = G_n$, $D_n = F_n$ и $E_n = J_n$, записваме горните равенства във вида

$$A_n = B_{n-1} + E_{n-1}, \qquad B_n = C_{n-1} + A_{n-1}, \qquad C_n = D_{n-1} + B_{n-1},$$
$$D_n = E_{n-1} + C_{n-1}, \qquad E_n = A_{n-1} + D_{n-1}.$$

Освен това, броят на всички пътища с n стъпки е 2^n (тъй като за всяка стъпка има по 2 възможности). От друга страна, броят на всички пътища с n стъпки е $A_n+B_n+C_n+D_n+E_n+F_n+G_n+H_n+I_n+J_n = 2(A_n+B_n+C_n+D_n+E_n)$. Следователно

$$A_n+B_n+C_n+D_n+E_n = 2^{n-1}.$$

Тогава последователно получаваме

$$\begin{aligned} A_n &= B_{n-1}+E_{n-1} = \\ &= (C_{n-2}+A_{n-2})+(A_{n-2}+D_{n-2}) = \\ &= 2A_{n-2}+D_{n-3}+B_{n-3}+E_{n-3}+C_{n-3} = \\ &= 2A_{n-2}+2^{n-4}-A_{n-3}. \end{aligned}$$

Оттук лесно намираме първите 13 члена на редицата:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A_n	1	1	0	2	1	10	7	35	36	127	165	474	715

Тогава $A_{15} = 2A_{13}+2^{11}-A_{12} = 2.715+2048-474 = 3004$.

ТЕОРИЯ НА ЧИСЛАТА

Цялото число a се дели на $b \neq 0$, когато съществува такова цяло число q, че $a = bq$. Записваме $a \vdots b$ или $b|a$.
Ако $d|a$ и $d|b$, то $d|ax + by$ за произволни цели числа x и y.

Признаци за делимост

Задача 1. Всяка от цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 участва в записа на петцифреното число $PQRST$. Трицифреното число PSR се дели на 15, а трицифреното число RST се дели на 9. Коя е цифрата Q?

Решение. Трицифреното число PSR се дели на 3 и 5. От признака за делимост на 5 следва, че $R = 5$, а от признака за делимост на 3 следва, че $3 \mid P + S + 5$. Числото RST се дели на 9 и от признака за делимост на 9 имаме $9 \mid 5 + S + T$. Това е възможно само когато S и T са 1 и 3.

Ако $S = 1$ и $T = 3$, то P е 2 или 4, но тогава не е изпълнено условието $3|P + 1 + 5$.

Ако $S = 3$ и $T = 1$, то P е 2 или 4 и от условието $3|P + 3 + 5$ намираме $P = 4$. Следователно остава $Q = 2$.

Задача 2. Намерете най-малкото кратно на 99 естествено число, всички цифри на което са четни.

Решение. Търсеното число е се дели на 9 и на 11. Нека A е сборът на цифрите му на нечетни позиции (първа, трета, пета и т.н.), а B е сборът от цифрите му на четни позиции (втора, четвърта и т.н.). Тъй като цифрите на числото са четни, то A и B са четни числа. От признака за делимост на 9 имаме $9 \mid A+B$, а от признака за делимост на 11 следва, че 11 дели разликата на A и B. Сборът $A + B$ е четен и може да е 18, 36, 54 и т.н.; а разликата на A и B е четна и може да е 0, 22, 44 и т.н.

Ако сборът на A и B е 18, разликата им не може да е 22 и повече, остава да е 0. Но тогава $A = B = 9$ са нечетни числа, противоречие.

Ако сборът на A и B е 36, разликата им може да е 0 или 22. При разлика 22 получаваме, че A и B са 7 и 29, нечетни; противоречие. При $A = B = 18$ най-малкото възможно число с четни цифри е 228 888 и то изпълнява условието.

Ясно е, че число с четни цифри със сбор на цифрите 54 (и повече), е поне седемцифрено. Следователно търсеното най-малко число е точно 228 888.

Задача 3. Да се намери броят на всички 11-цифрени естествени числа, кратни на 9, които имат вида $\overline{*2013*2013*}$, където всяка звездичка е цифра (не е задължително различните звездички да са различни цифри). В колко от тези числа звездичките са заместени само от цифрите 0, 1, 2 или 3?

Решение. Понеже сборът на видимите цифри е 12, от признака за делимост на 9 следва, че цифрите със звездичките образуват трицифрено число, което дава остатък 6 при деление с 9. Най-малкото такова е 105, а най-голямото е 996, т.е. числата са $105, 114, \ldots, 987, 996$ и броят им е равен на $\dfrac{996-105}{9}+1=100$.

За да отговорим на втория въпрос, ще намерим броя на трицифрените числа със сбор на цифрите 6, които се записват с помощта на цифрите 0, 1, 2 и 3. Понеже $6=3+3+0=2+2+2=1+2+3$, ще имаме общо $2+1+6=9$ такива числа.

Задача 4. Трицифрено число се нарича *интересно*, ако е записано с ненулеви цифри и както и да се разместят цифрите му, полученото трицифрено число не се дели на 4. Колко са трицифрените интересни числа? (Латвия, 2015)

Решение. Числата, записани само с нечетни цифри (1, 3, 5, 7, 9), са интересни и са $5.5.5=125$ на брой.

Ако в записа на числото участва цифра 4 или 8, от признака за делимост на 4 следва, че останалите цифри трябва да са нечетни (защото 24, 28, 44, 48, 64, 68 и 88 се делят на 4). За избора на четната цифра (4 или 8) има 2 възможности, а за нейното място има 3 възможности; след това за всяка нечетна цифра има по 5 възможности. Получаваме $2.3.5.5=150$ интересни числа.

Ако в записа на числото участва цифра 2 или 6, от признака за делимост на 4 следва, че останалите цифри трябва да са 2 или 6 (проверете!). В този случай получаваме $2.2.2=8$ интересни числа.

Общо интересните числа са $125+150+8=283$.

Задача 5. Емо иска да запише във всяко поле на таблица с 4 реда и 5 стълба едно от числата 0, 1 и 2 така, че сборът от числата във всеки ред се дели на 3 и сборът на числата във всеки стълб да се дели на 3. Най-много колко единици може да запише Емо в таблицата?

Решение. Сборът на числата във всеки стълб се дели на 3, значи във всеки стълб има най-много 3 единици; т.е. единиците в таблицата са най-много 15.

Ако единиците са 15, във всеки стълб трябва да има три единици е една нула; т.е. в таблицата няма двойки. Тогава сборът от числата в един ред е най-много 5 и тъй като се дели на 3, този сбор е най-много 3. Тогава сборът на числата в таблицата е най-много $4.3 < 15$, противоречие.

Не е трудно да намерим пример с 14 единици:

0	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	2
1	1	1	1	2

Задача 6. Докажете, че измежду всеки 18 последователни трицифрени естествени числа има поне едно, което се дели на сбора от цифрите си. (Латвия, 2016)

Решение. Сред всеки 18 последователни числа има число a, което се дели на 18. Тъй като a се дели на 9, то сборът от цифрите на a се дели на 9. Сборът от цифрите на трицифрено число не надхвърля 27, следователно сборът от цифрите на a е 9, 18 или 27. В първите два случая a се дели на сбора от цифрите си. Ако сборът от цифрите на a е 27, то $a = 999$ и $27|999$.

Задача 7. Намерете най-голямото естествено число, което се записва с две по две различни цифри и което се дели на всяка своя цифра.

Решение. В записа на търсеното число не участва 0, защото на 0 не се дели. Следователно числото е най-много деветцифрено.

Ако в записа участва цифра 5, то завършва на 5 и следователно е нечетно — така в записа му не участват четните цифри 2, 4, 6 и 8 и в този случай числото е най-много петцифрено.

Ако в записа на числото не участва цифрата 5 и то е осемцифрено, сборът на цифрите му е 40, следователно не се дели на 3, което означава, че в записа му не участват цифрите 3, 6 и 9 — противоречие. Следователно търсеното число е най-много седемцифрено. При това трябва да се отстрани такава цифра, че сборът на останалите да се дели на 9. Тази цифра е 4.

Да разгледаме седемцифрените числа, записани с цифрите 1, 2, 3, 6, 7, 8 и 9. Тъй като търсим най-голямото число с дадените свойства, оставяме цифрите 1, 2 и 3 за последни. Тогава, за да се дели числото на 8, то завършва на 312 или 132. При всяка от тези възможности се получава число, което се дели на 2, 3, 4, 6, 8 и 9. Остава да потърсим най-голямото, което се дели на 7. То започва най-много с 98, а 98 се дели на 7. От числата 76312, 76132, 67312 и 67132 само числото 67312 се дели на 7.

Следователно търсеното число е 9867312.

Задача 8. Да се намери най-малкото естествено число, което се записва само с цифрите 1 и 2 (не е задълително да се използват и двете цифри) и което се дели на 99.

Решение. Да означим с a и b броя на единиците и двойките в търсеното число. От признака за делимост на 9 следва, че сборът на цифрите $a.1 + b.2$ се дели на 9.

Да означим с x и y съответно сбора на цифрите на четни и нечетни позиции в търсеното число. От признака за делимост на 11 следва, че разликата на x и y се дели на 11.

Ако $a + 2b = 9$, то и $x + y = 9$ и за да се дели търсеното число на 11, трябва да е изпълнено $x - y = 0$, т.е. $x = y$; невъзможно при $x + y = 9$.

Ако $a + 2b = 18$, то a е четно число и ако $a = 0$ получаваме числото $\underbrace{22\ldots 22}_{9}$, което не се дели на 11. При $a = 2$ получавме $b = 8$ и най-малкото число е

$$D = 11\underbrace{22\ldots 2}_{8},$$

което се дели на 99. При $a > 2$ числото има повече от 10 цифри и е по-голямо от D.

Диофантови уравнения

Задача 9. В състезание по математика за ученици от 5. от 6. клас били раздадени общо 80 медала, като медал получили $\frac{9}{25}$ от петокласниците и $\frac{7}{20}$ от шестокласниците. Колко ученици са участвали в състезанието?

Решение. Ако $\frac{1}{25}$ от петокласниците са m ученици, а $\frac{1}{20}$ от шестокласниците са n ученици, от условието получаваме диофантовото уравнение

$$9m + 7n = 80.$$

С проверка намираме, че то има единствено решение $m = n = 5$. Следователно петокласниците са $25.5 = 125$, а шестокласниците са $20.5 = 100$.

Задача 10. Карлсон получил плик с шоколадови бонбони и плик с малинови бонбони. Той изял $\frac{5}{9}$ от шоколадовите бонбони и $\frac{16}{25}$ от малиновите бонбони. След това Карлсон преброил, че в двата плика са останали общо 42 бонбона. Общо колко бонбона е изял Карлсон?

Решение. Броят на шоколадовите бонбони се дели на 9, а на малиновите – на 25. Ако шоколадовите бонбони са $9k$ на брой, а малиновите са $25n$, Карлсон е изял $5k + 16n$ бонбона, а са останали $4k + 9n$. Равенството

$$4k + 9n = 42$$

е възможно само при естествените числа $k = 6$ и $n = 2$. Следователно Карлсон е изял общо $5.6 + 16.2 = 62$ бонбона.

Задача 11. В кутия има 15 червени и 16 бели топки. Разрешени са следните операции (в произволен ред):

∗ едновременно да се добавят 2 червени топки и една бяла;

∗ едновременно да се добави една червена топка и 2 бели;

∗ едновременно да се вземат 2 червени топки и една бяла;

∗ едновременно да се вземе една червена топка и да се добавят 2 бели.

Може ли в даден момент в кутията да има 50 червени и 37 бели топки?

Решение. Нека са извършени съответно по a, b, c, d операции от четирите вида. Борят на червените топки се е променил с

$$2a + b - 2c - d = 50 - 15 = 35,$$

а броят на белите топки се е променил с

$$a + 2b - c + 2d = 37 - 16 = 21.$$

Удвояваме второто равенство, вадим от него първото и получаваме

$$3b + 5d = 7,$$

което е невъзможно.

Задача 12. Дядо Мраз раздал на децата 47 шоколада така, че всяко момиче получило с един шоколад повече от всяко момче. След това дядо Мраз раздал на същите деца 74 бисквити така, че всяко момче получило с 1 бисквита повече от всяко момиче. Колко са били децата?

Решение. Нека броят на момичетата е a, а на момчетата е b, а всяко момче е получило n шоколада и всяко момиче – m бисквити. Тогава

$$a.(n + 1) + b.n = 47 \quad \text{и} \quad a.m + b.(m + 1) = 74.$$

Като съберем горните равенства, получаваме

$$a.(m + n + 1) + b.(m + n + 1) = 121 \iff (a + b)(m + n + 1) = 11^2.$$

Оттук следва, че $a + b = 11$, т.е. децата са били 11.

Задача 13. В междучасието всяко момиче от класа написало в дневника 18 шестици, а всяко момче – 13 двойки. В началото на часа учителката казала, че всяко момиче има 7 нови оценки, а всяко момче – 22 нови оценки. Ако момчетата в класа са по-малко от 20, колко са момичетата?

Решение. Ако момичетата са x, а момчетата са y, написаните от тях оценки са $18x + 13y$. Учителката преброила $7x + 22y$ нови оценки. Следователно

$$18x + 13y = 7x + 22y,$$

откъдето $11x = 9y$. Числото $9y$ се дели на 11, следователно y се дели на 11 и тъй като $y < 20$, то $y = 11$. Тогава $x = 9$.

Разлагане на множители. Точни квадрати

Основна теорема на аритметиката. Всяко естествено число еднозначно се разлага като произведение на прости множители.

Числата от вида $n.n = n^2$, където n е естествено число, се наричат **точни квадрати**. Цифрата на единиците на точен квадрат е 0, 1, 4, 5, 6 или 9. В разлагането на точен квадрат всеки прост множител участва на четна степен.

Числата от вида $n.n.n = n^3$, където n е естествено число, се наричат **точни кубове**.

Задача 14. Намерете всички точни квадрати от вида $\overline{aabcd}$, за които $\overline{dcbaa}$ също е точен квадрат и $a, d \neq 0$. (Румъния, 2015)

Решение. Цифрата на единиците на точните квадрати е $a, d \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$. Ще използваме, че точните квадрати дават остатък 0 или 1 при деление на 4.

Число от вида $\overline{dcb11}$ или $\overline{dcb99}$ дава остатък 3 при деление на 4 и не е точен квадрат.

Число от вида $\overline{dcb55}$ се дели на 5, но не на 25, значи не е точен квадрат.

Число от вида $\overline{dcb66}$ се дели на 2, но не на 4, значи не е точен квадрат.

Следователно $a = 4$.

От $209^2 < \overline{44bcd} < 213^2$ следва, че $\overline{aabcd}$ е 210^2, $211^2 = 44521$ или $212^2 = 44944$. Тъй като $12544 = 112^2$, и двете са решения.

Задача 15. Намерете най-голямото естествено число k, за което $102!$ се дели на 12^k.

Решение. В разлагането на $102!$ на прости множители 2 участва на степен

$$\left[\frac{102}{2}\right]+\left[\frac{102}{4}\right]+\left[\frac{102}{8}\right]+\left[\frac{102}{16}\right]+\left[\frac{102}{32}\right]+\left[\frac{102}{64}\right] = 51+25+12+6+3+1 = 98,$$

а 3 участва на степен

$$\left[\frac{102}{3}\right]+\left[\frac{102}{9}\right]+\left[\frac{102}{27}\right]+\left[\frac{102}{81}\right] = 34+11+3+1 = 49.$$

Числото $12^k = 2^{2k}.3^k$ дели $102!$, ако $2k \leq 98$ и $k \leq 49$. Най-голямото възможно естествено число k е 49.

Задача 16. а) Ако естествените числа x и y са такива, че xy^{11} е точен куб, докажете, че $x^{11}y$ също е точен куб.

б) Ако за дадени естествени числа x, y и z числото $x^3y^5z^6$ е точна седма степен на естествено число, докажете, че $x^5y^6z^3$ също е точна седма степен. (Латвия, 2016)

Решение. а) Да разгледаме произволно просто число p, което участва в разлагането на x или y съответно на степен a и b.

В разлагането на xy^{11} числото p участва на степен $a + 11b$, а в разлагането на $x^{11}y$ числото p участва на степен $11a + b$. Тъй като xy^{11} е точен куб, то $3|a + 11b$. Оттук и от равенството

$$(a + 11b) + (11a + b) = 12(a + b)$$

следва, че $3|11a + b$. Получихме, че p участва в разлагането на $x^{11}y$ на кратна на 3 степен. Тъй като това е вярно за всеки прост делител на $x^{11}y$, то $x^{11}y$ е точен куб.

б) Ако простото число p, което участва в разлагането на x, y и z съответно на степен a, b и c, тъй като $x^3y^5z^6$ е точна седма степен, то $7|3a + 5b + 6c$. Оттук и от равенството

$$3(3a + 5b + 6c) + (5a + 6b + 3c) = 7(2a + 3b + 3c)$$

следва, че $7|5a + 6b + 3c$.

Задача 17. Четирицифреното число n е точен квадрат и е сбор на шест последователни естествени числа, нито едно от които не се дели на 7. Намерете n. *Отговор.* 3969

Най-малко общо кратно

НОК(a, b) е естествено число, кратно на a и b, такова, че ако a/c и b/c, то НОК$(a, b)/c$ (т.е. всяко общо кратно се дели на най-малкото общо кратно).

Ако простото число p участва в разлагането на a и b съответно на степен n и m, то p участва в разлагането на то НОК(a, b) на степен $\max(n,\ m)$.

Задача 18. В Хогуортс се провел следният разговор.

Хари Потър: Възрастта на професор Дъмбълдор се дели на 6.

Хърмаяни: Възрастта му е кратна на 20.

Рон: Професорът е на възраст, кратна на 15.

Джини: Възрастта му се дели на 50.

Невил: Възрастта на професора се дели на 30.

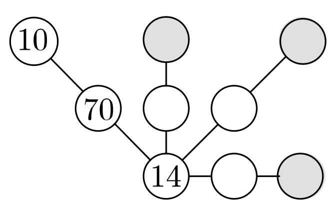
Само две от предположенията са верни. Най-малко на колко години е Дъмбълдор?

Решение. Четири от предполагаемите делители се делят на 2, значи възрастта на професора се дели на 2. По същия начин, четири от предполагаемите делители се делят на 5, значи възрастта на професора се дели на 5. Ако тази възраст се дели и на 3, Хари Потър, Рон и Невил са направили верни предположения, което е невъзможно. Следователно възрастта не се дели на 3. Тогава верните предположения са на Хърмаяни и Джини. Следователно възрастта на професора е най-малко $\text{НОК}(20, 50) = 100$.

Задача 19. Да се намери най-малкото естествено число n, такова че сборът на остатъците при делението на n с числата 12, 15 и 18 е равен на 42.

Решение. Понеже най-големият възможен сбор на остатъците при деление на 12, 15 и 18 е $11+14+17 = 42$, то n дава точно тези остатъци при деление със съответните числа. Следователно $12|(n+1)$, $15|(n+1)$ и $18|(n+1)$, т.е. $\text{НОК}(12, 15, 18)|(n+1)$. Най-малко $n+1 = 180$; $n = 179$.

Задача 20. В кръгчетата на схемата трябва да се запишат различни двуцифрени числа така, че числото в средата на всяка отсечка да е най-малкото общо кратно на двете числа в краищата ѝ.



По това правило в средата на отсечката с краища 10 и 14 е записано $\text{НОК}(14, 10) = 70$. Колко е сборът на числата в оцветените кръгчета?

Решение. В средите на отсечките са записани кратни на 14 двуцифрени числа (различни от 14 и 70); т.е. три от числата 28, 42, 56, 84, 98.

Ако НОК$(14, a) = 28$, различното от 28 число a е 4, но не е двуцифрено.

Ако НОК$(14, a) = 42$, различното от 42 двуцифрено число a е 21.

Ако НОК$(14, a) = 56$, различното от 56 число a е 8, но не е двуцифрено.

Ако НОК$(14, a) = 84$, различното от 84 двуцифрено число a е 12.

Ако НОК$(14, a) = 98$, различното от 98 двуцифрено число a е 49.

Сборът на числата в оцветените кръгчета е $21 + 12 + 49 = 82$.

Задача 21. На един остров се срещат червени, сини и жълти хамелеони. В даден момент броят на жълтите бил 4 пъти по-малък от броя на сините, а броят на сините – 4 пъти по-малък от броя на червените хамелеони. След това по-малко от 1000 червени хамелеони сменили цвета си: някои в син, някои в жълт. Така сините хамелеони станали най-много, като техният брой станал 6 пъти по-голям от разликата между броя на сините и на жълтите и 5 пъти по-голям от разликата между броя на сините и на червените. Колко червени хамелеони са останали на острова?

Решение. В началото е имало $16x$ червени, $4x$ сини и x жълти хамелеони; общо $21x$ хамелеони.

След преоцветяването броят на сините е 6 пъти по-голям от разликата между броя на сините и на жълтите, значи сините са $6a$, а жълтите са $5a$. Броят на сините е 5 пъти по-голям от разликата между броя на сините и на червените, значи сините са $5b$, а червените са $4b$. Забелязваме, че броят на сините се дели на 5 и на 6, следователно и на 30. Ако сините хамелеони са $30y$, жълтите са $25y$, а червените са $24y$; общо $79y$ хамелеони.

Така получихме, че общият брой хамелеони е $21x = 79y$, т.е. е кратен на 21 и 79 и следователно на НОК$(21, 79) = 1659$. Ако общият брой хамелеони е $1659k$, то $x = 79k$ и $y = 21k$. Следователно червените хамелеони преди преоцветяването са $16.79k = 1264k$, а след това $24.21k = 504k$. Броят на преоцветилите се червени хамелеони е $1264k - 504k = 760k$ и е по-малък от 1000, откъдето следва, че $k = 1$. Следователно на острова са останали 504 червени хамелеони.

Задача 22. Колко са естествените числа n, за които най-малкото общо кратно на 12^{18}, 18^{12} и n е равно на 6^{6^2}?

Решение. Тъй като

$$12^{18} = 2^{36}.3^{18}, \quad 18^{12} = 2^{12}.3^{24}, \quad 6^{6^2} = 6^{36} = 2^{36}.3^{36},$$

то $n = 2^k.3^{36}$, където k е цяло число от 0 до 36. Следователно броят на търсените числа е 37.

Най-голям общ делител

НОД(a, b) е делител на a и b със свойството, че ако d/a и d/b, то $d/$ НОД(a, b). Ако НОД(a, b)=1, числата a и b са взаимнопрости. Ако простото число p участва в разлагането на и b съответно на степен n и m, то p участва в разлагането на то НОД(a, b) на степен $\min(n,\ m)$. НОК(a, b).НОД$(a, b) = a.b$

Задача 23. Естествените числа m и n са по-големи от 50, тяхното най-малко общо кратно е 480, а най-големият им общ делител е 12. Да се намери $m + n$. (PURPLE COMET! MATH MEET 2016)

Решение. Най-големият общ делител на числата е 12, значи $n = 2^2.3.n_1$ и $m = 2^2.3.m_1$, където n_1 и m_1 са взаимнопрости.

Тъй като най-малко общо кратно на числата е $480 = 2^5.3.5$, то числата са $2^5.3$ $n = 2^2.3.5$ или са 12 и 480. Вторият вариант отпада, тъй като числата са по-големи от 50.

Следователно $n + m = 96 + 60 = 156$.

Задача 24. Ако a е естествено число, на колко може да е равен най-големият общ делител на числата $2.a + 7$ и $5.a + 3$?

Решение. Нека $d =$ НОД $(2.a + 7;\ 5.a + 3)$. Тъй като

$$d|5(2a + 7) - 2(5a + 3) = 10a + 35 - 10a - 6 = 29,$$

то d е 1 или 29. И двете стойности са възможни; при $a = 1$ числата са 9 и 8 и са взаимнопрости, а при $a = 11$ числата са 29 и 58 и най-големият им общ делител е 29.

Задача 25. Естествените числа a, b, c изпълняват следните условия:

$*$ НОД $(a, b, c) = 1$

$*$ НОД $(a, b + c) > 1$, НОД $(b, c + a) > 1$, НОД $(c, a + b) > 1$

Да се намери най-малкият възможен сбор $a+b+c$. (Латвия, 2015)

Решение. Нека НОД $(a, b+c) = x$,НОД $(b, c+a) = y$,НОД $(c, a+b) = z$.

Ще докажем, че x и y са взаимнопрости.

НОД (x, y) дели a, b, $b + c$ и следователно дели и $(b + c) - b = c$. Щом НОД (x, y) дели a, b и c, то дели НОД $(a, b, c) = 1$. Получихме, че НОД $(x, y) = 1$, т.е. x и y са взаимнопрости.

Аналогично всеки две от числата x, y и z са взаимнопрости. Те са по-големи от 1 и делят $a+b+c$. Следователно $a+b+c$ се дели на НОК$(x, y, z) = x.y.z \geqq 2.3.5 = 30$.

Получихме, че $a + b + c \geqq 30$. При $a = 2$, $b = 3$, $c = 25$ се достига минималната стойност 30.

Задача 26. Да се намерят всички тройки (a, b, c) от естествени числа със следните свойства:

1. НОД(a, b) =НОД(b, c) =НОД$(c, a) = 1$;

2. Всяко число дели сбора на другите две.

Решение. Да приемем, че $a \leqq b \leqq c$. Тъй като c дели $a + b \leqq 2c$, то $a + b = c$ или $a + b = 2c$.

1. Нека $a + b = 2c$. Това равенство заедно с $a \leqq c$ и $b \leqq c$ дават, че $a = b = c$. Тогава НОД$(a, b) = c$ и следователно $c = 1$. Получаваме тройката $(1, 1, 1)$.

2. Нека $a + b = c$. Тъй като b дели $a + b + c = 2a + 2b$, то b дели $2a$. Понеже НОД$(a, b) = 1$, то b дели 2. Следователно $b = 1$ (тогава $a \leq b$ дава $a = 1$) или $b = 2$ (тогава НОД$(a, b) = 1$ води до $a = 1$). Така получаваме тройките $(1, 1, 2)$ и $(1, 2, 3)$.

Брой на делителите

Нека $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$, където $p_1, p_2, \ldots, p_r$ са различни прости числа.

Броят на делителите на n е $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_r + 1)$.

Точни квадрати са точно тези числа, които имат нечетен брой делители.

Задача 27. Естествено число, което има точно 6 делители, наричаме *отлично*. Например, числото 20 е отлично, защото делителите му са 6 на брой (1, 2, 4, 5, 10 и 20). Колко отлични числа са делители на 2016?

Решение. Число с 6 делители има вида p^5 или $p^2.q$, където p и q са различни прости числа. Тъй като отличните числа са делители на $2016 = 2^5.3^2.7$, те са $2^5 = 32$, $2^2.3 = 12$, $2^2.7 = 28$, $3^2.2 = 18$ и $3^2.7 = 63$; общо 5 на брой.

Задача 28. Естественото число N се дели на 12 и на 15 и има общо 16 делители. Колко е N?

Решение. Числото се дели на $60 = 2^2.3.5$ и има 16 делители, следователно е $2^3.3.5 = 120$.

Задача 29. Колко от делителите на 99^{99} са нито точни квадрати, нито точни кубове?

Решение. Числото $99^{99} = 3^{198}.11^{99}$ има 199.100 делители.

Делителите, които са точни квадрати, са от вида $3^{2k}.11^{2p}$, където k е от 0 до 99 и p е от 0 до 49; те са 100.50 на брой.

Делителите, които са точни кубове, са от вида $3^{3k}.11^{3p}$, където k е от 0 до 66 и p е от 0 до 33; те са 67.34 на брой.

Делителите, които са точни квадрати и точни кубове, са от вида $3^{6n}.11^{6m}$, където n е от 0 до 33 и p е от 0 до 16; те са 34.17 на брой.

Делителите, които са точни квадрати или точни кубове, са

$$100.50 + 67.34 - 34.17 = 50.134.$$

Делителите, които не са точни квадрати или точни кубове, са

$$199.100 - 50.134 = 13200.$$

Задача 30. Числото n има следните свойства:

* числото $8.n$ е точен квадрат;
* числото $9.n$ е точен куб;
* числото $6.n$ има точно 66 делители, един от които е 64.

Колко делители има числото n?

Решение. В разлагането на n простият множител 2 участва на нечетна степен, кратна на 3, т.е. като 2^{6k+3}, а 3 участва на четна степен, която, увеличена с 2, се дели на 3, т.е. като 3^{6p+4}.

Числото $6.n = 2^{6k+4}.3^{6p+5}.m$ се дели на $64 = 2^6$, следователно

$k \geq 1$. Най-малката възможна стойност на $6.n$ е $2^{10}.3^5$ и тогава $6.n$ има $11.6 = 66$ делители.

Следователно $n = 2^9.3^4$ има 50 делители.

Задача 31. а) Колко от делителите на $N = 2^6.3^6.5^6.7^6$ имат точно по 6 делители?

б) Колко от делителите на $N = 2^8.3^8.5^8.7^8.11^8.13^8.17^8.19^8$ имат точно по 8 делители?

Решение. а) Число с 6 делители има вида p^5 или $p^2.q$, където p и q са различни прости числа.

Делителите от вида p^5 са 4 на брой (p може да е 2, 3, 5 или 7).

Делителите от вида $p^2.q$ са $4.3 = 12$ на брой (за избора на p има 4 възможности и при всяка от тях за избор на q има 3 възможности).

Общо търсените числа са $4 + 12 = 16$.

б) Простите делители на N са 8. Нека n е делител на N и има 8 делителя. Тогава или $n = p^7$, където p е може да се избере по 8 начина; или $n = p^3.q$, където p и q могат да се изберат по $8.7 = 56$ начина; или $n = p.q.r$, където p, q, r могат да се изберат по $(8.7.6) : 6 = 56$ начина. Общо получаваме 120 числа.

Диофантови уравнения от първа степен

Уравнението

$$ax + by = c,$$

където a, b, c са ненулеви цели числа, има решение тогава и само тогава, когато НОД$(a, b)|c$. В този случай, ако (x_0, y_0) е решение на даденото уравнение, всички решения са от вида

$$x = x_0 + \frac{b}{\text{НОД}(a,b)} \cdot t, \quad y = y_0 - \frac{a}{\text{НОД}(a,b)} \cdot t,$$

където t е цяло число.

Задача 32. Колко двойки естествени трицифрени числа $(x; y)$ изпълняват условието $43x - 13y = 21$?

Решение. Тъй като $(2; 5)$ е решение на уравнението $43x - 13y = 21$, то всички цели решения са от вида

$$x = 2 + 13k, \quad y = 5 + 43k, \text{ където } k \text{ е цяло число.}$$

Числото $x = 2 + 13k > 99$ при $k \geqq 8$, а $y = 5 + 43k < 1000$ при $k \leqq 23$. Решенията x и y са трицифрени при $k = 8, 9, \ldots, 23$, т.е. има 16 такива двойки.

Задача 33. Изпит се смята за издържан, ако на теста са събрани поне 65 от 100 точки. Средният резултат на един клас бил 66 точки, като издържалите изпита ученици от класа имали средно 71 точки, а неиздържалите – средно 56 точки. Преподавателите увеличили резултата на всеки ученик с 5 точки. По този начин броят на издържалите изпита се увеличил, като средният им резултат станал 75 точки, а средният резултат на неиздържалите станал 59 точки. Колко са учениците в класа, ако броят им е между 15 и 30?

Решение. Нека x ученици са издържали, а y не са издържали изпита. Сборът от точките на класа е $71x + 56y = 66(x + y)$, откъдето $x = 2y$.

След увеличаването z от неиздържалите минали към издържалите, а средният резултат на всички станал 71 точки;

$$75(x + z) + 59(y - z) = 71(x + y).$$

Оттук $y = 4z$. Учениците в класа са $x + y = 3y = 12z$, т.е. броят им е кратен на 12 и е между 15 и 30, т.е. е 24.

Най-голямото c, за което уравнението $ax + by = c$ няма решение от цели неотрицателни числа, е $c = ab - a - b$.

Задача 34. Рамзес, слуга на фараона, има няколко еднакви хляба. Според религиозните правила, един хляб може да се нареже само на еднакви парчета, които са не повече от 7. По-нататък тези парчета не може да се режат. Докажете, че ако Рамзес има поне 18 хляба, той може да ги разпредели поравно за всеки от 28-те дни на египетския лунен месец. (Унгария, 2017)

Решение. Ще използваме, че всяко по-голямо от 17 естествено число може да се запише във вида $4a + 7b$, където a и b са неотрицателни цели числа.

Ако Рамзес има поне 18 хляба, той може да ги разпредели в a групи по 4 и в b групи по 7; всеки хляб от първата група да разреже на 7 части, а всеки от втората – на 4 части. Така броят на парчетата във всяка група ще се дели на 28 и задачата на Рамзес ще е решена.

Още четиринадесет състезателни задачи

Задача 35. В числото A изтрили една цифра и получили числото B. Ако $A + B = 627701$, намерете A. (Белоруски олимпиади, 2012)

Решение. Понеже сборът е нечетен, е изтрита цифрата на единиците x. Тогава $A = 10B + x$ и

$$11B + x = 627701.$$

От $11|(627701 - x)$ намираме цифрата $x = 8$ и оттук $B = 57063$, $A = 570638$.

Задача 36. Най-малко колко множителя трябва да се изтрият от произведението 20!, за да остане произведение, което е точен квадрат? А точен куб?

Решение. Имаме $20! = 2^{18}.3^8.5^4.7^2.11.13.17.19$. За да остане произведение точен квадрат, трябва да се изтрият 11, 13, 17, 19, т.е. 4 множители.

За да остане произведение точен куб, трябва да се изтрият 11, 13, 17, 19, 7, 14 и числа с произведение $2^2.3^2.5$, които са поне две (12 и 15 или 10 и 18). Изтриват се 8 числа общо.

Задача 37. По колко начина може да се избере естественото число n така, че дробите $\dfrac{n}{1320}$ и $\dfrac{n}{1296}$ да бъдат правилни и съкратими?

Решение. Тъй като $1320 = 2^3.3.5.11$ и $1296 = 2^4.3^4$, дробите $\dfrac{n}{1320}$ и $\dfrac{n}{1296}$ са съкратими, ако n се дели на 2 или на 3. По-малките от 1296 числа с това свойство са $648 + 432 - 216 - 1 = 863$.

Задача 38. Намерете всички двуцифрени числа $\overline{ab}$, $a < b$, които са равни на сбора на цифрите от a до b включително. (Румъния, 2015)

Решение. Тъй като сборът на цифрите от a до b е не повече от $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, то a е най-много 4.

Тъй като $4 + 5 + \cdots + 9 = 39 < 40$, то a не е 4.

Ако a е 3, сборът на цифрите от 3 до b има цифра на десетиците 3, което е възможно само при $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$; но тогава $b = 3$, противоречие.

Ако a е 2, сборът на цифрите от 2 до b има цифра на десетиците 2, което е възможно при $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$; тогава $b = 7$.

Ако a е 1, сборът на цифрите от 1 до b има цифра на десетиците 1, което е възможно при $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$; тогава $b = 5$.

Търсените числа са 15 и 27.

Задача 39. На дъската са записани числата 11 и 13. Всяка минута на дъската се появява ново число, равно на сбора на две записани. Докажете, че 86 не може да се появи на дъската, но е възможно да се появи 2015. (Румъния, 2015)

Решение. На дъската се появяват само числа от вида $11.x + 13.y$, където x и y са естествени числа.

Тъй като диофантовото уравнение $11.x + 13.y = 86$ няма решение (проверете), 86 не може да се появи на дъската.

Равенството $11.x + 13.y = 2015$ е възможно при $y = 1$, $x = 182$. На дъската първо се появява числото $11 + 13$ и към него 181 пъти прибавяме 11.

Задача 40. Намерете всички множества от шест последователни естествени числа, такива, че произведението на две от числата, събрано с произведението на други две от тях, да е равно на произведението на останалите две числа. (JBMO, 2017)

Решение. Точно три от шестте последователни числа са четни и има по едно четно число във всяко произведение (в обратен случай две от произведенията ще се делят на 2, а третото няма да се дели).

Точно две от шестте последователни числа се делят на 3 и те трябва да са умножени едно с друго (в обратен случай две от произведенията ще се делят на 3, а третото няма да се дели).

Освен това сред шестте числа не може да има две кратни на 4 (в обратен случай две от произведенията ще се делят на 4, а третото няма да се дели).

Като използваме тези наблюдения, лесно намираме решенията $1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 5$, $2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 \cdot 7$ и $7 \cdot 8 + 6 \cdot 9 = 10 \cdot 11$ и показваме, че ако най-малкото от шестте последователни числа е 3, 4 и 5 не се получава решение.

По-нататък забелязваме, че при 7, 8, 9, 10, 11, 12 най-голямото произведение е $12.11 = 132$, а най-малкият сбор на две произведения е $7.10 + 8.9 = 142$, т.е. няма решение. Това е в сила при $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ за $n \geq 7$: максималното произведение на две числа е по-малко от мнинималния сбор на две произведения

$$(n+4)(n+5) = n^2 + 9n + 20 < 2n^2 + 6n + 2 = n(n+3) + (n+1)(n+2)$$

и следователно не получаваме нови решения.

Задача 41. Намерете всички двойки естествени числа A и B, които се записват с един и същ брой цифри и $2.A.B = \overline{AB}$.

Решение. Нека числата са n-цифрени. Получаваме

$$(2A-1).B = 10^n.A$$

и тъй като $2A-1$ и A са взаимнопрости, то $(2A-1)|5^n$.

От друга страна, $A \geqq 10^{n-1}$ и получаваме

$$5^n \geqq 2A - 1 \geqq 2.10^{n-1} - 1,$$

откъдето $5^n \geqq 2^n.5^{n-1} - 1$. Това неравенство е изпълнено само при естствените $n = 1, 2$ (проверете).

При $n = 1$ от $2A - 1|5$ следва, че $A = 1$ (но тогава $B = 10$, не е решение) или $A = 3$ и тогава $B = 6$; получаваме решението 36.

При $n = 2$ имаме $2A-1|25$ и тъй като A е двуцифрено, намираме $A = 13$, а оттук $B = 52$.

Задача 42. Едно число наричаме *забележително*, ако има е кратно на 30, има точно 300 делители и има точно 3 прости делители. Колко са забележителните числа?

Решение. Числата са кратни на 30 и имат точно три прости делители, т.е са от вида $2^i.3^j.5^k$. Тъй като броят на делителите е 30, то

$$(i+1)(j+1)(k+1) = 300,$$

като $i, j, k \geqq 1$. Така задачата се свежда до представяне на $300 = 2^2.3.5^2$ като наредено произведение на числа, по-големи от 1.

Първо ще намерим броя на представянията на $300 = 2^2.3.5^2$ като наредено произведение на три числа. За множителя 3 има по 3 възможности за разпределяне. Двете двойки могат да се разпределят по

6 начина (3 начина за $(4,1,1)$ и 3 начина за $(2,2,1)$), както и двете петици могат да се разпределят по 6 начина. Следователно 300 се представя като наредено произведение на три числа по $3.6.6 = 108$ начина.

В този брой влизат произведения, в които един или два от множителите са равни на 1. Когато един от трите множители е равен на 1, другите два имат произведение 300 и могат да се изберат по 18 начина (колкото са делителите на 300). Освен това има три представяния с по две единици (1.1.300, 1.300.1 и 300.1.1). Следователно броят на представянията с единици е $3.18 - 3 = 51$.

Броят на представянията без едници е $108 - 51 = 57$, колкото са и забележителните числа.

Задача 43. Числото n ще наричаме *обикновено*, ако сборът на всичките му делители е четен. Например 6 е обикновено число (защото $1+2+3+6 = 12$), но 8 не е обикновено ($1+2+4+8 = 15$). Колко от делителите на 10^{100} са обикновени числа?

Решение. Ако $n = 2^x 5^y$, сборът на делителите на n е

$$(1+2+4+\cdots+2^x)(1+5+25+\cdots+5^y).$$

Произведението е четно, когато y е нечетно. Има 101 възможности за x от 0 до 100 и 50 възможности за y (нечетните числа от 0 до 100). Търсеният брой е $10150 = 5050$.

Задача 44. Колко са правилните несъкратими дроби от вида $\dfrac{a}{b}$, за които $ab = 20!$?

Решение. Имаме $20! = 2^{18}.3^8.5^4.7^2.11.13.17.19$.

Тъй като дробта е несъкратима, всяко просто число участва само в един от множителите a и b. Има 2^8 начина да се разпределят осемте степени на прости числа в двата множителя a и b. Точно половината от тях съответстват на правилни дроби, т.е. те са $2^7 = 128$.

Задача 45. В дадено множество M от естествени числа ще наричаме *самотно* такова число от M, което е взаимнопросто с всяко от останалите числа от M. Да се докаже, че във всяко множество от 10 последователни естествени числа има поне едно самотно число. Да се намери пример на множество от 10 последователни естествени числа с точно едно самотно число. (Унгария, 2016/17)

Решение. Общият делител на две числа от множеството дели тяхната разлика, а разликата им не надхвърля 9. Следователно простите числа, които могат да са общи делители, са 2, 3, 5, и 7.

Ясно е, че в множество от 10 последователни числа четните не са самотни (те са пет), кратните на 3 не са самотни (те са три или четири) и кратните на 5 не са самотни (те са две).

От петте нечетни числа най-много две са кратни на 3 и точно едно е кратно на 5. Останалите най-много две нечетни числа не може да са едновременно кратни на 7, защото разликата им е четно число, ненадхвърлящо 8. Следователно поне едно от нечетните числа не се дели нито на 3, нито на 5, нито на 7. То е самотното число в множеството.

Пример за множество с точно едно самотно число е

$90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.$

Задача 46. Да се намерят всички естествени числа n, за които сборът на n и най-големия същински делител на n е от вида 10^k. (Латвия, 2015)

Решение. Нека d е най-големият същински делител на n; тогава $n = pd$, където p е просто число и d няма по-малки от p прости делители. Имаме

$$(p+1)d = 10^k.$$

От $p \neq 2$ следва, че n, а следователно и d, са нечетни числа. Следователно $d = 5^l$. Тогава $p \leq 5$ и тъй като $p \neq 5$, то $p = 3$. Оттук намираме $d = 25$ и $n = 75$.

Задача 47. Да се намери броят на двойките прости числа $(p; q)$, $p > q$, за които $p^4 - q^4$ има по-малко от 8 делители. (Унгария, 2016)

Решение. Числото е

$$p^4 - q^4 = (p-q)(p+q)(p^2+q^2).$$

Ако $q \neq 2$, то $p^4 - q^4$ се дели на 8. В този случай $p^2 + q^2 \geq 34$ има прост делител r, различен от 2 (тъй като $p^2+q^2 \equiv 2 \pmod 4$). Тогава $p^4 - q^4$ се дели на $2^3.r$, $r \neq 2$ и има поне 8 делители.

Нека $q = 2$. Ако $p > 3$, то $p - q > 1$ е число, взаимнопросто с $p + q$. Освен това $p^2 - q^2$ и $p^2 + q^2$ са взаимнопрости; получихме, че даденото число има поне 3 различни прости делители, т.е. има поне 8 делители.

Следователно $q = 2$ и $p = 3$; тогава $p^4 - q^4 = 5.13$ има 4 делители, т.е. двойката $(3, 2)$ е единственото решение.

Задача 48. Да се намерят всички естествени числа n, за които $1 + 5.2^n$ е точен квадрат. (Хърватия, 2008)

Решение. Имаме

$$1 + 5.2^n = a^2 \iff 5.2^n = (a-1)(a+1).$$

Едно от двете последователни четни числа $(a-1)$ и $(a+1)$ се дели на 2, но не на 4; в случая то може да е 2 или 10. С директна проверка намираме $a = 9$, $n = 4$.

Остатъци и сравнения

Числата a и b са сравними по модул m, ако дават един и същ остатък при деление на m. Означаваме $a \equiv b \pmod{m}$.

$$\left| \begin{array}{ll} a \equiv c & \pmod{m} \\ b \equiv d & \pmod{m} \end{array} \right. \Longrightarrow \begin{array}{ll} a \pm b \equiv c \pm d & \pmod{m} \\ ab \equiv cd & \pmod{m} \end{array}.$$

Задача 49. Коя е последната цифра на $7^{7^{7^7}}$?

Решение. Имаме

$$7^{4k+1} \equiv 7 \pmod{10}, \quad 7^{4k+2} \equiv 9 \pmod{10},$$

$$7^{4k+3} \equiv 3 \pmod{10}, \quad 7^{4k} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Затова трябва да определим остатъка на 7^{7^7} при деление на 4. Тъй като

$$7^{2k+1} \equiv 3 \pmod{4}, \quad 7^{2k} \equiv 1 \pmod{4},$$

то $7^{7^7} \equiv 3 \pmod{4}$ и оттук $7^{7^{7^7}} \equiv 3 \pmod{10}$.

Задача 50. Числото $\dfrac{2^n + 3^n}{11}$ е цяло. Коя е последната му цифра?

Решение. Записваме в таблица остатъците на степените на 2 и на 3 при деление на 11.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2^n \pmod{11}$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
$3^n \pmod{11}$	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1

Сборът $2^n + 3^n$ се дели на 11 само при $n = 10k + 5$. Тогава

$$2^{10k+5} + 3^{10k+5} = 32^{2k+1} + 243^{2k+1} \equiv 2^{2k+1} + 3^{2k+1} \pmod{10}.$$

Остава да забележим, че

$$2^{4k+1}+3^{4k+1} \equiv 2+3 = 5 \pmod{10},\ 2^{4k+3}+3^{4k+3} \equiv 8+7 \equiv 5 \pmod{10},$$

откъдето следва, че търсената последна цифра е 5.

Задача 51. Докажете, че $4.5^{2n} + 3.6^{2n+1}$ се дели на 11 за всяко естествено n.

Решение. Имаме

$$4.5^{2n}+3.6^{2n+1} = 4.25^n+18.36^n \equiv \underbrace{4.3^n + 7.3^n}_{11.3^n} \pmod{11} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Задача 52. Докажете, че $5^{2n+1} + 3^{n+2}.2^{n-1}$ се дели на 19.

Решение. Твърдението следва от

$$2(5^{2n+1}+3^{n+2}.2^{n-1})=10.25^n+9.6^n \equiv \underbrace{10.6^n + 9.6^n}_{19.6^n} \pmod{19} \equiv 0 \pmod{19}.$$

Задача 53. Докажете, че $5^n + 1$ не се дели на $5^m - 1$, каквито и да са естествените числа n и m.

Решение. Достатъчно е да забележим, че $5^m - 1 \equiv 0 \pmod 4$, т.е. $5^m - 1$ се дели на 4, а $5^n + 1 \equiv 2 \pmod 4$, т.е. $5^n + 1$ не се дели на 4.

Задача 54. Съществува ли естествено число n, за което $7^n - 1$ се дели на $6^n - 1$?

Решение. Да допуснем, че такова n съществува. $6^n - 1$ се дели на 5, следователно $7^n - 1$ се дели на 5, т.е. $7^n \equiv 1 \pmod 5$. Остатъците на 7^n по модул 5 се променят циклично:

n	1	2	3	4
$7^n \pmod 5$	2	4	3	1

Следователно $4|n$, т.е. $n = 4m$. Тогава

$$6^n = 6^{4m} = 36^{2m} \equiv 1 \pmod 7,$$

което означава, че $6^n - 1$ се дели на 7. Тъй като $7^n - 1$ не се дели на 7, не съществува n, за което $6^n - 1$ да дели $7^n - 1$.

Задача 55. Съществуват ли естествени числа m и n, за които $3^m + 1 = 2^n$?

Решение. Забелязваме, че при $m = 1$ се получава $3 + 1 = 2^2$, т.е. $n = 2$.

Затова по-нататък ще търсим $m \geqq 2$, $n \geqq 3$. Тогава обаче дясната част на равенството 2^n се дели на 8. Да разгледаме остатъка по модул 8 на лявата част. Ако m е четно, т.е. $m = 2k$, имаме

$$3^m = 3^{2k} = 9^k \equiv 1^k = 1 \pmod 8.$$

Ако m е нечетно, т.е. $m = 2k + 1$, имаме

$$3^m = 3^{2k+1} = 9^k.3 \equiv 1^k.3 = 3 \pmod 8.$$

Така за лявата страна на даденото равенство получаваме

$$3^m + 1 \equiv 3 + 1 = 4 \pmod 8 \ \text{ или } \ 3^m + 1 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod 8.$$

Лявата страна е сравнима с 4 или 2 по модул 8. Тъй като дясната страна се дели на 8, равенство не е възможно. Остана решението $m = 1$, $n = 2$.

Задача 56. Да се намерят всички естествени числа m и n, за които $2^m + 3 = 7^n$.

Решение. Очевидно $m = 2$, $n = 1$ е решение.

Нека $m \geqq 3$. Тогава 2^m се дели на 8, т.е. лявата страна на равенството е сравнима с 3 по модул 8. Но

$$7^n \equiv \begin{cases} 7 \pmod 8 & \text{при } n = 2k + 1 \\ 1 \pmod 8, & \text{при } n = 2k. \end{cases}$$

Следователно други решения няма.

Задача 57. Да се намерят целите неотрицателни решения на уравнението $2^{2m+1} + 9.2^m + 5 = n^2$.

Решение. При $m \geqq 3$ лявата част на равенството дава остатък 5 при деление на 8 и не може да е точен квадрат. С проверка на останалите случаи намираме $m = 0$, $n = 4$.

Задача 58. Да се намерят целите неотрицателни решения на уравнението $2^x - 1 = 7^y$.

Решение. Като разгледаме остатъците по модул 7, намираме, че $3|x$, т.е. $x = 3x_1$. Тогава

$$(2^{x_1} - 1)(2^{2x_1} + 2^{x_1} + 1) = 7^y,$$

следователно $2^{x_1} - 1 = 7^a, \;\; 2^{2x_1} + 2^{x_1} + 1 = 7^b$.

Получаваме равенството $7^{2a} + 3.7^a + 3 = 7^b$, от което следва, че $a = 0$, $b = 1$. Оттук $x_1 = 1$, т.е. $x = 3$, $y = 1$.

Задача 59. Да се намери най-малката стойност на $|36^m - 5^n|$, където n и m са естествени числа. (Хърватия, 2008)

Решение. Числото $36^m - 5^n$ е нечетно и не се дели на 3, както и на 5.

Равенството $36^m - 5^n = 1$ е невъзможно по модул 4;

$36^m - 5^n = -1$ е невъзможно по модул 5;

$36^m - 5^n = 7$ е невъзможно по модул 5;

$36^m - 5^n = -7$ е невъзможно по модул 4.

Търсената минимална стойност е 11 и се достига при $m = 1, \; n = 2$.

Задача 60. Намерете най-малкия прост делител на $\dfrac{2016^{2016} - 3}{3}$. (Латвия, 2016)

Решение. Простите числа $2, 3, 7$ са делители на 2016 и следователно не делят $\dfrac{2016^{2016} - 3}{3}$. Числото 5 също не е делител, тъй като

$$672 \times 2016^{2015} - 1 \equiv (2 \times 1^{2015} - 1) \mod 5 \equiv 1 \mod 5.$$

Търсеният прост делител е 11, тъй като

$$672 \times 2016^{2015} - 1 \equiv (1 \times 3^{2015} - 1) \mod 11$$

$$= (1 \times 243^{403} - 1) \mod 11 \equiv (1 \times 1^{403} - 1) \mod 11 \equiv 0 \mod 11.$$

Задача 61. Нека $a_n = 2 + 3^{n-1}$. Да се намери най-голямото естествено число k, за което съществува естествено число m, такова че всяко от числата $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+k}$ е просто.

Решение. Ще докажем, че от всеки 4 последователни елемента a_n поне един се дели на 5.

Наистина, 4 последователни степени на 3 дават 4 различни остатъци при деление на 5; един от тези остатъци е 3 и тогава a_n се дели на 5.

Това означава, че ако числото 5 не е измежду дадените числа, търсеният максимален брой няма да е по-голям от 5.

Но при $m = 1$ получаваме 5 последователни числа, които са прости: 3, 5, 11, 29 и 83. Следователно търсената стойност на k е 4.

Диофантови уравнения от втора степен

Задача 62. Да се намерят всички естествени числа n и p, за които

$$n^2 + p + 73 = np$$

и p е просто число. (Тринидад и Тобаго, TST 2016)

Упътване. Запишете равенството във вида $(p-n-1)(n-1) = 74$.

Задача 63. Да се намерят всички естествени числа n, за които $n^2 + 24n + 35$ е точен квадрат. (Сингапур, TST 2016)

Упътване. Запишете равенството във вида

$$(n+12)^2 = 109 + m^2 \iff (n+12-m)(n+12+m) = 109.$$

Задача 64. Да се намерят двойките цели числа (m, n), за които

$$m^2 + 2m - 9 = n^2 + n.$$

Решение. Записваме равенството във вида

$$4(m+1)^2 - (2n+1)^2 = 39 \iff (2m-2n+1)(2m+2n+3) = 39.$$

С директна проверка намираме отговорите

$$(11, 10), (9, 10), (5, 3), (3, 3), (5, 2), (3, 2), (11, 9), (9, 9).$$

Задача 65. Да се намерят двойките цели числа (m, n), за които

$$m^2n^2 + 208 = 4(\text{НОК}(m; n) + \text{НОД}(m; n))^2$$

Решение. Ако $\text{НОД}(m; n) = d$ и $m = m_1d$, $n = n_1d$, получаваме

$$d^4m_1^2n_1^2 + 208 = 4(m_1n_1d + d)^2,$$

откъдето $d^2|208 = 2^4.13$, т.е. $d = 1$, 2 или 4. Във всеки от тези случаи решаваме съответното диофантово уравнение и намираме отговорите $(2, 12)$, $(12, 2)$, $(4, 6)$, $(6, 4)$.

Задача 66. Намерете всички естествени числа n, за които $\dfrac{1}{n}$ е крайна десетична дроб и n^3 има 7 пъти повече делители от n.

Решение. Тъй като $\dfrac{1}{n}$ е крайна десетична дроб, то $n = 2^k.5^l$, където k и l са неотрицателни цели числа. Броят на делителите на n е $(k+1)(l+1)$, а на $n^3 = 2^{3k}.5^{3l}$ е $(3k+1)(3l+1)$. Получаваме

$$(3k+1)(3l+1) = 7(k+1)(l+1) \iff kl-2k-2l = 3 \iff (k-2)(l-2) = 7$$

и оттук $(k, l) = (3, 9)$ или $9, 3$. Тогава n е 15 625 000 или 64 000.

Още шест състезателни задачи

Задача 67. Намерете двойките естествени числа (a, b), за които

$$6a^2b^2 + 3a^2 - 4b^2 = 2012.$$

(Белоруски олимпиади, 2012, 11. клас)

Решение. Записваме равенството във вида

$$(3a^2 - 2)(2b^2 + 1) = 2010 = 2.3.5.67$$

и тъй като множителят $2b^2+1$ е нечетен, то $3a^2-2$ е четният множител. Това означава, че $a = 2c$; заместваме, съкращаваме и получаваме

$$(6c^2 - 1)(2b^2 + 1) = 3.5.67.$$

Тук множителят $6c^2 - 1$ не се дели на 3, значи $2b^2 + 1$ се дели на 3, т.е. е 3, 15, 3.67 или 3.5.67. Разглеждаме четирите случаи и намираме решението $b = 10$, $a = 2$.

Задача 68. Намерете естествените решения на уравнението

$$13m^2 + 11m + 6 = (m-1)!.$$

(Белоруски олимпиади, 2012, 10. клас)

Решение. При $m \geqq 1$ имаме

$$13m^2 + 11m + 6 \geq 30 \Longrightarrow (m-1)! \geqq 30 > 4!,$$

то $m \geq 6$.

При $m = 6$ не се получава равенство (проверете).

При $m \geqq 7$ имаме

$$(m-1)! = 1.2.3.4.\ldots(m-2)(m-1) \geqq 24(m^2 - 3m + 2) \Longrightarrow$$

$$13m^2 + 11m + 6 \geqq 24(m^2 - 3m + 2) \iff (11m - 6)(m - 7) \leqq 0.$$

Оттук $m = 7$; проверката показва, че $m = 7$ е решение.

Задача 69. Да се намерят всички естествени числа n, за които $n2^{n+1} + 1$ е точен квадрат. (Турция)

Решение. Точният квадрат е нечетен и е поне 5, т.е.

$$n2^{n+1} + 1 = (2x+1)^2$$

за някое естествено x, откъдето $n2^{n-1} = x(x+1)$. Множителите отдясно са взаимно прости, така че един от тях се дели на 2^{n-1}, а другият е не по-голям от n. Това води до

$$2^{n-1} \leqq n + 1,$$

което е невъзможно при $n > 3$ (докажете по индукция).

Непосредствената проверка при $n = 1, 2, 3$ показва, че единствената възможност е $n = 3$.

Задача 70. Да се намери най-малкото просто число p, за което уравнението $p(31x^2 - x + 24) = 6y^3$ няма решение в цели числа x и y.

Решение. Ако $p = 2$, уравнението е

$$31x^2 - x + 24 = 3y^3 \iff x(31x - 1) = 3(y^3 - 8).$$

Очевидно това уравнение има решение $x = 0, y = 2$.

Ако $p = 3$, уравнението е $31x^2 - x + 24 = 2y^3$. При $x = 1$ ще получим $54 = 2y^3$, откъдето е ясно, че двойката $x = 1, y = 3$ е решение.

При $p = 5$ уравнението е $5(31x^2 - x + 24) = 6y^3$, т.е. y се дели на 5. При $y = 5$ получаваме уравнението $31x^2 - x + 24 = 150$ с цял корен $x = -2$.

Нека $p = 7$. За да има решение уравнението

$$7(31x^2 - x + 24) = 6y^3,$$

трябва y да се дели на 7, откъдето можем да запишем $y = 7t, t$ — цяло. След заместване в уравнението и съкращаване получаваме

$$31x^2 - x + 24 = 6.49t^3,$$

откъдето следва, че $31x^2 - x + 24$ трябва да се дели на 49. Но

$$31x^2 - x + 24 = 31(x + 1)^2 - 7(9x + 1)$$

и за да се дели $31x^2 - x + 24$ на 7, трябва $x + 1$ да се дели на 7. Но тогава $31(x + 1)^2$ ще се дели на 49 и за да се дели $31x^2 - x + 24$ на 49, трябва $9x + 1$ да се дели на 7. Не е възможно обаче едновременно $x + 1$ и $9x + 1$ да се делят на 7, понеже $9(x + 1) - (9x + 1) = 8$. Следователно при $p = 7$ даденото уравнение няма решение.

Задача 71. Намерете всички тройки от трицифрено, двуцифрено и едноцифрено число $\overline{abc}$, $\overline{xy}$ и z, такива, че

$$\overline{abc} + \overline{ab} + a = 2^{\overline{xy}} + 2^z.$$

Решение. Имаме

$$111a + 11b + c = 2^{\overline{xy}} + 2^z.$$

Понеже дясната страна е поне $2^{10} = 1024$, то $a = 9$. Понеже $2^{11} > 2000$, получаваме $\overline{xy} = 10$ и

$$999 + 11b + c = 1024 + 2^z \iff 11b + c = 25 + 2^z.$$

Оттук $b \geqq 2$.

При $b = 2$ получаваме $c = 3 + 2^z$, откъдето при $z = 1$ имаме $c = 5$, при $z = 2,\ c = 7$. За по-големи стойности на z получаваме $c > 10$, което е невъзможно.

При $b = 3$ получаваме $c = 2^z - 8$. При $z = 3$ имаме $c = 0$ и при $z = 4,\ c = 8$.

При $b = 4$ задачата няма решение, а при $b = 5$ намираме $c = 2$ и $z = 5$. За по-големи стойности на b равенството е невъзможно.

Задача 72. Да се намерят всички естествени числа $m > 1$ и $n > 1$, за които n дели $m + 1$ и m дели $n^2 - n + 1$.

Решение. Нека $m + 1 = nk$, където k е естествено число. От

$$m \mid n^2 - n + 1 = n^2 - n + nk - m = n(n + k - 1) - m$$

следва, че $m \mid n(n + k - 1)$. Тъй като $(m, n) = 1$ поради $m + 1 = nk$, получаваме $m \mid n + k - 1$.

От $m \mid n^2 - n + 1$ и $n > 1$ следва, че $m < n^2$. Тогава

$$k = \frac{m + 1}{n} < \frac{n^2 + 1}{n} < n + 1.$$

Следователно $m \leqq n + k - 1 < 2n$, откъдето $kn = m + 1 < 2n + 1$, т.е. $k \leqq 2$.

При $k = 1$ имаме $m = n - 1 \mid n^2 - n + 1$, което е възможно само при $n = 2$ и съответно $m = 1$.

При $k = 2$ получаваме $m = 2n - 1 \mid n^2 - n + 1$, откъдето

$$2n - 1 \mid 4n^2 - 4n + 4 = (2n - 1)^2 + 3,$$

т.е. $2n - 1 \mid 3$ и $n = 1$ или $n = 2$, съответно $m = 1$ или $m = 3$.

Окончателно $(m, n) = (3, 2)$ е единственото решение на задачата.