

Интерполационна задача на Биркхоф: стари и нови резултати¹

Гено Николов

Факултет по математика и информатика
СУ "Св. Климент Охридски"

Национален колоквиум по математика
ИМИ – БАН, 20 ноември 2025 г.

¹This study is financed by the European Union-NextGenerationEU, through the National Recovery and Resilience Plan of the Republic of Bulgaria, project No BG-RRP-2.004-0008

Съдържание

- Интерполационна задача на Биркхоф
- Триредови почти Ермитови матрици на инцидентност
- Балансираност на матриците $E(p, q; k, k + 2)$
- Гаусови квадратурни формули от Биркхофски тип

Интерполационна задача на Биркхоф

През 1906 г. Джордж Дейвид Биркхоф формулира една най-обща задача за интерполиране с алгебрични полиноми.² Интерполационната задача на Биркхоф се задава с **матрица на инцидентност**.

Определение

Матрицата $E = \{e_{ij}\}_{i=1, j=0}^n, r$ е матрица на инцидентност, ако елементите ѝ са нули или единици, т.е., $e_{ij} \in \{0, 1\}$. С $|E|$ означаваме броя на единиците в E , $|E| := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^r e_{ij}$.

²G. D. Birkhoff, General mean value theorem and remainder theorems with application to mechanical differentiation and quadrature, Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906), 107–136.

Интерполационна задача на Биркхоф

С π_m означаваме множеството от алгебричните полиноми от степен ненадминаваща m .

Интерполационна задача на Биркхоф (ИЗБ)

Нека $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, и f е достатъчно гладка функция върху интервал съдържащ $[x_1, x_n]$. По зададени двойка $(\mathbf{X}, \mathbf{E})$ и функция f , да се намери алгебричен полином $p \in \pi_{|\mathbf{E}|-1}$, който удовлетворява условията:

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad \forall (i, j) : e_{ij} = 1. \quad (1)$$

Класическите интерполационни задачи на Лагранж и Ермит са частни случаи на ИЗБ. За разлика от тях, общата ИЗБ не винаги има решение.

Регулярни матрици на инцидентност

Определение

Матрицата на инцидентност E се нарича **регулярна (или балансирана)**, ако ИЗБ зададена от двойката (X, E) и достатъчно гладката функция f винаги притежава единствено решение (т.е., при всеки конкретен избор на интерполационни възли $x_1 < \dots < x_n$ и функция f).

Проблемът за пълната характеристика на регулярните матрици на инцидентност към днешна дата стои открит: известни са необходими условия, които не гарантират регулярност, както и достатъчни условия за регулярност, които не са необходими.

Необходимо условие за балансираност

Определение

Матрицата на инцидентност E е **нормална**, ако броят на единиците в нея е равен на броя на стълбовете ѝ. За всяка нормална матрица на инцидентност $E = \{e_{ij}\}_{i=1, j=0}^n$ определяме величините

$$M_k := \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^k e_{ij}. \quad (2)$$

Условие на Пойа (1931)

Необходимо условие за регулярност на матрицата на инцидентност E е да бъдат изпълнени неравенствата

$$M_k \geq k + 1 \quad k = 0, \dots, |E| - 1.$$

Някои дефиниции

Определение

Блок от единици е всяка максимална последователност от единици в ред на E . Блокът $e_{i,j} = e_{i,j+1} = \dots = e_{i,j+\ell-1} = 1$ наричаме **четен/нечетен**, ако е съставен от четен/нечетен брой единици. Броят ℓ на единиците наричаме **дължина на блока**, а индексът j на първата (най-лявата) единица в него наричаме **ниво на блока**. Блоковете от единици с ниво нула наричаме **Ермитови блокове**. Ред в матрица на инцидентност E наричаме **Ермитов с дължина m** , ако съдържа единствен блок от единици, който е Ермитов и има дължина m .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Достатъчно условие за регулярност

Определение

Блокът $e_{i,j} = e_{i,j+1} = \dots = e_{i,j+\ell-1} = 1$ се нарича **подкрепен**, ако съществуват индекси $i_1 < i < i_2$ и индекси $j_1, j_2 < j$, такива че $e_{i_1,j_1} = e_{i_2,j_2} = 1$.

Теорема (Ейткинсън-Шарма (1969))

Всяка матрица на инцидентност удовлетворяваща условието на Пойа и не съдържаща подкрепени нечетни блокове от единици е регулярна (балансирана).

Ейткинсън и Шарма също предполагат, че всяка матрица на инцидентност съдържаща подкрепени нечетни блокове от единици не е регулярна. Хипотезата им е опровергана от

Лоренц и Целер с контрапримера $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Класове от регулярни матрици на инцидентност

Определение

Матрицата на инцидентност се нарича **Ермитова**, ако всичките ѝ редове са Ермитови, и **квази-Ермитова**, ако всичките ѝ вътрешни редове са Ермитови.

Ермитовите и квази-Ермитовите матрици не съдържат подкрепени блокове. Ермитовите изпълняват условието на Пояа, затова са регулярни. Условието на Пояа е необходимо и достатъчно за регулярност на квази-Ермитови матрици. Друг клас регулярни матрици са “единичните” матрици на инцидентност, описващи интерполационни задачи от тип на Абел-Гончаров:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Триредови почти Ермитови матрици

Пълното описание на регулярните матрици на инцидентност се оказва изключително труден проблем, и затова някои автори се ограничават с изучаването на специални класове.

Определение

Означаваме с $E(p, q; k_1, k_2)$ триредовата матрица на инцидентност, чиито първи и трети ред са Ермитови с дължини съответно p и q , а вторият ред съдържа само две единици на позиции k_1 и k_2 , където $1 \leq k_1 < k_2 - 1$.

Например, матрицата $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, с която

Лоренц и Целер опровергават хипотезата на Ейткинсон и Шарма, е $E(2, 2; 1, 4)$.

Триредови почти Ермитови матрици

За почти Ермитовите матрици на инцидентност $E(p, q; k_1, k_2)$ се знае³, че не са регулярни освен евентуално в един от следните два случая:

$$p \leq k_1 < k_2 - 1 \leq q, \quad (3)$$

$$q + 1 < k_2 \quad \text{и} \quad k_1 + k_2 = p + q + 1. \quad (4)$$

Случаите (3) и (4) се наричат съответно **the interior case** и **the exterior symmetric case**. Пълното описание на регулярните матрици във външния симетричен случай (4) е известно:

Теорема

Матрица на инцидентност $E(p, q; k_1, k_2)$, удовлетворяваща условията (4), е регулярна тогава и само тогава, когато $p = q$.

³G. G. Lorentz, K. Jetter and Ch. D. Riemenschneider, "Birkhoff Interpolation", Encyclopedia in Mathematics and its Applications, Vol. 19, Reading, Mass., 1983.

Триредови почти Ермитови матрици: вътрешен случай

За вътрешния случай (4) пълно описание на регулярните триредови почти Ермитови матрици е известно само за случаите $p = 1$ и $p = 2$. За случая $p = 1$ това описание е сравнително просто:

Теорема (DeVore, Meir, Sharma (1973))

Нека $\varrho(k_1, k_2) = (q + 2)(k_1 + k_2 - 1)^2 - 4(q + 1)k_1k_2$.
Матрицата $E(1, q; k_1, k_2)$ е регулярна тогава и само тогава когато $\varrho(k_1, k_2) < 0$.

Описанието на регулярните триредови почти Ермитови матрици в случая $p = 2$ е много по-сложно⁴, и няма да се спираме на него.

⁴W. Drols, H. Gonska, On the singularity of special DMS-matrices - a complete charactreization. In: "Function, Series, Operators", Vol. I, II (Proc. Int. Conference Budapest 1980 (B. Sz.-Nagy and J. Szabados, Eds.), pp. 385–390. Colloq. Soc. János Bolyai 35, Amsterdam, North Holland, 1983.

Регулярност на $E(p, q; k_1, k_2)$: предположения

При изследването за регулярност на $E(p, q; k_1, k_2)$ във външния случай, т.е. с параметри изпълняващи условията

$$p \leq k_1 < k_2 - 1 \leq q,$$

следните предположения не представляват ограничения:

- $\mathbf{X} = (-1, t, 1)$, където $t \in (-1, 1)$; постига се с линейна трансформация.
- $p < q$; може да се изпълни с (евентуално) отражение на интерполационните възли.
- $k_1 < k_2 - 1$; случаят $k_1 = k_2 - 1$ се разглежда в теоремата на Ейткинсон-Шарма.

Еквивалентно условие за регулярност

Предвид казаното по-горе, матрицата $E(p, q; k_1, k_2)$ е балансирана тогава и само тогава, когато единственият полином $P \in \pi_n$, $n = p + q + 1$, имащ нули с кратности съответно p и q в точките ± 1 и удовлетворяващ условията

$$P^{(k_1)}(t) = P^{(k_2)}(t) = 0 \quad \text{за някое } t \in (-1, 1)$$

е $P \equiv 0$. Еквивалентно на това твърдение е следното

Предложение 1.

Нека $\omega(x) = (1+x)^p(1-x)^q$. Матрицата $E(p, q; k_1, k_2)$ е балансирана тогава и само тогава когато за всяко $t \in (-1, 1)$

$$\Delta(t) := k_2 \omega^{(k_1)}(t) \omega^{(k_2-1)}(t) - k_1 \omega^{(k_1-1)}(t) \omega^{(k_2)}(t) \neq 0.$$

Хипотеза за триредовите почти Ермитови матрици

В дипломната си работа “Изследване на редици от почти Ермитови матрици на инцидентност за балансираност с помощта на система за компютърна алгебра” (ФМИ, март 2022г.) Борислава Константинова изказва следната

Хипотеза

За всеки $p, q, k \in \mathbb{N}$ такива че $q - p \geq 2$ и $p \leq k \leq q - 1$, матрицата на инцидентност $E(p, q; k, k + 2)$ е регулярна.

Основание за тази хипотеза са резултатите от многобройни експерименти направени с Wolfram Mathematica.

Забележка

Случаят $q - p = 1$ е изключен, тъй като матриците $E(p, p + 1; p, p + 2)$ попадат във външния симетричен случай.

Хипотеза за триредовите почти Ермитови матрици

В частния случай $q - p = 2$ хипотезата бе доказана през 2023 г.⁵ Еквивалентна формулировка на тези резултат е следната:

Теорема

За всяко $m \in \mathbb{N}$, матриците на инцидентност $E(m, m+2; m, m+2)$ и $E(m, m+2; m+1, m+3)$ са регулярни.

⁵B. Konstantinova, G. Nikolov, Two sequences of regular three-row almost Hermitian incidence matrices, in: “Constructive Theory of Functions, Lozenets 2023” (B. Draganov et al, Eds.), Professor Marin Drinov Publishing House of BAS, Sofia, pp. 89–99, 2024.

Хипотеза за триредовите почти Ермитови матрици

В общия ѝ вид, хипотезата беше доказана през 2025 г.⁶

Теорема

За всеки $p, q, k \in \mathbb{N}$ такива че $q - p \geq 2$ и $p \leq k \leq q - 1$, матрицата на инцидентност $E(p, q; k, k + 2)$ е регулярна.

Доказателството на тази теорема, както и на частния ѝ случай $q - p = 2$, използва някои специфични свойства на полиномите на Якоби. Напомняме, че полиномите на Якоби $\{P_m^{(\alpha, \beta)}\}$ са ортогонални в $[-1, 1]$ при функция на тегло $w_{\alpha, \beta}(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$.

⁶B. Konstantinova, G. Nikolov, On the regularity of certain three-row almost Hermitian incidence matrices, Results Math. 80(2025), Article 107.

Скица на доказателството

Удобно е да предефинираме параметрите в $E(p, q; k, k + 2)$ по следния начин:

$$\begin{aligned} p &= m, \quad q = m + \ell, \quad m, \ell \in \mathbb{N}, \quad \ell \geq 2, \\ k_1 &= k, \quad k_2 = k + 2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad m \leq k \leq m + \ell - 1, \\ \nu &= k - m, \quad 0 \leq \nu \leq \ell - 1. \end{aligned}$$

Критерият за регулярност от Предложение 1 придобива вида

$$\begin{aligned} \Delta(t) &:= (k + 2)\omega^{(k)}(t)\omega^{(k+1)}(t) - k\omega^{(k-1)}(t)\omega^{(k+2)}(t) \neq 0 \\ \forall t &\in (-1, 1), \quad \omega(x) = (1 - x)^{m+\ell}(1 + x)^m. \end{aligned}$$

Това условие се изразява в термини на полиномите на Якоби.

Скица на доказателството (продължение)

Използвайки специфични свойства на полиномите на Якоби, представяме $\Delta(t)$ във вида

$$\Delta(t) = c(1-t)^{2\ell-2\nu-1} \tilde{\Delta}(t), \quad c = \text{const.} \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(t) = & [(m+\ell+1-\nu)y(t) - (1-t)y'(t)]^2 + \nu(m+\ell+1-\nu)y^2(t) \\ & + \nu(1-t)^2 \left[[y'(t)]^2 - y(t)y''(t) \right] + (\ell-\nu-1)K(t), \end{aligned}$$

където $y = P_m^{(\ell-\nu, \nu)}$ и $K(t) = K(y(t), y'(t), t)$ е квадратичната форма на y и y'

$$\begin{aligned} K(t) = & (m+1)(m+\ell+1)y^2(t) \\ & - [(\ell-\nu)(1+t) - \nu(1-t)]y(t)y'(t) + (1-t^2)[y'(t)]^2. \end{aligned}$$

Тъй като $0 \leq \nu \leq \ell-1$, достатъчно условие за $\tilde{\Delta}(t) \neq 0$, $t \in (-1, 1)$ е

$$K(t) > 0, \quad t \in (-1, 1).$$

Скица на доказателството (продължение)

Доказателството на $K(t) > 0$, $t \in (-1, 1)$, използва следната

Лема (Нютон)

Ако $y(t)$ е полином от степен m имащ само реални нули, тогава

$$(m-1)[y'(t)]^2 - m y(t)y''(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ако нулите на $y(t)$ са прости, неравенството е строго.

Забележка

Това е уточнение на неравенството на Лагер

$$[y'(t)]^2 - y(t)y''(t) \geq 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

вярно за целите функции от класа на Лагер-Пойа.

Скица на доказателството (продължение)

От лемата следва

$$(1 - t^2)[(m - 1)[y'(t)]^2 - m y(t)y''(t)] > 0, \quad t \in (-1, 1)$$

и замествайки от ОДУ за y

$$(1 - t^2)y''(t) = [\ell - 2\nu + (\ell + 2)t]y'(t) - m(m + \ell + 1)y(t),$$

получаваме

Следствие

Нека $y = P_m^{(\ell-\nu, \nu)}$, $\min\{\ell - \nu, \nu\} > -1$. Тогава за всяко $t \in (-1, 1)$ е изпълнено $L(t) > 0$, където

$$L(t) := m(m + \ell + 1)y^2(t) - [\ell - 2\nu + (\ell + 2)t]y(t)y'(t) + \frac{m-1}{m}(1 - t^2)[y'(t)]^2.$$

Скица на доказателството (продължение)

И така, искаме да докажем, че $K(t) > 0$, $t \in (-1, 1)$,

$$K(t) = (m+1)(m+\ell+1)y^2(t) - [(\ell-\nu)(1+t) - \nu(1-t)]y(t)y'(t) + (1-t^2)[y'(t)]^2,$$

знаейки че $L(t) > 0$, $t \in (-1, 1)$,

$$L(t) := m(m+\ell+1)y^2(t) - [\ell-2\nu+(\ell+2)t]y(t)y'(t) + \frac{m-1}{m}(1-t^2)[y'(t)]^2.$$

За $c_1 = \frac{\nu}{\nu+1} \geq 0$ и $c_2 = \frac{\ell-\nu}{\ell-\nu+1} > 0$ показваме, че за всяко $t \in (-1, 1)$ е изпълнено поне едно от неравенствата

$$K(t) - c_i L(t) > 0, \quad i = 1, 2,$$

и следователно $K(t) > 0$ за всяко $t \in (-1, 1)$.



Други случаи на регулярност

За съжаление, изглежда че регулярността на триредовите почти ермитови матрици на инцидентност във вътрешния случай при $k_2 - k_1 = 2$ е по-скоро изолирано явление, и при $k_2 - k_1 \geq 3$ регулярни матрици се срещат рядко. Тестовете с Wolfram Mathematica на матриците $E(m, m + \ell; k, k + s)$ с параметри

$$2 \leq m \leq 20,$$

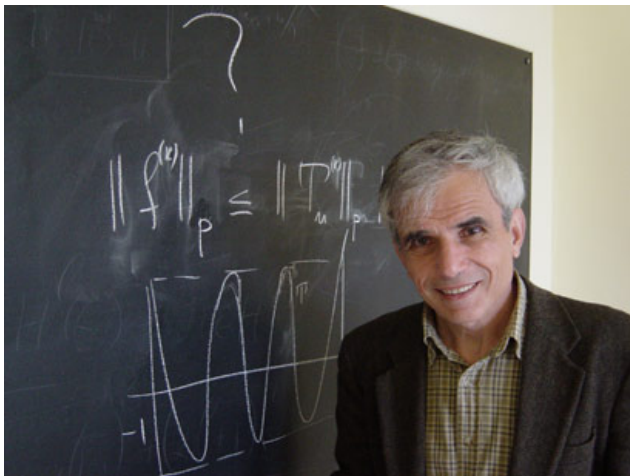
$$3 \leq \ell \leq 8,$$

$$3 \leq s \leq \ell,$$

$$m \leq k \leq m + \ell - s$$

(случаят $m = 1$ е изключен тъй като се изследва с теоремата на де Вор, Меир и Шарма) показват единствена регулярна матрица от това множество: матрицата $E(2, 10; 5, 8)$.

Да си СПОМНИМ...



Борислав Боянов (18.11.1944–09.04.2009)

Квадратурна формула на Гаус

През 1814г. Карл Фридрих Гаус доказва съществуването на единствена n -точкова квадратурна формула

$$Q_n^G[f] = \sum_{i=1}^n a_i^G f(x_i^G), \quad x_1^G < x_2^G < \dots < x_n^G,$$

$$I[f] := \int_a^b w(t)f(t) dt \approx Q_n^G[f], \quad w(t) - \text{функция на тегло}$$

със свойството $R[Q_n^G; f] := I[f] - Q_n^G[f] = 0$ за всеки полином $f \in \pi_{2n-1}$. С други думи, n -точковата квадратурна формула на Гаус има максималната алгебрическа степен на точност $2n - 1$ (накратко, $ACT(Q_n^G) = 2n - 1$).

Квадратурна формула на Гаус

Един подход за извеждане на формулата на Гаус е следния:
при зададени възли $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

и функция $f \in C^{2n}[a, b]$ построяваме интерполационния
полином на Ермит $H_{2n-1}(f; x) \in \pi_{2n-1}$ зададен с условията

$$H_{2n-1}(f; x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n-1}(f; x_i) = f'(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

За всяко $x \in [a, b]$ съществува $\eta = \eta(f, x) \in [a, b]$ такова че

$$f(x) - H_{2n-1}(f; x) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} (x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2.$$

Умножавайки равенството с $w(x)$, интегрирайки от a до b и
прилагайки теоремата за средните стойности, получаваме:

Квадратурна формула на Гаус

$$I[f] = Q_n[f] + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x)(x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2 dx,$$

където $\xi \in [a, b]$ и Q_n е интерполационната квадратурна формула получена от $H_{2n-1}(f; \cdot)$,

$$Q_n[f] = \sum_{i=1}^n [a_i f(x_i) + b_i f'(x_i)],$$

За грешката на Q_n имаме оценката

$$\left| I[f] - Q_n[f] \right| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_{C[a,b]}}{(2n)!} \int_a^b w(x)(x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2 dx.$$

Екстремално свойство на Гаусовата кв. формула

Минимумът на дясната страна на оценката

$$\left| I[f] - Q_n[f] \right| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_{C[a,b]}}{(2n)!} \int_a^b w(x)(x-x_1)^2 \dots (x-x_n)^2 dx.$$

по отношение на избора на възли $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ се достига когато $\{x_i\}_1^n$ са нулите на n -тия ортогонален полином в $[a, b]$ при тегло $w(x)$. При този избор на възли всички коефициенти b_i в Q_n стават равни на нула, т.е. $Q_n = Q_n^G$. С други думи, Гаусовата квадратурна формула е с минимална грешка в класа от функции $\{f \in C^{2n}[a, b] : \|f^{(2n)}\|_{C[a,b]} \leq M\}$.

Гаусови квадратурни формули от Биркхофски тип

През 1990г. описаното по-горе екстремално свойство на Гаусовите квадратурни формули бе доказано в по-обща ситуация, за Гаусови квадратурни формули от Биркхофски тип.⁷ В най-простия му вариант, резултатът се описва по следния начин.

Нека $E = \{e_{ij}\}_{i=1, j=0}^{n, 2n-1}$ е матрица на инцидентност със следните свойства:

- За $i = 1, 2, \dots, n$, i -тият ред на E съдържа единствен блок от единици, той е с ниво k_i и дължина 2;
- Матрицата на инцидентност E' , получена от E чрез премахване на кой да е от редовете i , удовлетворява условието на Поля.

⁷B. Bojanov, G. Nikolov, Comparison of Birkhoff type quadrature formulae, Math. Comp. 54 (1990), 627–648.

Гаусови квадратурни формули от Биркхофски тип

Съгласно теоремата на Ейткинсон-Шарма, матрицата E е регулярна, и за всеки избор на възли

$$\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n), \quad a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b,$$

може да се построи интерполационна квадратурна формула

$$Q_n[f] = \sum_{i=1}^n \left[a_i f^{(k_i)}(x_i) + b_i f^{(k_i+1)}(x_i) \right] \quad (5)$$

за приближено пресмятане на $I[f] := \int_a^b w(t)f(t) dt$. При това

$ACT(Q_n) = 2n - 1$ и за $f \in C^{2n}[a, b]$ е в сила оценката

Гаусови квадратурни формули от Биркхофски тип

$$|I[f] - Q_n[f]| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_{C[a,b]}}{(2n)!} \int_a^b w(t) \Omega((\mathbf{X}; E); t) dt,$$

където полиномът $\Omega((\mathbf{X}; E); t) = t^{2n} +$ полином от π_{2n-1} е зададен с условията

$$\Omega^{(k_i)}((\mathbf{X}; E); x_i) = \Omega^{(k_i+1)}((\mathbf{X}; E); x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Доказваме, че когато $\mathbf{X}^*$ е решение на екстремалната задача

$$\int_a^b w(t) \Omega((\mathbf{X}; E); t) dt \rightarrow \min_{\mathbf{X}},$$

по всички $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : a \leq x_i \leq b, i = 1, \dots, n\}$,

Гаусови квадратурни формули от Биркхофски тип

квадратурната формула

$$Q_n[f] = \sum_{i=1}^n \left[a_i f^{(k_i)}(x_i) + b_i f^{(k_i+1)}(x_i) \right]$$

добива вида

$$Q_n^*[f] = \sum_{i=1}^n a_i f^{(k_i)}(x_i^*) \quad (6)$$

и $ACT(Q_n^*) = 2n - 1$, т.е., (6) е Гаусова квадратурна формула.

Забележка

Като следствие на екстремалният подход за получаване на Гаусовата квадратурна формула (6) заключаваме, че грешката ѝ е **монотонно намаляваща функция на $k_1, k_2, \dots, k_n$** . Няма единственост !

Задача на Биркхоф
○○○○○○○

Почти Ермитови матрици
○○○○○○○○○○○○○○

Гаусови кв. формули от Биркхофски тип
○○○○○○○○●

THE END !