Определяне на функция чрез наклоните ѝ

Надя Златева

Национален колоквиум по математика

11 февруари 2026 г.

Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е диференцируема функция и нека $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е диференцируема функция, такава че

$$f'(x) = g'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогава за функцията $h = f - g$ имаме, че $h' \equiv 0$.
От теоремата на Лагранж следва, че за произволни $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ е изпълнено

$$h(x) - h(x_0) = \langle h'(\xi), x - x_0 \rangle = 0 \text{ за някое } \xi \in [x, x_0],$$

откъдето за всяко $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) - g(x) = f(x_0) - g(x_0) = const,$$

или

$$f = g + const.$$

А ако имаме по-слабо предположение, например

$$\|f'(x)\| = \|g'(x)\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n?$$

Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е диференцируема функция с компактни множества на подниво.
Нека $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е диференцируема функция, за която

$$(*) \qquad \|f'(x)\| > \|g'(x)\|, \quad \forall x \text{ т.ч. } f'(x) \neq 0.$$

Тогава

$$\inf(f-g) = \inf_{\{x\colon\, f'(x)=0\}} (f-g).$$

Доказателство. Да вземем произволно x_0 и да положим

$$\lambda := (f-g)(x_0),$$

$$M_1 := \{x\colon (f-g)(x) \le \lambda\},$$

$$f_1 = f\restriction_{M_1}.$$

Тъй като функцията f_1 има компактни множества на подниво, то

$$\text{съществува } \overline{x} \in M_1 \colon f_1(\overline{x}) \le f_1(x), \quad \forall x \in M_1.$$

Да допуснем, че $f'(\overline{x}) \neq 0$ и нека $h \in S$ е т.ч. $\langle f'(\overline{x}), h\rangle = -\|f'(\overline{x})\| < 0$. Тогава

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(\overline{x}+th) - f(\overline{x})}{t} = \langle f'(\overline{x}), h\rangle = -\|f'(\overline{x})\| < (\text{от } (*))$$

$$-\|g'(\overline{x})\| \le \langle g'(\overline{x}), h\rangle = \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(\overline{x}+th) - g(\overline{x})}{t}.$$

Следователно, за достатъчно малки $t > 0$,

$$f(\overline{x}+th) - g(\overline{x}+th) \le f(\overline{x}) - g(\overline{x}) \le \lambda \text{ (тъй като } \overline{x} \in M_1),$$

което означава, че $\overline{x}+th \in M_1$ и тъй като $f_1 = f\restriction_{M_1}$,

$$f_1(\overline{x}+th) = f(\overline{x}+th) < f(\overline{x}) = f_1(\overline{x}).$$

Противоречие с това, че $\overline{x}$ е точка на минимум на f_1 върху M_1. Следователно $f'(\overline{x}) = 0$ и $(f-g)(\overline{x}) \le \lambda = (f-g)(x_0)$. $\square$

Получихме, че условието

$$(*) \qquad \|f'(x)\| > \|g'(x)\|, \quad \forall x \text{ т.ч. } f'(x) \neq 0,$$

влече това, че

$$\inf(f-g) = \inf_{\{x\colon\, f'(x)=0\}}(f-g).$$

В частност, ако допълнително предположим, че f е изпъкнала функция със строг минимум 0 в началото 0, а g е т.ч. $g(0)=0$, неравенството $(*)$, което в случая изглежда така

$$(*) \qquad \|f'(x)\| > \|g'(x)\|, \quad \forall x \neq 0$$

(понеже $\overline{x}=0$ е единствената точка, за която $f'(\overline{x})=0$) влече, че

$$\inf(f-g) = \inf_{\{x\colon\, f'(x)=0\}}(f-g) = (f-g)(0) = 0,$$

или

$$f \geq g.$$

Локален наклон на функция в точка

Нека (M, ρ) е метрично пространство, $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Както е прието, означаваме $\operatorname{dom} f := \{x \in M : f(x) < \infty\}$.

За $x \in \operatorname{dom} f$ *локалният наклон* на f в x е

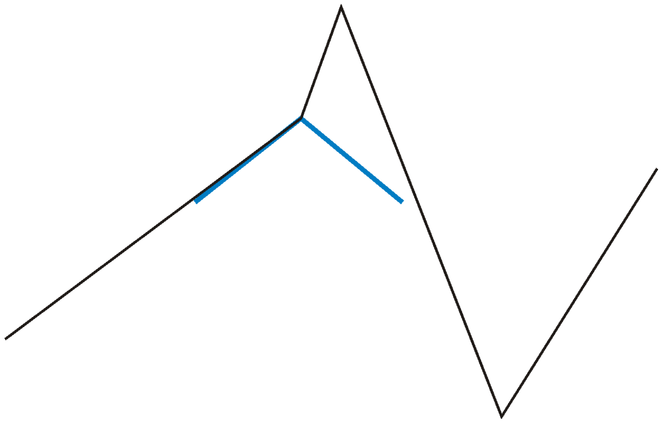
$$|\nabla f|(x) := \limsup_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{[f(x) - f(y)]^+}{\rho(x, y)},$$

където $[t]^+ := \max\{0, t\} = (t + |t|)/2$.
$|\nabla f|(x)=0$, ако x е точка на локален минимум на f, а ако не е,

$$|\nabla f|(x) = \limsup_{\substack{y \to x \\ y \neq x}} \frac{f(x) - f(y)}{\rho(x, y)}.$$

Приемаме, че $|\nabla f|(x) = 0$ в изолираните точки от $\operatorname{dom} f$, където границата не е дефинирана.

Локален наклон на функция в точка



Библиография

Локалният наклон е въведен от

E. De Giorgi, A. Marino, and M. Tosques. Problems of evolution in metric spaces and maximal decreasing curve. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), 68(3):180– 187, 1980.

с цел изучаване на градиентни потоци и диференциални уравнения.

Развитието на тази концепция е проследено и отлично обяснено от A. Ioffe в

A. D. Ioffe. Metric regularity and subdifferential calculus. Uspekhi Mat. Nauk, 55(3(333)):103–162, 2000.

Още библиография

Наскоро A. Daniilidis, P. Pérez-Aros, D. Salas и съавтори използват локалните наклони в контекста на диференциалните уравнения и за определянето на функции:

T. Z. Boulmezaoud, Ph. Cieutat, A. Daniilidis. Gradient flows, second-order gradient systems and convexity. SIAM J. Optim., 28(3):2049–2066, 2018.

P. Pérez-Aros, D. Salas, and E. Vilches. Determination of convex functions via subgradients of minimal norm. Math. Program. 190(1-2, Ser. A), 561–583, 2021, doi:10.1007/s10107- 020-01550-w.

A. Daniilidis, L. Miclo, D. Salas. Descent modulus and applications, Journal of Functional Analysis, 287(11), 2024, 11062, doi:10.1016/j.jfa.2024.110626

[DS] A. Daniilidis, D. Salas. A determination theorem in terms of the metric slope. Proc. Amer. Math. Soc., 150(10):4325–4333, 2022.

[DLS] A. Daniilidis, T.M. Le, D. Salas. Metric compatibility and determination in complete metric spaces, Mathematische Zeitschrift, 308, 2024, art. 62, doi:10.1007/s00209-024-03609-2

Свойства на локалните наклони

За функция $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ можем да разглеждаме $|\nabla f|$ като функция от $\operatorname{dom} f$ в $[0, \infty]$. Нещо повече,

$$|\nabla(rf)|(x) = r|\nabla f|(x), \quad \forall r \geq 0,\ \forall x \in \operatorname{dom} f. \tag{1}$$

Тъй като $[a+b]^+ \leq [a]^+ + [b]^+$ имаме, че

$$|\nabla(f+g)|(x) \leq |\nabla f|(x) + |\nabla g|(x) \tag{2}$$

и за функция $g : M \to \mathbb{R}$,

$$|\nabla(f-g)|(x) \geq |\nabla f|(x) - |\nabla g|(x), \quad \forall x \in \operatorname{dom} |\nabla g|. \tag{3}$$

Ако f е собствена и пнд, $x \in \operatorname{dom} f$ и $Y := \{y \in M :\ f(y) \leq f(x)\}$, за рестрикцията $f_1 := f \restriction Y$ имаме, че

$$|\nabla f_1|(x) = |\nabla f|(x), \quad \forall x \in Y. \tag{4}$$

Още свойства на локалните наклони

Ако функцията $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, където X е банахово пространство, е диференцируема по Фреше в x, то

$$|\nabla f|(x) = \|f'(x)\|.$$

Означаваме

$$\varepsilon\text{-crit } f := \{x : \ |\nabla f|(x) \le \varepsilon\}.$$

Ако метричното пространство M е пълно и функцията f е собствена, пнд и ограничена отдолу, от вариационния принцип на Ekeland следва, че $\inf |\nabla f| = 0$ и следователно

$$\varepsilon\text{-crit } f = \varepsilon\text{-argmin } |\nabla f|.$$

Теорема (DS,DLS – за локални наклони)

Нека (M, ρ) е метрично пространство и нека τ е някоя топология в M. Да допуснем, че $f, g : M \to \mathbb{R}$ са τ-непрекъснати и такива, че

$$(*) \qquad |\nabla f|(x) > |\nabla g|(x), \quad \forall x \notin 0\text{-crit } f.$$

Ако f има τ-компактни множества на подниво, то

$$\inf(f - g) = \inf_{0\text{-crit } f}(f - g).$$

Глобален наклон на функция в точка

Глобалният наклон на $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в $x \in \operatorname{dom} f$ е дефиниран в

[TZ] L. Thibault, and D. Zagrodny. Determining functions by slopes, Comm. Contemp. Math. 25(7), 2023.

по следния начин

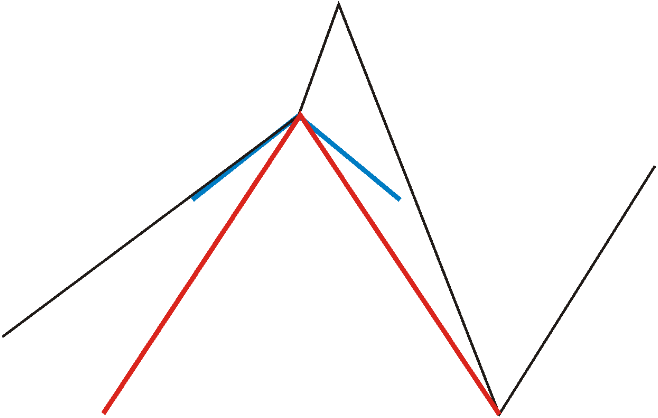
$$|\widetilde{\nabla} f|(x) := \sup_{y \neq x} \frac{[f(x) - f(y)]^+}{\rho(x, y)}.$$

Подобно на локалния наклон, можем да разглеждаме и глобалния $|\widetilde{\nabla} f|$ като функция от $\operatorname{dom} f$ в $[0, \infty]$.

Очевидно

$$|\widetilde{\nabla} f|(x) \geq |\nabla f|(x), \quad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

Да сравним локалния и глобалния наклон



Свойства на глобалния наклон

(1) $$|\widetilde{\nabla}(rf)|(x) = r|\widetilde{\nabla} f|(x), \quad \forall r \geq 0,\ \forall x \in \operatorname{dom} f,$$

(2) $$|\widetilde{\nabla}(f+g)|(x) \leq |\widetilde{\nabla} f|(x) + |\widetilde{\nabla} g|(x),$$

което за функция $g : M \to \mathbb{R}$ влече

(3) $$|\widetilde{\nabla}(f-g)|(x) \geq |\widetilde{\nabla} f|(x) - |\widetilde{\nabla} g|(x), \quad \forall x \in \operatorname{dom} |\widetilde{\nabla} g|.$$

Дефинираме и
$$\varepsilon\text{-Crit } f := \{x \colon |\widetilde{\nabla} f| \leq \varepsilon\},$$
еквивалентно
$$\varepsilon\text{-Crit } f = \{x \in \operatorname{dom} f : \ f(y) \geq f(x) - \varepsilon\rho(y,x),\ \forall y\}.$$

Теорема (VP Ekeland преформулиран)

Нека (M, ρ) е пълно метрично пространство. Нека $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена пнд и ограничена отдолу функция и нека $x_0 \in \operatorname{dom} f$.

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $x_\varepsilon \in \varepsilon\text{-Crit } f$ такава, че

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x_0) - \varepsilon\rho(x_0, x_\varepsilon).$$

Следващата ни цел е да получим по-пълна информация за точките от множеството ε-crit f имащи отношение към инфимума на $f - g$.

Теорема

Нека M е пълно метрично пространство, $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена, пнд и ограничена отдолу функция и $g : M \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, такава че

$$(*) \qquad |\nabla f|(x) > |\nabla g|(x), \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \setminus 0\text{-crit } f.$$

Тогава за всяко $\varepsilon > 0$, $\qquad f - g \geq \inf_{\varepsilon\text{-crit } f}(f - g)$*.*
Нещо повече, за всяко $x_0 \in M$ съществува $x \in \varepsilon\text{-crit } f$ т.ч.

$$(a) \ f(x) \leq f(x_0) - \varepsilon\rho(x, x_0), \quad (b) \ f(x_0) - g(x_0) \geq f(x) - g(x).$$

Доказателство. Ясно е, ако $f(x_0) = \infty$, така че нека $x_0 \in \operatorname{dom} f$.
Нека $\lambda := f(x_0) - g(x_0)$ и $M_1 := \{x : (f - g) \leq \lambda\}$, $f_1 := f \restriction_{M_1}$.
Прилагаме VP Ekeland за f_1 в M_1 и намираме $x \in M_1$, т.е. удовлетворяващо (b), такова че (a) е изпълнено и $x \in \varepsilon\text{-Crit } f_1$, т.е. $|\widetilde{\nabla} f_1|(x) \leq \varepsilon$. Ако $|\nabla f|(x) = 0$ сме готови, защото $x \in \varepsilon\text{-crit } f$.
Ако $|\nabla f|(x) > 0$, то от св-во (4) на локалния наклон имаме, че

$$|\nabla f|(x) = |\nabla f_1|(x) \leq |\widetilde{\nabla} f_1|(x) \leq \varepsilon, \qquad \text{т.е. } x \in \varepsilon\text{-crit } f. \qquad \square$$

Теорема (Thibault-Zagrodny – за глобални наклони)

Нека (M,ρ) е пълно метрично пространство и нека $f,g : M \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ са собствени и пнд функции. Нека f е ограничена отдолу и такава, че

$$|\widetilde{\nabla} f|(x) \geq |\widetilde{\nabla} g|(x), \quad \forall x \in \operatorname{dom}|\widetilde{\nabla} f|.$$

Тогава

$$\inf_{\operatorname{dom} f}(f-g) \geq \inf f - \inf g.$$

Да отбележим, че тъй като $\inf\limits_{\operatorname{dom} f}(f-g) < \infty$, от заключението на теоремата следва, че $\inf g \neq -\infty$. Следователно, то може да бъде записано във вида

$$f(x) - \inf f \geq g(x) - \inf g, \quad \forall x \in M.$$

От Теоремата на T-Z следва, че ако $f, g : X \to \mathbb{R}$ са диференцируеми по Фреше изпъкнали функции в банахово пространство X, за които $\inf f = \inf g \in \mathbb{R}$ и

$$\|f'(x)\| = \|g'(x)\|, \quad \forall x \in X,$$

то

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in X.$$

За да докажем теоремата на Thibault-Zagrodny използваме

Лема

Нека $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е собствена и пнд функция в метрично пространство (M, ρ).

Тогава ε-Crit f е затворено множество, върху което f е ε-липшицова функция.

Този семпъл наглед резултат ни позволява да излезем от често срещаната постановка, в която поне една от двете функции f и g се предполага непрекъсната, и да работим в случая, когато и двете функции са собствени и пнд.

За изпъкнала функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в банахово пространство X локалният и глобалният наклон съвпадат като

$$|\widetilde{\nabla} f|(x) = |\nabla f|(x) = \min\{\|p\| : p \in \partial f(x)\}^1$$

Това позволява с теоремата на Thibaulty-Zagrodny да се докаже класическата

Теорема (Moreau-Rockafellar)

Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство и нека $f, g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ са собствени, пнд и изпъкнали функции. Ако

$$\partial f(x) \supset \partial g(x), \quad \forall x \in X,$$

то

$$f(x) = g(x) + const, \quad \forall x \in X.$$

[1] $\partial f(x_0) := \{p \in X^* : p(x - x_0) \le f(x) - f(x_0),\ \forall x \in X\}$, ако $x_0 \in \operatorname{dom} f$, а ако $x_0 \notin \operatorname{dom} f$, то $\partial f(x_0) = \varnothing$

Изложеният тук подход е публикуван в

Milen Ivanov, Nadia Zlateva, *Slopes and the Moreau-Rockafellar Theorem*, Journal of Convex Analysis, 32(2), 2025, 359-374.

като основните приноси са в:

- развиване на темата в контекста на (статичната) оптимизация
- избягване на трансфинитната индукция в доказателствата

Благодаря за вниманието