28. Международен Турнир на градовете

Есенен тур, основен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. В правилен седмоъгълник е вписана окръжност и около него е описана окръжност. Същата операция е направена и с правилен 17-ъгълник. Така двата многоъгълника са затворени в пръстени, които имат равни лица. Да се докаже, че двата многоъгълника имат равни страни.

Решение: Да означим с $2a$ страната на правилен многоъгълник, а с r и R съответно радиусите на вписаната и описаната окръжност. Вписаната окръжност се допира до страните в средите им и радиусите са перпендикулярни на страните. От питагоровата теорема намираме $a^2 + r^2 = R^2$. Тъй като лицето на пръстена е равно на $\pi(R^2 - r^2) = \pi a^2$, получаваме твърдението на задачата.

Задача 2. Постъпвайки на нова работа, Ани винаги се интересува кои от нейните колеги се познават. За да запомни по-лесно тази информация, тя рисува окръжност и представя всеки колега като хорда. При това, ако две хорди се пресичат, то съответните хора се познават, а ако не се пресичат, то съответните колеги не се познават. Ани е сигурна, че това винаги е възможно. Права ли е тя? (Ако две хорди имат общ връх, считаме, че те се пресичат.)

Решение: Ще покажем контрапример, откъдето ще следва, че Ани не е права. Да разгледаме домакин, трите му сина и трима гости. Измежду гостите няма познати, домакинът ги познава и тримата, а тримата му сина се познават с трите различни двойки от гостите. Хордите на гостите пресичат хордата на домакина в три различни точки. Гостенинът, съответстващ на средната точка ще наречем среден, а другите двама - крайни. Ясто е, че крайните хорди са от различни страни на средната. Хордата на сина, познаващ само крайните гости, трябва да пресече крайните хорди, но да не пресича средната, което е противоречие.

Задача 3. Квадратът

a	b	c
d	e	f
g	h	i

е магически: сборът на числата във всеки ред, стълб и в двата диагонала е един и същ. Докажете, че:

а) $2(a + c + g + i) = b + d + f + h + 4e$.

б) $2(a^3 + c^3 + g^3 + i^3) = b^3 + d^3 + f^3 + h^3 + 4e^3$.

Решение: а) Като прибавим към двете страни на равенството в а) сбора $b+d+f+h$, получаваме еквивалентно равенство, което може да се запише във вида

$$\begin{aligned} & (a+b+c)+(a+d+g)+(c+f+i)+(g+h+i)= \\ = \ & 2(b+e+h)+2(d+e+f) \end{aligned}$$

Тъй като сборът на числата във всеки ред, стълб и диагонал е един и същ, последното равенство очевидно е изпълнено.

б) Да означим с S сбора на числата във всеки ред. Тогава $a+i=c+g=b+h=d+f=S-e$. Като заместим в равенството от а), получаваме $4(S-e)=2(S-e)+4e$, откъдето $S=3e$.

Първо ще докажем равенството

$$2(a^2+c^2+g^2+i^2)=b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2.$$

За целта ще го запишем във вида

$$\begin{aligned} & (a+c)^2+(c+i)^2+(a+g)^2+(g+i)^2-2(ac+ci+ag+gi)= \\ = \ & (h+e)^2+(d+e)^2+(f+e)^2+(b+e)^2-2e(b+d+f+h). \end{aligned}$$

Сборовете от квадратите от двете страни на равенството са равни, тъй като $a+c=S-b=h+e$ и т.н. Освен това,

$$ac+ci+ag+gi=(a+i)(c+g)=(S-e)^2=2e(S-e)=e(b+d+f+h).$$

Да забележим, че равенството от б) остава вярно при прибавяне на едно и също число към всички числа от таблицата. Наистина,

$$\begin{aligned} & 2((a+t)^3+(c+t)^3+(g+t)^3+(i+t)^3)= \\ = \ & 2(a^3+c^3+g^3+i^3)+6t(a^2+c^2+g^2+i^2)+6t^2(a+c+g+i)+8t^3= \\ = \ & b^3+d^3+f^3+h^3+4e^3+3t(b^2+d^2+f^2+h^2+4e^2)+ \\ & +3t^2(b+d+f+h+4e)+8t^3= \\ = \ & (b+t)^3+(d+t)^3+(f+t)^3+(h+t)^3+4(e+t)^3. \end{aligned}$$

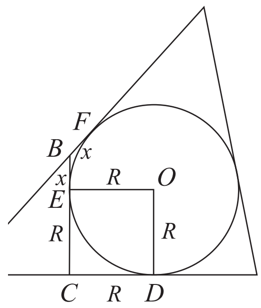
Следователно е достатъчно да докажем твърдението за $e=0$. В този случай

$$a+i=c+g=a+c=g+i=b+h=d+f=2e=0$$

и двете страни на равенството са равни на 0.

Задача 4. В остроъгълен триъгълник е вписана окръжност с радиус R. Три допирателни към окръжността разделят триъгълника на три правоъгълни триъгълника и шестоъгълник. Периметърът на шестоъгълника е равен на Q. Да се намери сбора на диаметрите на вписаните в трите правоъгълни триъгълника окръжности.

Решение: Допирните точки на вписаната окръжност и върховете разделят периметъра на шестоъгълника на 12 отсечки. Отсечките през върховете на правите ъгли на шестоъгълника са равни на R (например, като прекараме радиусите OD и OE в допирните точки, ще получим квадрат $CDOE$, откъдето $CD = CE = R$).
Ако означим допирателните от останалите три върха с x, y, z, периметърът на шестоъгълника е равен на



$$Q = 6R + 2x + 2y + 2z.$$

Диаметърът на вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност е равен на сбора на катетите минус хипотенузата. За $\triangle ABC$ диаметърът на вписаната окръжност е

$$AC + BC - AB = (AD - R) + (R + x) - (AF - x) = 2x + (AD - AF) = 2x,$$

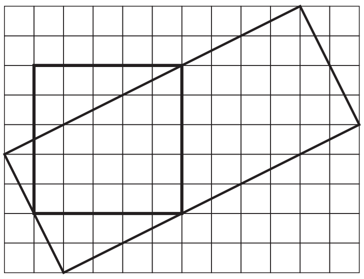
тъй като допирателните AD и AF са равни. Аналогично, другите два диаметъра са равни на $2y$ и $2z$, откъдето намираме, че сборът на трите диаметъра е равен на $2x + 2y + 2z = Q - 6R$.

Задача 5. Дадена е картина с размери 1×1. Правоъгълно парче хартия с лице 2 се нарича обвивка, ако картината може да се увие с хартията, без хартията да се реже. Ясно е, че правоъгълник 2×1 и квадрат със страна $\sqrt{2}$ са обвивки.

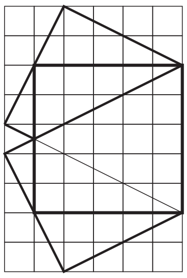
а) Докажете, че има и други обвивки.

б) Докажете, че има безбройно много обвивки.

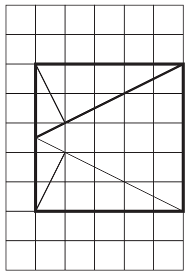
Решение: Ще докажем, че правоъгълник $\sqrt{5} \times \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ е обвивка. Да поставим този правоъгълник върху квадрата така, че два от върховете на квадрата да са върху страните, равни на $\sqrt{5}$, а един връх да съвпада със средата на третата страна (фиг. 1). Процесът на опаковането е показан на фиг. 2 и фиг. 3.



Фиг. 1

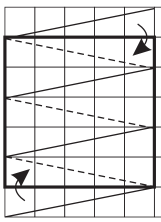


Фиг. 2

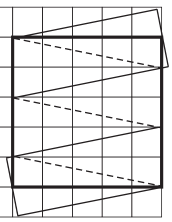


Фиг. 3

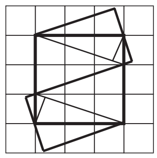
б) Да разделим вертикалните страни на квадрата на n части. На фиг. 4 е показано опаковането на квадрат с успоредник, по-малката страна на който е равна на $\dfrac{2}{n}$ (при $n = 5$), а на фиг. 5 – превръщането на успоредника в правоъгълник. На фиг. 6 е показано (за $n = 3$) самото прегъване.



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Забележка. При $n = 1$ се получава опаковане с квадрат $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$, при $n = 2$ – с правоъгълник $\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (фиг. 3), при $n = 3$ - правоъгълник $\sqrt{10}\times\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ (фиг. 6).

Задача 6. Нека $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} = \dfrac{a_n}{b_n}$, където $\dfrac{a_n}{b_n}$ е несъкратима дроб. Докажете, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които $b_{n+1} < b_n$.

Решение: Нека $n = p(p-1) - 1$, където p е нечетно просто число. Да забележим, че b_{n+1} не се дели на p. Наистина, в разглеждания сбор само знаменателите на дробите $\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{2p}, \ldots, \dfrac{1}{(p-1)p}$ се делят на p, но те могат да се групират по двойки така, че знаменателят на сбора да не се дели на p:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1}, \qquad \frac{1}{2p} + \frac{1}{p(p-2)} = \frac{1}{2(p-2)} \ldots$$

Освен това,

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{a_{n+1}(p-1)p - b_{n+1}}{b_{n+1}(p-1)p}.$$

Да допуснем, че числителят и знаменателят на последната дроб се делят на d, т.е.

$$\begin{aligned} a_{n+1}(p-1)p &\equiv b_{n+1} \pmod{d} \\ b_{n+1}(p-1)p &\equiv 0 \pmod{d}. \end{aligned}$$

Тогава

$$a_{n+1}(p-1)^2p^2 \equiv b_{n+1}(p-1)p \equiv 0 \pmod{d}.$$

Числата d и p са взаимно прости (иначе b_{n+1} ще е кратно на p). Числата d и a_{n+1} също са взаимно прости (иначе b_{n+1} ще се дели на техен общ делител, т.е. a_{n+1} и b_{n+1} няма да са взаимно прости). Следователно $(p-1)^2$ се дели на d и $d \leq (p-1)^2$. Оттук

$$b_n \geq \frac{b_{n+1}(p-1)p}{(p-1)^2} = \frac{b_{n+1}p}{p-1} > b_{n+1}$$

и твърдението на задачата следва от съществуването на безбройно много прости числа.

Задача 7. Фокусник има тесте от 52 карти за игра. Зрителите искат да научат реда на картите в тестето (без значение отгоре надолу или обратно). Те могат да питат колко карти има между две определени карти (например между асо пика и деветка спатия). Един от зрителите знае реда на картите. Какъв е минималният брой въпроси, които той трябва да зададе на фокусника, за да могат останалите зрители да разберат реда на картите?

Решение: Ще докажем, че въпросите са най-малко 34.

Първият зрител задава въпрос за двете крайни карти. Отговорът на фокусника е 50 и показва на всички, че тези карти са крайни. Да наречем едната първа, а другата – 52-ра. Трябва да определим номерата на всички останали карти. Да наречем втората карта *дупка* и с втори въпрос да попитаме за двете съседни на дупката карти, т.е. за първа и трета карти. Отговорът е 1 и определя еднозначно положението на третата карта. След това продължаваме да задаваме въпроси по двойки:

- при нечетните въпроси питаме за двете крайни карти, които още не са споменавани (едната от тях е дупка, а другата - не);

- определяме нова дупка, която е неспоменатата карта в съседство с не-дупката;
- при следващия (четен) въпрос питаме за двете съседни на дупката карти.

Забелязваме, че дупката се появява първо по-близо до началото, след това по-близо към края и т.н. В първата двойка въпроси се казват карти 1, 52 и 3, във втората двойка - карти 2, 51 и 49, в третата двойка - карти 4, 50 и 6 и т.н. След отговорите на поредната двойка въпроси има два възможни варианта за разположението на трите назовани карти: основен (този, който е в действителност) и страничен (при който крайните карти си сменят местата и средната се премества по съответен начин). Например, след отговорите на въпроси 3 и 4 е ясно, че втората тройка е 2, 51 и 49 или 2, 51 и 4.

Основен вариант	$a\,b\,a$	$\ldots$	$b \smile b\,a$
Страничен вариант	$a\,b\,a\,b$	$\ldots$	$b\,a$

(Картите от една тройка са еднакво означени.)

Тази неопределеност ще изчезне след отговора на следващия (пети) въпрос (за карти 4 и 50). Това е така, защото в страничния вариант броят на картите между по-рано не споменатите крайни карти е най-много 44 и е по-малък от броя им в основния (който е 45). Следователно, като зададем 33 въпроса, ще уточним мястото на 48 карти. Последният, 34-и въпрос, ще зададем за 25-а и 26-а карта:

$$abacdcefeghgijiklkmnmoPoQQ \smile PQPnonlmljkjhihfgfdedbcba$$

(Предпоследната и последната тройка са означени съответно с P и Q.)

От този въпрос еднозначно се определя положението на последната тройка и единствената останала карта.

За да докажем, че по-малко въпроси не са достатъчни, ще разбием всички карти на 52 групи по една карта. При въпрос за две карти от различни групи, обединяваме двете групи в една. Ясно е, че всеки въпрос намалява броят на групите най-много с 1. Ако са зададени не повече от 33 въпроса, ще останат не по-малко от $52-33 = 19$ групи. Групите с 3 карти са не повече от 17 (тъй като $18.3 = 54 > 52$). Следователно или ще се намерят две групи с по една карта, или група с точно две карти. И в двата случая, като сменим местата на тези две карти, отговорите няма да се променят; това означава, че последователността на картите не може да се възстанови.

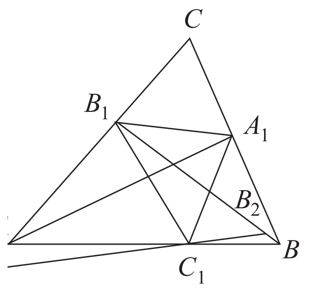
Есенен тур, основен вариант за 10. - 12. клас

Задача 1. Виж задача 2. от основния вариант за 7. - 9. клас.

Задача 2. Върху страните BC, AC и AB на остроъгълен $\triangle ABC$ са избрани съответно точки A_1, B_1 и C_1 така, че A_1A, B_1B и ${}_1C$ са ъглополовящи в $\triangle A_1B_1C_1$. Докажете, че AA_1, BB_1 и ${}_1$ са височини в $\triangle ABC$.

Решение: Да прекараме ъглополовящите на външните ъгли на $\triangle A_1B_1C_1$. Нека ъглополовящите на външните ъгли при B_1 и C_1 се пресичат в точка A_2; аналогично определяме точките B_2 и C_2. Точката A_2 лежи и на ъглополовящта на $\sphericalangle A_1$ (тъй като A_2 е равноотдалечена от правите A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1), т.е на правата A_1A. Следователно в $\triangle A_2B_2C_2$ правите AA_1, BB_1 и ${}_1$ са височини.

Ще докажем, че $\triangle A_2B_2C_2$ съвпада с $\triangle ABC$. Да допуснем, че това не е така и нека точка A_2 се намира извън $\triangle ABC$. Тогава лъчът A_2B_2 пресича



страната AB на $\triangle ABB_1$ (в точка C_1) и не пресича отсечката AB_1 (разделя ги правата A_2A_1). Следователно този лъч пресича страната BB_1 на $\triangle ABB_1$, т.е. точка B_2 е вътрешна за отсечката BB_1, и следователно е вътрешна за $\triangle ABC$. Аналогично, точка C_2 се намира във вътрешността на $\triangle ABC$. Но отсечката B_2C_2 пресича страната BC в точка A_1. Противоречие.

По същия начин се получава противоречие и когато точка A_2 е в $\triangle ABC$.

Задача 3. Числото $a = 0,12457...$ е такова, че неговата n-та цифра след десетичната запетая е равна на последната цифра преди десетичната запетая на числото $n\sqrt{2}$. Докажете, че числото a е ирационално.

Решение: Да допуснем, че a е рационално число. Тогава то се представя като периодична десетична дроб с период m. Следователно цифрите след дестеичната запетая на a, записани в позиции $m, 10m, 100m, \ldots, 10^k m, \ldots$, съвпадат от някакъв момент нататък. В същото време това са последователни цифри в десетичното представяне на ирационалното число $m\sqrt{2}$, което е непериодична дроб. Противоречие.

Задача 4. Може ли всяка призма да се разреже на пирамиди, така че основата на всяка пирамида да е в основата на призмата, а върхът на пирамидата да е върху другата основа на призмата?

Решение: Не може. Да разгледаме централно сечение на призмата. Всяка възможна пирамида пресича това сечение по многоъгълник, чието лице е 4 пъти по-малко от лицето на нейната основа. Сборът от лицата на основите на тези пирамиди трябва да е равен на лицето на двете основи на призмата. Но тогава сборът от лицата на сеченията с централното сечение е равен на половината от лицето на основата на призмата, т.е дори централното сечение не е запълнено.

Задача 5. Виж задача 6. от основния вариант за 7. - 9. клас.

Задача 6. Казваме, че колода от 52 карти е в правилен ред, ако всеки две съседни карти са или от еднакъв цвят, или с еднаква стойност, като това е вярно и за първата и последната карти. Най-горната карта е асо пика. Докажете, че броят на начините, по които могат да се подредят картите в правилен ред: а) се дели на 12!; б) се дели на 13!.

Решение: Да разгледаме таблица 4×13, чийто редове са означени отгоре надолу със спатия, каро, купа, пика, а стълбовете са означени отдясно наляво с асо, 2,3,4..., 10, вале, дама, поп. По този начин на всяка карта съответства поле на таблицата. На произволна колода от карти съпоставяме таблица, във всяка клетка на която сме записали поредния номер на съответната карта. Таблица, съответстваща на правилно разположение на картите, има следните свойства:

1. В долния ляв ъгъл е записано числото 1 (тъй като асо пика е първата карта в колодата).

2. Всеки две последователни числа (52 и 1 също се разглеждат като последователни) са в един ред или един стълб.

Да наречем такава таблица правилна.

а) Да разгледаме правилна таблица и да приложим произволна пермутация на стълбовете без първия (има 12! такива пермутации). Тъй като числото 1 остава в долния ляв ъгъл и всеки две последователни числа остават в един ред или един стълб, отново получаваме правилна таблица. По този начин всички правилни таблици се разбиват на непресичащи се класове, всеки от който има 12! елемента. Следователно броят на всички правилни таблици се дели на 12!.

б) Достатъчно е да докажем, че броят на правилните таблици се дели на 13. Да образуваме цилиндър като залепим двете крайни вертикални страни на една правилна таблица. Обхождането на този цилиндър може да започне от всяко поле от първия ред, като следваме последователността на първоначалното обхождане (от 52 отиваме в 1). Получаваме 13 обхождания. Да допуснем, че обхожданията, започнали от полета a и b, съвпадат. Тогава същото обхождане се получава и от клетка $b + (b - a)$ (по модул 13). Тъй като 13 е просто число, ще получим, че всички обхождания съвпадат. Това означава, че от реда, в който за първи път се появяват две последователни числа, не може да се излезе, което е противоречие. Следователно получените 13 обхождания са различни, т.е. броят на правилните таблици се дели на 13.

Задача 7. Положителните числа $x_1, \dots, x_k$ са такива, че

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 < \frac{x_1 + \cdots + x_k}{2}, \qquad x_1 + \cdots + x_k < \frac{x_1^3 + \cdots + x_k^3}{2}.$$

а) Докажете, че $k > 50$.

б) За някоя стойност на k дайте пример на такива числа.

Решение: а) По условие

$$4(x_1^2 + \cdots + x_k^2) < 2(x_1 + \cdots + x_k) < x_1^3 + \cdots + x_k^3.$$

Следователно поне за едно число, например за x_1, е изпълнено неравенството $4x_1^2 < x_1^3$, т.е. $x_1 > 4$, откъдето

$$(2x_2^2 - x_2) + \cdots + (2x_k^2 - x_k) < 4 - 2.4^2 = -28.$$

Минимумът на функцията $2x^2 - x$ е равен на $-\dfrac{1}{8}$, оттук

$$-\frac{1}{8}(k-1) \le (2x_2^2 - x_2) + \cdots + (2x_k^2 - x_k) < -28$$

и получаваме $k - 1 > 8.28 > 50$.

б) Да изберем $k = 2501, x_1 = 10, x_2 = x_3 = \cdots = x_{2501} = 0,1$. Тогава

$$\begin{aligned} x_1^2 + \cdots + x_{2501}^2 &= 100 + 25 = 125 \\ x_1 + \cdots + x_{2501} &= 10 + 250 = 260 \\ x_1^3 + \cdots + x_{2501}^3 &> 1000 \end{aligned}$$

и всички неравенства са изпълнени.

Есенен тур, тренировъчен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. Две цели положителни числа x и y са записана дъската в ненамаляващ ред, т.е. $x \leq y$. Мария записва в тетрадката си x^2 и след това заменя числата на дъската с x и $y-x$, записани отново в ненамаляващ ред. Тя повтаря същата операция с новите числа и т.н. докато едното от двете числа на дъската стане равно на 0. Какъв ще бъде сборът от числата в тетрадката на Мария?

Решение: Да разгледаме правоъгълник със страни x и y. На първата стъпка да отрязваме от правоъгълника квадрат със страна x и записваме лицето му, на втората извършваме същата оерация с новия правоъгълник и т.н. Накрая правоъгълникът ще бъде разрязан на квадрати, чийто лица са записани. Сборът на тези числа е равен на лицето на дадения правоъгълник, т.е. на xy.

Задача 2. Лъжцте винаги лъжат, честните хора винаги казват истината, а хитреците понякога казват истината, а понякога лъжат. Можете да задавате въпрос, чийто отговор е "да"или "не"(например: "този човек хитрец ли е?").

а) Пред вас са един лъжец, един честен човек и един хитрец. Всеки от тях знае какви са останалите. Как може да се определи кой какъв е?

б) Пред вас са един лъжец, един честен човер и двама хитреци. Всеки от тях знае какви са останалите. Докажете, че хитреците могат да се уговорят да отговарят по такъв начин, че да не може да се определи какъв е всеки от четиримата.

Решение: а) Питаме всеки от тримата "Вярно ли е, че и двамата ти съседи са лъжци?". Между трите отговора ще има "Да"на лъжеца и "Не"на честния. Тъй като отговорите са три, то "Да"или "Не"ще се появи точно един път. По този отговор ще познаем един от тримата – честния или лъжеца. Като му зададем въпрос за един от другите двама "Вярно ли е, че той е хитрец?", ще разберем окончателно кой какъв е.

б) Да означим участниците: лъжеца с Л, честния човек с Ч и хитреците с ХЛ и ХЧ. Ако хитреците се уговорят да отговарят така, все едно ХЛ е лъжец, ХЧ е честен човек, Л е хитрец, който се представя за лъжец, а Ч е хитрец, който се представя за честен човек, тогава Л и ХЛ стават неразличими, също и Ч и ХЧ.

Задача 3. а) На дъската са написани 2007 естествени числа, по-големи от 1. Докажете, че някои от числата могат да се изтрият така, че произведението на останалите числа да се записва като разлика на квадратите на две естествени числа.

б) На дъската са написани 2007 естествени числа, по-големи от 1, едно от които е 2006. Докажете, че ако има само едно число, за което произведението на останалите числа се записва като разлика на квадратите на две естествени числа, то това число е 2006.

Решение: *Лема.* Естествено число се представя като разлика на квадрати на две естествени числа или когато е нечетно, по-голямо от 1, или когато се дели на 4 и е по-голямо от 4.

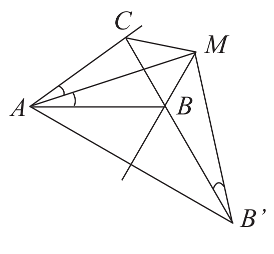
Наистина, ако числото n се представя като разлика на квадрати на естествени числа, т.е. $n = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, то е произведение на два различни множителя с еднаква четност (сборът им е четно число). Ако са нечетни, то и n е нечетно и е по-голямо от 1. Ако са четни, то n се дели на 4 и е по-голямо от $2.2 = 4$.

От друга страна, нечетното число $n = 2k+1,\ k \geq 1$, се представя като разлика на квадрати по следния начин: $n = (k+1)^2 - k^2$, а за кратното на 4 число $n = 4k,\ k > 1$ представянето е $n = (k+1)^2 - (k-1)^2$.

а) Твърдението следва от лемата, тъй като винаги може да се зачеркне едно число така, че или да не останат четни числа (произведението ще е нечетно, по-голямо от 1), или да останат поне две четни числа (произведението ще се дели на 4 и ще е по-голямо от 4).

б) Числото 2006 е четно. Ако има друго четно число n, то може да се зачеркне произволно число освен n и 2006, което противоречи на условието. Следователно няма други четни числа. Тогава можем да зачеркнем 2006 (произведението на останалите числа е нечетно и е по-голямо от 1) и не може да се зачеркне друго число (2006 е четно, но не се дели на 4).

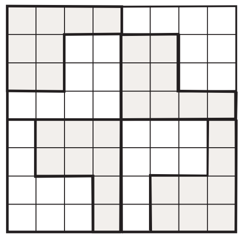
Задача 4. На продължението на страната BC на $\triangle ABC$ е избрана точка B' (B е между B' и C) така, че $BB' = AB$. Външните ъглополовящи при ъглите B и C се пресичат в точка M. Докажете, че точките A, B', M и C лежат на една окръжност.



Решение: Точката M е равноотдалечена от правите AC и BC (тъй като лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle C$), и от правите AB и BC (тъй като лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle B$). Следователно M е равноотдалечена от рамената на $\sphericalangle BAC$, значи AM е ъглополовяща на този ъгъл, откъдето получаваме $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$. Тъй като $\triangle ABB'$ е равнобедрен, то MB е симетрала на AB', откъдето получаваме, че $\sphericalangle BAM = \sphericalangle BB'M$. Тогава $\sphericalangle CB'M = \sphericalangle BB'M = \sphericalangle BAM = \sphericalangle CAM$. Отсечката CM се вижда от точките A и B' под равни ъгли, което означава, че точките A, B', M и C лежат на една окръжност.

Задача 5. Квадрат е разрязан на n еднакви не изпъкнали многоъгълника така, че всички страни на тези многоъгълници са успоредни на страните на квадрата и никой многоъгълник не се получава от друг чрез транслация. Каква е най-голямата възможна стойност на n?

Решение: Ще докажем, че търсената стойност е 8. Пример за разрязване на 8 многоъгълника е даден на чертежа.



От друга страна, многоъгълникът може да се постави по не повече от 8 начина (с точност до успоредно пренасяне). Наистина, да разгледаме три негови последователни върха A, B и C (по тяхното разположение положението на многоъгълника се определя еднозначно).

Можем да считаме, че точката B е фиксирана. От нея страната BA може да се прекара по 4 начина (в четирите посоки, успоредно на страните на квадрата) и след това - страната BC по два начина.

Есенен тур, тренировъчен вариант за 10. - 12. клас

Задача 1. На дъската са записани три цели положителни числа x, y и z. Мария си записва в тетрадка произведението на някои две от числата и намалява третото число на дъската с 1. С новите три числа тя извършва същата операция и т.н., докато едно от числата на дъската стане равно на 0. Какъв ще бъде сборът на числата в тетрадката на Мария?

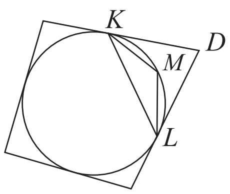
Решение: Произведението на числата на дъската при всеки ход се намалява със записаното в тетрадката число. Когато едно от числата стане равно на 0, произведението на числата на дъската също става 0. Следователно сборът на числата в тетрадката е xyz.

Задача 2. В четириъгълник е вписана окръжност. Допирните точки на окръжността със страните на четириъгълника са свързани последователно с отсечки. Така са получени четири триъгълника, всеки от които има върхове в две допирни точки и един връх на четириъгълника. Докажете, че диагоналите на четириъгълника с върхове центровете на вписаните в четирите триъгълника окръжности, са перпендикулярни.

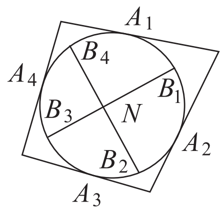
Решение: Първо ще докажем, че центърът на вписаната окръжност на всеки от разглежданите триъгълници е среда на вътрешната за триъгълника дъга от вписаната в дадения четириъгълник окръжност. Нека D е общият връх на страните на четириъгълника, допиращи се до вписаната окръжност в точки K и L (фиг. 1). Нека M е средата на дъгата KL, лежаща в $\triangle DKL$. От равенството

$$\sphericalangle MKL = \frac{\overset{\frown}{ML}}{2} = \frac{\overset{\frown}{MK}}{2} = \sphericalangle MKD$$

следва, че KM е ъглополовяща на $\sphericalangle DKL$. Аналогично ML е ъглополовяща на $\sphericalangle KLD$. Следователно M е център на вписаната в $\triangle KLD$ окръжност.



Фиг. 1



Фиг. 2

Нека допирните точки на четириъгълника с вписаната окръжност са A_1, A_2, A_3, A_4, а средите на дъгите $\overset{\frown}{A_1A_2}, \overset{\frown}{A_2A_3}, \overset{\frown}{A_3A_4}, \overset{\frown}{A_4A_1}$ са B_1, B_2, B_3, B_4 (фиг. 2). Трябва да докажем, че $B_1B_3 \perp B_2B_4$. Ако тези отсечки се пресичат в т. N, намираме

$$\sphericalangle B_1NB_2 = \frac{\overset{\frown}{B_1B_2}}{2} + \frac{\overset{\frown}{B_3B_4}}{2} = \frac{1}{4}(\overset{\frown}{A_1A_2} + \overset{\frown}{A_2A_3} + \overset{\frown}{A_3A_4} + \overset{\frown}{A_4A_1}) = 90^\circ.$$

Задача 3. В полетата на таблица 2006×2006 по произволен начин са записани числата $1, 2, 3, \dots, 2006^2$. Да се докаже, че съществуват две полета с обща страна или общ връх, за които сборът на записаните в тях числа се дели на 4.

Решение: Измежду записаните числа всеки остатък при деление на 4 $(0, 1, 2, 3)$ се среща по 1003^2 пъти. Да допуснем, че няма съседни числа с кратен на 4 сбор и да разделим таблицата на 1003^2 квадрата със страна 2. Всеки две полета в такъв квадрат са съседни, следователно в един квадрат има най-много едно число, което дава остатък 0 (също остатък 2) при деление на 4. Тъй като числата, даващи остатък 0 (остатък 2) са точно 1003^2, то във всеки квадрат има едно число, даващо остатък 0 (остатък 2) при деление на 4. В останалите две полета не може да има числа, даващи различни остатъци (1 и 3) при деление на 4. Следователно броят на числата, даващи остатък 1 (остатък 3) е четен. Противоречие.

Следователно съществуват числа с желаното свойство.

Задача 4. Дадена е безкрайна аритметична прогресия $a_1, a_2, \ldots$ и безкрайна геометрична прогресия $b_1, b_2, \ldots$. Всички членове на геометричната прогресия са членове и на аритметичната прогресия. Докажете, че частното на геометричната прогресия е цяло число.

Решение: Ако частното на геометричната прогресия q е 1, задачата е решена. Иначе разглеждаме частното

$$\frac{b_{n+2} - b_{n+1}}{b_2 - b_1} = q^n.$$

Тъй като членовете на геометричната прогресия са членове и на аритметичната, това частно е рационално число. Оттук q е рационално. От друга страна, ако d е разликата на аритметичната прогресия, то числото

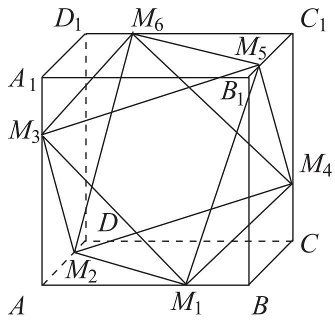
$$\frac{b_{n+2} - b_{n+1}}{d} = \frac{(b_2 - b_1)q^n}{d}$$

е цяло за всяко n, следователно q е също цяло число.

Задача 5. Може ли правилният октаедър да бъде вписан в куб така, че всички върхове на октаедъра да са върху рубовете на куба? (Правилният октаедър има 6 върха, от всеки връх излизат по 4 ребра и всички стени са равностранни триъгълници.)

Решение: Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е куб с ребро 1. На ребрата AB, AD, AA_1, CC_1, B_1C_1, C_1D_1 вземаме точки $M_1, M_2, \ldots, M_6$ съответно, така, че $AM_1 = AM_2 = AM_3 = C_1M_4 = C_1M_5 = C_1M_6 = \frac{3}{4}$. Тогава

$$M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1 = M_4M_5 = M_5M_6 = M_6M_1 =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$
$$M_1M_4 = M_1M_5 = M_2M_4 = M_2M_6 = M_3M_5 = M_3M_6 =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$



Оттук триъгълниците

$$M_1M_2M_3,\quad M_4M_5M_6,\quad M_1M_4M_5,\quad M_2M_4M_6,$$
$$M_3M_5M_6,\quad M_4M_1M_2,\quad M_5M_1M_3,\quad M_6M_2M_3$$

са равностранни и точките $M_1, M_2, \ldots, M_6$ са върхове на октаедър.

Пролетен тур, основен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. Дадено е естествено число N. За да определи най-близкото до $\sqrt{N}$ цяло число, Петър намира най-близкия до N квадрат на естествено число a^2 и приема, че a е търсеното число. Винаги ли е верен отговорът на Петър?

Решение: Ще докажем, че отговорът на Петър винаги е верен.

Нека $\sqrt{N} = k$ и $m^2 \le N < (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$. Тогава a се определя по правилото:

$$a = \begin{cases} m, & N \le m^2 + m; \\ m+1, & N > m^2 + m. \end{cases}$$

В първия случай имаме

$$N < \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 = m^2 + m + \frac{1}{4}, \text{ т.е. } k < m + \frac{1}{2},$$

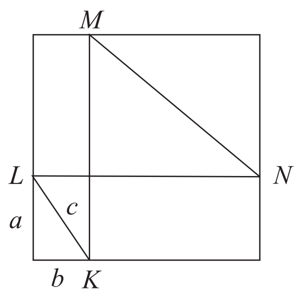
а във втория случай

$$N \ge m^2 + m + 1 > \left(m + \frac{1}{2}\right)^2, \text{ т.е. } k > m + \frac{1}{2}.$$

И в двата случая a е най-близкото до k естествено число.

Задача 2. На страните на квадрат със страна 1 са означени точките K, L, M и N така, че отсечката KM е успоредна на две от страните на квадрата, а отсечката LN е успоредна на другите две страни. Отсечката KL отрязва от квадрата триъгълник с обиколка 1. На колко е равно лицето на триъгълника, който отрязва от квадрата отсечката MN?

Решение: Ще докажем, че търсеното лице е равно на $\frac{1}{4}$. Нека катетите на триъгълника, отрязан от отсечката KL, са равни на a и b, а хипотенузата е равна на c (виж чертежа). По условие $c = 1 - a - b$. Като вдигнем на това равенство на квадрат и приложим Питагоровата теорема, получаваме



$$\begin{aligned} c^2 &= (1-a-b)^2 \\ a^2 + b^2 &= 1 + a^2 + b^2 + 2ab - 2a - 2b \\ -1 &= 2ab - 2a - 2b. \end{aligned}$$

Тогава лицето на триъгълника, който отсечката MN отрязва от квадрата, е равно на

$$S = \frac{1}{2}(1-a)(1-b) = \frac{1}{2}(1+ab-a-b) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Задача 3. Катя избрала двадесет последователни естествени числа, записала ги едно след друго в някакъв ред и така получила числото M. Лили избрала двадесет и едно последователни естествени числа, записала ги едно след друго в някакъв ред и така получила числото N. Възможно ли е Катя и Лили да получат равни числа, т.е. $M = N$?

Решение: Равенството $M = N$ е възможно – например, ако Лили е избрала числата $2, 3, 4, \ldots, 22$ и ги е записала в този ред, а Катя е избрала числата $23, 4, 5, \ldots, 22$ (в записания ред).

Задача 4. В изпъкнал n-ъгълник са построени някои диагонали (които могат и да се пресичат) така, че никои три диагонала не се пресичат във вътрешна точка на многоъгълника. По този начин многоъгълникът е разбит на триъгълници. Колко най-много могат да са триъгълниците?

Решение: Ще докажем, че триъгълниците са най-много $2n - 4$ при четно $n = 2k$ и $2n - 5$ при нечетно $n = 2k + 1$.

Пример. Построяваме непресичащи се диагонали, които разбиват n-ъгълника на $k - 1$ четириъгълника (при нечетно n остава един триъгълник) и във всеки от тези четириъгълници построяваме двата диагонала (те го разбиват на четири триъгълника). При четно n получаваме $4(k-1) = 2n-4$ тръгълника, а при нечетно n триъгълниците са $4(k-1)+1 = 2n-5$.

Оценка. Първо ще отбележим, че няма диагонал, който пресича два други диагонала във вътрешни точки.

Да допуснем, че такъв диагонал съществува и да разгледаме отсечката върху него, която свързва две съседни пресечни точки. При пресичането на тази отсечка с двата диагонала се получават ъгли със сбор $360°$. Следователно от едната страна на отсечката сборът на ъглите е не по-малък от $180°$, т.е. не може да има триъгълник. Противоречие.

Следователно диагоналите могат да се разделят на пресичащи се двойки. Четирите края на дагоналите във всяка такава двойка също са свързани с дагонали или страни на многоъгълника (за да се получи разбиване на триъгълници). Това означава, че ако премахнем всички двойки пресичащи се диагонали, ще получим разбиване на многоъгълника на k четириъгълника и m триъгълника. Всички техни върхове са върхове на дадения многоъгълник, затова сборът от ъглите им е равен на сбора на ъглите на многоъгълника, т.е.

$$k.360^\circ + m.180^\circ = (n-2).180^\circ,$$

т.е. $2k + m = n - 2$. Броят на триъгълниците в първоначалното разбване е

$$4k + m = 2(2k + m) - m = 2n - 4 - m \leq 2n - 4.$$

Ако n е нечетно, от равенството $2k + m = n - 2$ следва, че m е нечетно, т.е. $m \geq 1$. В този случай оценката е

$$4k + m = 2(2k + m) - m = 2n - 4 - m \leq 2n - 5.$$

Задача 5. Намерете всички растящи аритметични прогресии с членове прости числа със свойството: броят на членовете на прогресията е краен и по-голям от разликата на прогресията.

Решение: Ще докажем, че търсените прогресии са 2, 3 и 3, 5, 7.

Да разгледаме прогресия с разлика 1, удовлетворяваща условието на задачата. Тя има поне два члена. Единият от тях е задължително четен, а единственото просто четно число е 2. По-малки от 2 прости числа няма, следователно 2 е първият член на прогресията. Вторият е 3, а третият член (4) не е просто число.

Да разгледаме прогресия с разлика 2, която удовлетворява условието. Тя съдържа поне 3 члена; нека първите три са $k-2, k, k+2$. Ясно е, че какъвто и остатък да дава k при деление на 3, един от тези членове се дели на 3. Простото число, което се дели на 3, е 3. Лесно се вижда, че 3 може да е само първи член на прогресията; получаваме 3, 5, 7. Четвъртият член е 9, съставно число.

Да разгледаме прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с разлика $d \geq 3$. Числата $d-1$ и d са взаимно прости, следователно всички прости делители на $d-1$ не делят d. Нека p е един от тези прости делители. Разглеждаме частта от прогресията $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$. (Това е част от прогресията, тъй като $p < d < n$.) Всички остатъци по модул p на числата $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ са различни. (Наистина, ако

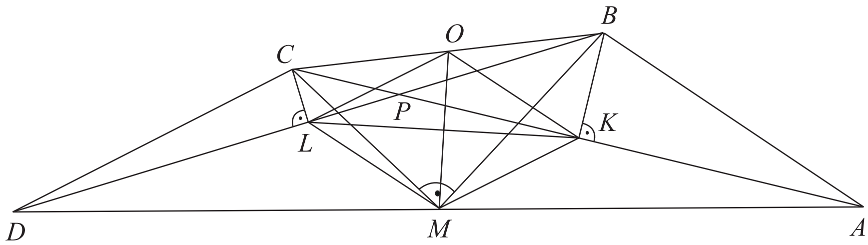
$$\left.\begin{array}{l} a_i = a_1 + (i-1)d = sp + r \\ a_j = a_1 + (j-1)d = tp + r \end{array}\right\} \Longrightarrow (t-s)p = (j-i)d.$$

Тъй като $j - i < p$, дясната част на последното равенство не се дели на p, а лявата се дели. Противоречие.) Следователно един от разглежданите остатъци е 0. Това означава, че едно от числата $a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}$ се дели на

p. Това обаче е невъзможно, тъй като всяко от тези числа е просто и по-голямо от p (тъй като има номер най-малко 2 и следователно е по-голямо от d).

Задача 6. В четириъгълника $ABCD$ страните AB, BC и CD са равни, а точка M е среда на AD. Известно е, че $\sphericalangle BMC = 90°$. Намерете ъгъла между диагоналите на четириъгълника $ABCD$.

Решение: Нека O, K, L са среди съответно на BC, AC, BD, а P е пресечна точка на AC и BD. Точките K и L са различни (иначе $ABCD$ е ромб и $\sphericalangle BMC < \sphericalangle BPC = 90°$).



Триъгълниците $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ са равнобедрени, следователно медианата към основата във всеки от тях е и височина, т.е. $BK \perp AC$ и $CL \perp BD$. От равенството

$$\sphericalangle BKC = \sphericalangle BMC = \sphericalangle BLC = 90°$$

следва, че точките K, M, L лежат на окръжност с диаметър BC и център точка O. Тъй като хордата KM е средна отсечка в $\triangle ACD$, получаваме, че $KM = \dfrac{1}{2}CD = OC$, т.е. тази хорда е равна на радиуса. Тогава $\triangle KOM$ е равностранен и $\sphericalangle MOK = 60°$.

Аналогично $\sphericalangle MOL = 60°$, т.е. $\sphericalangle KOL = 120°$. Вписаният ъгъл $\sphericalangle KBL$ се измерва с дъгата $\overset{\frown}{KL}$ (или с допълващата я, когато даденият четириъгълник не е изпъкнал),следователно е равен на $60°$ (или $120°$). Това означава, че $\sphericalangle PBK = 60°$, т.е. $\sphericalangle BPK = 30°$.

Задача 7. В своята каюта капитан Врунгел подредил в кръг разбъркана колода от 52 карти, като оставил едно свободно място. От палубата матрос Фукс, без да знае разположението на картите, назовава произволна карта. Ако тази карта е до свободното място, Врунгел я премества там, без да каже на Фукс. Иначе не прави нищо. После Фукс назовава друга карта и така колкото пъти иска, докато каже ’стоп’.

а) Може ли Фукс да играе така, че накрая всяка карта да се намира различно от първоначалното си място?

б) Може ли Фукс да играе така, че накрая асо пика да не е до свободното място?

Решение: а) Фукс може да играе така: 52 пъти назовава в един и същи ред всички карти (така назовава общо 52^2 карти) и след това казва 'стоп'. При такава игра картите се преместват в една и съща посока: ако първо е преместена карта a, то до следващото назоваване на a ще се споменат всички карти, включително и тази, която стои от другата страна на свободното място срещу a; тя се мести в същата посока и т.н. При всяко изреждане на колодата се премества поне една карта, значи общо преместванията са поне 52 и всяка карта си сменя мястото. От друга страна, всяка карта се е преместила най-много 52 пъти и следователно не може да се завърти и да се върне на мястото си (за което са необходими 53 хода).

б) Ще докажем, че за всяка последователност от назовани карти съществува начална позиция, която премнава в позиция с асо пика до свободното място. Нека избраната последователност е M.

Ясно е, че назовавайки повторно дадена карта, ние връщаме назад предишния ход. По същия начин, назовавайки последователност от карти в обратен ред, връщаме крайната позиция до началната.

Тогава, ако изберем за начална коя да е позиция с асо пика до свободното място и приложим обратната на M последователност от карти, ще получим начална позиция, която не е печеливша за M.

Пролетен тур, основен вариант за 10. - 12. клас

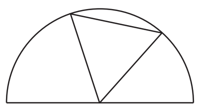
Задача 1. На параболата $y = x^2$ са избрани четири точки A, B, C, D така, че отсечките AB и CD се пресичат на ординатната ос. Намерете абсцисата на точка D, ако абсцисите на точките A, B и C са равни съответно на a, b и c.

Решение: Нека уравнението на правата AB е $y = kx + l$, а на правата CD е $y = mx + l$ (свободните членове са равни, тъй като двете прави пресичат ординатната ос в една и съща точка). Тогава a и b са корените на уравнението $x^2 = kx + l$ и от формулите на Виет $ab = -l$. Аналогично $cd = -l$, където d е абсцисата на точката D. Оттук $d = \dfrac{ab}{c}$.

Задача 2. Изпъкнала фигура F притежава свойството: всеки равностранен триъгълник със страна 1 може да се транслира така, че всичките му върхове да лежат на контура на F. Следва ли от това, че F е кръг?

Решение: Ще докажем, че фигура с даденото свойство не е задължително кръг, като разгледаме полукръг с радиус 1.

Достатъчно е да покажем, че равностранен триъгълник със страна 1 може да се завърти на $120°$, като върховете му остават на контура на полукръга. Това условие очевидно е изпълнено за триъгълник с връх в центъра на полукръга, който се върти около този център.



Задача 3. Нека $f(x)$ е многочлен, различен от константа. Възможно ли е уравнението $f(x) = a$ при всяка стойност на a да има четен брой решения?

Решение: Ако степента на f е нечетна, то при достатъчно голямо a уравнението $f(x) = a$ има точно едно решение.

Нека степента на f е четна. Без огранчение приемаме, че старшият коефициент е положителен (иначе умножаваме f с -1). Разделяме числовата ос на интервали, в които функцията f е монотонна. Ясно е, че f намалява в най-левия интервал и расте в най-десния; редуват се интервали на растене и намаляване. Следователно броят на интервалите е четен и оттук – броят на локалните екстремуми на функцията f е нечетен. Тогава съществува стойност a_0 (например най-големия локален екстремум), която се достига нечетен брой пъти .

Задача 4. Виж задача 7. от Основния вариант за 7. – 9. клас.

Задача 5. От правилен октаедър с ребро 1 са отрязани 6 ъгъла с форма на правилна четириъгълна пирамида с ребро $1/3$. Така е получен многостен, чиито стени са квадрати и правилни шестоъгълници. Може ли пространството да се пакетира с многостени от този вид?

Решение: Ще докажем, че такова пакетиране е възможно.

Да оцветим тези точки в пространството, чиито координати са цели числа с една и съща четност. За всяка оцветена точка M определяме множеството точки, разстоянието от които до M е не по-голямо от разстоянието до всяка друга оцветена точка. По този начин цялото пространство се разбива на множества с общи граници. Тези множества се получават едно от друго чрез транслация и следователно са еднакви. Ще докажем, че те са подобни на дадения многостен.

Да разгледаме множеството M_O, съответстващо на точката $O(0, 0, 0)$. Свързваме O с 'най-близките' осем оцветени точки – $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. През средата на всяка построена отсечка построяваме перпендикулярна на съответната отсечка равнина (средите са $(\pm 1/2, \pm 1/2, \pm 1/2)$). Тези осем равнини 'отсичат' октаедър с върхове в точките $(\pm 3/2, 0, 0), (0, \pm 3/2, 0), (0, 0, \pm 3/2)$. Равнината $x = 1$, която отделя O от точката $(2, 0, 0)$, отсича от този октаедър по една трета от страните, излизащи от неговия връх $(3/2, 0, 0)$. Аналогично отрязват от октаедъра останалите равнини, отделящи O от оцветените точки $(-2, 0, 0), (0, \pm 2, 0), (0, 0, \pm 2)$.

Задача 6. Дадено е ирационално число α, за което $0 < \alpha < 1/2$. Числото α_1 се определя като по-малкото от числата 2α и $1 - 2\alpha$. По същия начин се определя и α_2 като по-малкото от числата $2\alpha_1$ и $1 - 2\alpha_1$, и т.н.

а) Докажете, че за някое n е изпълнено неравенството $\alpha_n < 3/16$.

б) Възможно ли е неравенството $\alpha_n > 7/40$ да е изпълнено за всяко естествено число n?

Решение: Дадената редица е дефинирана по следния начин:

$$\alpha_0 = \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \alpha_{n+1} = \begin{cases} 2\alpha_n, & \text{ако } \alpha_n < \dfrac{1}{4}; \\ 1 - 2\alpha_n, & \text{ако } \alpha_n > \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

От дефиницията следва лесно, че всички членове на редицата са в интервала $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

а) Първо ще докажем, че съществува такова n, за което α_n е по-малко от $\dfrac{1}{3}$. Наистина, ако $\alpha_1 > \dfrac{1}{3}$, то $\alpha_2 = 1 - 2\alpha_1 < \dfrac{1}{3}$.

След това ще докажем, че съществува такова n, за което $\alpha_n < \dfrac{1}{4}$. Ако намереното на предишната стъпка α_k удовлетворява това условие, твърдението е доказано. Иначе имаме $\dfrac{1}{4} < \alpha_k < \dfrac{1}{3}$. Нека $\alpha_k = \dfrac{1}{3} - e$, където $e < \dfrac{1}{12}$. Ще разгледаме отклонението на всеки следващ член на редицата от $\dfrac{1}{3}$. Тъй като $\alpha_k > \dfrac{1}{4}$, то $\alpha_{k+1} = 1 - 2\alpha_k = \dfrac{1}{3} + 2e$. Очевидно $\alpha_{k+1} > \dfrac{1}{4}$, следователно $\alpha_{k+2} = 1 - 2\alpha_{k+1} = \dfrac{1}{3} - 4e$. При всеки следващ член отклонението от $\dfrac{1}{3}$ се удвоява. Ако $\alpha_{k+2} < \dfrac{1}{4}$, търсеното число е намерено; ако не – повтаряме процедурата и т.н., докато получим $\alpha_n < \dfrac{1}{4}$ (повтарянето е възможно, тъй като условието $\frac{1}{4} < \alpha_{k+2} < \frac{1}{3}$ е изпълнено).

Сега ще докажем, че има член на редицата, по-малък от $\frac{1}{5}$. Ако намереното на предишната стъпка a_n не удовлетворява това условие, то $\frac{1}{5} < \alpha_n < \frac{1}{4}$ и $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n > \frac{2}{5} > \frac{1}{4}$, следователно $\alpha_{n+2} = 1 - 2\alpha_{n+1} = 1 - 4\alpha_n < \frac{1}{5}$.

Накрая ще докажем, че има член на редицата, по-малък от $\frac{3}{16}$. Ако намереното на предишната стъпка a_k не удовлетворява това условие, то $\frac{3}{16} < \alpha_k < \frac{1}{5}$. Ще покажем, че при следващите членове на редицата отклонението от $\frac{1}{5}$ се увеличава. Нека $\alpha_k = \frac{1}{5} - e$, където $e < \frac{1}{80}$. Последователно намираме

$$\begin{array}{lllllll}
\alpha_{k+1} & = & 2\alpha_k & = & \frac{2}{5} - 2e & > & \frac{1}{4} \\
\alpha_{k+2} & = & 1 - 2\alpha_{k+1} & = & \frac{1}{5} + 4e & < & \frac{1}{4} \\
\alpha_{k+3} & = & 2\alpha_{k+2} & = & \frac{2}{5} + 8e & > & \frac{1}{4} \\
\alpha_{k+4} & = & 1 - 2\alpha_{k+1} & = & \frac{1}{5} - 16e & &
\end{array}$$

Ако $\alpha_{k+4} > \frac{3}{16}$, повтаряме процедурата, което е възможно, тъй като условието $a_{k+4} = \frac{1}{5} - e_1$ (където $e_1 < \frac{1}{80}$) е изпълнено.

б) Ще построим пример на редица, удовлетворяваща условието, като използваме представянето на числата във вид на безкрайни двоични дроби. Тези дроби се записват само с цифрите 0 и 1, като цифра 1 в k-ти разред след запетаята прибавя 2^{-k}. Както и при десетичните дроби, ирационалните числа се представят като безкрайни непериодични дроби.

Да разгледаме дробта $d = 0,0000001000000010...$, в която цифрите 1 са в 7-ми, 15-ти, 23-ти и т.н. разред след запетаята. Тя е равна на сбора на безкрайната геометрична прогресия $2^{-7} + 2^{-15} + 2^{-23} + \cdots = \frac{2^{-7}}{1 - 2^{-8}} = \frac{2}{255}$. Ако част от единиците (не крайна) непериодично се заменят с 0 и резултатът се умножи по 3, ще се получи ирационално число, по-малко от $\frac{6}{255} = \frac{2}{85}$. Такова число ще наречем *удобно*.

Нека $\alpha = \frac{1}{5} - b$, където b е удобно число. Тогава $\alpha > \frac{1}{5} - \frac{2}{85} > \frac{7}{40}$. Ще разгледаме два случая в зависимост от това дали при образуването на b цифрата 1 в 7-ми разред е заменена с 0 или не.

Ако цифрата 1 е заменена с 0, то $\alpha = \frac{1}{5} - c * 2^{-8}$, където числото c е удобно. Последователно намираме

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2}{5} - c * 2^{-7}, & \alpha_2 &= \frac{1}{5} + c * 2^{-6}, \\ \alpha_3 &= \frac{2}{5} + c * 2^{-5}, & \alpha_4 &= \frac{1}{5} - c * 2^{-4}, \\ &\dots & \alpha_8 &= \frac{1}{5} - c. \end{aligned}$$

Ако цифрата 1 не е заменена с 0, то $\alpha = \frac{1}{5} - 3*2^{-7} - c*2^{-8} = \frac{113}{640} - c*2^{-8}$, където c е удобно число. Тогава

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{113}{320} - c * 2^{-7}, & \alpha_2 &= \frac{47}{160} + c * 2^{-6}, \\ \alpha_3 &= \frac{33}{80} - c * 2^{-5}, & \alpha_4 &= \frac{7}{40} + c * 2^{-4}, \\ \alpha_5 &= \frac{7}{20} + c * 2^{-3}, & \alpha_6 &= \frac{3}{10} - c * 2^{-2}, \\ \alpha_7 &= \frac{2}{5} + c * 2^{-1}, & \alpha_8 &= \frac{1}{5} - c. \end{aligned}$$

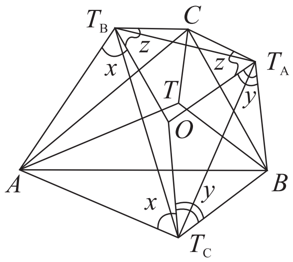
И в двата случая $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7 > \frac{7}{40}$, а α_8 е число от вида на α. Следователно всички числа в редицата са по-големи от $\frac{7}{40}$.

Задача 7. Страните на триъгълник ABC се виждат от точка T под ъгъл 120°. Докажете, че правите, симетрични на AT, BT и CT относно BC, CA и AB съответно, се пресичат в една точка.

Решение: Нека T_A, T_B, T_C са точките, симетрични на T относно правите BC, CA, AB съответно. Тъй като AT е ъглополовяща на $\sphericalangle BTC = 120^\circ$, то нейният симетричен образ е L_A – ъглополовящата на $\sphericalangle BT_AC = 120^\circ$. Аналогични твърдения са верни и за другите два образа L_B и L_C.

Нека O е центърът на описаната около $\triangle T_AT_BT_C$ окръжност. Радиусите OT_A, OT_B, OT_C разделят ъглите $\sphericalangle T_A, \sphericalangle T_B, \sphericalangle T_C$ на шестоъгълника

$BT_ACT_BAT_C$ на два ъгъла със сбор $120°$ (ако радиусът е външен за ъгъла, приемаме, че едната част е по-голяма от $120°$, а другата по-малка от $0°$). От друга страна, $AT_B = AT = AT_C$ и триъгълниците $\triangle AT_BO$ и $\triangle AT_CO$ са еднакви. Следователно $\sphericalangle AT_BO = \sphericalangle AT_CO = x$; аналогично получаваме $\sphericalangle BT_CO = \sphericalangle BT_AO = y$ и $\sphericalangle CT_AO = \sphericalangle CT_BO = z$.



Сега от системата $x+y = x+z = y+z = 120°$ лесно следва $x = y = z = 60°$. Това означава, че правите L_A, L_B, L_C се пресичат в точка O.

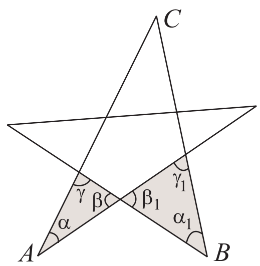
Пролетен тур, тренировъчен вариант за 7. - 9. клас

Задача 1. Митко нарисувал петолъчка, като начертал 5 отсечки без да вдига молива от листа. Той забелязал, че построенте отсечки разделят петолъчката на 5 еднакви триъгълника и петоъгълник. Следва ли от това, че петоъгълникът е правилен (т.е. с равни ъгли и равни страни)?

Решение: Ще докажем, че петоъгълникът е правилен.

Да означим с C един от върховете на петолъчката, а с A и B – другте краища на отсечките през C. При означението на ъглите, показано на чертежа, имаме равенството на връхните ъгли $\beta = \beta_1$ и $\alpha_1 \neq \gamma$ (тъй като правите AC и BC не са успоредни).

По условие оцветените триъгълници са еднакви, следователно $\alpha_1 = \alpha$ и $\gamma_1 = \gamma$. Ясно е, че с подобни разсъждения можем еднозначно да определим разпределението на ъглите при всеки от петте еднакви триъгълника. Така получаваме, че $\beta = \gamma$. Затова всички ъгли на петоъгълника са равни на $180° - \gamma$, а всички страни са равни като съответни елементи в еднакви триъгълници.



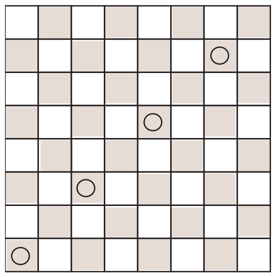
Задача 2. На дъската са записани две 2007-цифрени числа. Известно е, че от двете числа могат да се изтрият по 7 цифри така, че получените числа да са равни. Докажете, че в дадените числа могат да се вмъкнат по 7 цифри така, че отново да се получат равни числа.

Решение: Нека 2007-цифрените числа са K и C, а полученото след изтриване 2000-цифрено число е M. Между цифрите на M слагаме звездички на всяко място, където е била изтрита цифра: червени звездички вместо цифрите на K и сини – вместо цифрте на C. При обратната смяна на всички звездички със съответните им цифри ще се получи 2014-цифрено число B.

Ще покажем, че B може да се получи от K и от C с вмъкване по 7 цифри. Ако първо се заменят сините звездички, а след това червените, на втората стъпка получаваме B от K, а ако заменим първо червените, а после сините звездички, на втората стъпка получаваме B от C.

Задача 3. Колко най-малко топа трябва да се поставят на шахматна дъска 8×8 така, че всички бели полета да са застрашени от тях? (Топът застрашава всички полета от реда и стълба, в който се намира.)

Решение: Необходими са най-малко 4 топа. Те могат да се поставят, например, както е показано на чертржа.



Тъй като топ на бяло поле застрашава 7 бели полета, а топ на черно поле застрашава 8 бели полета, а белите полета са общо 32, очевидно три топа не са достатъчни.

Задача 4. Дадени са три ненулеви реални числа a, b и c със свойството: в какъвто и ред да се поставят тези числа като коефициенти на квадратен тричлен, тричленът има реален корен. Вярно ли е, че всеки от възможните тричлени има положителен корен?

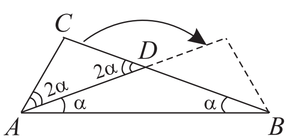
Решение: Ще докажем, че всеки тричлен от условието има положителен корен. Нека най-малкото по модул от дадените числа е c.

Да допуснем, че някой от тричлените няма положителен корен, т.е има два отрицателни корена (корен 0 няма, тъй като коефициентите са ненулеви). От формулите на Виет следва, че коефициентите на този тричлен (a, b, c в някакъв ред) са с еднакъв знак. Тъй като тричленът $ax^2 + cx + b$ има реален корен, то дискриминантата му е неотрицателна, т.е. $c^2 - 4ab \geq 0$. От друга страна, от избора на c следва, че $c^2 \leq |a||b| < 4|ab|$. За да са изпълнени едновременно тези неравенства, трябва a и b да са с различни знаци. Противоречие.

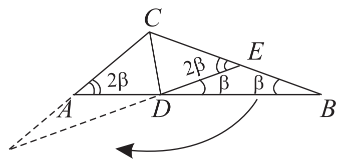
Задача 5. а) Торта има форма на тръгълник Δ_1, в който един ъгъл е три пъти по-голям от друг. Кутията за тортата е с формата на триъгълник Δ_2, като Δ_1 и Δ_2 са симетрични спрямо някоя права. Как да се разреже тортата на две части, които могат да се сложат в кутията (без да се обръщат с глазурата надолу)?

б) Същата задача за торта с форма на тъпоъгълен триъгълник, в който тъпият ъгъл е два пъти по-голям от един от острите ъгли.

Решение: а) Нека в $\triangle ABC$ е изпълнено условието $\sphericalangle A = 3 \sphericalangle B$. На страната CB отбелязваме точка D така, че $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABD$ и разрязваме по отсечката AD. Получават се два равнобедрени триъгълника. Като залепим отсечката AD на $\triangle ADC$ към отсечката DB, получаваме желаната форма (фиг. 1).



Фиг. 1



Фиг. 2

б) Нека в $\triangle ABC$ е изпълнено условието $\sphericalangle A = 2 \sphericalangle B = 2\beta$. На страната BC отбелязваме точка E, симетрична на A относно ъглополовящата CD. Триъгълникът DBE е равнобедрен (тъй като $\sphericalangle DEC = 2\beta$ и $\sphericalangle DBE = \beta$, то $\sphericalangle BDE = \beta$). Като отрежем $\triangle DBE$ и прилепим неговата страна DE към равната и отсечка AD, получаваме торта с подходяща форма (фиг. 2).

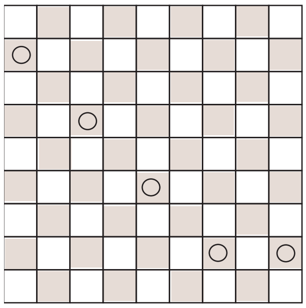
Пролетен тур, тренировъчен вариант за 10. - 12. клас

Задача 1. Полетата на дъска 9×9 са шахматно оцветени, като ъгловите полета са бели. Колко най-малко топа трябва да се поставят на дъската така, че те да застрашават всички бели полета?

Решение: Пример с 5 топа, които застрашават всички бели полета, е показан на чертежа.

От друга страна, топ на бяло поле застрашава 7 или 9 бели полета, а топ на черно поле застрашава 9 бели полета. Тъй като белите полета са 41, четири топа очевидно не са достатъчни.

Задача 2. Многочленът $x^3 + px^2 + qx + r$ има три корена в интервала $(0; 2)$. Докажете неравенството $-2 < p + q + r < 0$.



Решение: Да означим дадения многочлен с $P(x)$. Ако x_1, x_2, x_3 са трите му корена, то $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Да разгледаме стойността на многочлена при $x = 1$. Имаме

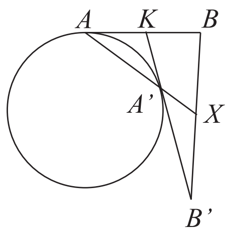
$$1 + p + q + r = P(1) = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3).$$

Всеки от множителите в последното произведение е по модул по-малък от 1, следователно $-1 < 1+p+q+r < 1$, което е еквиавалентно на твърдението на задачата.

Задача 3. Права се допира до окръжност с център O в точка A. На правата е избрана точка B и е построен образът $A'B'$ на отсечката AB при ротация с център O. Докажете, че правата през допрните точки A и A' разполовява отсечката BB'.

Решение: Нека правите AB и $A'B'$ се пресичат в т. K и $AA' \cap BB' = X$.

Тъй като ротацията е еднаквост, то $AB = A'B'$. Също, при ротаця образът на допирателна права е отново допирателна; получаваме равенството $KA = KA'$. По теоремата на Менелай за $\triangle BKB'$, пресечен с правата AA', имаме



$$\frac{A'B'}{A'K} \cdot \frac{KA}{BA} \cdot \frac{BX}{XA} = 1.$$

Следователно $BX = AX$, което трябваше да се докаже.

Случаят, когато $AB || A'B'$ е очевиден от съображения за централна симетрия.

Задача 4. Редица от нули и единици е образувана по правилото: в k-та позиция се записва нула, когато сборът от цифрите на числото k е четен, а единица, когато сборът от цифрите на числото k е нечетен. Докажете, че редицата не е периодична.

(Началото на редицата е: 101010101101010101001. . .)

Решение: Нека редицата има период $d < 10^n$. Сборът на цифрите на числата 10^n и 10^{n+1} е равен на 1, а сборът на цифрите на числата $10^n - d$ и $10^{n+1} - d$ се различава с 9, т.е. сборовете са с различна четност. Противоречие.

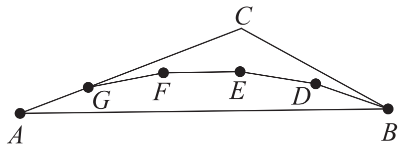
Ако има предпериод, числото n се избира така, че $10^n - d$ да е по-голямо от дължината на предпериода.

Задача 5. а) Торта има форма на тъпоъгълен тръгълник Δ_1, в който тъпият ъгъл е два пъти по-голям от един от острите ъгли. Кутията за тортата е с формата на триъгълник Δ_2, като Δ_1 и Δ_2 са симетрични спрямо някоя права. Как да се разреже тортата на две части, които могат да се сложат в кутията (без да се обръщат с глазурата надолу)?

б) Същата задача за торта с форма на триъгълник с ъгли $20°$, $30°$, $130°$.

Решение: а) Виж задача 5. б) от тренировъчния вариант за 7. - 9. клас.

б) Нека в $\triangle ABC$ имаме $\sphericalangle A = 20°, \sphericalangle B = 30°, \sphericalangle C = 130°$.



Изрязваме шестоъгълник $ABDEFG$ с $\sphericalangle G = \sphericalangle D = \sphericalangle E = \sphericalangle F = 170°$, ъгли по $20°$ при страната AB и страни $BD = DE = EF = FG = GA$. (За да построим този шестоъгълник може, например, да построим дъга, от точките на която отсечката AB се вижда под ъгъл $155°$ и да я разделим на 5 равни части.)

Оставащият неизпъкнал шестоъгълник преместваме така, че страната му GF да се прилепи към страната AG на шестоъгълника $ABDEFG$.