30 ЗАДАЧИ НА 30 ЕЗИКА - ОТГОВОРИ

София, 25 юни 2006

1: A	2: D	3: D	4: D	5: C	6: D	7: B	8: B	9: E	10: A
11: E	12: A	13: D	14: B	15: B	16: E	17: B	18: E	19: B	20: C
21: C	22: A	23: D	24: D	25: D	26: B	27: A	28: B	29: E	30: C

*	Задача	Език
English	14	Английски
Français	7	Френски
Deutsch	10	Немски
Italiano	8	Италиански
Türkçe	26	Турски
Español	17	Испански
Português	23	Португалски
Nederlands	22	Нидерландски
Română	25	Румънски
Dansk	12	Датски
Polski	5	Полски
Česky	9	Чешки
Hrvatski	21	Хърватски
Magyar	30	Унгарски
Suomi	27	Фински

*	Задача	Език
Svenska	19	Шведски
Български	18	Български
Русский	28	Руски
Українська	4	Украински
Македонски	2	Македонски
Ελληνικά	3	Гръцки
Shqip	29	Албански
Slovenščina	24	Словенски
Slovenčina	13	Словашки
Српски	15	Сръбски
Norsk	6	Норвежки
Eesti	1	Естонски
Беларуская	11	Белоруски
Català	20	Каталунски
Lietuvių	16	Литовски

[1] (EE) Mitu täisarvu n rahuldavad võrratusi $2006 < 200+6n < 6002$?
A) 665 B) 666 C) 667 D) 668 E) 669
How many integers n satisfy the inequalities $2006 < 200+6n < 6002$?
Answer A. We have $1806 < 6n < 5802$; $301 < n < 967$, and there are 665 integers.
Колко цели числа n изпълняват неравенствата $2006 < 200+6n < 6002$?
Answer A. Имаме $1806 < 6n < 5802$; $301 < n < 967$, където има 665 цели числа.

[2] (MK) Во една паралелка има 36 деца. Бројот на машки спрема бројот на девојчиња се однесува како 4:5. Колку девојчиња има во паралелката?
A) 5 B) 15 C) 16 D) 20 E) 25
In a section there are 36 children in ratio boys:girls=4:5. How many girls are there?
Answer D. $4x+5x=36$; $x=4$; $5x=20$.
В паралелка има 36 деца в съотношение момчета:момичета=4:5. Колко са момичетата? Answer D. $4x+5x=36$; $x=4$; $5x=20$.

[3] (GR) Μέσα σε κύκλο $\kappa(O;\ r)$ εγγράφουμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Μέσα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγράφουμε κύκλο κ' και μέσα στον κύκλο κ' εγγράφουμε τετράγωνο $\Pi P\Sigma T$. Να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου $\Pi P\Sigma T$ συναρτήσει του r.
A) $r/4$ B) $r/(2\sqrt{2})$ C) $r/2$ D) $r/(\sqrt{2})$ E) r
In the circle $\kappa(O;r)$ we inscribe an equilateral triangle $AB\Gamma$. In $AB\Gamma$ we inscribe a circle κ' and inside κ' a square $\Pi P\Sigma T$. Express the side of $\Pi P\Sigma T$ via r.
Answer D. The radius of κ' is half that of κ, hence the side of the square equals $(r/2)(\sqrt{2}) = r/(\sqrt{2})$.
В окръжност $\kappa(O;r)$ вписваме равностранен триъгълник $AB\Gamma$. В $AB\Gamma$ вписваме окръжност κ' , а в нея квадрат $\Pi P\Sigma T$. Изразете страната на $\Pi P\Sigma T$ чрез r.
Answer D. Радиусът на κ' е половината на този на κ, така че страната на квадрата е равна на $(r/2)(\sqrt{2}) = r/(\sqrt{2})$.

[4] (UA) У прямокутному трикутнику висота, яка опущена з вершини прямого кута, дорівнює 6см, а гострий кут дорівнює 75°. Знайдіть довжину гіпотенузи трикутника, в см.
A) 15 B) 18 C) 21 D) 24 E) 30
In a right triangle, the altitude through the right angle measures 6cm and an acute angle measures 75°. Find the length of the hypotenuse, in cm.
Answer D. The angle between the hypotenuse and the median is 30°, so the latter is 12cm and hence the hypotenuse is 24cm long.

В правоъгълен триъгълник височината през правия ъгъл е 6cm, а един остър ъгъл е равен на 75°. Намерете дължината на хипотенузата в cm.
Answer D. Ъгълът между хипотенузата и медианата е 60°, значи медианата е 12cm, така че хипотенузата е дълга 24cm.

[5] (PL) Pan i jego pies znajdują się w odległości 2 km od domu. Pan porusza się z prędkością 5 km/h, a pies - z prędkością 20 km/h. Pies biegnie do domu, wraca do pana, znowu biegnie do domu, wraca itd., aż do momentu gdy razem znajdą się w domu. Jaką drogę pokonuje pies?
A) 4 km B) 6 km C) 8 km D) 10 km E) 12 km
A man and his dog are 2km away from home. The rate of the man is 5km/h and that of the dog is 20km/h. The dog runs to the home, back to the man, once again to the home, back to the man and so on, until they both arrive home. What distance was covered by the dog?
Answer C. The man needs 2/5h to arrive home. For this time the dog will cover (2/5)20=8km.
Човек и кучето му са на 2km от дома. Човекът се движи с 5km/h, а кучето с 20km/h. Кучето бяга до дома, връща се до човека, пак до дома, връща се и т.н. до момента, в който двамата заедно се озоват у дома. Какъв път е изминало кучето? Answer C. Човекът ще стигне у дома за 2/5h. За това време кучето ще навърти (2/5)20=8km.

[6] (NO) Et kvadrat endres til et rektangel ved at to sider økes med x% (x>0) og de to andre sidene minkes med $2x$%. Arialet minker da med 12%. Verdien av x er da
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12
A square is transformed to a rectangle by increasing one side by x% and decreasing another by $2x$%. The area is decreased by 12%. Then x is?
Answer D. We have $(1+x/100)(1–2x/100)=88/100$, hence $10000+100x-200x-2x^2=8800$ and $x^2+50x–600=0$. As $x>0$, we get $x= –25+\sqrt{(625+600)}= –25+35=10$.
Квадрат се преобразуван в правоъгълник с увеличаване на една от страните с x% и намаляване на друга с $2x$%. Лицето намаляло с 12%. Тогава x е?
Answer D. Имаме $(1+x/100)(1–2x/100)=88/100$, значи $10000+100x-200x-2x^2=8800$ и $x^2+50x–600=0$. Щом $x>0$, получаваме $x= –25+\sqrt{(625+600)}= –25+35=10$.

[7] (FR) Quel est le reste de la division de 3^{2006} par 11?
A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 9
What is the remainder of the division of 3^{2006} by 11?
Answer B. We have $3^5=243$, which has remainder 1, hence 3^{2005} also has remainder 1. Then 3^{2006} has remainder 3.
Какъв е остатъкът от делението на 3^{2006} с 11? Answer B. Имаме $3^5=243$, което дава остатък 1, така че 3^{2005} също дава остатък 1. Значи 3^{2006} дава остатък 3.

[8] (IT) Un'urna contiene 5 palline nere, 4 rosse e 7 blu; una seconda urna contiene 4 palline nere, 6 rosse e 5 blu. Estraiamo una pallina da ciascuna urna. Determinare la probabilità di non estrarre alcuna pallina rossa.
A) 50% B) 45% C) 40% D) 35% E) 30%
An urn contains 5 black, 4 red and 7 blue balls; another contains 4 black, 6 red and 5 blue balls. We withdraw a ball from each urn. Find the probability that there is at least no red ball among them.
Answer B. The probability for the first ball not to be red is 12/16=3/4, for the second 9/15=3/5, for both 9/20=45%.
Урна съдържа 5 черни, 4 червени и 7 сини топчета; друга съдържа 4 черни, 6 червени и 5 сини топчета. Избираме по едно топче от всяка урна. Намерете вероятността никое от тях да не е червено. Answer B. Вероятността първото да не е червено е 12/16=3/4, второто 9/15=3/5, а и двете да не са червени 9/20=45%.

[9] (CZ) Je dán čtverec se stranou 1. Odřežte ve vrcholech rovnoramenné trojúhelníky tak, aby vznikl pravidelný osmiúhelník. Vypočítejte jeho obsah.
A) $\sqrt{2} – 0.5$ B) $4\sqrt{2} – 5$ C) $3 – 2\sqrt{2}$ D) $6 – 4\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2} – 2$
A unit square is given. Cut isosceles triangles from its vertices in order to obtain a regular octagon. Find its area.
Answer E. If the side of the octagon is x, we get $x\sqrt{2} + x=1$ and hence $x=\sqrt{2} – 1$. The area of the octagon is $1 – 4x^2/4 = 1 – (3–2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}–2$.
Даден е единичен квадрат. Отрежете от върховете му равнобедрени триъгълници така, че да се получи правилен осмоъгълник. Намерете лицето му.

Answer E. Ако страната на осмоъгълника е x, имаме $x\sqrt{2} + x=1$ и значи $x=\sqrt{2} - 1$. Лицето на осмоъгълника е $1 - 4x^2/4 = 1 - (3-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}-2$.

[10] (DE) Wie viele dreistellige Zahlen haben die Eigenschaft, daß die Ziffer an der Einerstelle gleich dem Produkt der Ziffern an der Hunderterstelle und an der Zehnerstelle ist?
A) 32 B) 31 C) 26 D) 23 E) 21
How many three-digit numbers have the property that the units digit equals the product of the hundreds and the tens digits?
Answer A. These are 100, 111, 122, ..., 199, 200, 212, 224, 236, 248, 300, 313, 326, 339, 400, 414, 428, 500, 515, 600, 616, 700, 717, 800, 818, 900, 919.
Колко трицифрени числа имат свойството, че цифрата на единиците им е равна на произведението на цифрите на стотиците и десетиците им?
Answer A. Това са 100, 111, 122, ..., 199, 200, 212, 224, 236, 248, 300, 313, 326, 339, 400, 414, 428, 500, 515, 600, 616, 700, 717, 800, 818, 900, 919.

[11] (BY) У квадраце, старана якога роўна 8см, сярэдзіны дзвюх сумежных старон злучаны паміж сабой и з процілеглай вяршыняй квадрата. Знайсци плошчу атрыманага трохвугольніка (у см^2). A) 12 B) 16 C) 20 D) 22 E) 24
In a square of side 8cm the midpoints of two adjacent sides are connected to one another and to the opposite vertex of the square. Find the area of the formed triangle (in cm^2).
Answer E. The area of the square is 64, and the areas of the cut triangles are 4.4/2=8 and twice 8.4/2=16. The remaining area is 64–32–8=24(cm^2).
В квадрат със страна 8cm средите на две съседни страни са свързани помежду си и с противоположния връх на квадрата. Намерете лицето на получения триъгълник (в cm^2). Answer E. Лицето на квадрата е 64, а лицата на отрязаните триъгълници са 4.4/2=8 и две по 8.4/2=16. Оставащото лице е 64–32–8=24(cm^2).

[12] (DK) Lad n=123456789101112 ... 20052006 være det naturlige tal, der fremkommer ved at skrive de naturlige tal fra 1 til 2006 op efter hinanden. Hvad er ciffer nr. 3030 i n?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
Let n=123456789101112 ... 20052006 be the natural number formed by writing the natural numbers from 1 to 2006 one after another. What is the 3030th digit of n?
Answer A. There are 9 one-digit numbers, 90x2=180 digits in two-digit numbers and 900x3=2700 digits in three-digit numbers. The remaining 3030-2889=141 digits are from four-digit numbers. As 140:4=35, we need the first digit of the 36th such number, namely 1.
Нека n=123456789101112 ... 20052006 е естественото число, получено от записване на естествените числа от 1 до 2006 едно след друго. Коя е 3030^{тата} цифра на n? Answer A. Има 9 едноцифрени, 90x2=180 цифри на двуцифрени и 900x3=2700 цифри на трицифрени числа. Останалите 3030-2889=141 цифри са на четирицифрени числа. Щом 140:4=35, трябва ни първата цифра на 36^{тото} такова число, което е 1.

[13] (SK) V kružnici k sú zostrojené dve tetivy AC, BC. Menšiemu oblúku AC prislúcha stredový uhol 98˚, menšiemu oblúku BC stredový uhol 136˚. Aký veľký je uhol ACB?
A) 58˚ B) 59˚ C) 61˚ D) 63˚ E) 68˚
In a circle k two chords AC, BC are drawn. The central angle of the minor arc AC is 98˚, and that of the minor arc BC is 136˚. What is the measure of angle ACB?
Answer D. The arc AB measures 360˚-98˚-136˚=126˚, so angle ACB measures 63˚
В окръжност k са построени хордите AC, BC. Централния ъгъл на малката дъга AC е 98˚, а на малката дъга BC е 136˚. Каква е мярката на ъгъл ACB?
Answer D. Дъгата AB е равна на 360˚-98˚-136˚=126˚, значи ъгъл ACB е 63˚

[14] (EN) Five girls have one ribbon each. They want to exchange them, so that each girl gets someone else's ribbon. How many different ways are there to do this?
A) 120 B) 44 C) 40 D) 36 E) 25
Answer B. There are 4!=24 ways to move the ribbons in a circle of five girls and 5.4=20 ways to make a circle of three girls, so that the other two exchange their ribbons. In total 24+20=44 ways.
Пет момичета имат по една панделка всяка. Те искат да си ги разменят, така че всяка да получи панделката на друга. По колко различни начина може да стане това? Answer B. Има 4!=24 начина да завъртим панделките в кръг от пет момичета и още 5.4=20 начина за кръг от три

момичета (а останалите две момичета да разменят панделките помежду си). Общо 24+20=44 начина.

[15] (SR) На основици AB једнакокраког троугла ABC дата је произвољна тачка P. Права p која садржи тачку P и нормална је на основицу сијече праве AC и BC редом у тачкама K и L (K је међу L и P). Ако је CD висина на основицу троугла, CD=15 и KL=4, одреди PK=?

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

On the base AB of the isosceles triangle ABC an arbitrary point P is chosen. A line p through P perpendicular to the base intersects the lines AC and BC at K and L, respectively (K is between L and P). If CD is an altitude, CD=15 and KL=4, find PK.

Answer B. Let the external bisector at C cut the line p at M. Then CM is also an altitude there and hence a median, so MK=ML=2. Also $PDCM$ is a rectangle, so PM=15 and hence PK=15–2=13.

Върху основата AB на равнобедрен ABC е избрана произволна точка P. Права p през P, перпендикулярна на основата, пресича правите AC и BC съответно в точки K и L (K е между L и P). Ако CD е височина, CD=15 и KL=4, намери PK.

Answer B. Нека външната ъглополовяща при C пресича p в M. Тогава CM е и височина, а значи и медиана, така че MK=ML=2. Но $PDCM$ е правоъгълник, значи PM=15 и PK=15–2=13.

[16] (LT) Kiek yra natūraliųjų skaičių, mažesnių už 2006, kurie nesidalija nei iš 5, nei iš 7?

A) 1147 B) 1204 C) 1261 D) 1318 E) 1375

How many natural numbers less than 2006 are not multiples of 5, nor of 7?

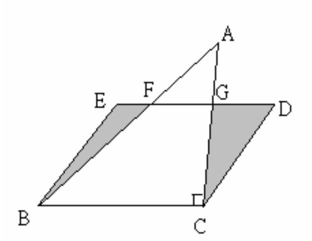
Answer E. There are [2005:5]=401 multiples of 5 and [2005:7]=286 multiples of 7, including [2005:35]=57 common multiples.

Then we are left with 2005-401-286+57=1375 numbers.

Колко са естествените числа, по-малки от 2006, които не се делят нито на 5, нито на 7? Answer E. Има [2005:5]=401 кратни на 5 и [2005:7]=286 кратни на 7, сред които и [2005:35]=57 общи кратни. Остават 2005-401-286+57=1375 числа.

[17] (ES) En la figura de abajo, $BCDE$ es un paralelogramo y AC es perpendicular a BC. Supón que BC=12cm, AC=11cm, y que el área de la región sombreada es 30cm^2 más grande que la del triángulo AFG. ¿Cuál es la longitud de AG?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 5,5



On the figure above, $BCDE$ is a parallelogram and AC is perpendicular to BC. Assume that BC=12cm, AC=11cm and that the shaded area is 30cm^2 more than that of triangle AFG. What is the length of AG?

Answer B. The area of the cited triangle is 66, hence that of the parallelogram is 66+30=96. Its base being 12, its height will be 96:12=8. Then AG=11-8=3(cm).

На горната фигура $BCDE$ е успоредник и AC е перпендикулярна на BC, BC=12cm, AC=11cm и лицето на затъмнената част е с 30cm^2 повече от това на триъгълник AFG. Каква е дължината на AG? Answer B. Лицето на споменатия триъгълник е 66, значи това на успоредника е 66+30=96. Щом основата е 12, височината е 96:12=8. Тогава AG=11-8=3(cm).

[18] (BG) Празен камион тежи 2006kg. Сутринта товарът бил ¾ от пълната маса на натоварения камион. При първата спирка камионът разтоварил 50% от товара. Сега товарът е какъв процент от цялата маса на натоварения камион?

A) 37,5% B) 40,12% C) 50% D) 55% E) 60%

An empty truck weighs 2006kg. This morning the load was three quarters of the total weight of the loaded truck. At the first stop the truck unloaded 50% of the load. Now the load is what percentage of the total weight of the truck?

Answer E. The load has been 3.2006 and after unloading it was reduced to (1,5)2006, which is 60% of its total weight of (2,5)2006(kg).

Answer E. Товарът е бил 3.2006, а след разтоварване (1,5)2006, което е 60% от пълния му товар от (2,5)2006(kg).

[19] (SE) En kvadrat *CDEF* är inskriven i en rätvinklig triangel (*C* ligger i räta hörnet, *AC* och *BC* är kateter). Beräkna kvadratens sida då man vet att AC=30 och BC=45.
A) 15 B) 18 C) 20 D) 21 E) 24
Find the side of a square *CDEF* inscribed in a right triangle of legs AC=30 and BC=45.
Answer B. Let the side of the square be x. By similarity $x/45=(30–x)/30$, whence $2x=3(30–x)$, $5x=90$ and $x=18$.
Квадрат *CDEF* е вписан в правоъгълен триъгълник с катети AC=30 и BC=45. Определете страната на квадрата. Answer B. Нека тя е x. От подобието $x/45=(30–x)/30$, значи $2x=3(30–x)$, $5x=90$ и $x=18$.

[20] (CT) Un rectangle de costats 20 i 15 te un vèrtex situat en el centre d'una circumferència i el vèrtex oposat situat sobre la circumferència. Calculeu la longitud de la corda que passa pels altres dos vèrtexs del rectangle.
A) 26 B) 25 C) 2√(481) D) 2√(471) E) 2√(461)
A rectangle of sides 20 and 15 has a vertex in the centre of a circle and an opposite vertex lying on the circle. Find the length of the chord passing through the other two vertices of the rectangle.
Answer C. The diagonal is 25 (Pythagoras) and the area is 300, so the distance from the centre to the chord is 300:25=12. Hence the length of half the chord has a square equal to $25^2 – 12^2 = 625 – 144 = 481$.
Правоъгълник със страни 20 и 15 има връх в центъра на окръжност и противоположен връх на окръжността. Определете дължината на хордата през другите два върха на правоъгълника. Answer C. Диагоналът е 25 (Питагор) и лицето е 300, значи разстоянието от центъра до хордата е 300:25=12. Значи квадратът на дължината на половината от хордата е $25^2 – 12^2 = 625 – 144 = 481$.

[21] (HR) Koliko postoji prirodnih brojeva n, koji pri dijeljenju broja 2006 s n daju ostatak 30?
A) 16 B) 12 C) 9 D) 8 E) 4
How many natural numbers n have the property that when 2006 is divided by n the remainder is 30?
Answer C. This means that 1976 is divisible by n and n>30. Since 1976=2.2.2.13.19, there are 9 such numbers: 13.4, 13.8; 19.2, 19.4, 19.8; 13.19.x (x=1,2,4,8).
Колко са естествените числа n, такива че ако 2006 се раздели на n, остатъкът е 30? Answer C. Това значи, че 1976 се дели на n и n>30. Но 1976=2.2.2.13.19 и има 9 такива числа: 13.4, 13.8; 19.2, 19.4, 19.8; 13.19.x (x=1,2,4,8).

[22] (NL) Binnen een driehoek *ABC* snijden de lijnen *AD*, *BE* en *CF* elkaar in *P*. Gegeven is dat $AP:DP = 3:1$ en $BP:EP = 4:1$. Bepaal de verhouding $CP:FP$.
A) 9:11 B) 7:8 C) 4:5 D) 3:4 E) 1:1
Inside a triangle *ABC*, the cevians *AD*, *BE* and *CF* meet at *P*. Given that $AP:DP = 3:1$ and $BP:EP = 4:1$, find the ratio $CP:FP$.
Answer A. Let S be the area of ΔABC. The area of ΔAPC is then $S/5$ and that of ΔBPC is $S/4$. Then the area of ΔABP is $11S/20$. Thus $CP:FP=9:11$.
В триъгълник *ABC* чевианите *AD*, *BE* and *CF* се пресичат в *P*. Ако $AP:DP = 3:1$ и $BP:EP = 4:1$, намерете съотношението $CP:FP$.
Answer A. Нека S е лицето на ΔABC. Лицето на ΔAPC тогава е $S/5$, а това на ΔBPC is $S/4$. Тогава лицето на ΔABP е $11S/20$. Thus $CP:FP=9:11$.

[23] (PT) Para numerar as paginas de um livro, consecutivamente desde a primeira pagina, são usados 876 algarismos. Quantas paginas tem o livro?
A) 229 B) 292 C) 317 D) 328 E) 418
For numbering the pages of a book, starting from the first page, are used 876 digits. How many pages are there in the book?
Answer D. We need 9 digits for the one-digit numbers and 90.2=180 for the two-digit. We are left with 876-189=687 digits for the three-digit numbers, so they are 687:3=229. In total we have 99+229=328 pages.
За номериране на страниците на една книга, започвайки от първа страница, са използвани 876 цифри. Колко страници има книгата?
Answer D. Има 9 цифри за едноцифрените и 90.2=180 цифри за двуцифрените числа. Остават 876-189=687 цифри за трицифрени числа, които са значи 687:3=229. Общо имаме 99+229=328 страници.

[24] (SI) V trikotniku ABC je višina CD enaka polovici stranice AB. Kolikšna je dolžina stranice AB (v cm), če je ploščina ABC 64cm^2?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 32

In triangle ABC the altitude CD equals half the side AB. Find AB (in cm) if the area of ABC is 64cm^2.

Answer D. If the altitude is x, the base is $2x$ and the area is $x^2=64$, so $x=8$, $2x=16$.

В триъгълник ABC височината CD е равна на половината на AB. Каква е дължината на AB (в см) ако лицето на ABC е 64cm^2? Answer D. Ако височината е x, основата е $2x$ и лицето е $x^2=64$, така че $x=8$, $2x=16$.

[25] (RO)

Numere naturale consecutive 22, 23, 24 au următoarea proprietate: descompunerile lor în factori primi, au **impare** exponenții factorilor: $22=2^{1}11^{1}$, $23=23^{1}$, $24=2^{3}3^{1}$. Care este cel mai mare număr de numere naturale consecutive care au această proprietate?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

The consecutive positive integers 22, 23, 24 have the property that the exponents in their prime decomposition are odd numbers. What is the greatest possible number of consecutive positive integers with that property?

Answer D. It is not possible to have 8 consecutive numbers, for one of them would be divisible by 4 and not by 8. An example of 7 numbers is given by 29, …, 35.

Последователните естествени числа 22, 23, 24 имат свойството, че степените в разлагането им на прости множители са нечетни. Какъв е най-големият възможен брой последователните естествени числа с това свойство?

Answer D. Не можем да имаме 8 такива поредни числа, защото едно от тях би било кратно на 4, но не на 8. Пример за 7 такива числа е 29, …, 35.

[26] (TR) $ABCD$ bir paralelkenar ve AB=9, BC=5 dir. A ve B köşerinden çizilen içaçıortaylar E noktasında; C ve D köşerinden çizilen içaçıortaylar F noktasında kesişmektedir. EF=?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

The parallelogram $ABCD$ has sides AB=9 and BC=5. The angle bisectors of A and B intersect at point E; those of C and D at point F. Find EF=?

Answer B. Continue the lines AE and BE until they meet the lines BC and AD at points K and L, respectively. Then $ABKL$ is a rhombus and $EFDL$ is a parallelogram. Then $EF=DL=AB–AD=4$.

Успоредникът $ABCD$ има страни AB=9 и BC=5. Ъглополовящите на A и B се пресичат в точка E; тези на C и D в точка F. Намерете EF=?

Answer B. Продължете правите AE и BE до пресичането съответно на BC и AD в точки K и L. Тогава $ABKL$ е ромб, а $EFDL$ е успоредник и $EF=DL=AB–AD=4$.

[27] (FI) Reaaliluvut x ja y toteuttavat yhtälöt $x^3 – 3xy^2 = 4$ ja $y^3 – 3yx^2 = \sqrt{11}$. Määritä $x^2 + y^2$.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7.

The reals x and y satisfy the equalities $x^3 – 3xy^2 = 4$ and $y^3 – 3yx^2 = \sqrt{11}$. Find $x^2 + y^2$.

Answer A. $(x^2 + y^2)^3 = (x^3 – 3xy^2)^2 + (y^3 – 3yx^2)^2 = 16 + 11 = 27$, hence $x^2 + y^2 = 3$.

Реалните числа x и y изпълняват равенствата $x^3 – 3xy^2 = 4$ и $y^3 – 3yx^2 = \sqrt{11}$. Намерете $x^2 + y^2$.

Answer A. $(x^2 + y^2)^3 = (x^3 – 3xy^2)^2 + (y^3 – 3yx^2)^2 = 16 + 11 = 27$, значи $x^2 + y^2 = 3$.

[28] (RU) Дана куча камней (веса камней не обязательно равные). Какое наименьшее число камней может быть в куче, если известно, что все камни этой кучи можно разложить на 2006 равных по весу кучек, так и на 2007 равных по весу кучек? (Кучка может состоять и из одного камня.) A) 4011 B) 4012 C) 4013 D) 4014 E) 4015

A pile of stones (of possibly different weight) can be partitioned into 2006 small piles of equal weight, as well as into 2007 small piles of equal weight. What is the least possible number of stones in the big pile? (A small pile can consist of one stone.)

Answer B. A possible pile consists of 2006 stones of 1g each and 2006 stones of 2006g each. For the partition into 2007 small piles, collect all 1g stones into one small pile and let all other small piles consist of one stone. Answer A is not possible, since in this case one of the 2006 small piles would consist of one stone, so the average weight of the 2007 small piles cannot be less, a contradiction.

Купчина камъни (с евентуално различни тегла) може да се раздели на 2006 купчинки с равни тегла, както и на 2007 купчинки с равни тегла. Какъв е най-малкият възможен брой камъни в голямата купчина? (Допускат се и купчинки от един камък.) Answer B. Една възможна купчина се състои от 2006 камъка по 1g и 2006 камъка по 2006g. За разделяне на 2007 купчинки, съберете еднограмовите камъни в една купчинка и нека останалите купчинки са от по един камък. Отговор А е невъзможен, защото една от 2006-те купчинки ще е от един камък и тогава средното тегло на 2007-те купчинки няма как да бъде по-малко, което е противоречие.

[29] (AL) Vargu a_1, a_2, a_3, … i numrave racionalë plotëson kushtin $(2n+1)a_n=(2n-1)a_{n-1}+3n^2$ për të gjithë numrat e plotë pozitive n. Të gjendet a_{200} ne qofte se dihet se $a_1=1$.
A) 19900 B) 19950 C)20000 D) 20050 E) 20100
The sequence a_1, a_2, a_3, … of rationals satisfies the identity $(2n+1)a_n=(2n-1)a_{n-1}+3n^2$ for all positive integers n. Find a_{200} if $a_1=1$.
Answer E. Checking the first several terms gives $a_2=(3.1+3.4)/5=3$, $a_3=(5.3+3.9)/7=6$, $a_4=(7.6+3.16)/9=10$ so we suggest that this is the sequence of triangular numbers $a_n=n(n+1)/2$, which is easily checked by induction. Now $a_{200}=100.201=20100$.
Редицата a_1, a_2, a_3, … от рационални числа изпълнява равенството
$(2n+1)a_n=(2n-1)a_{n-1}+3n^2$ за всяко естествено n. Намерете a_{200} , ако $a_1=1$.
Answer E. Намираме $a_2=(3.1+3.4)/5=3$, $a_3=(5.3+3.9)/7=6$, $a_4=(7.6+3.16)/9=10$, така че може да се предположи, че това е редицата от триъгълни числа $a_n=n(n+1)/2$, което се доказва лесно по индукция. Сега $a_{200}=100.201=20100$.

[30] (HU) Hány megoldása van az $[x/4] = [x/5] + 2006$ egyenletnek az egész számok körében?
A) 5 B) 9 C) 20 D) 401 E) 501
How may integer solutions does the equation $[x/4] = [x/5] + 2006$ have?
Answer C. Denote $x=5k+r$, $r=0;1;2;3;4$. The equation becomes
$[(5k+r)/4] = [(5k+r)/5] + 2006$
$k + [(k+r)/4] = k + [r/5] + 2006$
$[(k+r)/4] = 2006$
$4.2006 \le k+r \le 4.2006 + 3$,
which has 4 solutions for $k+r$; as r is one of the numbers 0;1;2;3;4, we get 5.4=20 solutions for $x=5k+r$.
Колко цели решения има уравнението $[x/4] = [x/5] + 2006$?
Answer C. Да представим $x=5k+r$, $r=0;1;2;3;4$. Уравнението става
$[(5k+r)/4] = [(5k+r)/5] + 2006$
$k + [(k+r)/4] = k + [r/5] + 2006$
$[(k+r)/4] = 2006$
$4.2006 \le k+r \le 4.2006 + 3$,
което има 4 решения за $k+r$; но r е едно от числата 0;1;2;3;4, така че имаме 5.4=20 решения за $x=5k+r$.