Условия и решения на задачите от 24. БОМ, 2007 г.

Задача 1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, в който $AB = BC = CD$, $AC \neq BD$ и E е пресечната точка на диагоналите. Да се докаже, че $AE = DE$ тогава и само тогава, когато $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 120^\circ$.

Албания

Решение. Не е трудно да се съобрази, че $AB \| CD$ е невъзможно. Нека AB и CD се пресичат в точка M, а симетралите на AC и BD се пресичат в точка N. Тогава $\triangle NDC \cong NBA$ по трети признак и значи $\sphericalangle ABN = \sphericalangle NDM$ и $\sphericalangle DCN = \sphericalangle BAN$. Следователно четириъгълниците $DNBM$ и $ANCM$ са вписани. Нека P и Q са средите съответно на BD и AC. Тогава четириъгълникът $PENQ$ е вписан. Да отбележим още, че

$$\frac{DE}{\sin \sphericalangle DCE} = \frac{CD}{\sin \sphericalangle DEC} = \frac{AB}{\sin \sphericalangle BEA} = \frac{AE}{\sin \sphericalangle ABE} \tag{1}$$

($\Leftarrow$) Нека $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 120^\circ$. Тогава $\sphericalangle AMD = 60^\circ$ и $\sphericalangle DNB = 120^\circ$ от вписания $DNBM$. Следователно $\sphericalangle DNC = \sphericalangle BNC = 60^\circ$, откъдето $\sphericalangle PEQ = \sphericalangle CEB = 120^\circ$ и четириъгълникът $BECM$ е вписан. Получаваме $\sphericalangle DCE + \sphericalangle ABE = 180^\circ$, т.е. $\sin \sphericalangle DCE = \sin \sphericalangle ABE$. Сега от (1) следва исканото $AE = DE$.

($\Rightarrow$) Нека $AE = DE$. От (1) получаваме $\sin \sphericalangle DCE = \sin \sphericalangle ABE$. Лесно се вижда, че ако $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ABE$, то $ABCD$ е равнобедрен трапец и $BD = AC$, което противоречи на условието. Следователно $\sphericalangle DCE + \sphericalangle ABE = 180^\circ$, т.е. $BECM$ е вписан. Да означим $\sphericalangle BMC = \alpha$. Тогава $\sphericalangle PEQ = \sphericalangle BEC = 180^\circ - \alpha$ и $\sphericalangle PNQ = \alpha$. Оттук $\sphericalangle DNB = 2\sphericalangle PNQ = 2\alpha$ и от вписания четириъгълник $BMDN$ намираме $\alpha = 60^\circ$. Следователно $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 180^\circ - \alpha = 120^\circ$.

Задача 2. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такива, че

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y \quad \text{за всички } x, y \in \mathbb{R}.$$

България[1]

Решение. Ясно е, че функцията $f \equiv 0$ е решение. Нека $f \not\equiv 0$, да изберем x_0 така, че $f(x_0) \neq 0$ и да положим $\widetilde{y} = \dfrac{y}{4f(x_0)}$ за всяко y. Тогава полагането $x = x_0$ и $y = \widetilde{y}$ дава

$$y = f(f(x_0) + \widetilde{y}) - f(f(x_0) - \widetilde{y}). \tag{1}$$

[1] Задачата е предложена от Н. Николов

За произволни y_1, y_2 полагаме в (1) $\dfrac{y_1 - y_2}{2}$ за y и получаваме

$$\frac{y_1 - y_2}{2} = f(f(x_0) + \widetilde{\frac{y_1 - y_2}{2}}) - f(f(x_0) - \widetilde{\frac{y_1 - y_2}{2}}).$$

С други думи, за произволни y_1, y_2 съществуват $x_1(y_1, y_2) = f(x_0) + \widetilde{\frac{y_1-y_2}{2}}$, $x_2(y_1, y_2) = f(x_0) + \widetilde{\frac{y_1-y_2}{2}}$, такива, че $\dfrac{y_1 - y_2}{2} = f(x_1) - f(x_2)$, т.е.

$$2f(x_1) - y_1 = 2f(x_2) - y_2. \tag{2}$$

От друга страна, замествайки y с $f(x) - y$ в даденото условие, получаваме

$$f(2f(x) - y) = f(y) + 4f(x)(f(x) - y), \text{ т.е.}$$
$$f(y) - y^2 = f(2f(x) - y) - (2(f(x) - y)^2. \tag{3}$$

Сега за произволни y_1, y_2 полагаме в (3) $x_1(y_1, y_2)$ и $x_2(y_1, y_2)$ съответно и намираме

$$f(y_1) - y_1^2 = f(2f(x_1) - y_1) - (2(f(x_1) - y_1)^2$$

и

$$f(y_2) - y_2^2 = f(2f(x_2) - y_2) - (2(f(x_2) - y_2)^2$$

Тогава (2) дава $f(y_1) - y_1^2 = f(y_2) - y_2^2$. Тъй като това е вярно за произволни y_1, y_2, заключаваме, че $f(x) - x^2 = \text{const}$ за всяко x, откъдето $f(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Лесно се проверява, че такава функция удовлетворява условието.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n, за които съществува пермутация σ на множеството $\{1, 2, ..., n\}$, такава, че числото

$$\sqrt{\sigma(1) + \sqrt{\sigma(2) + \sqrt{\cdots + \sqrt{\sigma(n)}}}}$$

е рационално.

Сърбия

Решение. (Цветелина Ценева) Очевидно $n = 1$ е решение на задачата. Нека $n \geq 2$, $k^2 + 1 \leq (k+1)^2$ за някое $k \in \mathbb{N}$ и да означим

$$\sqrt{\sigma(i) + \sqrt{\sigma(i+1) + \sqrt{\cdots + \sqrt{\sigma(n)}}}} = a_i$$

за $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогава $a_{i+1} = a_i^2 - \sigma(i)$ за $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и тъй като $a_1 \in \mathbb{Q}$ по условие, последователно получаваме, че числата $a_2, a_3, \ldots, a_n$ са рационални. Сега от $a_n \in \mathbb{Q}$ следва, че $a_n \in \mathbb{N}$ и последователно заключаваме, че числата $a_2, a_3, \ldots, a_n$ са естествени.

Да допуснем, че $k \geq 2$. Тогава $a_n = \sqrt{\sigma(n)} \leq \sqrt{n} \leq k+1 < 2k$ и отново последователно доказваме неравенствата $a_i = \sqrt{\sigma(i) + a_{i+1}} < \sqrt{n+2k} < 2k$ (последното е еквивалентно на $k^2 + 4k + 1 < 4k^2$). Но $\sigma(j) = k^2 + 1$ за някое $j \neq n$ и следователно за $a_j^2 = \sigma(j) + a_{j+1}$ имаме оценките

$$k^2 + 1 < a_j^2 < k^2 + 1 + 2k = (k+1)^2,$$

т.е. a_j^2 е между два точни квадрата, което е невъзможно.

Следователно $k = 1$, т.е. $2 \leq n \leq 4$. Не е трудно да се провери, че само $n = 3$ дава решение. Окончателно, търсените стойности са $n = 1$ и $n = 3$.

Задача 4. Нека $n \geq 3$ е естествено число и C_1, C_2 и C_3 са контурите на три изпъкнали n-ъгълника в равнината, като е известно, че сеченията $C_1 \cap C_2$, $C_2 \cap C_3$ и $C_3 \cap C_1$ са крайни. Да се намери максималният брой точки в множеството $C_1 \cap C_2 \cap C_3$.

Турция

Решение. Нека A и B са две последователни (по посока на часовниковата стрелка) точки от сечението $C_1 \cap C_2 \cap C_3$. Да разгледаме частта на C_i, $i = 1, 2, 3$, заключена между A и B. Ако някои две от тези части едновременно не съдържат върхове на съответните n-ъгълници, то отсечката AB е в сечението им, което противоречи на условието. Следователно поне две от тези части съдържат върхове и не съдържат отсечката AB.

Тъй като двойките последователни точки са $|C_1 \cap C_2 \cap C_3|$ на брой, имаме поне $2|C_1 \cap C_2 \cap C_3|$ върха на трите n-ъгълника, т.е.

$$|C_1 \cap C_2 \cap C_3| \leq \left[\frac{3n}{2}\right].$$

Предлагаме на читателите сами да конструират пример, при който получената горна граница се достига, започвайки с правилни n-ъгълници C_1 и C_2 с общ център, чиито пресечни точки образуват правилен $2n$-ъгълник, и определяйки C_3 по подходящ начин.