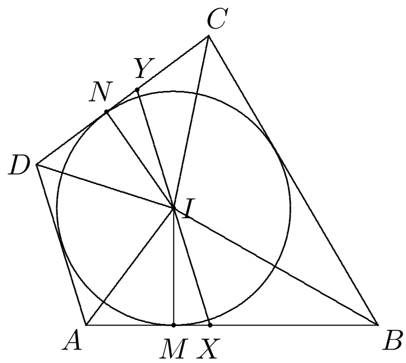
56. Национална олимпиада по математика

Първи ден, 12 май 2007 г.

Задача 1. В четириъгълник $ABCD$, за който $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC > 180^\circ$ е вписана окръжност с център I. През I е прекарана права, която пресича страните AB и CD съответно в точки X и Y така, че $IX = IY$. Да се докаже, че $AX.DY = BX.CY$.

Решение. Нека M и N са допирните точки на вписаната окръжност със страните AB и CD. От условието $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC > 180^\circ$ следва, че $AB \nparallel CD$ и $\sphericalangle MIN < 180^\circ$. Освен това, от $IM = IN$, $\sphericalangle IMX = \sphericalangle INY$ и $IX = IY$, следва, че $\triangle IMX \cong \triangle INY$, откъдето $\sphericalangle IYN = \sphericalangle IXM$. Ако $X \in BM$ и $Y \in DN$ (или $X \in AM$ и $Y \in CN$), то $\sphericalangle IYN = \sphericalangle IXM$ означава, че $AB \parallel CD$, което не е вярно. Следователно разположението на точките X и Y е както е показано на чертежа. От четириъгълника $AXYD$ имаме



$$\sphericalangle AXI = \sphericalangle DYI = 180^\circ - \sphericalangle \frac{A}{2} - \sphericalangle \frac{D}{2},$$

откъдето намираме $\sphericalangle AIX = \sphericalangle \dfrac{D}{2}$ и $\sphericalangle DIY = \sphericalangle \dfrac{A}{2}$. Следователно $\triangle AIX \sim \triangle IDY$, откъдето следва, че $AX.DY = IY.IX$. Аналогично $\triangle BIX \sim \triangle ICY$, т.е. $BX.CY = IY.IX$. Окончателно $AX.DY = BX.CY$.

Задача 2. Да се намери най-голямото естествено число n, за което могат да се изберат 2007 различни естествени числа от интервала $[2.10^{n-1}, 10^n)$ такива, че за всеки две естествени числа i, j, за които $1 \le i < j \le n$ съществува число от избраните $\overline{a_1a_2\dots a_n}$, за което $a_j \ge a_i + 2$.

Решение. Да разгледаме 2007 числа с исканото свойство. Да увеличим с едно всички четни цифри в тези числа. Ако a_i и a_j са с еднаква четност, то неравенството е изпълнено и след увеличаването на четните цифри с 1. Ако a_i и a_j са с различна четност, то от $a_j \ge a_i + 2$ следва $a_j > a_i + 2$ и следователно неравенството е изпълнено и след увеличаването на четните цифри с 1. Ясно е, че получените числа (някои от тях може и да са равни) удовлетворяват условието на задачата.

Сега да запишем числата едно под друго така, че да получим таблица от 2007 реда и n стълба. Тъй като всяка цифра в първия стълб на получената таблица е най-малко 3, то във всеки от останалите стълбове има поне една цифра по-голяма от 3. Това означава, че в таблицата няма стълбове, съставени само от 1 и 3. Тъй като броят на стълбовете, съставени от $1, 3, 5, 7, 9$ е 5^{2007}, а броят на стълбовете, съставени от 1 и 3 е 2^{2007}, то в таблицата има най-много $1 + 5^{2007} - 2^{2007}$ стълба, т.е. $n \le 1 + 5^{2007} - 2^{2007}$.

Ще конструираме таблица с исканото свойство и с 2007 реда и $1 + 5^{2007} - 2^{2007}$ стълба по следния начин:

1. На първия ред записваме последователно 5^{2006} цифри 1, след това 5^{2006} цифри 3 и т.н. 5^{2006} цифри 9. На втория ред под всяка от тези цифри записваме последователно по 5^{2005} цифри $1, 3, 5, 7, 9$ и т.н. до последния ред. Да разгледаме стълбове с номера i и j за $i < j$. Ясно е, че ако a_i и a_j са първите различни цифри (от горе на долу) в тези два

стълба, то $a_j > a_i$, което означава, че $a_j \geq a_i + 2$. Следователно конструираната таблица има 5^{2007} стълба и изпълнява условието на задачата.

2. Изтриваме всички стълбове, съставени само от цифри 1 и 3. Получаваме таблица с $5^{2007} - 2^{2007}$ стълба.

3. Прибавяме първи стълб, съставен само от цифрата 3. Получаваме таблица с $1 + 5^{2007} - 2^{2007}$ стълба, която изпълнява условието на задачата.

Следователно търсеното число е $n = 1 + 5^{2007} - 2^{2007}$.

Задача 3. Да се намери най-малкото естествено число n, за което числото $\cos\dfrac{\pi}{n}$ не може да се представи във вида $p + \sqrt{q} + \sqrt[3]{r}$, където p, q и r са рационални числа.

Решение. Ще докажем, че $n = 7$. Имаме, че

$$\cos\pi = -1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Освен това, от $0 = \cos\dfrac{3\pi}{5} + \cos\dfrac{2\pi}{5}$, следва, че $x_5 = \cos\dfrac{\pi}{5}$ е корен на уравнението $0 = 4x^3 - 3x + 2x^2 - 1 = (x+1)(4x^2 - 2x - 1)$, откъдето $x_5 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Остава да покажем, че $x_7 = \cos\dfrac{\pi}{7}$ няма дадения вид. Понеже $0 = \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7}$, следва, че x_7 е корен на

$$0 = 2(2x^2-1)^2 - 1 + 4x^3 - 3x = (x+1)(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1),$$

т.е. x_7 е нула на полинома $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$. Сега да допуснем, че $x_7 = p + \sqrt{q} + \sqrt[3]{r}$, където $q \geq 0, p, r \in \mathbb{Q}$. Тогава x_7 е нула на полинома

$$Q(x) = (x - p - \sqrt{q})^3 - r$$

с коефициенти от $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$, т.е. от вида $a + b\sqrt{q}$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Понеже коефициентът пред x е неотрицателен, то $P \neq 8Q$. Тогава $P = 8Q + R$, където R е полином от степен 1 или 2 с коефициенти от $\mathbb{Q}[\sqrt{q}]$ и $R(x_7) = 0$. Ако $\deg R = 1$, то $x_7 \in \mathbb{Q}[\sqrt{q}]$. Ако $\deg R = 2$ и R не дели P, то x_7 е нулата на остатъка на P при деление на R, т.е. отново $x_7 \in \mathbb{Q}[q]$. Ако $\deg R = 2$ и R дели P, то нулата на $\dfrac{P}{R}$, която е от $\mathbb{Q}[q]$, е нула и на P. И така, P има нула от $\mathbb{Q}[q]$. Тази нула е нула на полином от степен 1 или 2 с рационални коефициенти. Подобно на по-горе следва, че P има рационална нула. Тя трябва да е измежду числата $\pm 1, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{4}, \pm\dfrac{1}{8}$ и директна проверка води до противоречие.

Забележки. а) Известно е, че степента на минималният полином на $\cos\dfrac{\pi}{n}$ при $n \geq 2$ е равна на $\dfrac{\varphi(2n)}{2}$, където φ е функцията на Ойлер.

б) Следвайки горното решение, може да се докаже, че ако полиномът $P(x) = 8x^3 + ax^2 + bx + 1$, $a, b \in \mathbb{Z}$, има нула от вида $p + \sqrt{q} + \sqrt[3]{r}$, $q \geq 0, p, r \in \mathbb{Q}$, но няма рационална нула, то $a = -12, b = 6$, т.е. $P(x) = (2x-1)^3 + 2$.

Задачите са предложени от: Задача 1. – Емил Колев и Александър Иванов; Задача 2. – Александър Иванов и Емил Колев; Задача 3. – Николай Николов и Олег Мушкаров.

56. Национална олимпиада по математика

Втори ден, 13 май 2007 г.

Задача 4. Нека k, $k > 1$ е дадено естествено число. Множество S от естествени числа се нарича *добро*, ако всички естествени числа могат да се оцветят в k цвята така, че никое число от S не може да се представи като сбор на две различни естествени числа, които са оцветени в един и същи цвят. Да се намери най-голямото естествено число t, за което множеството

$$S = \{a + 1, a + 2, a + 3, \ldots, a + t\}$$

е добро за всяко естествено число a.

Решение. Ще докажем, че търсеното число е $t = 2k - 2$.

Да разгледаме множеството $S = \{3, 4, \ldots, 2k, 2k + 1\}$. Сборът на всеки две от числата $1, 2, \ldots, k + 1$ е число от S и тъй като измежду $1, 2, \ldots, k + 1$ има две едноцветни, то S не е добро множество. Тъй като $|S| = 2k - 1$, то $t \leq 2k - 2$.

Остава да покажем, че множеството $S = \{a + 1, a + 2, \ldots, a + 2k - 2\}$ е добро за всяко число a.

1. Нека a е нечетно число. Да оцветим числата $1, 2, \ldots, \dfrac{a+1}{2}$ в първия цвят, а всяко от числата $\dfrac{a+2s-1}{2}$ за $s = 2, 3, \ldots, k$ в цвят s. Нека всички числа, по-големи от $\dfrac{a+2k-1}{2}$ са също в цвят k. Лесно се вижда, че сборът на две едноцветни числа не е елемент на S.

2. Нека a е четно число. Да оцветим числата $1, 2, \ldots, \dfrac{a}{2}$ в първия цвят, а всяко от числата $\dfrac{a+2s-2}{2}$ за $s = 2, 3, \ldots, k$ в цвят s. Нека всички числа, по-големи от $\dfrac{a+2k-2}{2}$ са също в цвят k. Лесно се вижда, че сборът на две едноцветни числа не е елемент на S.

Задача 5. Да се намери най-малкото число m така, че с всеки пет равностранни триъгълника със сума на лицата m може да се покрие равностранен триъгълник с лице 1.

Решение. Ще докажем, че $m = 2$. Първо ще покажем, че $m \geq 2$. Достатъчно е за всяко $s \in (0, 1)$ да намерим пет равностранни триъгълника със сумата на лицата $> 2s$, които не могат да покрият равностранен $\triangle ABC = \Delta$ с лице 1. Нека $A_1B_1C_1$ е равностранен триъгълник с лице $(1+s)/2$ и върхове върху съответните страни на Δ. Нека за определеност $2BA_1 \leq BC$. Очевидно съществуват три равностранни триъгълника, които не могат покрият коя да е от отсечките BA_1, CB_1 и AC_1. Тогава тези триъгълници и два равностранни триъгълника Δ_1 и Δ_2 с лица s не могат да покрият Δ. В противен случай Δ_1 и Δ_2 трябва да покрият точки от горните три отсечки и следователно един от тях, например Δ_1, ще покрие точки от две от тях, да кажем $D \in A_1B$ и $E \in B_1C$. Тъй като $S_{A_1B_1C_1} \geq \dfrac{1}{3}$, то $\not\sphericalangle A_1B_1C \geq 90^\circ$ (докажете!) и значи страната на Δ_1 е поне $DE \geq A_1B_1$. Следователно $S_{\Delta_1} \geq S_{A_1B_1C_1}$, което е противоречие.

Сега ще докажем, че от всеки пет равностранни триъгълника с лица a^2, b^2, c^2, d^2 и e^2, за които $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 2$, има четири, които могат да покрият Δ. Нека $a \geq b \geq c \geq d \geq e > 0$. Ако $a \geq 1$, то триъгълникът с лице a^2 покрива Δ. В противен случай $b + c > 1$. Това е очевидно при $c > 1/2$ (защото $b \geq c$), а иначе

$$b^2 = 2 - a^2 - c^2 - d^2 - e^2 > 1 - 3c^2 \geq (1 - c)^2.$$

Тогава триъгълниците с лица a^2, b^2 и c^2, поставени стандартно във върховете на Δ, ще се пресичат два по два. Те не покриват Δ, ако $f = 2 - a - b - c > 0$ и остава равностранен триъгълник с лице f^2. Трябва да покажем, че $d \geq f$. Това е очевидно при $d > 1/2$ (защото $a, b, c \geq d$), а иначе от $a, b, c < 1$ следва, че

$$d \geq 2d^2 \geq d^2 + e^2 = 2 - a^2 - b^2 - c^2 > 2 - a - b - c = f.$$

Забележка. Ще отбележим, че от всеки четири равностранни триъгълника със сума на лицата 2 има три, които могат да покрият Δ. За целта покажете, че ако $1 > a \geq b \geq c > 0$ и $a^2 + b^2 + 2c^2 \geq 2$, то $a + b + c > 2$. Освен това, произволен краен брой равностранни триъгълници със сума на лицата 4 могат да покрият Δ (докажете!).

Задача 6. Нека $f(x)$ е полином от четна степен с цели коефициенти и старши коефициент 1. Известно е, че съществуват безбройно много цели числа x, за които $f(x)$ е точен квадрат на естествено число. Да се докаже, че съществува полином $g(x)$ с цели коефициенти, за който $f(x) = g^2(x)$.

Решение. Нека $n = 2k$ и $f(x) = x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \cdots + a_1x + a_0$, където a_i са цели числа. Ще докажем, че $f(x)$ може да се представи във вида

$$f(x) = (x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1x + b_0)^2 + r(x),$$

където $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ рационални числа, а $r(x)$ е полином с рационални коефициенти от степен най-много $k-1$. Наистина, коефициентът пред x^{k+t} за $t = k-1, k-2, \ldots, 1, 0$ на полинома $(x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1x + b_0)^2$ има вида $c_{k+t} = 2b_t + \sum_{i=1}^{k-1-t} b_{t+i}b_{k-i}$. По индукция лесно определяме стойностите на $b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_1, b_0$ така, че $c_{k+t} = a_{k+t}$ за $t = k-1, k-2, \ldots, 1, 0$. След това определяме коефициентите на $r(x)$.

Ако $f(x) = y^2$ има безбройно много решения, за които $x < 0$, то $f_1(x) = y^2$ за $f_1(x) = f(-x)$ има безбройно много решения, за които $x > 0$. Следователно можем да приемем, че $f(x) = y^2$ има безбройно много решения, за които $x > 0$. Тъй като $(x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1x + b_0)^2 + r(x) = y^2$ има безбройно много решения, след привеждане под общ знаменател на рационалните числа $b_{k-1}, \ldots, b_1, b_0$, ще получим $h^2(x) + M^2r(x) = (My_x)^2$, където M е НОК на знаменателите на b_i, $0 \leq i \leq k-1$ и $h(x)$ е полином с цели коефициенти и старши коефициент M. Да допуснем, че $r(x)$ не е тъждествено равен на нула (ако $b_i = 0$ за всяко i, $0 \leq i \leq k-1$, приемаме, че $M = 1$).

1 случай. Нека старшият коефициент на $r(x)$ е положителен. Тогава за достатъчно големи x имаме $(My_x)^2 > h^2(x)$, откъдето $(My_x)^2 \geq (h(x)+1)^2$. Следователно $h^2(x) + M^2r(x) \geq (h(x)+1)^2$, т.е. $2h(x) \leq M^2r(x) - 1$, което е невъзможно за големи стойности на x, понеже степента на $h(x)$ е k, а степента на $r(x)$ е $k-1$.

2 случай. Нека старшият коефициент на $r(x)$ е отрицателен. Тогава за достатъчно големи x имаме $(My_x)^2 < h^2(x)$, откъдето $(My_x)^2 \leq (h(x)-1)^2$. Следователно $h^2(x) + M^2r(x) \leq (h(x)-1)^2$, т.е. $2h(x) \leq -M^2r(x) + 1$, което отново е невъзможно за големи стойности на x.

Следователно $r(x)$ е тъждествено равен на нула, т.е. $f(x) = (x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1x + b_0)^2$. Тъй като $f(x)$ е с цели коефициенти, то и полиномът $x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1x + b_0$ е с цели коефициенти (следва от добре известната лема на Гаус).

Задачите са предложени от: Задача 4. – Емил Колев и Александър Иванов; Задача 5. – Николай Николов и Олег Мушкаров; Задача 6. – Александър Иванов и Емил Колев.