Национално Състезание по Математика за Ученици от Профилирани Гимназии и Паралелки на СОУ с Чуждоезиков Профил

Област: Математика

Вид на състезанието: Национално; Индивидуално; 3 задачи с класическо решение.

Предназначение: За ученици от профилирани гимназии и паралелки на СОУ с чуждоезиков профил.

Възраст на участниците: 15 – 18 години;

Училищна степен: Гимназия: от 8 до 12 клас;

Брой на участниците през последните 3 години: 350 годишно.

История на състезанието: Създадено през 1998 година по инициатива на експерти по математика (Татяна Ичева, Николай Райков и др.) с цел включване на ученици от езиковите гимназии в състезания по математика. Главни организатори на състезанието са СМБ, РИО на МОН – Ловеч и МОН.

Финансиране на състезанието: Спонсорирано от МОН и такси правоучастие.

Задачи от състезанието:

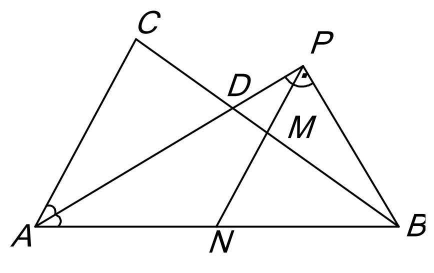
10то Състезание – Ловеч, Април 2007

ОСМИ КЛАС

1. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които уравненията $(1-x)^2-(a-2)^2-a(a-x-1)=3-(a-x)(a+x)$ и $3ax-1=x-\left|4x(3a+x)-(3a+2x)^2\right|$ са еквивалентни.

Решение. Опростяваме най-напред израза под знака за абсолютна стойност. Имаме $4x(3a+x)-(3a+2x)^2=12ax+4x^2-9a^2-12ax-4x^2=-9a^2$ и понеже $\left|-9a^2\right|=9a^2$, второто уравнение се опростява до $(3a-1)x=1-9a^2=(1-3a)(1+3a)$. При $3a-1=0$ всяко x е решение на това уравнение, а при $3a-1\neq 0$ само $x=-1-3a$ е решение. След опростяване първото уравнение добива вида $(a-2)x=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)$.
Ако $a=2$ всяко x е решение, но тогава $3a-1\neq 0$. При $a\neq 2$ решение е само $x=a-3$.
Следователно уравненията са еквивалентни само когато $-1-3a=a-3$, т.е. при $a=\dfrac{1}{2}$.

2. Нека M и N са съответно средите на страните BC и AB на триъгълника ABC и точката D лежи на страната BC. Да се докаже, че ако $P=AD\cap MN$, то $AP\perp BP$ тогава и само тогава, когато AD е ъглополовящата на ъгъла CAB.



Решение. Нека $AP\perp BP$. Тогава триъгълникът ABP е правоъгълен и PN е медиана към хипотенузата.

Следователно $PN = AN = BN$, откъдето $\angle PAN = \angle APN$, а освен това $\angle APN = \angle PAC$, защото MN е средна отсечка за триъгълника ABC. Следователно $\angle CAP = \angle PAN$, т.е. AD е ъглополовяща.
Нека AD е ъглополовяща. Тогава от равенството на ъглите $\angle CAP = \angle PAN = \angle APN$ следва, че $AN = PN$, откъдето триъгълникът ABP е правоъгълен.

3. Нека n е естествено число и $d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < \ldots$ са естествените делители на n. Да се намерят всички n, такива че $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

Решение. Очевидно $d_1 = 1$. Ако числото n е нечетно то всичките му делители ще са нечетни и ще получим противоречие, че n е сбор на четен брой нечетни числа, т.е. че е четно. Нека n е четно. Тогава $d_2 = 2$ и едното от числата d_3 и d_4 ще е четно, а другото – нечетно. Понеже квадратите на нечетните числа при деление с 4 дават остатък 1, то следва, че числото n не се дели на 4. Тогава $d_3 = p$ и $d_4 = 2p$, където p е нечетно просто число и $n = 1 + 4 + p^2 + 4p^2 = 5\left(p^2 + 1\right)$, т.е. n се дели на 5 и значи $p = 5$.

Тогава $n = 5.26 = 130 = 1 + 4 + 25 + 100$.

ДЕВЕТИ КЛАС

1. Даден е изразът: $A = \dfrac{\dfrac{\sqrt{b^2 - 2b + 1}}{b} + b\sqrt{b^2 - 2b + 1} + 2 - \dfrac{2}{b}}{\sqrt{b - 2 + \dfrac{1}{b}}}$:

а) Да се опрости A.

б) Да се пресметне числената стойност на A при $b = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} - x_1^3 - x_2^3\right)$, където x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $3x^2 - 9x + 2 = 0$.

Решение. а) $A = \dfrac{\sqrt{(b-1)^2} + b^2\sqrt{(b-1)^2} + 2b - 2}{b\sqrt{\dfrac{(b-1)^2}{b}}} = \dfrac{\left(1 + b^2\right)|b-1| + 2(b-1)}{\sqrt{b}\,|b-1|}$,

При $0 < b < 1,\ A = \dfrac{b^2 - 1}{\sqrt{b}}; b > 1,\ \ A = \dfrac{b^2 + 3}{\sqrt{b}}$.

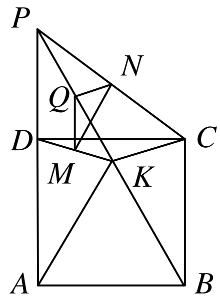
б) От формулите на Виет получаваме последователно;

$x_1 + x_2 = 3, x_1.x_2 = \dfrac{2}{3}$, тогава $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{23}{3}, x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1 + x_2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 - x_1.x_2\right) = 21$.

Заместваме и получаваме $b = \dfrac{5}{12} < 1, A = -\dfrac{119\sqrt{15}}{360}$.

2. Във вътрешността на квадрата *ABCD* е построен равностранен триъгълник *ABK*. Правите *BK* и *AD* се пресичат в точка *P*. Да се докаже, че отсечката, съединяваща средите на отсечките *KD* и *CP*, е равна на половината от страната на квадрата.

Решение. Триъгълникът ABP е правоъгълен и $\angle APB = 30^\circ$ $\Rightarrow$ $AB = \dfrac{1}{2}BP$ $\Rightarrow$ $PK = AB$. Нека M, N, Q са средите съответно на DK, PC, PK. Тогава QM е средна отсечка в ΔDPK $\Rightarrow$ $QM \parallel DP$, $QM = \dfrac{1}{2}DP$, аналогично $QN \parallel KC$, $QN = \dfrac{1}{2}KC$. Освен това $\angle MQN = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ$. ΔDKC е равнобедрен и $\angle KDC = 15^\circ$ $\Rightarrow$ $\angle KDP = 105^\circ$. Тогава $\Delta QMN \sim \Delta DPK$, с коефициент на подобие $\dfrac{1}{2}$, следователно $\dfrac{MN}{PK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}AB$.



3. Да се намерят всички естествени трицифрени числа, такива, че цифрата на стотиците е три пъти по-малка от цифрата на единиците и сборът на това числото и числото, образувано чрез смяна на местата на цифрата на единиците и цифрата на десетиците, се дели на 72 без остатък.

Решение. Да означим цифрата на стотиците на даденото число с a, а цифрата на десетиците с b. Тогава получаваме, че $\overline{ab(3a)} + \overline{a(3a)b} = 72k$ следователно

$233a + 11b = 72k$.(3т) $72 = 8.9, (8,9) = 1$, получената сума трябва да се дели и на 8 и на 9.

$233a + 11b = 232a + 8b + a + 3b \Rightarrow a + 3b = 8p$.

Но a е цифра $\Rightarrow a = 1, 2, 3$ и последователно получаваме:

При $a = 1, b = 5$ и числото е 153; при $a = 2, b = 2$ и числото е 226; при $a = 3, b = 7$ и числото е 379. От делимостта на 9 получаваме, че единственият отговор е 153.

ДЕСЕТИ КЛАС

1. Да се реши уравнението

а) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = \sqrt{2x}$; б) $\left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+8} - \sqrt{x+2} - 1\right) = 1$.

Решение. а) Ако положим $\sqrt{x+4} = u$ и $\sqrt{x-4} = v$, то $u^2 + v^2 = u + v$. Това води до $u.v = 0$, откъдето при $u = 0$ имаме $x = -4$, което не е решение на уравнението, и при $v = 0$ получаваме единствения корен на уравнението $x = 4$.

б) Допустимите стойности на неизвестното са $x \geq -2$. Умножаваме двете страни на уравнението със спрегнатия на $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}$ израз и получаваме $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+2} - 1 = \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}$, откъдето $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} = 1$. Като съобразим, че $\sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} > 0$, преобразуваме уравнението до $2x + 11 - 2\sqrt{x^2 + 11x + 24} = 1$, $x + 5 = \sqrt{x^2 + 11x + 24}$, тъй като $x + 5 > 0$ имаме $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 11x + 24$. Окончателно $x = 1$.

2. В триъгълника ABC точката O е центърът на описаната около триъгълника окръжност, точката M е средата на страната AB. Описаната около триъгълника AMO окръжност пресича страната AC в точка K. Ако $AK = 3, MK = 4$ и $\angle AOM = 45^0$, намерете

а) дължините на страните AC и BC; б) дължината на страната AB.

Решение. От дадения в условието на задачата $\angle AOM = 45^0$ следва, че $\angle ACB = 45^0$ или $\angle ACB = 135^0$. От факта, че *OM* е симетрала на *AB*, следва че *OK* е симетрала на *AC*.

а) Като използваме установеното намираме, че $AC = 2.AK = 2.3 = 6$ и $BC = 2.MK = 2.4 = 8$ (MK – средна отсечка).

б) Прилагаме косинусова теорема за страната *AB* и намираме:

– при $\angle ACB = 45^0$ $AB^2 = 36 + 64 - 2.6.6.\frac{\sqrt{2}}{2}$, $AB = \sqrt{100 - 48\sqrt{2}}$;

– при $\angle ACB = 135^0$ $AB^2 = 36 + 64 + 2.6.6.\frac{\sqrt{2}}{2}$, $AB = \sqrt{100 + 48\sqrt{2}}$.

3. Да се докаже, че ако числата a, b, c са такива, че $a + b + c = 5$ и $ab + bc + ca = 8$, то a, b и c са числа от интервала $\left[1, 2\frac{1}{3}\right]$.

Решение. Записваме дадените зависимости между числата a, b, c като

$b + c = 5 - a$ и $b.c = 8 - a(b + c) = 8 - a(5 - a)$.

Следователно b и c са корените на уравнението $t^2 - (5 - a)t + 8 - a(5 - a) = 0$. Тъй като такива числа съществуват по условие, то дискриминантата на това квадратно уравнение трябва да е неотрицателна, което води до $3a^2 - 10a + 7 \le 0$. Решението на последното неравенство са числата от интервала $\left[1, 2\frac{1}{3}\right]$. Задачата е циклична спрямо числата a, b, c и направеният извод е валиден и за стойностите на b и c.

ЕДИНАДЕСЕТИ КЛАС

1. Даден е четириъгълник *ABCD*, за който $AB = 5\sqrt{2}$, $BC = 5 - \sqrt{3}$, $DC = 2$, $AD = 4$ и $AC = 2\sqrt{7}$.

а) Да се намерят ъглите на четириъгълника.

б) Да се намери дължината на отсечката, съединяваща средите на диагоналите на четириъгълника.

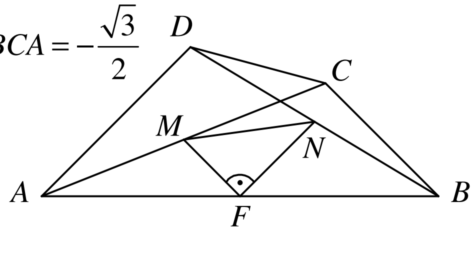
Решение. а) От косинусовата теорема, съответно за $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$, получаваме:

$\cos\angle ABC = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \angle ABC = 45°$; $\cos\angle ADC = -\frac{1}{2} \iff \angle ADC = 120°$;

$\cos\angle ACD = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\angle ACD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$; $\cos\angle ACB = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\angle ACB = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

Тогава

$\cos\angle BCD = \cos\angle BCA.\cos\angle ACD + \sin\angle ACD.\sin\angle BCA = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$\Rightarrow \angle BCD = 150°$.

Оттук $\angle BAD = 45°$.

б) Нека M, N и F са съответно средите на отсечките AC, BD и AB. Тъй като NF и MF

са средни отсечки съответно в ΔABD и ΔABC, то $NF \parallel AD$, $NF=2$ и $MF \parallel BC$, $MF=\frac{5-\sqrt{3}}{2}$. Тогава $\angle MFN = \angle(AC, BC) = 90^\circ$ и от теоремата на Питагор за ΔMFN намираме $MN=\frac{1}{2}\sqrt{44-10\sqrt{3}}$.

2. Написани са всички възможни петцифрени числа, в десетичния запис на които няма други цифри освен 1, 2 или 3.

а) Колко са тези числа?

б) Каква е вероятността от тези числа да се избере едно, сборът от цифрите на което е не по-малък от 12?

Решение. а) $3^5=243$ числа.

б) Първо да отбележим, че ако в числото има повече от една цифра 1, то сборът на останалите е не по-голям от $3.3=9$. Следователно в исканото число цифрата 1 трябва да среща само един път или да я няма. В първия случай цифрите могат да бъдат $1,2,3,3,3$ – общо $\frac{5!}{3!}=20$ на брой числа или $1,3,3,3,3$ – още 5 такива числа. Във втория случай цифрите могат да бъдат: $2,2,2,3,3$ – тези числа са $\frac{5!}{3!.2!}=10$, $2,2,3,3,3$ – получаваме още 10 числа, $2,3,3,3,3$ – 5 числа и 1 число с пет тройки. Така общият брой на тези числа е 51. Следователно вероятността да се избере едно от тях е $\frac{51}{243}=\frac{17}{81}$.

3. В числова редица $a_1, a_2, a_3, \ldots$ всеки член след първия е равен на сбора на цифрите на предходния член на редицата, умножен по 243. Да се докаже , че:

а) Ако $a_1=2007$, то $a_3=a_4=a_5=\ldots$

б) При произволно a_1 от известно място нататък всички членове на редицата са равни на 4 374.

Решение. а) След първия член всички се делят на 243. В частност се делят на 9, следователно сборът от цифрите ми се дели на 9, т.е. те се делят на 243.9. Да забележим, че всяко число е не по-малко от сбора на цифрите си.

б) Нека някой от членовете – a_n има n цифри. Очевидно $a_n \geq 10^{n-1}$. За следващия член имаме $a_{n+1} \leq 243.9n = 2187n$. Тъй като, при $n \geq 6$ имаме $10^{n-1} > 100000 > 2187.6$, $a_n > a_{n+1}$, ако $n=5$ и $a_n \neq 2187.5 = 10925$ и ако $a_n = 10925$, то $a_{n+1}=18.243=6561$, следва, че от известно място ще получим член на редицата с не повече от четири цифри, който се дели на 2187. Това означава, че ще получим някое от числата 2187, $2187.2=4374$, $2187.3=6561$ или $2187.4=8748$. След последното число следва $243.27=6561$, а след първите четири – 4374.

ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС

1. Дадена е функцията $f(x)=16x^2-8mx+m^2-4m+11$, където m е реален параметър.

а) Да се намерят стойностите на m, за които уравнението $f(x)=0$ има точно един реален корен в интервала (0; 1).

б) Да се намерят стойностите на m, за които най-малката стойност на функцията $f(x)$ в интервала [0; 1] е положителна.

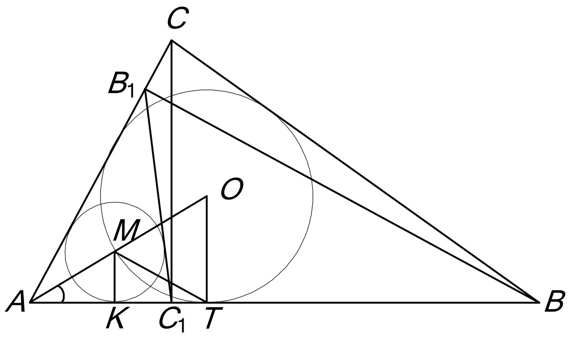
Решение: а) За да има уравнението $f(x)=0$ реални корени трябва дискриминантата $D=16(4m-11)\geq 0$ т.е. $m\geq\frac{11}{4}$. Тъй като $f(0)=m^2-4m+11=(m-2)^2+7>0$ и $f(1)=m^2-12m+27$, то при $m>\frac{11}{4}$, $f(x)=0$ има точно един реален корен в интервала (0; 1) когато $f(1)<0$, откъдето $3<m<9$. При $m=\frac{11}{4}$ коренът на $f(x)=0$ е $\frac{11}{16}\in(0;1)$. Тъй като $\frac{11}{4}<3$, то окончателно имаме $m=\frac{11}{4}$, $m\in(3;9)$.

б) Ако $D<0$, т.е. $m<\frac{11}{4}$, $f(x)>0$ за всяко x и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала [0; 1] е положителна. Нека $D>0$. Тогава корените на $f(x)=0$, трябва да са отрицателни или по-големи от 1, т.е. $f(0)>0$ и $\frac{m}{4}<0$ или $f(1)>0$ и $\frac{m}{4}>1$. Оттук намираме $m>9$. Окончателно $m\in(-\infty;\frac{11}{4})\cup(9;+\infty)$.

2. В остроъгълния триъгълник ABC BB_1 и CC_1 са височините съответно през върховете B и C. Нека M е центърът на вписаната в триъгълника AB_1C_1 окръжност, а T е допирната точка на вписаната в триъгълника ABC окръжност със страната AB. Да се докаже, че $MT=r$, където r е радиуса на вписаната в ABC окръжност.

Решение: Нека O е центърът вписаната в триъгълника ABC окръжност, а K е допирната точка на вписаната в триъгълника AB_1C_1 окръжност със страната AB. Тогава $OT = r$, $MK = r_1$ и M лежи на AO. Тъй като $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ с коефициент на подобие $\cos\alpha$, $\alpha=\angle CAB$, то $r_1=r\cos\alpha$. Но $AT=r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ и $AK=r_1\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=r\cos\alpha\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, откъдето $KT=AT-AK=r\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)=r\sin\alpha$.

От правоъгълния $\triangle MKT$ намираме $MT^2=MK^2+KT^2=(r\cos\alpha)^2+(r\sin\alpha)^2=r^2$, т.е. $MT=r$.

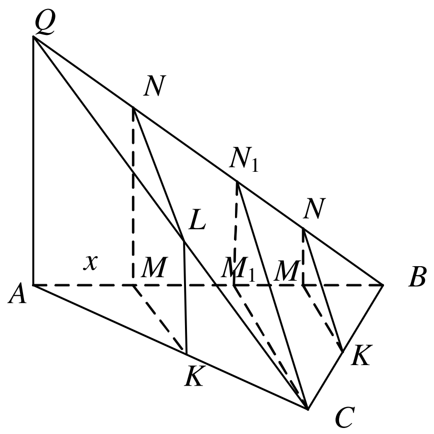


3. В триъгълната пирамида $ABCQ$ околният ръб AQ е перпендикулярен на основата и $AQ = 1$, $AB = 1$, $AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$. През точка M от ръба AB е построена равнина α, перпендикулярна на AB.

а) Да се изрази лицето на сечението на α с пирамидата като функция на $AM = x$.

б) Да се намерят стойностите на x, за които сечението е многоъгълник, описан около окръжност.

Решение: а) Нека равнината α, пресича ръбовете AC, CQ и BQ съответно в точки K, L и N. Точките K и L ще съвпаднат, когато MK е височината през върха C в триъгълника ABC. Тъй като ABC е равнобедрен, то $M = M_1$ ще бъде средата на AB. Следователно при $0 < x < \frac{1}{2}$ сечението ще бъде четириъгълник $MKLN$, а при $\frac{1}{2} \le x < 1$ – триъгълник MKN. Тъй като $\alpha \perp AB$, $AQ \perp (ABC)$, $AQ \parallel \alpha$, $AQ \perp AB$, $AQ \perp AC$, то $MK \perp AB$, $MN \parallel AQ$, $KL \parallel AQ$. Следователно при $0 < x < \frac{1}{2}$, сечението е правоъгълен трапец с основи MN и KL и височина MK, а при $\frac{1}{2} \le x < 1$, правоъгълен триъгълник с катети MN и MK.



I. Нека $S = S_{MKLN}$ и $S^* = S_{MKN}$. Тогава $S = \frac{MN + KL}{2} MK$ и $S^* = \frac{1}{2} MK.MN$.

При $0 < x < \frac{1}{2}$, тъй като $\angle CAB = 45^0$, последователно намираме $MK = AM = x$,

$\frac{MN}{AQ} = \frac{MB}{AB}$, $MN = 1 - x$, $\frac{KL}{AQ} = \frac{KC}{AC} = \frac{AC - AM\sqrt{2}}{AC}$, $KL = 1 - 2x$. Следователно

$S = \frac{1}{2}(2 - 3x)x = x - \frac{3}{2}x^2$.

II. При $\frac{1}{2} \le x < 1$, тъй като $\angle CBA = 45^0$, имаме $MK = MB = 1 - x$, $MN = 1 - x$.

Оттук $S = \frac{1}{2}(1 - x)^2$.

б) Трапецът $MKLN$ е описан около окръжност, когато $MN + KL = MK + LN$. Но $LN = \sqrt{MK^2 + (MN - KL)^2}$, откъдето $MK = \frac{2MN.KL}{MN + KL}$. Като заместим с намереното в а) получаваме $x = \frac{2(1-x)(1-2x)}{2-3x}$ или $7x^2 - 8x + 2 = 0$. Оттук $x_1 = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$ и $x_2 = \frac{4-\sqrt{2}}{7}$.

Тъй като $0 < x < \frac{1}{2}$, а $x_1 > \frac{1}{2}$ и $x_2 < \frac{1}{2}$, то $x = \frac{4-\sqrt{2}}{7}$.

При $\frac{1}{2} \le x < 1$ сечението е триъгълник , който винаги е описан около окръжност.

Резултати: При максимален сбор точки – 30 (по 10т. на задача) през 2007 г. средният резултат на участниците е около 18.

Адрес за кореспонденция: E-mail: t_icheva@abv.bg

Съставил: Чавдар Лозанов