Зимни Математически Състезания 5-8 клас

Област: Математика

Вид на състезанието: Национално; Индивидуално

Регламент на състезанието. Състезанието се провежда в един ден. Темата съдържа 4 задачи. Времето за работа е 4 часа, максималният брой точки е 40.

Класиране. Класирането е самостоятелно за всеки клас.

Време и място на провеждане. В края на януари или началото на февруари в Бургас, Варна, Плевен или Русе.

Предназначение: За ученици от началното и основното училище.

Възраст на участниците: 9 – 15 години;

Училищна степен: Начална и основна степен: от 4 до 8 клас;

Брой на участниците през последните 3 години: 500 – 600 годишно.

История на състезанието: ....
Главни организатори на състезанието са: СМБ, МОН.

Финансиране на състезанието: От такси правоучастие и МОН.

Задачи от състезанието:

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ – БУРГАС, 2007 г.

УСЛОВИЯ И КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ
4. КЛАС

4.1. Двадесет на брой петици са записани една след друга: 5 5 5 ... 5 5. Напишете между някои от цифрите знака „+”, така че полученият сбор да е равен на 1000. (За цифрите, между които не е написан знак, считаме, че образуват едно число.)

Решение. 1. Ако всички събираеми са едноцифрени числа, получаваме $\underbrace{5+5+\cdots+5}_{20}=100\neq 1000$. **(2 т.)**

2. Ако всички събираеми са едноцифрени или двуцифрени числа, получаваме най-много $\underbrace{55+55+\cdots+55}_{10}=550\neq 1000$ (защото 5+5<55). **(2 т.)**

3. Ясно е, че има поне едно трицифрено число 555. Не може да има две трицифрени числа, защото 555 + 555 = 1110 > 1000. **(2 т.)**

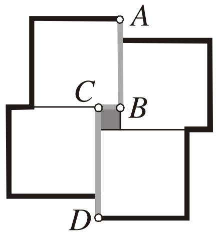
4. Останалите 17 петици са двуцифрени и едноцифрени числа, чийто сбор е $1000-555=445$. Тъй като 8.55 = 440, то 8 от числата са двуцифрени **(2 т.)** и останалата петица е едноцифреното число. **(1 т.)** Окончателно

$$555+\underbrace{55+55+\cdots+55}_{8}+5=1000. \text{ (1 т.)}$$

4.2. Числата 2, 7, 12, 17, 22, 27, ..., 2002, 2007 са записани по следното правило: след всяко число записваме сбора му с 5, докато стигнем до 2007. Колко числа са записани?

Решение. Цифрите на единиците на записаните числа се редуват в последователността 2, 7, 2, 7,..., като очевидно броят на числата с цифра на единиците 2 е равен на броя на числата с цифра на единиците 7. **(3 т.)** Затова ще преброим само тези с цифра на единиците 2. **(1 т.)** Техният брой е равен на броя на числата от 0 до 200 включително **(2 т.)**, а той е 201, защото броенето започва от нулата **(3 т.)**. Следователно търсеният брой е равен на 2.201 = 402. **(1 т.)**

4.3. Фигурата на чертежа е съставена от четири големи квадрата с равни страни и един малък квадрат. Страната на всеки от големите квадрати е 4 пъти по-голяма от страната на малкия квадрат и дължината на начупената линия $ABCD$ е 30 см. Да се намерят лицето и обиколката на получената фигура.



Решение. Дължината на начупената линия $ABCD$ е равна на удвоения сбор на дължините на страните на малкия и големия квадрат. **(2 т.)** Понеже страната на големия квадрат е 4 пъти по-голяма от страната на малкия квадрат, то 10 пъти дължината на малкия квадрат е 30 см, т.е. страната на малкия квадрат е 3 см. **(2 т.)** Следователно страната на всеки от големите квадрати е 12 см. **(1 т.)** Така за лицето S намираме $S = 9 + 4.144 = 585$, $S = 585$ кв. см. **(2 т.)** За всеки от големите квадрати в обиколката участват две от страните му и отсечка равна на страната на малкото квадратче, т.е. $2.12 + 3 = 27$ см. Следователно обиколката е $4.27 = 108$ см. **(3 т.)**

4.4. Запишете върху всяко картонче по една цифра, така че едновременно да са изпълнени шестте равенства.

$$\begin{array}{ccccc}
\square\square & - & \square & = & \square\square \\
\times & & + & & \times \\
\square & + & \square & = & \square\square \\
= & & = & & = \\
\square\square & + & \square & = & \square\square\square
\end{array}$$

Решение. Сборът в третия ред на схемата е “двуцифрено + едноцифрено = трицифрено”. Възможните сборове от този вид са от 91 + 9 = 100 до 99 + 9 = 108 **(1 т.)**. Тогава двуцифреното събираемо има цифра на десетиците 9 **(1 т.)**. От друга страна трицифреното число е произведение на две двуцифрени числа. Възможните произведения от този вид са 10.10 = 100; 10.11 = 110; **(1 т.)** и т.н. Следователно трицифреното число е точно 100 **(1 т.)** и е произведението 10.10. **(1 т.)** Така вече е попълнена най-дясната колона в схемата. Разликата “двуцифрено – едноцифрено” в първия ред е 10, откъдето намираме, че двуцифреното число има цифра на десетиците 1. **(1 т.)**

До тук имаме: **(1 т.)**

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{1}\,\boxed{a} & - & \boxed{a} & = & \boxed{1}\,\boxed{0} \\
\times & & + & & \times \\
\boxed{b} & + & \boxed{10\text{-}b} & = & \boxed{1}\,\boxed{0} \\
= & & = & & = \\
\boxed{9}\,\square & + & \square & = & \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}
\end{array}$$

Остава да се приложи методът на изчерпването, например за стойностите на a.

При $a = 1$, $b = 9$, но равенството във втората колона не е изпълнено.

При $a = 2$, $b = 8$ получаваме решението **(1 т.)**:

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{1}\,\boxed{2} & - & \boxed{2} & = & \boxed{1}\,\boxed{0} \\
\times & & + & & \times \\
\boxed{8} & + & \boxed{2} & = & \boxed{1}\,\boxed{0} \\
= & & = & & = \\
\boxed{9}\,\boxed{6} & + & \boxed{4} & = & \boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0}
\end{array}$$

За останалите стойности на цифрата a аналогично се проверяват равенствата в схемата и се установява, че друго решение няма. **(2 т.)**

5. КЛАС

5.1. Да се реши ребусът $A.ДДA = ДУУМ : A$, където на различни букви съответстват различни цифри.

Решение. Очевидно A, $Д$ и M не са нули. Ако запишем равенството във вида $A.A.ДДA = ДУУМ$, лесно преценяваме, че M е последната цифра в произведението $A.A.A$. Тъй като $M \neq A$, то $A \neq 1; 4; 5; 6; 9$ **(4 т.)**. Тогава:

– при $A = 2$ имаме $M = 8$. Тъй като 992.4 < 4000, то $Д$ е равно на 1 или 3. Но 112.4< 1000 и 332.4=1 328, което не води до решение **(2 т.)**;

– при $A = 3$ имаме $M = 7$. Непосредствено проверяваме, че от произведенията 993.9; 883.9; 663.9; 553.9; 443.9; 223.9 и 113.9 само 223.9 = 2007 удовлетворява условията. **(2 т.)**;

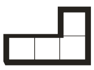
– при $A = 7$ имаме $M = 3$. Тъй като 49. 227 = 11123, то $Д$ е равно на 1. Но 49.117 = 5733, което не води до решение **(1 т.)**;

– при $A = 8$ имаме $M = 2$. Тъй като 64. 228 = 14592, то $Д$ е равно на 1. Но 64.118 = 7522, което не води до решение **(1 т.)**.

5.2. В цирка имали три костюма за клоуни от риза панталони и обувки. Единият костюм бил син, втория – червен, а третия – зелен. Клоуните АН, БАН и ВАН разбъркали костюмите и се появили на арената облечени така: Ризата и обувките на АН били в един и същи цвят. ВАН не носел нищо червено. Обувките на БАН били зелени, а ризата и панталоните в другите два цвята. Какъв е цветът на ризата, панталоните и обувките на всеки от тях?

	Ризи	**Панталони**	**Обувки**
АН	**Ч**	**С З**	**Ч**
БАН	**С**	**Ч**	**З**
ВАН	**З**	**З С**	**С**

Решение. Тъй като обувките на БАН са зелени и ВАН не носел нищо червено, получаваме, че ризата и обувките на АН са червени **(3 т.)**. Остава единствена възможност за обувките на ВАН – сини **(1 т.)**. Тъй като ризата и панталоните на БАН не са зелени са в другите два цвята, то ризата му е синя, а панталоните – червени **(3 т.)**. За ризата на ВАН остана единствена възможност – да е зелена **(1 т.)**. Ако панталоните на АН са сини, то панталоните на ВАН са зелени **(1 т.)**. Ако панталоните на АН са зелени, то панталоните на ВАН са сини **(1 т.)**.

5.3. Плочка Г-тетрамино  се състои от 4 еднакви квадратчета със страна 3 см. Такива плочки са наредени една до друга, както е показано:

а) Ако броят на плочките е 2007, да се намерят лицето и обиколката на получената фигура.

б) Ако обиколката на фигурата е 7002 см, да се намери лицето й.

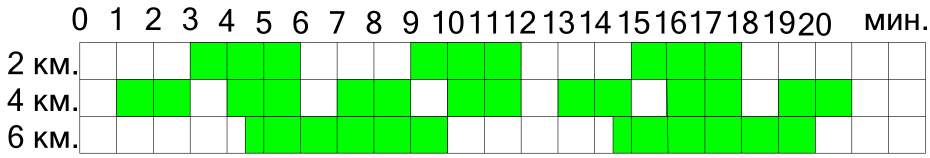
Решение. а) Всяка плочка тетрамино се състои от 4 квадратчета със страна 3 см и има лице 36 кв. см. **(1 т.)** Фигурата се състои от 2007 плочки, следователно лицето й S е $S = 2007.36 = 72\,252$ кв. см. **(2 т.)** За всяка, вътрешна за фигурата плочка тетрамино, в обиколката участват 4 страни на едно малко квадратче, т.е. обиколката на едно малко квадратче – 12 см. **(1 т.)** За всяка от двете външни плочки, участват по 7 отсечки с дължина 3 см, т.е. по 21 см. Така за обиколката P получаваме: $P = 2005.12 + 2.21 = 24\,102$, $P = 24\,102$ см. **(2 т.)**

б) Ако n е броят на плочките, обиколката P е равна на $P = 12.(n-2) + 2.21$. **(2 т.)** От $12.(n-2) + 2.21 = 7002$, последователно получаваме $12.(n-2) = 6960$ и $n = 582$. **(1 т.)** Тогава за лицето имаме $S = 582.36 = 20\,952$ кв. см. **(1 т.)**

5.4. Етапът "Светофар" в рали за минимобили е дълъг 9 км. На втория километър има светофар, който свети 3 мин. зелено и 3 мин. червено и т.н. На четвъртия километър светофарът свети 2 мин.

зелено и 1 мин. червено и т.н. Третият светофар е разположен на шестия километър и свети 4,5 мин. зелено и 5,5 мин. червено и т. н. Всеки минимобил стартира точно в момента, когато и трите светофара светнат едновременно червено, като няма право да спира или да променя скоростта си до финала.
Минимобилът "Еко" стартирал в 10 ч. 45 мин. и изминал етапа, без да нарушава правилата, за възможно най-малкото време. В колко часа́ е финиширал "Еко" и с каква скорост (километри в час) се е движил?

Решение. За да премине успешно 2–я километър, минимобилът трябва да пристигне там между 3–та и 6–та минута; или 9–та и 12–та минута и т.н. от тръгването. **(1 т.)**
Нека "Еко" е преминал покрай първия светофар в първия период. Тогава той, тъй като се движи с постоянна скорост, е бил на 4-я километър между 6-тата и 12-тата минута от старта си. **(1 т.)**
Вторият светофар е светел зелено между 1-та и 3-та мин., между 4-та и 6-та мин. между 7-та и 9-та мин. между 10-та и 12-та мин. от старта на "Еко". Следователно, минимобилът е могъл да премине там според правилата, ако е пристигнал между 7-та и 9-та минута **(2 т.)**, или между 10-та и 12-та минута. **(2 т.)**



В първия случай той би пристигнал при третия светофар между 10,5-та и 13,5-та минута. Но тогава светофарът на 6-я километър е светел червено. Следователно, най-рано "Еко" е пристигнал на 4-я километър в 10-та минута, бил е на 6-я километър в 15-та минута и тъй като третият светофар е светел зелено, продължил и финиширал за 15 мин. + 7,5 мин. в 11 ч. 7 мин. 30 сек. **(2 т.)** Тъй като той е изминал 6 км за 15 мин., то търсената скорост е (60 . 6): 15 = 24 км/ч. **(2 т.)**

6. КЛАС

6.1. В един паркинг броят на червените коли е 25% от всички коли. В продължение на един час от паркинга излизат и влизат някои коли , като в края на часа се оказало, че броят на паркираните коли се е увеличил с 3, а червените коли представляват 12% от всички паркирани коли. Какъв най-малък брой коли са били паркирани първоначално и колко от тях са били червени?

Решение. Да означим с n търсеният брой коли. (**1 т.**) Понеже 25% или иначе казано $\frac{1}{4}$ са били червени, то числото n е кратно на 4. (**3 т.**) От представянето $\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$ следва, че числото $n+3$ се дели на 25. (**3 т.**) Търсим сега число, кратно на 25, такова, че ако извадим от него 3 да се получи число, кратно на 4. **(1 т.)** Измежду естествените числа кратни на 25: 25, 50, 75, 100 ,... най-малкото с исканото свойство е 75. За него разликата 75 – 3 = 72 е кратна на 4, т.е. първоначално са били паркирани 72 коли **(2 т.)**, а от тях 72:4 = 18 са били червени **(1 т.)**.

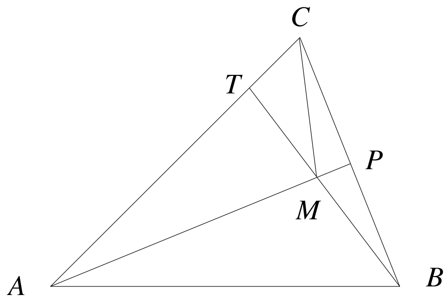
6.2. Да се намерят всички двойки естествени числа *m* и *n*, за които е изпълнено
$1!+2!+3!+\cdots+n!=m^2$.
(с *n*! се означава произведението на естествените числа от 1 до *n*: $n!=1.2.3.\cdots.(n-1).n$)

Решение. Нека $n=1$. Тогава $1!=1=m^2$ и $m=1$. **(1 т.)** Нека $n=2$. Тогава $1!+2!=3=m^2$ и няма естествено число, за което $m^2=3$. **(1 т.)** Нека $n=3$. Тогава $1!+2!+3!=9=m^2$ и $m=3$. **(1 т.)**
Нека $n\geq 4$. Тогава $1!+2!+3!+4!=33$ **(1 т.)**. Освен това 5!, 6!, и т. н. завършват на 0. **(2 т.)** Следователно $1!+2!+3!+4!+\cdots+n!$ завършва на 3. **(2 т.)** Но квадрата на никое естествено число не завършва на 3, т. е. няма естествено число, за което $1!+2!+3!+\cdots+n!=m^2$. **(1 т.)**

Окончателно решения на задачата са двойките (1;1) и (3;3). **(1 т.)**

6.3. В триъгълника *ABC* точка *P* е средата на страната *BC*, а точка *T* е от страната *AC* и $AT = 4TC$. Отсечките *AP* и *BT* се пресичат в точка *M*. Да се намери каква част от лицето на четириъгълника *TMPC* е лицето на триъгълника *CPM*.

Решение. Означаваме лицето $S_{TCM} = S$. Тъй като $AT = 4.TC$, то $S_{ATM} = 4S$ **(1 т.)** и $S_{ACM} = 5S$ **(1 т.)**.



Точка *P* е средата на *BC*, следователно

$$\left.\begin{aligned} S_{APC} &= S_{APB} \\ S_{MPC} &= S_{MPB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{ABM} = S_{ACM} = 5S . \text{ (2 т.)}$$

$S_{ABT} = S_{ABM} + S_{ATM} = 5S + 4S = 9S$ **(1 т.)**,

$S_{ABT} = 4S_{BTC} \Rightarrow S_{BTC} = \dfrac{9}{4}S$ **(1 т.)**.

$S_{BMC} = S_{BTC} - S_{TCM} = \dfrac{9}{4}S - S = \dfrac{5}{4}S$ **(1т.)** $\Rightarrow S_{CPM} = \dfrac{1}{2}S_{BMC} = \dfrac{5}{8}S$ **(1 т.)**.

Тогава $S_{TMPC} = S_{TCM} + S_{CPM} = S + \dfrac{5}{8}S = \dfrac{13}{8}S$ **(1 т.)** и $S_{CPM} = \dfrac{5}{13}S_{TMPC}$ **(1 т.)**.

6.4. На дъската е записано числото 4608. Всяка минута числото от дъската се умножава или дели (само ако делението е възможно без остатък) на 2 или на 3. Резултатът се записва на дъската, а старото число се изтрива. Възможно ли е точно след 33 часа и 27 минути на дъската да е записано числото 27? След най-малко колко минути числото 27 може да се появи на дъската?

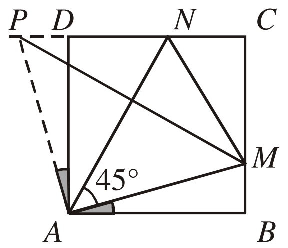
Решение. Забелязваме най-напред, че числото 4608 се разлага на прости множители по следния начин 4608 = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.3.3, т.е. 9 двойки и 2 тройки. **(2 т.)** Общият брой на простите делители е равен на 9 + 2 = 11 – нечетно число. **(2 т.)** След всяка минута броят на тези прости делители се променя с 1 (или в повече, или в по-малко), което показва, че ако в предната минута броят на простите делители е бил нечетен, той става четен и обратно. **(3 т.)** Времето от 33 часа и 27 минути (между впрочем точно 2007 минути) съдържа нечетен брой минути. – **(1 т.)**, т. е. числото на дъската трябва да съдържа четен брой прости делители, а 27 = 3.3.3 е с нечетен брой прости делители. Следователно не е възможно да се достигне това число в исканото време. **(2 т.)** За да се получи 27 трябва от числото 4608 да отделим 9-те двойки и да добавим една тройка. Следователно най-краткия срок е 9 +1 = 10 минути. **(1 т.)**

7. КЛАС

7.1. В 9 часа от пристанище *A* към пристанище *B*, срещу течението на река, което има скорост 3 км/ч, тръгнала моторна лодка. Два часа и двадесет минути след тръгването двигателят на лодката спрял поради повреда и на екипажа били необходими 1 час и 20 минути, за да приведе отново лодката в движение. След повредата двигателят загубил част от мощността си и собствената скорост на лодката се намалила с 25%. Лодката пристигнала в *B* 2 часа и 48 минути след възобновяване на движението. Да се намери собствената скорост на лодката в спокойна вода преди повредата и разстоянието между *A* и *B*, ако разстоянието изминато преди повредата е със 7 км повече от разстоянието, изминато след отстраняването на повредата.

Решение. Нека собствената скорост на лодката преди повредата е *x* км/ч. Тогава скоростта и срещу течението е $x-3$ км/ч. Изминатото до повредата разстояние е $\dfrac{7}{3}(x-3)$ км. **(2 т.)**. След повредата собствената скорост на лодката вече е $\frac{3}{4}x$ км/ч, скоростта срещу течението е $\frac{3}{4}x-3$ км/ч, а изминатото разстояние е $\frac{14}{5}\left(\frac{3}{4}x-3\right)$км. **(2 т.)** Така получаваме уравнението $\frac{7}{3}(x-3)-7=\frac{14}{5}\left(\frac{3}{4}x-3\right)$ **(1 т.)**, чието решение е $x=24$ км/ч **(1 т.)**. До повредата лодката изминала $\frac{7}{3}.21=49$ км **(1 т.)**, а след отстраняването ѝ $\frac{14}{5}\left(\frac{3}{4}.24-3\right)=42$ км **(1 т.)**, но докато се отстранява повредата течението връща лодката 4 км назад **(1 т.)**. Следователно разстоянието от *A* до *B* е $49+42-4=87$ км **(1 т.)**.

7.2. Даден е квадрат *ABCD* със страна *a*. Точките *M* и *N* лежат съответно върху страните *BC* и *CD* и са такива, че $\angle MAN=45°$. Да се намери периметърът на триъгълника *MNC*.



Решение. Нека $AP\perp AM$ ($P\in CD$) **(2 т.)**. Понеже $\angle BAD=\angle MAP$, то $\angle BAM=90°-\angle MAD=\angle MAN$ **(2 т.)**. Освен това $AB=AD$ и $\angle ABM=\angle ADP$. Следователно $\Delta ABM\cong\Delta ADP$ **(2 т.)**, откъдето следва, че $AM=AP$ и $BM=DP$ **(1 т.)**. От $\angle PAN=90°-\angle MAN=45°$ намираме, че *AN* е ъглополовяща в равнобедрения триъгълник *AMP*, откъдето получаваме, че *AN* е симетрала на *MP*. **(1 т.)** Следователно $PN=MN$. От $PN=PD+DN=BM+DN$ намираме $MN=BM+DN$. За периметъра на триъгълника *MNC* получаваме $P_{MCN}=MC+CN+NM=MC+CN+DN+BM=BC+CD=2a$, или $P_{MNC}=2a$. **(2 т.)**

7.3. Да се намери най-малкото естествено число k за което уравнението

$$x_1^2+x_2^2+...+x_k^2=2007$$

има решение в множеството на естествените числа.

Решение. Очевидно $k>1$, защото числото 2007 не е точен квадрат. **(1 т.)** Ако $k=2$ от $x_1^2+x_2^2=2007$ следва, че едното от числата x_1 и x_2 е четно, а другото е нечетно. Но квадратите на четните числа се делят на 4, а квадратите на нечетните числа дават остатък 1 при деление с 4. Понеже при деление с 4 числото 2007 дава остатък 3, виждаме, че k не е 2. **(2 т.)**. Нека $k=3$. Тогава или трите числа са нечетни, или едното е нечетно, а другите две – четни. Ако е налице първият случай, то всеки от квадратите на тези числа дава остатък 1 при деление с 8 и сборът на тези остатъци е 3, а числото 2007 дава остатък 7 при деление с 8. **(2т.)** Ако е налице вторият случай както при $k=2$ ще имаме в ляво остатък 1 при деление с 4, а вдясно – съответно остатък 3 при деление с 4. **(2 т.)** Нека $k=4$. Понеже 2007 = 9.223, достатъчно е да представим числото 223 като сбор от квадратите на четири естествени числа. **(1 т.)** Имаме $223=11^2+10^2+1^2+1^2$ **(1т.)**, откъдето 2007 = $33^2+30^2+3^2+3^2$, (Може и 2007=$42^2+13^2+7^2+5^2$). **(1 т.)** Търсеното най-малко естествено число е $k=4$.

7.4. Множеството Е се състои от 37 двуцифрени числа, нито едно от които не се дели на 10. Да се докаже, че в Е могат да се намерят 5 числа такива, че за всеки две от тях цифрите на десетиците са различни и цифрите на единиците са различни.

Решение. Разделяме числата от множеството *E* на 9 групи, като във всяка група поставяме числата с една и съща цифра на десетиците. Според принципа на Дирихле в някоя от тези групи ще имаме поне 5 елемента (В противен случай числата ще са най-много 4.9 = 36). Следователно в множеството E има поне 5 числа с една и съща цифра на десетиците – да кажем a. **(2 т.)** Разглеждаме елементите на E, на които цифрата на десетиците е различна от a. Това подмножество съдържа поне 37 – 9 =28 елемента. Отново прилагаме принципа на Дирихле. Ще има поне 4 елемента с една и съща цифра на десетиците. (В противен случай разглежданите числа ще са най-много 8.3 = 24, те са поне 28). **(1 т.)** По такъв начин си осигуряваме поне 4 числа от E с цифра на десетиците b, различна от a. Разглеждаме сега подмножеството на E, което се състои от числа с цифри на десетиците, различни от a и b. В това множество има поне 28 – 9 = 19 числа. Както до сега можем да твърдим, че в него има поне 3 числа с еднакви цифри на десетиците (2.7 = 14 < 19). **(1 т.)** И нека тази цифра е c, различна от a и b. Остават поне 19 – 9 = 10 числа. Ясно е, че ще можем да посочим поне две числа с цифра на десетиците d **(1 т.)** и понеже остава поне 10 – 9 = 1 число, което ще има цифра на десетиците e, различна от вече разгледаните **(1 т.)**. Сега се връщаме назад. Взимаме това последно число с цифра на десетиците e. От двете числа с цифра на десетиците d взимаме това, което има цифра на единиците, различна от цифрата на единиците на вече избраното число и така продължаваме нагоре. **(4 т.)**.

8. КЛАС

8.1 Дадено е уравнението $|2x-1|-1=x^2-a$.

а) Да се реши уравнението при $a=2$

б) Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението има два корена, които са цели числа.

Решение. а) При $a=2$ уравнението е $|2x-1|-1=x^2-2$. При $x\geq\frac{1}{2}$ имаме $x^2-2x=0$ откъдето $x_1=0$ и $x_2=2$. Но $x_1<\frac{1}{2}$, така че само $x_2=2$ е корен **(1 т.)**. При $x<\frac{1}{2}$ имаме $x^2+2x-2=0$ откъдето $x_1=-1+\sqrt{5}$ и $x_2=-1-\sqrt{5}$. Но $x_1>\frac{1}{2}$, така че само $x_2=-1-\sqrt{5}$ е корен **(1 т.)**. Окончателно корените на уравнението са $x_1=2$ и $x_2=-1-\sqrt{5}$. **(1т.)**

б) I. При $x\geq\frac{1}{2}$ имаме $x^2-2x+2-a=0$ откъдето $x_1=1+\sqrt{a-1}$ и $x_2=1-\sqrt{a-1}$, които са цели при $\sqrt{a-1}=m\geq 0$, където m е цяло число т.е. $a-1=m^2$. Тогава $x_1=1+m$ и $x_2=1-m$ **(1 т.)** Очевидно $x_1\geq\frac{1}{2}$, за всяко цяло $m\geq 0$, а $x_2\geq\frac{1}{2}$, когато $1-m\geq\frac{1}{2}$ или $m\leq\frac{1}{2}$, т.е. $m=0$. **(1 т.)** Тъй като при $m=0$, т.е. $a=1$ уравнението има единствен корен 1, то в този случай уравнението може да има само един цял корен. **(1 т.)**

II. При $x<\frac{1}{2}$ имаме $x^2+2x-a=0$ откъдето $x_1=-1-\sqrt{a+1}$ и $x_2=-1+\sqrt{a+1}$, които са цели при $\sqrt{a+1}=n\geq 0$, където n е цяло число, т.е. $a+1=n^2$. Тогава $x_1=-1-n$ и $x_2=-1+n$, **(1 т.)** Очевидно $x_1<\frac{1}{2}$, за всяко цяло $n\geq 0$, а $x_2<\frac{1}{2}$, когато $-1+n<\frac{1}{2}$ или $n<\frac{3}{2}$, т.е. $n=0$ или 1. **(1 т.)** При $n=0$, т.е. $a=-1$ уравнението има единствен корен –1 и при $n>1$ може да има само един цял корен. При $n=1$, т.е. $a=0$ уравнението има два цели корена – $x_1=-2$ и $x_2=0$ **(1 т.)**

Остава да проверим има ли цели числа $m\geq 1$ и $n\geq 2$, такива че $m^2+1=n^2-1$. От $2=(n-m)(n+m)$ имаме $n-m=1$, $n+m=2$, което е невъзможно при $m\geq 1$ и $n\geq 2$.

Окончателно уравнението има два цели корена само при $a=0$. **(1 т.)**

8.2. Числата x и y са такива, че $x(4-3x)+y(4-3y)=3xy$. Да се докаже, че

$$0 \le x + y \le \frac{16}{9}.$$

Решение. Представяме равенството във вида $4(x+y) = 3(x^2 + xy + y^2)$. **(1 т.)**

От $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \ge 0$ следва, че $x + y \ge 0$. **(2т.)**

От друга страна $4(x+y) = 3\left((x+y)^2 - xy\right)$. **(1т.)** Като използваме неравенството $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

ще получим последователно $4(x+y) = 3(x+y)^2 - 3xy \ge 3(x+y)^2 - 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, откъдето

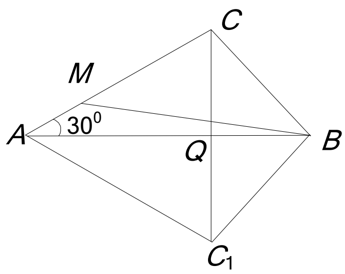
$9(x+y)^2 \le 16(x+y)$. **(2 т.)**

Ако $x + y > 0$ веднага следва, че $x + y \le \frac{16}{9}$. **(3 т.)** Ако $x + y = 0$, твърдението е очевидно. **(1 т.)**

Алтернативно решение: Нека $x + y = a$. Тогава $y = a - x$ и като заместим x в даденото равенство с получения израз, след опростяване получаваме $3x^2 - 3ax + 3a^2 - 4a = 0$. За това квадратно уравнение относно x знаем, че неговата дискриминанта е неотрицателна, защото има реален корен. Но дискриминантата му е равна на $48a - 27a^2$, откъдето следва исканото.

8.3. В триъгълника ABC $\angle ACB = 2\angle ABC$. Точката M лежи върху страната AC, такава че $CM = BC$. Да се намерят ъглите на триъгълника ABC ако $BM = AC$.

Решение. Построяваме $\angle ABC_1 = \angle ABC$ така, че C и C_1 да са в различни полуравнини относно правата AB. Нека точка C_1 върху рамото BC_1 е такава, че $BC_1 = BC$. Тогава $\Delta MBC \cong \Delta CC_1B$, като равнобедрени с едни и същи бедра и $\angle MCB = \angle CBC_1$, откъдето $BM = CC_1$ **(5 т.)**. Тъй като AB е ъглополовяща на $\angle CBC_1$, то $AB \perp CC_1$. Нека $AB \cap CC_1 = Q$. Разглеждаме триъгълника ACQ. Той е правоъгълен, а освен това $AC = 2AQ$ **(3 т.)**. Сега вече $\angle CAB = 30^o$ **(1 т.)** и $\angle ABC = 50^o$ и $\angle ACB = 100^o$ **(1 т.)**.



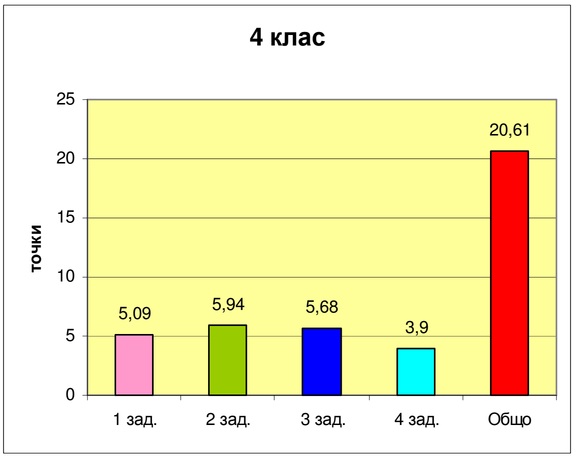
8.4. В квадратна таблица 2007 х 2007 са записани цели неотрицателни числа така, че ако числото в една клетка е 0, то сборът от числата в реда и стълба, които се пресичат в тази клетка е не по-малък от 2007. Да се докаже, че сборът от всички числа в таблицата е не по-малък от 2 014025.

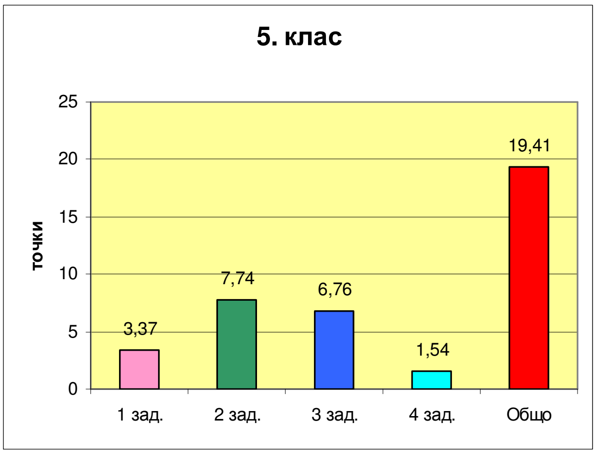
Решение. Разглеждаме сборовете на числата по редове и стълбове. **(1 т.)** Нека най-малкия такъв сбор е равен на *k*. **(2 т.)** Нека този сбор е в един от редовете. Тогава в този ред има най-много 2007 – *k* нули. **(1 т.)** От условието имаме, че сбора от числата във всеки стълб, съдържащ една от тези нули е не по-малък от 2007 – *k* **(1 т.)**. Във всеки от останалите *k* стълба сборът е не по-малък от *k*. **(1 т.)** Тогава за сбора *S* на числата в таблицата имаме:

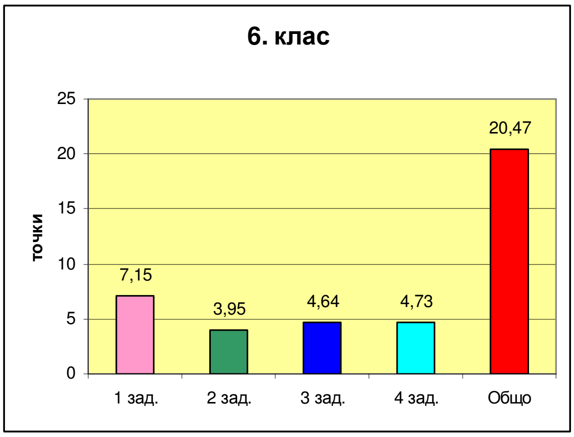
$$S \ge k^2 + (2007-k)^2 = 2k^2 - 2.2007k + 2007^2 = 2\left(k - \frac{2007}{2}\right)^2 + \frac{2007^2}{2} \ge \frac{2007^2}{2} = 2014024,5$$

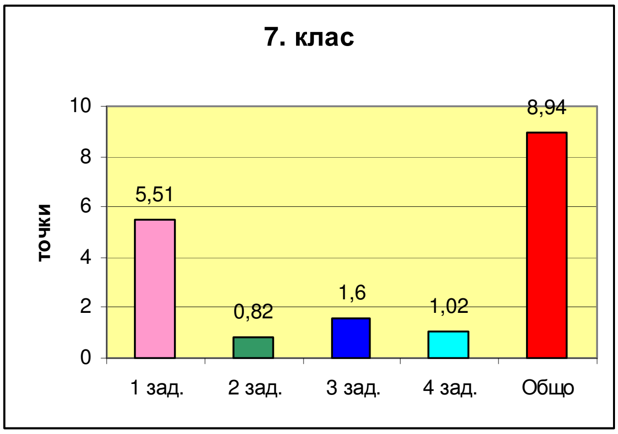
Ако най-малкия сбор е в един от стълбовете, разглеждаме редовете, съдържащи нулите и получаваме същия резултат за сбора **(3 т.)**.
Тъй като *S* е цяло число, то $S \ge 2014025$. **(1 т.)**

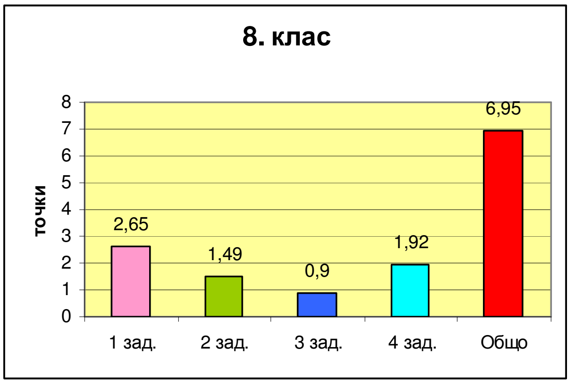
Резултати:

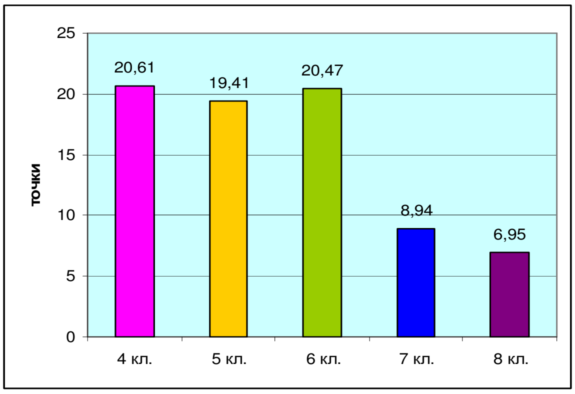












Адрес за кореспонденция:
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
1113, София, ул.”Акад. Г.Бончев” бл. 8,
ПК 155, факс 872 11 9
тел. 873 80 76, 872 11 89
E-mail: smb@math.bas.bg

Съставил: Чавдар Лозанов