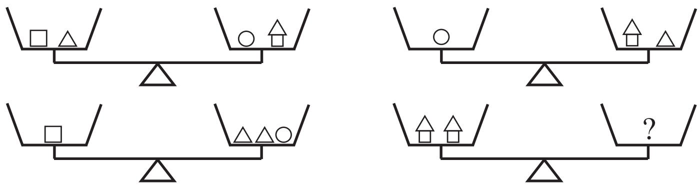
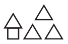
ИЗВАДКА ОТ ЗАДАЧИ, ДАВАНИ НА ОСМИ СОФИЙСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

Първи вид – с избираем отговор:

Пети клас

Задача. Ако четирите везни са в равновесие, какво **не** може да стои на мястото на въпросителната?



А) △△△△△△ **Б)**  **В)** □ **Г)** △○○

Решение. От втората везна получаваме, че △○○ тежат колкото , откъдето следва, че △○○ тежат повече, отколкото .

Отговорът е Г).

Шести клас

Задача. На остров Тук-там живеят рицари и лъжци. Рицарите казват винаги истината, а лъжците винаги лъжат.
Шест жители на остров Тук-там се срещнали и всеки казал на останалите: „Всички вие сте лъжци“. Колко рицари има между срещналите се?

А) 1 **Б)** 3 **В)** 5 **Г)** 6

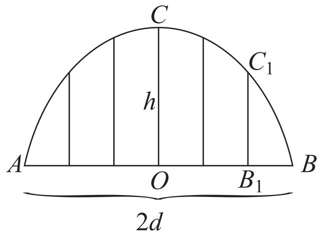
Решение. Ако шестте жители са лъжци, то твърдението, изказано от всеки един от тях: „Всички вие сте лъжци“, е вярно. Тогава всички лъжци казват истината, което е невъзможно.

Ако между шестте жители има поне двама рицари, то всеки един от тях не може да каже твърдението „Всички вие сте лъжци“, защото то няма да е истина, понеже измежду останалите пет жители има поне един рицар.

Следователно остава единствената възможност – между срещналите се има точно един рицар и отговорът е А).

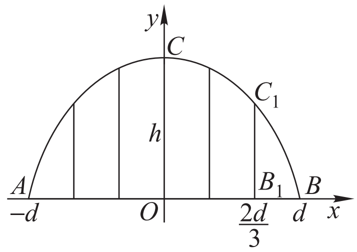
11. – 12. клас

Задача. Арка на мост има формата на дъгата AB, която е част от парабола с връх точката C, като C е средата на дъгата. Арката е подпряна с 5 вертикални стълба, които делят отсечката AB на 6 равни части. Ако централният стълб OC има дължина h cm и отсечката $AB = 2d$ cm, то $B_1C_1 : OC$ е равно на:



А) $5:9$ **Б)** $5:d$ **В)** $\frac{2}{3}:d$ **Г)** $1:3$

Решение. Избираме подходяща координатна система Oxy (виж чертежа), спрямо която $A(-d;\ 0)$, $B(d;\ 0)$ и $C(0;\ h)$. Тъй като параболата е симетрична относно тази координатна система и $C(0;\ h)$ е върха ѝ, то тя има уравнение $y = f(x) = ax^2 + h$.



При $x = d$ $ad^2 + h = 0$, т.е. $a = -\frac{h}{d^2}$.

Тогава арката на моста има уравнение $y = f(x) = -\frac{h}{d^2}x^2 + h = h\left[1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2\right]$ при $x \in [-d,\ d]$.

Точката B_1 е с координати $\left(\frac{2d}{3};\ 0\right)$ и

$$B_1C_1 = f\left(\frac{2d}{3}\right) = h\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{5}{9}h.$$

Следователно $B_1C_1 : OC = \frac{5}{9}h : h = 5:9$ и отговорът е А).

Втори вид – със свободен отговор:

Трети клас

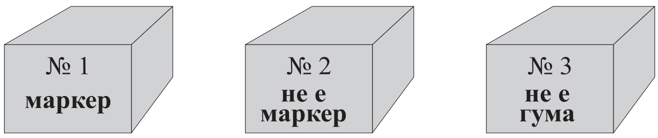
Задача 11. Нека $\% = 10$ и $\% : Q = 2$. На колко е равно $\% \cdot Q = ?$

....

Решение. По условие $\% = 10$. Тогава от $\% : Q = 2$ получаваме $10 : Q = 2$, т.е. $Q = 5$. Следователно $\% \cdot Q = 10.5 = 50$.

Седми клас

Задача.



Във всяка от трите кутии с номера 1, 2 и 3 е поставен точно един предмет – маркер, гума и химикалка. На кутия № 1 е написано „**маркер**“, на № 2 – „**не е маркер**“, а на № 3 – „**не е гума**“. Като знаете, че точно един от надписите е верен, определете какъв предмет има в кутия № 1. ....

Решение. Възможностите да поставим три предмета в три кутии са 6.

Кутия № 1	**Кутия № 2**	**Кутия № 3**
маркер **+**	химикалка **+**	гума **–**
маркер **+**	гума **+**	химикалка **+**
химикалка **–**	маркер **–**	гума **–**
химикалка **–**	гума **+**	маркер **+**
гума **–**	химикалка **+**	маркер **+**
гума **–**	маркер **–**	химикалка **+**

Ще решим задачата таблично, като във всяка клетка поставяме плюс или минус, в зависимост от това, дали надписът на кутията е верен или не.

Решение имаме в този ред, в който има един плюс и два минуса.

В случая това е шести ред и в кутия № 1 има гума.

9. – 10. клас

Задача. За положителните числа x и y е изпълнено равенството

$$\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\ldots+\frac{x+2006}{y+2006}=2007.$$

Числената стойност на частното $\dfrac{x^{2007}+xy^{2006}}{y^{2007}}$ е равна на ....

Решение. $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x+1}{y+1}+\ldots+\dfrac{x+2006}{y+2006}=2007 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}-1\right)+\left(\frac{x+1}{y+1}-1\right)+\ldots+\left(\frac{x+2006}{y+2006}-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y}{y}+\frac{x+1-y-1}{y+1}+\ldots+\frac{x+2006-y-2006}{y+2006}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y+1}+\ldots+\frac{1}{y+2006}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{y+1}+\ldots+\frac{1}{y+2006}=0.$$

Тъй като при $y>0$ $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y+1}+\ldots+\dfrac{1}{y+2006}>0,$ то при $x>0$ и $y>0$

$$\frac{x}{y}+\frac{x+1}{y+1}+\ldots+\frac{x+2006}{y+2006}=2007 \Leftrightarrow x=y.$$

При $x=y>0$ $\dfrac{x^{2007}+xy^{2006}}{y^{2007}}=\dfrac{x^{2007}+xx^{2006}}{x^{2007}}=\dfrac{2x^{2007}}{x^{2007}}=2.$

Търсената стойност е 2.

Трети вид – задачи, на които се изписва пълно решение:

9. – 10. клас

Задача. Дадена е редицата 4, 7, 1, 8, 9, 7, …, чийто n-ти член (за всяко естествено число $n > 2$) е равен на последната цифра на сбора на предходните два члена.
Ако сумата на първите n члена на редицата е равна на 12 345, намерете n.

Решение. Като запишем още членове на редицата

$$\underbrace{4,\ 7,\ 1,\ 8,\ 9,\ 7,\ 6,\ 3,\ 9,\ 2,\ 1,\ 3,}_{12\text{ члена}}\ 4,\ 7,\ \ldots$$

виждаме, че тя е периодична с период 12.

Нека S_n е сумата на първите n члена на редицата, където $n = 12k + m$ и k и $0 \le m \le 11$ са неотрицателни цели числа.

Пресмятаме $S_{12} = 4+7+1+8+9+7+6+3+9+2+1+3 = 60.$ Тогава

$$S_n = k.S_{12} + S_m = 60k + S_m, \text{ където } 0 \le S_m < 60.$$

Тъй като $S_n = 12\,345 = 60.205 + 45,$ то $k = 205$ и $S_m = 45,$ т.е. $m = 8.$

Следователно $n = 12.205 + 8 = 2468.$

Точката B_1 е с координати $\left(\frac{2d}{3};\ 0\right)$ и

$$B_1C_1 = f\left(\frac{2d}{3}\right) = h\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = \frac{5}{9}h.$$

Следователно $B_1C_1 : OC = \frac{5}{9}h : h = 5 : 9$ и отговорът е А).