

31. Международен Турнир на градовете

Пролетен тур

Основен вариант, 10. – 12. клас

Задача 1. (3 точки) Възможно ли е всички прави в равнината да се разделят на двойки перпендикулярни прави така, че всяка права да участва в точно една двойка?

Решение. Възможно е. Нека Oxy правоъгълна координатна система в равнината. Права l , която не е успоредна на координатна ос, поставяме в двойка с перпендикулярна нея права p , като l и p се пресичат върху оста Oy .

Права l , която е успоредна на координатна ос, поставяме в двойка с перпендикулярна нея права p , като l и p се пресичат върху ъглополовящата на първи квадрант.

Задача 2. а) (2 точки) Дадено е парче сирене. Позволено е да се избере положително ирационално число a и да се разреже парчето в отношение $1 : a$ по тегло, след това да се разреже в същото отношение някое от получените парчета и т.н. Възможно ли е с краен брой разрязвания да се получат такива парчета сирене, които могат да се разпределят в две порции с едно и също тегло?

б) (2 точки) Същият въпрос, но когато се избира положително рационално число a , различно от 1.

Отговор. а) Възможно е. б) Не е възможно.

Решение. а) Да разрежем двете парчета, получени при първото разрязване. Ще получим 4 парчета, чиито тегла се отнасят както $1:a:a^2$. Достатъчно е да се избере a така, че $1 + 2a = a^2$. Положителният корен на това уравнение е $a = 1 + \sqrt{2}$.

б) Да допуснем, че след няколко разрязвания парчетата могат да се разпределят в две порции с равно тегло. Без ограничение на общността можем да приемем, че на всеки ход са разрязвани всички парчета. Така след k хода са се получили парчета, чиито тегла се отнасят както $1 : a : a^2 : \dots : a^k$, като на 1 и a^k съответства точно по едно парче. Като заместим a с несъкратимата дроб $\frac{m}{n}$ и умножим всички тегла с подходяща константа, ще получим цели тегла $n^k, mn^{k-1}, \dots, m^k$. Но m и n са взаимнопрости, затова теглото на едната порция е кратно на m , а теглото на другата порция, в която е парчето с тегло n^k , не е кратно. Противоречие.

Задача 3. (6 точки) Възможно ли е към числото 1 да се приложат в някакъв ред функциите $\sin$, $\cos$, tg , ctg , arcsin , arccos , arctg , arcctg и да се получи числото 2010? (Всяка от изброените функции може да се използва произволен брой пъти.)

Отговор. Възможно е.

Решение. Нека $f(x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

По индукция се проверява, че $g^n(x) = g(g^{n-1}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. Като се избере $n = 2010^2 - 1$, се получава, че $g^n(1) = 1/2010$, откъдето $f(g^n(1)) = 2010$.

Задача 4. (6 точки) На конгрес се събрали 5000 киномани, всеки от които е гледал поне един филм. Те са разделени в секции от два вида: секции, в които се обсъжда филм, който са гледали всички в секцията, или секции, в които всеки разказва за филм, който никой друг в секцията не е гледал. Докажете, че всички киномани могат да се разделят в точно 100 секции. (Позволена е секция от един човек: той пише статия за гледан от него филм.)

Решение. Достатъчно е да се разпределят киноманите в не повече от 100 секции, защото след това броят на секциите може да се увеличи до 100 с произволно разделяне.

Ако някой популярен филм е гледан от повече от 100 киномани, те образуват секция. Ако има популярен филм, гледан от повече от 99 от останалите киномани, и те формират секция и т.н. Този процес спира, когато свършат киноманите или популярните филми. Ако са свършили киноманите, то секциите са най-много 100, тъй като $101 + 100 + 99 + \dots + 2 + 1 > 5000$. Ако са свършили популярните филми, то има $100 - k$ секции и измежду останалите киномани всеки филм е гледан от не повече от k човека. Да заделим k стаи за още k секции. Вземаме произволен филм и разпределяме тези, които са го гледали, в различни стаи и им поръчваме да разкажат за този филм. По същия начин постъпваме с гледалите следващия филм и т.н. докато всеки киноман се разпредели в секция.

Задача 5. (7 точки) Тридесет и трима богатири яздат с различни постоянни скорости в кръг по посока, обратна на часовниковата стрелка. Могат ли да яздат неограничено дълго, ако има само една точка по кръга, в която могат да се изпреварват?

Отговор. Могат.

Решение. Ако богатирите тръгват от една точка и за всяка двойка техни скорости u и v числата $u/(u-v)$ и $v/(u-v)$ са цели, то всички изпреварвания ще стават в точката на общия старт. Скоростите се строят по индукция. За трима скоростите са 2, 3 и 4, а от $u, v, \dots, w$ се преминава към $p - u, p - v, \dots, p - w, p$, където $p = u \cdot v \cdot \dots \cdot w$.

Задача 6. (8 точки) Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с център I . Точките M и N са средите на страните AB и CD . Ако $IM : AB = IN : CD$, докажете, че $ABCD$ е трапец или успоредник.

Решение. Правите AI, BI, CI, DI са ъглополовящи на ъглите на четириъгълника. Следователно $\angle AIB + \angle CID = 180^\circ$. Ако ъгъл AIB е остър, а ъгъл CID е тъп, $IM > \frac{1}{2} AB$ (което е очевидно, ако се построи окръжност с диаметър AB), а $IN < \frac{1}{2} CD$, което противоречи на условието. Следователно $\angle AIB = \angle CID = 90^\circ$. Оттук $\angle A + \angle B = 180^\circ$, т.е. $BC \parallel AD$.

Задача 7. (9 точки) Дадено е естествено число. За един ход между някои цифри на числото се записват плюсове и се пресмята полученият сбор (например, от числото 123456789 може да се получи $12345 + 6 + 789 = 13140$). При следващия ход между някои цифри на получения сбор се записват плюсове и отново се пресмята сбора, и т.н. Докажете, че от всяко число може да се получи едноцифрено число с не повече от 10 хода.

Решение. Достатъчни са 4 хода.

За числа, по-малки от 1000, твърдението е очевидно.

По-големите числа разбиваме на четирицифрени блокове (които не започват с 0), евентуално плюс нули и едно по-малко от 1000 число накрая (например, $12300004500060 = 1230 + 0 + 0 + 0 + 4500 + 0 + 60$). Ако по този начин се получават k четирицифрени блока, то сборът е поне $1000k$. Сега заменяме едно по едно ненулевите събираеми със сбора на цифрите им. В резултат сборът става не повече от $36k + 27 < 100k$, т.е. сборът е поне с един разряд по-малък. Тъй като на всеки ход сборът е намалявал с по-малко от 9999, то последният сбор преди намаляването на броя на разрядите е бил от вида $10\dots 0abcd$. Този сбор може да се получи с първия ход, а след това три пъти числото да се замества със сбора от цифрите му.