

31. Международен Турнир на градовете

Пролетен тур

Основен вариант, 7. – 9. клас

Задача 1. (3 точки) Дадено е парче сирене. Позволено е да се избере произволно по-ложително реално число a , различно от 1, и да се разреже парчето в отношение $1 : a$ по тегло, след това да се разреже в същото отношение някое от получените парчета и т.н. Възможно ли е с краен брой разрязвания да се получат такива парчета сирене, които могат да се разпределят в две порции с едно и също тегло?

Решение. Да разрежем двете парчета, получени при първото разрязване. Ще получим 4 парчета, чиито тегла се отнасят както $1:a:a^2$. Достатъчно е да се избере a така, че $1 + 2a = a^2$. Положителният корен на това уравнение е

$$a = 1 + \sqrt{2}.$$

Задача 2. (4 точки) В триъгълника ABC точката M е среда на страната AC , а точката P лежи на страната BC . Отсечката AP пресича BM в точка O . Ако $BO = BP$, намерете отношението $OM : PC$.

Отговор: 1:2.

Решение. Да построим средната отсечка MN в триъгълника ACP (успоредна на AP). По теоремата на Талес $OM / PN = BO / BP$, следователно $OM = PN = \frac{1}{2} PC$.

Задача 3. По окръжност са записани 999 числа, всяко от които е 1 или -1 , като не всички числа са равни. Пресметнати са всички произведения на десет поредно записани по окръжността числа, и получените произведения са събрани.

а) (3 точки) Най-малко колко е полученият сбор?

б) (3 точки) А най-много колко е сборът?

Отговор. а) -997 . б) 995 .

Решение. а) *Оценка.* Ако две съседни произведения са равни, то първото число на лявата десетица е равно на последното число на дясната, т.е. са равни числата през 10 позиции. Тъй като 10 и 999 са взаимнопрости, то със стъпка 10 ще се обхождат всички записани числа. Но измежду тях има различни, следователно и измежду произведенията също има различни. Това означава, че поне едно произведение е равно на 1.

Ето и *пример* с едно произведение 1 и 998 произведения, равни на -1 : ако поредният номер на числото завършва на 9, записваме -1 , а останалите числа са равни на 1. Тогава единственото положително произведение е от 999-тото число до 9-тото.

б) *Пример.* Ако запишем две -1 една до друга, а останалите числа са 1, ще имаме точно две отрицателни произведения.

Оценка. Произведението на всички произведения е равно на 10-тата степен на произведението на всички числа, т.е. е равно на 1. Следователно четен брой произведения са равни на -1 , т.е. поне 2.

Задача 4. (6 точки) Сборът на цифрите на естественото число n е 100. Възможно ли е сборът от цифрите на n^3 да е равен на 1000000?

Решение. Достатъчно е да се избере число, в записа на което има 1 на 1-во, 10-то, 100-но, ..., 10^{99} -то място (отдясно наляво), а останалите цифри са нули.

Идеята на решението е следната. Да разгледаме многочлена $(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{99})^3$. Всеки от коефициентите му е равен на 1, 3 или 6, а сборът от коефициентите е 100^3 (това е стойността на многочлена, когато всички променливи се заместят с 1).

. Ако заместим x_k с 10^{p_k} така, че на всички едночлени да съответстват *различни степени на десетицата*, то коефициентите се превръщат в цифри на числото $(1 + 10^{p_1} + \dots + 10^{p_{99}})^3$. Това условие е изпълнено, ако $p_{k+1} > 3p_k$ ($k = 0, \dots, 99$, $p_0 = 0$). Наистина, нека $i \geq j \geq k$, $l \geq m \geq n$, $i > l$. На едночлена $x_i x_j x_k$ съответства $10^{p_i + p_j + p_k} > 10^{p_i} > 10^{3p_l} > 10^{p_l + p_m + p_n}$, което съответства на едночлена $x_l x_m x_n$.

Задача 5. а) (3 точки) Трима богатири яздат с различни постоянни скорости в кръг по посока, обратна на часовниковата стрелка. Могат ли да яздат неограничено дълго, ако има само една точка по кръга, в която могат да се изпреварват?

б) (5 точки) А ако богатирите са десет?

Отговор. И в двата случая могат.

Решение. Ако богатирите тръгват от една точка и за всяка двойка техни скорости u и v числата $u/(u-v)$ и $v/(u-v)$ са цели, то всички изпреварвания ще стават в точката на общия старт. За трима богатири възможни скорости са 2, 3 и 4.

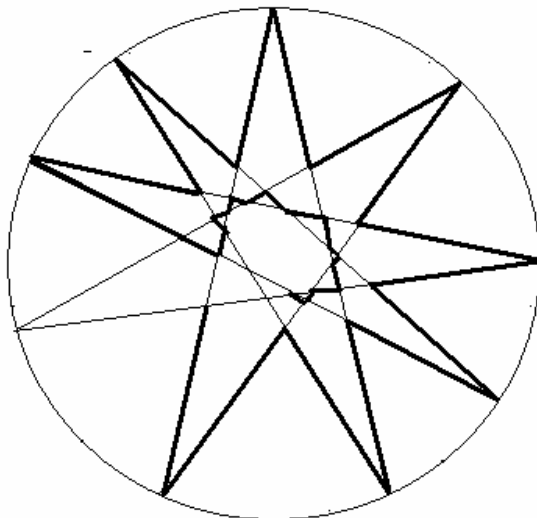
За по-голям брой богатири скоростите се строят по индукция, като от $u, v, \dots, w$ се преминава към $p - u, p - v, \dots, p - w, p$, където $p = u \cdot v \cdot \dots \cdot w$.

Задача 6. (8 точки) В равнината е дадена незатворена несамопресичаща се начупена линия, която се състои от 31 звена (съседните звена не лежат на една права). За всяко звено е построена правата, определена от него. Възможно е някои от построените 31 прави да съвпадат. Най-малко колко различни прави могат да се получат?

Отговор. 9.

Решение. *Оценка.* Освен краищата, начупената има 30 върха, всеки от които е пресечна точка на две прави. Ако правите са не повече от 8, то пресечните точки са не повече от $7 \cdot 8 / 2 = 28 < 30$, противоречие.

Пример е показан на чертежа.



Задача 7. (11 точки) В някои клетки на дъска 10 x 10 седи по една бълха. Веднъж на минута бълхите едновременно скачат, като всяка скача в съседна (по страна) клетка. Всяка бълха скача в една от четирите възможни посоки, при това запазва посоката си, докато е възможно, а след това скача в противоположна посока. Кучето Барбос наблюдавало бълхите цял час и нито веднъж не видяло две бълхи в една клетка. Най-много колко бълхи може да скачат по дъската?

Отговор. 40.

Решение. Оценка. На една вертикала може да има не повече от две вертикално скачащи бълхи (иначе бълхите, които се намират в едноцветни при шахматно оцветяване полета, ще се срещнат). Същото е врно и за хоризонталите. Следователно на 20 хоризонтали и вертикали има не повече от 40 бълхи.

Пример. Ясно е, че бълхи от разноцветни полета не могат да се срещнат. Затова е достатъчно да се посочат само 20 «бели» бълхи (разположението на «черните» бълхи е симетрично). Това е направено на чертежа вляво. Стрелката показва началното положение на бълхата и посоката на нейното движение.

На средния чертеж е посочена една «вертикална» бълха Б и всички забранени положения на хоризонталните бълхи (т.е. тези, които могат да попаднат в едно поле с Б). Както виждаме, забранените стрелки лежат само в полета от минаващите през Б диагонали и на диагоналния правоъгълник, определен от по-малкия диагонал. Принципно същата е ситуацията при другите вертикални бълхи от първия чертеж; всички забранени полета от тях полета са показани на чертежа вдясно. Виждаме, че хоризонталните бълхи от първия чертеж са в едностранно забранени полета и са в обратна на забранената посока.

