

31. Международен Турнир на градовете

Пролетен тур

Тренировъчен вариант, 10.- 12. клас

Задача 1.

От Южна Америка в Русия 2010 кораби превозват банани, лимони и ананаси. Броят на бананите на всеки кораб е равен на общия брой лимони на останалите кораби, а броят на лимоните на всеки кораб е равен на общия брой на ананасите на останалите кораби. Докажете, че общият брой плодове се дели на 31.

Решение. Аналогично на решението на задача 1 от тренировъчния вариант за 7 – 9. клас, получавме, че общият брой на бананите е 2009 пъти повече от броя на лимоните, което е 2009 пъти повече от броя на ананасите. Затова общият брой плодове е $2009^2 + 2009 + 1$ пъти повече от броя ананаси и тъй като $2009 \equiv -6 \pmod{31}$, то

$$2009^2 + 2009 + 1 \equiv (-6)^2 - 6 + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

Задача 2.

Функцията $f(x)$ има следното свойство: всяка права в координатната равнина пресича графиката на $y = f(x)$ в толкова на брой точки, в колкото и параболата $y = x^2$. Докажете, че функцията $f(x)$ е тъждествено равна на x^2 .

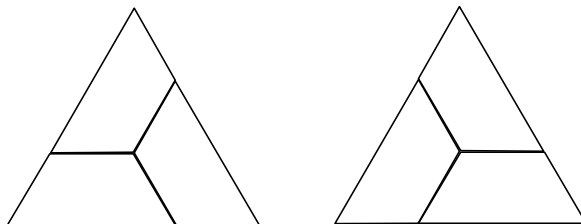
Решение. Да построим допирателната l към параболата в произволна точка $A(a, a^2)$. Тази допирателна има точно една обща точка с графиката Γ на функцията $f(x)$. Точките под тази допирателна не могат да лежат на Γ , тъй като всяка от тях лежи на успоредна на l права, която няма общи точки с Γ . Точките от правата l , различни от A , също не могат да лежат на Γ : всяка от тях се намира под някоя друга допирателна към параболата. Следователно точката A (а следователно и всяка точка от параболата) лежи на Γ .

Задача 3.

Възможно ли е повърхнината на правилен октаедър да се облечи напълно с няколко правилни шестоъгълника, които не се припокриват? (Правилният октаедър има 6 върха, стените му са равностранни триъгълници и всеки връх лежи на 4 стени.)

Решение. Такова облепяне е възможно.

Да оцветим шахматно осемте стени на октаедъра. Белите стени да разрежем на половинки от шестоъгълник, както е показано на чертежа вляво, а черните като на чертежа вдясно. На повърхността на октаедъра тези половинки се 'слепват' в цели шестоъгълници.



Задача 4.

Барон Мюнхаузен помолил приятелите си да намислят полином $P(x)$, който е с естествени коефициенти и е различен от константа, и да му съобщат само стойностите $P(2)$ и $P(P(2))$. Баронът твърди, че само по тези данни може винаги да отгатне кой е намисления полином. Не греша ли барон Мюнхаузен?

Решение. Баронът винаги е прав. Нека $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ и $P(2) = b$. Тогава

$$b = 2^n a_n + \dots + 2a_1 + a_0 > a_n + \dots + a_1 + a_0 \Rightarrow$$

$$b^n > b^{n-1}(a_n + \dots + a_1 + a_0) \geq a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0.$$

Това означава, че a_n е частното, а $a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0$ е остатък при делението на $P(P(2))$ на b^n . Аналогично a_{n-1} се определя като частно от делението на $a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0$ на b^{n-1} и т.н.

Задача 5.

В равнината лежи игла. Позволено е иглата да се върти на 45° около кой да е от краищата си. Може ли след няколко завъртания иглата да се върне на първоначалното си място, но краищата и да са си сменили местата? (Приемете иглата за отсечка.)

Решение. Нека в началото край A на иглата се намира в точката $(0, 0)$, а край B – в точката $(1, 0)$. Тегло на двойката числа $(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2})$, където a, b, c, d са рационални числа, ще наричаме числото $a + 2b + c$. Забелязваме, че при всяко възможно положение на иглата теглото на координатите на вектора $\overline{AB}$ е равно на ± 1 . По индукция лесно следва, че теглото на координатите на точката A е винаги четно, а теглото на координатите на точката B е нечетно. Следователно те не могат да си сменят местата.