

31. Международен Турнир на градовете

Пролетен тур

Тренировъчен вариант, 7. – 9. клас

Задача 1.

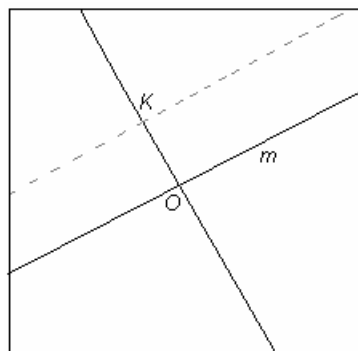
В шест кошници сложили круши, сливи и ябълки. Във всяка кошница броят на сливите е равен на общия брой на ябълките във всички останали кошници. Във всяка кошница броят на ябълките е равен на общия брой на крушите в останалите кошници. Докажете, че общият брой плодове се дели на 31.

Решение. Като запишем за всяка кошница съответното равенство за сливите и ябълките и съберем тези равенства, ще получим че общият брой на сливите е 5 пъти повече от общия брой на ябълките. Аналогично, общият брой на ябълките е 5 пъти по-голям от общия брой на крушите, т.е. общият брой на сливите е 25 пъти повече от общия брой на крушите. Следователно общият брой на плодове е 31 пъти по-голям от общия брой на крушите.

Задача 2.

Дребосъчето и Карлсон режат квадратна торта: Карлсон избира точка върху тортата (не по границата), а Дребосъчето реже по права линия от тази точка до края (в произволна посока). След това перпендикулярно на направения разрез Карлсон реже от точката до края и дава по-малкото от получените две парчета на Дребосъчето. Дребосъчето иска да получи поне четвърт от тортата. Може ли Карлсон да му попречи?

Решение. Карлсон не може да попречи. Дребосъчето разрязва през избраната от Карлсон точка K и центъра O на тортата (ако Карлсон е избрал O , прави произволен разрез). Правата m , през O , перпендикулярна на KO , заедно с правата KO делят тортата на 4 еднакви парчета. Две от парчетата, които се получават след разрязването на Карлсон (успоредно на m), са не по-малки от тези четвъртинки.



Задача 3.

Начертан е ъгъл и разполагате с пергел.

Най-малко колко окръжности трябва да се построят, за да се определи дали даденият ъгъл е остър?

Как може да се определи дали даденият ъгъл е равен на 31° (разрешава се да се построят произволен брой окръжности)?

Решение. За да се определи дали ъгълът е остър е достатъчна една окръжност. Построяваме окръжност с център на едно от рамената на ъгъла, която минава през върха на ъгъла. Ако тя пресича другото рамо на ъгъла, значи той е остър.

Проверката дали ъгълът е равен на 31° може да стане по следния начин. Построяваме окръжност с център O . Нека тя пресича рамената на ъгъла в точките A и B . Започвайки от A , нанасяме по окръжността хорди, равни на AB . Ако като нанесем 360 такива хорди обиколим окръжността точно 31 пъти, то $\angle AOB = 31^\circ$.

Задача 4.

В компания математичи всеки има не по-малко от трима познати. Докажете, че може да се избере група от четен брой математици (повече от двама), която да се разположи около кръгла маса така, че всеки да познава и двамата си съседни.

Решение. Да подредим математиците в най-дългата редица със свойството всеки двама поредни членове в редицата да са познати. И тримата познати на първия (нека той е A) трябва да са в редицата (иначе редицата може да се удължи). Да означим с B и C тези познати на A , които не стоят до A . Ако между A и B (или A и C) има четен брой математици, то те заедно с A и B (A и C) образуват търсената група. Ако и двете числа са нечетни, то между A и C има *нечетен* брой математици и те заедно с A , B и C образуват търсената група.

Задача 5.

На дъската са записани 101 числа: $1^2, 2^2, \dots, 101^2$. За един ход е позволено да се изтрият кои да е две числа и вместо тях да се запише модула на тяхната разлика. Кое е най-малкото число, което може да се получи след 100 хода?

Отговор. 1

Решение. От четири поредни квадрата с 3 хода може да се получи числото 4:

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1,$$

$$(n+3)^2 - (n+2)^2 = 2n+5,$$

$$(2n+5) - (2n+1) = 4.$$

По този начин може да получим 24 четворки от $6^2, 7^2, \dots, 101^2$. От тях 20 четворки можем да премахнем с изваждане по двойки. От числата 4, 9, 16, 25 можем да получим

$$14 = (25 - 4) - (16 - 9).$$

Накрая от четирите четворки, 1 и 14 можем да получим 1:

$$4 - (14 - 4 - 4 - 4) - 1 = 1.$$