

XXXI МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Пролетен тур, ОСНОВЕН вариант, 10. – 12. клас

(Резултатът се определя от трите най-добре решени задачи.)

Задача 1. (3 точки) Възможно ли е всички прави в равнината да се разделят на двойки перпендикулярни прави така, че всяка права да участва в точно една двойка?

Задача 2. а) (2 точки) Дадено е парче сирене. Позволено е да се избере положително ирационално число a и да се разреже парчето в отношение $1 : a$ по тегло, след това да се разреже в същото отношение някое от получените парчета и т.н. Възможно ли е с краен брой разрязвания да се получат такива парчета сирене, които могат да се разпределят в две порции с едно и също тегло?

б) (2 точки) Същият въпрос, но когато се избира положително рационално число a , различно от 1.

Задача 3. (6 точки) Възможно ли е към числото 1 да се приложат в някакъв ред функциите $\sin$, $\cos$, tg , ctg , $\arcsin$, $\arccos$, arctg , $\operatorname{arccctg}$ и да се получи числото 2010? (Всяка от изброените функции може да се използва произволен брой пъти.)

Задача 4. (6 точки) На конгрес се събрали 5000 киномани, всеки от които е гледал поне един филм. Те са разделени в секции от два вида: секции, в които се обсъжда филм, който са гледали всички в секцията, или секции, в които всеки разказва за филм, който никой друг в секцията не е гледал. Докажете, че всички киномани могат да се разделят в точно 100 секции. (Позволена е секция от един човек: той пише статия за гледан от него филм.)

Задача 5. (7 точки) Тридесет и трима богатири яздат с различни постоянни скорости в кръг по посока, обратна на часовниковата стрелка. Могат ли да яздат неограничено дълго, ако има само една точка по кръга, в която могат да се изпреварват?

Задача 6. (8 точки) Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с център I . Точките M и N са средите на страните AB и CD . Ако $IM : AB = IN : CD$, докажете, че $ABCD$ е трапец или успоредник.

Задача 7. (9 точки) Дадено е естествено число. За един ход между някои цифри на числото се записват плюсове и се пресмята полученият сбор (например, от числото 123456789 може да се получи $12345 + 6 + 789 = 13140$). При следващия ход между някои цифри на получения сбор се записват плюсове и отново се пресмята сбора, и т.н. Докажете, че от всяко число може да се получи едноцифрено число с не повече от 10 хода.