

XXXI МЕЖДУНАРОДЕН ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

Пролетен тур, ОСНОВЕН вариант, 7. – 9. клас

(Резултатът се определя от трите най-добре решени задачи.)

Задача 1. (3 точки) Дадено е парче сирене. Позволено е да се избере произволно положително реално число a , различно от 1, и да се разреже парчето в отношение $1 : a$ по тегло, след това да се разреже в същото отношение някое от получените парчета и т.н. Възможно ли е с краен брой разрязвания да се получат такива парчета сирене, които могат да се разпределят в две порции с едно и също тегло?

Задача 2. (4 точки) В триъгълника ABC точката M е среда на страната AC , а точката P лежи на страната BC . Отсечката AP пресича BM в точка O . Ако $BO = BP$, намерете отношението $OM : PC$.

Задача 3. По окръжност са записани 999 числа, всяко от които е 1 или -1, като не всички числа са равни. Пресметнати са всички произведения на десет поредно записани по окръжността числа, и получените произведения са събрани.
а) (3 точки) Най-малко колко е полученият сбор?
б) (3 точки) А най-много колко е сборът?

Задача 4. (6 точки) Сборът на цифрите на естественото число n е 100. Възможно ли е сборът от цифрите на n^3 да е равен на 1000000?

Задача 5. а) (3 точки) Трима богатири яздат с различни постоянни скорости в кръг по посока, обратна на часовниковата стрелка. Могат ли да яздат неограничено дълго, ако има само една точка по кръга, в която могат да се изпреварват?
б) (5 точки) А ако богатирите са десет?

Задача 6. (8 точки) В равнината е дадена незатворена несамопресичаща се начупена линия, която се състои от 31 звена (съседните звена не лежат на една права). За всяко звено е построена правата, определена от него. Възможно е някои от построените 31 прави да съвпадат. Най-малко колко различни прави могат да се получат?

Задача 7. (11 точки) В някои клетки на дъска 10×10 седи по една бълха. Веднъж на минута бълхите едновременно скачат, като всяка скача в съседна (по страна) клетка. Всяка бълха скача в една от четирите възможни посоки, при това запазва посоката си, докато е възможно, а след това скача в противоположна посока. Кучето Барбос наблюдавало бълхите цял час и нито веднъж не видяло две бълхи в една клетка. Най-много колко бълхи може да скачат по дъската?