

32. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ
ОСНОВЕН ВАРИАНТ, ЕСЕНЕН ТУР
Решения на задачите за 10. - 12. клас

Задача 1. (5 точки) В една държава има 100 града, които разглеждаме като точки в равнината. В справочник за всяка двойка градове е посочено разстоянието между тях (посочени са 4950 разстояния).

- а) Едно от разстоянията е изтрито. Може ли то винаги да се възстанови еднозначно с помощта на останалите?
- б) Нека са изтрети k разстояния и е известно, че никои три града не лежат на една права. Коя е най-голямата стойност на k , при която винаги могат еднозначно да се възстановят изтретите разстояния?

Решение. а) Не винаги. Нека 98 точки лежат на една права l , а две точки A и B са извън правата, като не са симетрични спрямо нея. Ако е неизвестно само разстоянието между A и B , то не може да бъде възстановено, тъй като при замяна на B с B_1 – нейната симетрична спрямо l , единствено се променя разстоянието между A и B .

б) Ще докажем, че $k = 96$. С индукция по n ще докажем, че при $n \geq 4$ имаме $k = n - 4$. При $n = 4$ твърдението се проверява директно. Да допуснем, че то е вярно за някое n и да разгледаме $n + 1$ града. Ако изтрием разстоянията от даден град до $n - 2$ града, ще знаем разстоянията от A само до два града – B и C . Като заменим A със симетричния му спрямо правата през B и C , ще запазим разстоянията до B и C , всички известни разстояния няма да се променят, а неизвестните разстояния ще се променят (тъй като на правата BC няма други градове). Следователно $k \geq n - 3$.

Да допуснем, че са изтрети не повече от $n - 3$ разстояния. Да изберем град A , от който е изтрито пона едно разстояние и да разгледаме останалите n града. Между тях са изтрети не повече от $n - 4$ разстояния и от индукционното предположение следва, че всички разстояния могат да бъдат възстановени. Тогава ще знаем взаимното разположение на тези n града. За града A ще знаем разстоянията до поне 3 други града (които не лежат на една права), което позволява еднозначно да определим разположението на A в равнината. Следователно можем да намерим и разстоянията от A до всички останали градове.

Задача 2. (6 точки) На кръгла писта $2N$ велосипедисти стартират едновременно от една и съща точка, като се движат с различни постоянни скорости в една и съща посока. Ще казваме, че двама велосипедисти се срещат, ако след старта се озоват едновременно в една и съща точка.

До обяд всеки двама велосипедисти са се срещнали поне веднъж, при това никои трима не са се срещнали едновременно. Докажете, че до обяд всеки велосипедист е имал поне N^2 срещи.

Решение. Нека S е дължината на пистата, $v_1 < v_2 < \dots < v_{2N}$ са скоростите на велосипедистите и $u = \min\{v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots, v_{2N} - v_{2N-1}\}$. Велосипедистите с номера $i < j$ се срещат след време $\frac{S}{v_j - v_i}$. Тъй като

от всички такива интервали най-голям е $\frac{S}{u}$, то за да се срещнат всеки

двама, трябва да мине време поне $\frac{S}{u}$. Понеже $v_j - v_i \geq (j - i)u$, то за това време велосипедистите с номера i и j ще се срещнат не по-малко от $j - i$ пъти. Следователно N -ия велосипедист ще има поне $1 + 2 + \dots +$

$(N - 1) = \frac{N(N - 1)}{2}$ срещи с велосипедистите с по-малки номера, и поне

$1 + 2 + \dots + (N) = \frac{N(N + 1)}{2}$ срещи с велосипедисти с по-големи номера.

Общо това са поне N^2 срещи. За $(N + 1)$ -ия велосипедист се получава същата оценка, а за останалите се получава по-добра оценка, защото при изместване на номера от средата по-малката сума се намалява по-малко отколкото се увеличава по-голямата.

Задача 3. (6 точки) Даден е многоъгълник. За всяка страна е пресметнато частното на нейната дължина и сбора от дължините на останалите страни. Всички получени частни са събрани. Докажете, че сборът им е по-малък от 2.

Решение. Тъй като всяка страна е по-малка от сборът на останалите, то сборът на останалите е по-голям от полупериметъра. Като заместим всеки знаменател с полупериметъра, ще получим по-голям сбор, който е равен на 2.

Задача 4. (7 точки) Двама магьосници воюват един срещу друг. В началото и двамата летят над морето на височина 100 метра. Магьосниците поред произнасят заклинания от вида *да се намали височината на летене над морето с a метра за мен и с b метра за теб*, където числата $0 < a < b$ са фиксирани за даденото заклинание. Дватамата разполагат с едно и също множество заклинания, които могат да произнасят нееднократно и в какъвто искат ред. Печели този, след чийто ход собствената му височина над морето е положителна, а на противника му не е. Съществува ли множество заклинания, при което вторият магьосник може да спечели независимо от заклинанията на първия, ако броят на заклинанията в множеството е:

а) краен;

б) безкраен?

Решение. а) Не. Нека първият магьосник винаги прозная заклинание с най-голяма разлика $b - a$. След заклинанието на втория разликата във височините им е поне 0. Следователно след краен брой ходове разликата във височините и неотрицателна, което означава, че вторият не може да победи.

б) Това е възможно. Да разгледаме произволна намаляваща редица от положителни числа $\{a_n\}$, където $a_n < 50$ (например $a_n = \frac{1}{n}$) и нека заклинанията да бъдат всички двойки $a_n, b_n = 100 - a_n$. Нека първият направи заклинание a_n, b_n . Тогава вторият прави заклинание a_m, b_m , за някое $m > n$. Тогава височината на първия е $a_m - a_n < 0$, а височината на втория е $a_n - a_m > 0$, т.е. вторият печели.

Задача 5. (8 точки) Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O , като O не лежи на диагонал на четириъгълника. Известно е, че центърът на описаната около триъгълника AOC окръжност лежи на правата BD . Докажете, че центърът на описаната около триъгълника BOD окръжност лежи на правата AC .

Решение. Да означим радиусът на окръжността с R , средата на AC с P , средата на BD с Q , центровете на описаните окръжности около $\triangle AOC$ и $\triangle BOD$ съответно с O_1 и O_2 . Прекарваме перпендикуляр O_1N към радиуса OA . От подобие на $\triangle AOP$ и $\triangle O_1ON$ получаваме $\frac{OP}{OA} = \frac{ON}{OO_1}$, т.е. $OP \cdot OO_1 = \frac{1}{2}R^2$. Аналогично $OQ \cdot OO_2 = \frac{1}{2}R^2$. Следователно

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OO_2}{OO_1},$$

което означава, че триъгълниците OPQ и OQO_1 са подобни (имат общ ъгъл при върха O). Тъй като по условие ъгъл OQO_1 е прав, то ъгъл OPQ е също прав, което трябваше да се докаже.

Задача 6. (12 точки) Във всяко квадратче на таблица 1000×1000 е записана нула или единица. Докажете, че е възможно или да се задраскат 990 реда така, че във всеки стълб да остане поне една незадраскана единица, или да се задраскат 990 стълба така, че във всеки ред да остане поне една незадраскана нула.

Решение. С индукция по $m+n$ ще докажем следното по-общо твърдение. Във всяка клетка на таблица с по-малко от $2m$ реда и по-малко от $2n$ стълба е записана нула или единица. Тогава или съществуват не повече

от m стълба във всеки ред на които има поне една нула, или има не повече от n реда във всеки стълб на които има поне една единица.

Базата на индукцията (таблица 1×1) е очевидна.

Нека в таблица нулите са не по-малко от единиците. Тогава има ред, в който нулите са по-малко от половината. Отбелязваме този ред и оставяме само стълбовете, в които в този ред има единица (ако такива няма, всичко е доказано). В получената таблица 1 стълбовете са по-малко от $2n - 1$, и от индукционното предположение в 1 могат да се изберат или не повече от m "хубави" стълба (които са добри и за 1) или не повече от $n - 1$ "хубави" реда. Във вторият случай разглеждаме тези редове в изходната таблица T и връщаме отбелязаният ред. Получаваме търсеното множество от редове на T .

Задача 7. (14 точки) Квадратът $ABCD$ е разрязан на еднакви правоъгълници с целочислени страни. Фигурата F е обединение на всички правоъгълници от разрязването, които имат поне една обща точка с диагонала AC . Докажете, че AC разполовява лицето на фигурата F .

Решение. Нека A и B са съответно долния ляв и долния десен връх на квадрата. Да разбием квадрата на единични квадратчета.

Да номерираме диагоналите на квадрата, които са успоредни на диагонала AC започвайки от долния десен ъгъл B . Диагонал номер 1 се състои от клетката при върха B , диагонал номер 2 се състои от двете съседни клетки на клетката при B и т.н.

Ще казваме, че един правоъгълник от разрязването е от вид k ако долният му десен ъгъл е от диагонал с номер k . Когато фиксираме долния десен ъгъл на правоъгълник от вид k , той може да бъде разположен по два начина. Лесно се вижда, че независимо от разположението си, този правоъгълник покрива един и същи брой квадратчета от всеки от следващите диагонали. Има само един диагонал от вид 1. Когато сме разположили всички правоъгълници от видове $1, 2, \dots, t$, броят на правоъгълниците от вид $t + 1$ е равен на броя на празните клетки по диагонал $t + 1$. Това означава, че броят на правоъгълниците от всеки вид е един и същ при всяко разрязване.

Горните разсъждения са в сила и когато номерираме диагоналите, успоредни на AC , започвайки от връх D и разглеждаме горните леви ъгли на всички правоъгълници.

Следователно броят на правоъгълниците с долен десен връх на диагонал k (броено от връх B) е равен на броят на правоъгълниците с горен ляв ъгъл на диагонал k (броено от връх D). Да разгледаме правоъгълниците, които пресичат диагонала AC . Тези, които са симетрични спрямо AC се

разполовяват от AC . Останалите се разделят на двойки, като във всяка двойка единият правоъгълник е с долен десен ъгъл върху диагонал k (броено от връх B), а другият е с горен ляв връху диагонал k (броено от връх D). Остава да забележим, че диагоналът AC разполовява лицето на два такива правоъгълника, с което доказателството е завършено.