

32. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

ОСНОВЕН ВАРИАНТ, ЕСЕНЕН ТУР

10. - 12. клас

(Резултатът се формира от трите най-добре решени задачи.)

точки задачи

1. В една държава има 100 града, които разглеждаме като точки в равнината. В справочник за всяка двойка градове е посочено разстоянието между тях (посочени са 4950 разстояния).
- 2 а) Едно от разстоянията е изтрито. Може ли то винаги да се възстанови еднозначно с помощта на останалите?
б) Нека са изтрети k разстояния и е известно, че никои три града не лежат на една права. Коя е най-голямата стойност на k , при която винаги могат еднозначно да се възстановят изтритите разстояния?
- 6 2. На кръгла писта $2N$ велосипедисти стартират едновременно от една и съща точка, като се движат с различни постоянни скорости в една и съща посока. Ще казваме, че двама велосипедисти се срещат, ако след старта се озоват едновременно в една и съща точка. До обяд всеки двама велосипедисти са се срещнали поне веднъж, при това никои трима не са се срещнали едновременно. Докажете, че до обяд всеки велосипедист е имал поне N^2 срещи.
- 6 3. Даден е многоъгълник. За всяка страна е пресметнато частното на нейната дължина и сбора от дължините на останалите страни. Всички получени частни са събрани. Докажете, че сборът им е по-малък от 2.
- 2 4. Двама магьосници воюват един срещу друг. В началото и двамата летят над морето на височина 100 метра. Магьосниците поред произнасят заклинания от вида *да се намали височината на летеене над морето с a метра за мен и с b метра за теб*, където числата $0 < a < b$ са фиксирани за даденото заклинание. Двамата разполагат с едно и също множество заклинания, които могат да произнасят нееднократно и в какъвто искат ред. Печели този, след чийто ход собствената му височина над морето е положителна, а на противника му не е. Съществува ли множество заклинания, при което вторият магьосник може да спечели независимо от заклинанията на първия, ако броят на заклинанията в множеството е:
2 а) краен;
5 б) безкраен?
- 8 5. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O , като O не лежи на диагонал на четириъгълника. Известно е, че центърът на описаната около триъгълника AOC окръжност лежи на правата BD . Докажете, че центърът на описаната около триъгълника BOD окръжност лежи на правата AC .
- 12 6. Във всяко квадратче на таблица 1000×1000 е записана нула или единица. Докажете, че е възможно или да се задраскат 990 реда така, че във всеки стълб да остане поне една назадраскана единица, или да се задраскат 990 стълба така, че във всеки ред да остане поне една незадраскана нула.
- 14 7. Квадратът $ABCD$ е разрязан на еднакви правоъгълници с целочислени страни. Фигурата F е обединение на всички правоъгълници от разрязването, които имат поне една обща точка с диагонала AC . Докажете, че AC разполовява лицето на фигурата F .