

32. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

ОСНОВЕН ВАРИАНТ, ЕСЕНЕН ТУР

Решения на задачите за 7. - 9. клас

Задача 1. (4 точки) В равнината е дадена права. Като използвате петаче, намерете две точки от права, перпендикулярна на дадената. Разрешено е петачето да се очертава така, че получената окръжност да минава през дадена точка или през две дадени точки (разстоянието между които е по-малко от диаметъра му). Смята се, че не е възможно петачето да се очертае така, че окръжността да допира дадената права.

Решение. Да отбележим на дадената права l три точки A, B и C така, че AB и BC да са по-малки от диаметъра на петачето. Да очертаем петачето така, че окръжността да минава през точките A и B . Така получаваме две окръжности k_1 и k_2 , симетрични спрямо правата l . По същия начин получаваме окръжностите n_1 и n_2 , които минават през B и C . Тогава пресечните точки $D = k_1 \cap n_1$ и $E = k_2 \cap n_2$ са симетрични спрямо l , т.е. определят права, перпендикулярна на l .

Задача 2. (5 точки) На произволна отсечка Петя умее да отбелязва точка, която разполовява отсечката или я разделя в отношение $n : (n + 1)$, където n е произволно естествено число. Петя твърди, че това е достатъчно, за да може всяка отсечка да се раздели в произволно избрано рационално отношение. Вярно ли е това?

Решение. Твърдението на Петя е вярно. Рационалното отношение е отношение на цели числа. За да се раздели отсечка в отношение $k : l$, където k и l са цели числа, е достатъчно отсечката да се раздели на $m = k + l$ равни части. Ще докажем по индукция, че това е възможно за всяко m , като се използват само операциите разполовяване и разделяне в отношение $n : (n + 1)$.

Твърдението е очевидно при $m = 1$. Да допуснем, че можем да разделяме отсечка на произволен брой части, по-малък от m . Ако $m = 2n$, можем да разделим отсечката на две равни части и след това всяка половина да разделим на n части. Ако $m = 2n + 1$, можем да разделим отсечката в отношение $n : (n + 1)$, а след това по-малката част да разделим на n части, а по-голямата — на $n + 1$ части. Така получаваме разделяне на отсечката на m равни части и индукцията е завършена.

Задача 3. (8 точки) На кръгла писта 10 велосипедисти стартират едновременно от една и съща точка, като се движат с различни постоянни скорости в една и съща посока. Ще казваме, че двама велосипедисти се

срещат, ако след старта се озоват едновременно в една и съща точка. До обяд всеки двама велосипедисти са се срещнали поне веднъж, при това никои трима не са се срещнали едновременно. Докажете, че до обяд всеки велосипедист е имал поне 25 срещи.

Решение. Нека S е дължината на пистата, $v_1 < v_2 < \dots < v_{10}$ са скоростите на велосипедистите и $u = \min v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots, v_{10} - v_9$. Велосипедистите с номера $i < j$ се срещат след време $\frac{S}{v_j - v_i}$. Тъй като

от всички такива интервали най-голям е $\frac{S}{u}$, то за да се срещнат всеки

двама, трябва да мине време поне $\frac{S}{u}$. Понеже $v_j - v_i \geq (j - i)u$, то за това време велосипедистите с номера i и j ще се срещнат не по-малко от $j - i$ пъти. Следователно 5-ия велосипедист ще има поне $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ срещи с велосипедистите с по-малки номера, и поне $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ срещи с велосипедисти с по-големи номера. Общо това са поне 25 срещи. За 6-ия велосипедист се получава същата оценка, а за останалите се получава по-добра оценка.

Задача 4. (8 точки) Правоъгълник $m \times n$ е покрит с домина 2×1 (напълно и без припокриване). Във всяко домино е построен един диагонал. Ако никои два от построените диагонали нямат общ край, докажете, че точно два от върховете на дадения правоъгълник са краища на диагонали.

Решение. Да означим правоъгълника с $ABCD$ и да разгледаме доминото $APQR$ ($P \in AB$).

Ако е построен диагоналът PR , то в съседното му домино по страната AB ще е построен диагонал, който не излиза от P (ще казваме, че този диагонал е в същото направление като PR). Същото е вярно и за останалите домина по страната AB , което означава, че от върха B излиза диагонал. Аналогично, от върха D излиза диагонал.

Ако е построен диагоналът AQ , то в съседното му домино по страната AB ще е построен диагонал, който излиза от P (ще казваме, че този диагонал е в същото направление като AQ). Същото е вярно и за останалите домина по страната AB , което означава, че от върха B не излиза диагонал. Аналогично, от върха D не излиза диагонал.

Следователно, ако от връх на дадения правоъгълник излиза (не излиза) диагонал, то от двата му съседни върха не излиза (излиза) диагонал, откъдето следва твърдението на задачата.

Задача 5. (8 точки) Даден е петоъгълник със страни a, b, c, d и e . Докажете, че

$$\frac{a}{b+c+d+e} + \frac{b}{a+c+d+e} + \frac{c}{a+b+d+e} + \frac{d}{a+b+c+e} + \frac{e}{a+b+c+d} < 2.$$

Решение. Всяка страна е по-малка от сбора на останалите страни, следователно сборът на останалите е по-голям от полупериметъра p на петоъгълника. Следователно

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c+d+e} + \frac{b}{a+c+d+e} + \frac{c}{a+b+d+e} + \frac{d}{a+b+c+e} + \frac{e}{a+b+c+d} &< \\ &< \frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} + \frac{d}{p} + \frac{e}{p} = 2. \end{aligned}$$

Задача 6. (8 точки) В остроъгълния триъгълник ABC на височината BH е избрана произволна точка P . Точките A' и C' са среди съответно на BC и AB . Перпендикулярът от A' към CP пресича перпендикуляра от C' към AP в точката K . Докажете, че точката K е равноотдалечена от точките A и C .

Решение. Нека в триъгълниците ABP и CBP построим средните отсечки $C'C''$ и $A'A''$. Тези отсечки са равни и перпендикулярни на AC (тъй като са успоредни и равни на половината от отсечката BP). Да построим през точка K отсечка KK' така, че $\overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{C'C''} = \overrightarrow{A'A''}$. Тогава $KC'C''K'$ и $KA'A''K'$ са успоредници, откъдето следва, че $K'C''$ и $K'A''$ са симетралите страните AP и CP на триъгълника APC . Следователно K' е центърът на описаната около този триъгълник окръжност и лежи на симетралата на страната AC . Но тогава на тази симетрала лежи и точката K (тъй като правата KK' е перпендикулярна на AC).

Задача 7. (12 точки) Около кръгла маса заседават N рицари. Всяка сутрин магьосникът Мерлин ги подрежда. От втория ден нататък, след като ги подреди, Мерлин разрешава на рицарите произволен брой размествания от вида: двама седящи един до друг рицари могат да си разменят местата, ако първия ден не са седяли един до друг. Рицарите се стремят да седнат в същия ред, в който са били в някой от предишните дни; тогава заседанията ще се прекратят. Най-много колко заседания може със сигурност да проведе Мерлин? (Подредбите, които се получават чрез завъртане, се смятат за еднакви. Мерлин не седи на масата.)

Решение. Ще докажем, че Мерлин може да проведе със сигурност N заседания. Да номерираме рицарите според подредбата им първия ден от 1 до N по посока на часовниковата стрелка. Подреждането им около масата ще описваме с пермутация на тези номера, като посоката е по часовниковата стрелка.

Ще наричаме *базисни* подрежданията от вида

$$k, k-1, \dots, 2, 1, k+1, k+2, \dots, N$$

за $k = 1, 2, 3, \dots, N-1$ (N -ото базисно подреждане съвпада с $(N-1)$ -то) и ще докажем, че от всяко раз местване може да се премине в базисно. За целта да направим раз местване, при което групата вляво $k, k-1, \dots, 2, 1$ е максималната възможна. Ще покажем, че останалите рицари седят в нужния ред $k+1, k+2, \dots, N$. Да допуснем, че това не е изпълнено; тогава движим $k+1$ по часовниковата стрелка. Ако по пътя $k+1$ стигне до $k+2$ ще ги движим в двойка; ако тази двойка стигне до $k+3$, ще движим получената тройка и т.н. В резултат на това раз местване, до k ще се нареди група от вида $k+1, k+2, \dots, k+m$. При това $k+m < N$ (иначе няма да има раз местване). Всички числа от тази група, освен $k+1$, могат да преминат през групата вляво. След това $k+1$ може да се присъедини към групата вляво и получаваме противоречие с нейната максималност.

Тогава, като предлага на рицарите всеки ден ново базисно подреждане, Мерлин ще проведе поне N заседания. Това е така, защото от едно базисно подреждане не може да се премине в друго с разрешените раз мествания. Характеристика на произволно подреждане ще наричаме броя на обиколките около масата, които ще направи Мерлин, ако обходи рицарите по реда на номерата им $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow N$. Лесно се вижда, че характеристиката на подреждането се запазва при разрешените раз мествания. От друга страна, характеристиката на k -то базисно подреждане е равна на k , т.е. базисните подреждания имат различни характеристики. Следователно по този начин Мерлин ще получи първото повторение не по-рано от N -я ден.