

32. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ

ОСНОВЕН ВАРИАНТ, ЕСЕНЕН ТУР

7. - 9. клас

(Резултатът се формира от трите най-добре решени задачи.)

точки задачи

- 4 1. В равнината е дадена права. Като използвате петаче, намерете две точки от права, перпендикулярна на дадената. Разрешено е петачето да се очертава така, че получената окръжност да минава през дадена точка или през две дадени точки (разстоянието между които е по-малко от диаметъра му). Смята се, че не е възможно петачето да се очертае така, че окръжността да допира дадената права.
- 5 2. На произволна отсечка Петя умее да отбелязва точка, която разполовява отсечката или я разделя в отношение $n : (n + 1)$, където n е произволно естествено число. Петя твърди, че това е достатъчно, за да може всяка отсечка да се раздели в произволно избрано рационално отношение. Вярно ли е това?
- 8 3. На кръгла писта 10 велосипедисти стартират едновременно от една и съща точка, като се движат с различни постоянни скорости в една и съща посока. Ще казваме, че двама велосипедисти се срещат, ако след старта се озоват едновременно в една и съща точка. До обяд всеки двама велосипедисти са се срещнали поне веднъж, при това никои трима не са се срещнали едновременно. Докажете, че до обяд всеки велосипедист е имал поне 25 срещи.
- 8 4. Правоъгълник $m \times n$ е покрит с домина 2×1 (напълно и без припокриване). Във всяко домино е построен един диагонал. Ако никои два от построените диагонали нямат общ край, докажете, че точно два от върховете на дадения правоъгълник са краища на диагонали.
- 8 5. Даден е петоъгълник със страни a, b, c, d и e . Докажете, че
- $$\frac{a}{b+c+d+e} + \frac{b}{a+c+d+e} + \frac{c}{a+b+d+e} + \frac{d}{a+b+c+e} + \frac{e}{a+b+c+d} < 2.$$
- 8 6. В остроъгълния триъгълник ABC на височината BH е избрана произволна точка P . Точките A' и C' са среди съответно на BC и AB . Перпендикулярът от A' към CP пресича перпендикуляра от C' към AP в точката K . Докажете, че точката K е равноотдалечена от точките A и C .
- 12 7. Около кръгла маса заседават N рицари. Всяка сутрин магьосникът Мерлин ги подрежда. От втория ден нататък, след като ги подреди, Мерлин разрешава на рицарите произволен брой размествания от вида: двама седящи един до друг рицари могат да си разменят местата, ако първия ден не са седели един до друг. Рицарите се стремят да седнат в същия ред, в който са били в някой от предишните дни; тогава заседанията ще се прекратят. Най-много колко заседания може със сигурност да проведе Мерлин? (Подредбите, които се получават чрез завъртане, се смятат за еднакви. Мерлин не седи на масата.)