

32. ТУРНИР НА ГРАДОВЕТЕ
ТРЕНИРОВЪЧЕН ВАРИАНТ, ЕСЕНЕН ТУР

Решения на задачите за 10. - 12. клас

Задача 1. (4 точки) Банкомат обменя монети: дублони за пистולי и обратно. Един пистол се обменя за s дублона, а един дублон за $1/s$ от пистола (не е задължително s да е цяло число). В банкомата могат да се пуснат произволен брой монети от един вид, след което той връща монети от другия вид, като закръгля резултата до най-близкото цяло число (ако има две такива цели числа, се избира по-голямото).

а) Възможно ли е да обменим няколко дублона за пистולי, след това да обменим получените пистולי и да получим повече дублони, отколкото сме имали в началото?

б) Ако отговорът е положителен, възможно ли е още веднъж да увеличим получения брой дублони като повторим горната процедура?

Решение. а) Възможно е. Нека, например, $s = 3$. Като обменим 5 дублона, ще получим 2 пистола, които като обменим, ще получим 6 дублона.

б) Не е възможно.

Нека $s < 1$. Като обменим n дублона, ще получим $\frac{n}{s} + \varepsilon$ пистола, където $|\varepsilon| \leq \frac{1}{2}$. Обменяйки ги отново за дублони, ще получим $\left(\frac{n}{s} + \varepsilon\right)s < n + \frac{1}{2}$ дублона, затова повече от n дублона не можем да получим още при първите две операции.

Нека $s > 1$ и нека след първата операция сме получили n пистола. Както показахме по-горе, с две операции от тези пистולי ще получим не повече от n пистола, следователно и броят на дублоните след четвъртата операция ще бъде не повече, отколкото след втората.

Задача 2. (5 точки) Диагоналите на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са перпендикулярни и се пресичат в точка O . Сборът от радиусите на вписаните в $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ окръжности е равен на сбора от радиусите на вписаните в $\triangle BOC$ и $\triangle DOA$ окръжности. Докажете, че:

а) в четириъгълника $ABCD$ може да се впише окръжност;

б) четириъгълникът $ABCD$ е симетричен относно един от диагоналите си.

Решение. Да означим $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AO = u, BO = x, CO = v, DO = y$.

а) Както е известно, радиусът на вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност е равен на $\frac{1}{2}(a + b - c)$, където a и b са катетите, а c е

хипотенузата на този триъгълник. Тогава от условието получаваме

$$(u + x - a) + (y + v - c) = (x + v - b) + (u + y - d) \iff a + c = b + d.$$

Следователно в четириъгълника $ABCD$ може да се впише окръжност.

б) Имаме

$$\begin{aligned} a + c = b + d &\iff \sqrt{u^2 + x^2} + \sqrt{v^2 + y^2} = \sqrt{v^2 + x^2} + \sqrt{u^2 + y^2} \\ &\iff (u^2 + x^2)(v^2 + y^2) = (v^2 + x^2)(u^2 + y^2) \iff v^2x^2 + u^2y^2 = u^2x^2 + v^2y^2 \\ &\iff (u^2 - v^2)(x^2 - y^2) = 0. \end{aligned}$$

Следователно $u = v$ или $x = y$. Това означава, че четириъгълникът $ABCD$ е симетричен относно един от диагоналите си.

Задача 3. (5 точки) Полицейски участък е разположен на права улица, безкрайна и в двете посоки. Престъпник откраднал стара полицейска кола, максималната скорост на която е 90% от максималната скорост на нова полицейска кола. След известно време кражбата била забелязана и един полицаи се отправил да догони крадеца, разбира се с нова кола. За съжаление полицаите не знаели нито кога, нито в каква посока е отпътувал крадецът. Може ли полицаите да хванат крадеца?

Решение. Може. Нека полицаите тръгва в 12:00 и пътува надясно толкова време, колкото е достатъчно, за да настигне престъпника при условие, че той е извършил кражбата не по-рано от 11:00 (т.е. 9 часа). След това той обръща и пътува наляво толкова време, колкото е достатъчно за насигането на престъпника, ако той е извършил кражбата не по-рано от 10:00 (тъй като скоростта на полицаите е по-голяма, това време е крайно). После той обръща и пътува надясно толкова време, колкото е достатъчно за настигането на престъпника, ако той е извършил кражбата не по-рано от 9:00, и т.н.

Второ решение. Да изпратим в двете посоки по един въображаем помощник на полицаите, движещ се по-бързо от престъпника, но по-бавно от полицаите. Нека полицаите се движат така, че да настига първия, втория, първия, втория и т.н. въображаем помощник (което е възможно, тъй като скоростта им е по-малка от скоростта на полицаите). Ясно е, че в даден момент един от помощниците ще настигне престъпника (и ще продължи), а следователно и полицаите в даден момент ще настигне крадеца.

Задача 4. (5 точки) Квадратна дъска $n \times n$ е разделена с $n - 1$ хоризонтални и $n - 1$ вертикални прави на n^2 правоъгълни полета. Полетата са

шахматно оцветени. Известно е, че по един от диагоналите има n черни квадратни полета. Докажете, че сборът от лицата на черните полета е не по-малък от сбора от лицата на белите полета.

Решение. Като започнем от черно поле в края на дадения диагонал, да номерираме редовете и стълбовете на дъската. Диагоналните полета са тези, при които номерът на реда е равен на номера на стълба. Черните полета са от два вида: едните са в четен ред и четен стълб, а другите в нечетен ред и нечетен стълб. Ако махнем четните редове и четните стълбове, ще получим само черни полета, от които се съгласява квадрат (тъй като по диагонала полетата са квадратни) със страна a . По същия начин, ако махнем всички нечетни редове и нечетни стълбове, ще съгложим черен квадрат със страна b . Така лицето на черните полета е $a^2 + b^2$, а цялото лице е $(a+b)^2$. Но неравенството $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$ е равносилно на очевидното неравенство $(a-b)^2 \geq 0$.

Задача 5. (5 точки) В турнир участвали 55 боксьори, като след всеки мач победеният напускал турнира. Мачовете се провеждали последователно. Известно е, че при всеки мач са се срещали боксьори, разликата между броя на победите на които (към момента) е не повече от 1. Колко най-много мача може да е изиграл победителят в турнира?

Решение. Победителят е изиграл най-много 8 мача.

Да означим с u_k k -тото число на Фибоначи ($u_1 = u_2 = 1, u_k = u_{k-1} + u_{k-2}$ при $k \geq 3$). Ще докажем по индукция, че:

- а) ако победителят е изиграл поне n мача, то участниците поне u_{n+2} ;
- б) съществува турнир с u_{n+2} участника, при който победителят е изиграл n мача.

Базата на индукцията ($n = 1, u_3 = 2$) е очевидна.

а) Нека победителят А е срещнал при последния си мач боксьора В. Останалите мачове се разпадат на два турнира: единият е спечелен от А, а другият от В. В първия турнир А е изиграл поне $n - 1$ мача, следователно броят на участниците е поне u_{n+1} . Във втория турнир победителят В е изиграл най-малко $n - 2$ мача, тъй като разликата между броя на победите на А и В е не повече от 1. Следователно във втория турнир участват най-малко u_n боксьора, а общо участниците са поне $u_{n+1} + u_n = u_{n+2}$.

б) Достатъчно е да се срещнат в заключителен мач победителят от турнир с u_{n+1} участника, който е изиграл $n - 1$ мача, и победителят от турнир с u_n участника, който е изиграл $n - 2$ мача.

Тъй като $55 = u_{10}$, оттук следва отговорът на задачата.